Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 49-55

DOMAINES RÉGULIERS DU PLAN

par Michel ZINSMEISTER

1. INTRODUCTION

Cet article est un complément à l'article "Représentation conforme et courbes presque – lipschitziennes" paru dans une précédente édition de cette revue [8]. Lors d'une rencontre avec le Professeur Gehring celui-ci m'a en effet indiqué un certain nombre de précisions et d'améliorations notables que l'on pouvait apporter à [8], à la lumière de ses propres résultats sur le sujet. Ces améliorations font l'objet de la section 3. Dans la section 2 une définition plus "intrinsèque" des domaines considérés dans [8] est donnée. Enfin il est apparu que les courbes presque lipschitziennes avaient déjà été considérées par Ahlfors [1] qui les avait alors baptisées "courbes régulières". C'est cette dénomination que nous adopterons désormais. Je remercie chaleureusement le professeur Gehring pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Je remercie également le professeur Ancona pour les conversations très utiles que j'ai eues avec lui sur le sujet.

2. LES DOMAINES REGULIERS

Pour $z \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, $D(z,r)$ désigne le disque ouvert de centre z et de rayon r. D désigne le disque $D(0,1)$ et $\mathcal{H}^1$ la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle.

Mots-clefs : Représentation conforme, Courbes régulières, Courbes de Lavrentiev, L'espace BMO A, L'espace universel de Teichmüller.

DEFINITION. – *Un domaine simplement connexe* $\Omega \subset \mathbf{C}, \Omega \neq \mathbf{C}$ *est dit régulier s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall r > 0, \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D(z,r)) \leqslant Cr. \tag{1}$$

Un domaine presque lipschitzien au sens de [8] vérifie naturellement (1). L'objet de la proposition qui suit est d'établir la réciproque.

PROPOSITION 1. – *Soit* Ω *un domaine régulier du plan contenant* 0.

a) *Si* Ω *est borné et si* Φ *désigne la représentation conforme de* D *sur* Ω *vérifiant* $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) > 0$, *alors* Φ *se prolonge en une application continue de* $\overline{D}$ *sur* $\overline{\Omega}$ *et* $\Phi \mid \partial D$ *est une paramétrisation absolument continue de* $\partial\Omega$ *vérifiant*

$$\forall z_0 \in \mathbf{C}, \forall r > 0, \int_{E(z_0,r)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant 2\, \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap D(z_0,r)) \tag{2}$$

où

$$E(z_0,r) = \{z \in \partial D ; |\Phi(z) - z_0| < r\}$$

b) *Si* Ω *est non borné alors* $\partial\Omega$ *a un nombre fini* $p \geqslant 1$ *de composantes connexes. Si* Φ *est une représentation conforme de* $\mathbf{R}^2_+ = \{x + iy \in \mathbf{C}, y > 0\}$ *sur* Ω *telle que* $\Phi(\infty) = \infty$, *alors* Φ *se prolonge en une application continue de* $\overline{\mathbf{R}}^2_+ \cup \{\infty\}$ *sur* $\overline{\Omega} \cup \{\infty\}, \Phi^{-1}(\infty) = \{x_1, \dots, x_{p-1}\} \cup \{\infty\}$ *et si l'on appelle* $(I_k), 1 \leqslant k \leqslant p$ *les composantes connexes de* $\mathbf{R}\setminus\{x_1, \dots, x_{p-1}\}$ *les restrictions de* Φ *aux* I_k *sont des paramétrisations absolument continues des* p *composantes de* $\partial\Omega$ *et l'on a encore* (2) *(en remplaçant* ∂D *par* $\mathbf{R}$*).*

Démonstration (abrégé). – a) Puisque Ω est borné on a en particulier $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < \infty$. Le fait que Φ se prolonge continûment de $\overline{D}$ sur $\overline{\Omega}$ et que $\Phi \mid \partial D$ est absolument continue est alors prouvé dans [7]. Pour prouver (2) on utilise d'abord un théorème de Denjoy [4] qui affirme que pour $z \in \partial\Omega$,

$$N(z) = {}^{\#}\{y \in \partial D ; \Phi(y) = z\}$$

est inférieur ou égal à 2 sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable de $\partial\Omega$, puis le fait que

$$\int_{E(z_0,r)} |\Phi'(z)|\,|dz| = \int_{\Phi(E(z_0,r))} N(z)\, d\mu(z)$$

où μ est la mesure définie par $\mu(A) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega \cap A)$ ([5]).

b) Soit $I(z)$ l'inversion $z \longmapsto 1/z$ et $\Omega' = I(\Omega)$. Alors $\partial\Omega' = I(\partial\Omega)$ et on vérifie facilement que $\partial\Omega'$ vérifie encore (1). On peut supposer $\Phi^{-1}(0) = i$. Alors $z \longmapsto \psi(z) = 1/\Phi\left(i\dfrac{1+z}{z-1}\right)$ est une représentation conforme de $\mathbf{C}\backslash\overline{D}$ sur Ω' telle que $\psi(\infty) = \infty$. Les résultats de [7] impliquent que ψ se prolonge de $\mathbf{C}\backslash D$ sur $\overline{\Omega}'$ et que $\psi \mid \partial D$ est une paramétrisation absolument continue de $\partial\Omega'$. La condition (1) étant vérifiée par $\partial\Omega'$, on voit facilement que $\psi^{-1}(0)$ doit être fini. Soit p son cardinal. Toutes les propriétés de b) découlent alors du fait que $\Phi(z) = 1/\psi\left(\dfrac{iz+1}{iz-1}\right)$.

La propriété (2) signifie qu'un domaine régulier est presque-lipschitzien au sens de [8]. On peut donc énoncer :

COROLLAIRE 1. – *Si* Ω *est un domaine régulier :*

a) *Si* Ω *est borné,* $\Phi : D \longrightarrow \Omega$ *vérifie :* Φ' *est extérieure et* $|\Phi'|^t$ *appartient à la classe de Muckenhoupt* $A^\infty(\partial D)$ *si* $0 \leqslant t < 1/3$. *En particulier* $\mathrm{Log}(\Phi') \in \mathrm{BMOA}(D)$.

b) *Si* Ω *est non borné,* $\Phi : \mathbf{R}^2_+ \longrightarrow \Omega$ *vérifie :* Φ' *est extérieur et* $|\Phi'|^t \in A^\infty(\mathrm{R})$ *si* $0 \leqslant t < 1/3$. *En particulier* $\mathrm{Log}(\Phi') \in \mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$.

Les détails sont laissés au lecteur.

3. APPROXIMATION DES DOMAINES REGULIERS

Un domaine Ω est appelé domaine de Lavrentiev si c'est un domaine de Jordan qui vérifie :

$$\exists C > 0, \forall z_1, z_2 \in \partial\Omega, \inf(\mathcal{H}^1(\gamma_1), \mathcal{H}^1(\gamma_2)) \leqslant C\,|z_1 - z_2|,$$

où γ_1 et γ_2 sont les deux sous-arcs de $\partial\Omega$ (dans la sphère de Riemann) joignant z_1 et z_2 ; Les domaines de Lavrentiev sont des domaines réguliers ; le but de cette partie est d'étudier, après lui avoir donné un sens, l'approximation des domaines réguliers par des domaines de Lavrentiev. Désignons par X l'ensemble des couples (Φ, Ω) où Ω est un domaine régulier et Φ une représentation conforme de $\mathbf{R}_+^2$ sur Ω. Soit $X_0 \subset X$ le sous-ensemble défini par la condition que Ω est un domaine de Lavrentiev.

Deux topologies peuvent être introduites sur X. La première, $\mathcal{T}$, a été étudiée dans [8]. Rappelons sa définition : Si $(\Phi, \Omega) \in X$, le Schwarzien de Φ est la fonction

$$S_\Phi(z) = \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'(z) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2(z).$$

Le corollaire 1 et les résultats de [8] entraînent que S_Φ appartient à l'espace de Banach E des fonctions g holomorphes dans $\mathbf{R}_+^2$ telles que

$$\|g\|_E = \sup_{I \subset R}\left\{\frac{1}{|I|}\iint_{I \times [0,|I|]} y^3 |g(x+iy)|^2 \, dxdy\right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

La topologie $\mathcal{T}$ est alors définie par l'écart suivant :

Si $x_1 = (\Phi_1, \Omega_1) \in X, x_2 = (\Phi_2, \Omega_2) \in X, d(x_1, x_2)$

$$= \|S_{\Phi_1} - S_{\Phi_2}\|_E .$$

Observons que $d(x_1, x_2) = 0$ signifie que $\Phi_2 = k \circ \Phi_1$ où k est une homographie. La topologie séparée correspondante est la topologie de E induite sur $\mathcal{D} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X\}$. Posons $\mathcal{L} = \{S_\Phi ; (\Phi, \Omega) \in X_0\}$.

La seconde topologie, $\widetilde{\mathcal{T}}$, est définie par l'écart

$$\widetilde{d}(x_1, x_2) = \|\operatorname{Log} \Phi_1' - \operatorname{Log} \Phi_2'\|_{BMO} .$$

Observons que $\widetilde{d}(x_1, x_2) = 0$ signifie $\Phi_2 = h \circ \Phi_1$ où h est une similitude affine. La topologie séparée correspondante est la topologie de $BMOA(\mathbf{R}_+^2)$ induite sur $\widetilde{\mathcal{D}} = \{\operatorname{Log} \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X\}$. Là encore, posons $\widetilde{\mathcal{L}} = \{\operatorname{Log} \Phi' ; (\Phi, \Omega) \in X_0\}$.

Rappelons [8] qu'il existe une constante (universelle) C telle que $\forall\, x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) \leqslant C\widetilde{d}(x_1, x_2)$.

En sens inverse, si $x_0 \in X_0$, il existe $\epsilon > 0$ et $C(\epsilon, x_0)$ tels que

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ \widetilde{d}(x_1, x_2) \leqslant Cd(x_1, x_2) \text{ si } \widetilde{d}(x_j, x_0) \leqslant \epsilon, j = 1, 2.$$

3.1. Etude de la topologie $\mathcal{T}$.

Il a été démontré dans [8] que $\mathcal{L}$ est l'intérieur de $\mathcal{Q}$ dans E. Un résultat de Gehring permet de préciser ce fait.

THEOREME 1. — *Il existe* $(\Phi, \Omega) \in X$ *tel que* S_Φ *ne soit pas adhérent à* $\mathcal{L}$.

C'est un corollaire immédiat du théorème 2 de [6]. Soit $U = \mathbf{C}\backslash\gamma$ ou $\gamma = \{z = \pm \exp(-a + i)t, \quad t \in [0, +\infty]\}$ avec $0 < a < 1/8\pi$. On définit alors Ω comme étant le transformé de U par l'inversion de centre 1. La courbe γ est un "segment" de la spirale logarithmique $\Gamma = \{z = \pm \exp(-a + i)t, \quad t \in [-\infty, +\infty]\}$. Comme une telle spirale est une courbe de Lavrentiev, on en déduit aisément que Ω est un domaine régulier. Soit Φ une représentation conforme de $\mathbf{R}^2_+$ sur Ω. Comme la topologie de E est plus fine que celle de l'espace de Teichmüller, le théorème 2 de [6] montre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si g est conforme dans $\mathbf{R}^2_+$ et $\| S_g - S_\Phi \|_E < \epsilon$, alors $g(\mathbf{R}^2_+)$ ne peut être un domaine de Jordan. A fortiori S_Φ n'est pas adhérent à $\mathcal{L}$.

Remarque. — Si l'on a choisi Φ de sorte que $\Phi(\infty) = \infty$, les résultats de [8] prouvent que $|\Phi'| \in A^\infty(\mathbf{R})$.

3.2. Etude de la topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Un résultat récent d'Astala et Gehring [2] permet d'établir l'analogue de 3.1 pour la topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$.

THEOREME 2. — $\widetilde{\mathcal{L}}$ *est l'intérieur de* $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *dans* $\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$. *De plus il existe* $\mathrm{Log}\,\Phi' \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ *qui n'est pas adhérent à* $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Puisqu'il existe une constante universelle C telle que

$$\| S_f - S_g \|_E \leq C \, \| \mathrm{Log} f' - \mathrm{Log}\, g' \|_{\mathrm{BMO}} ,$$

le fait que $\widetilde{\mathcal{L}}$ soit ouvert dans $\mathrm{BMOA}(\mathbf{R}^2_+)$ se déduit du fait que $\mathcal{L}$ est ouvert dans E. De plus, si (Φ, Ω) est le couple du théorème 1, il apparaît que $\mathrm{Log}\,\Phi'$ n'est pas adhérent à $\widetilde{\mathcal{L}}$. La seule chose restant à démontrer est que si $\mathrm{Log}\,\Phi'$ est un point intérieur à $\widetilde{\mathcal{Q}}$, alors $\Omega = \Phi(\mathbf{R}^2_+)$ est un domaine quasi-conforme, c'est-à-dire vérifiant les propriétés (3) et (4) suivantes :

$$\exists k > 1\,,\ \forall\, z_0 \in \mathbf{C}\,,\ \forall r > 0\,,\ \forall\, z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \cap \Omega\,,$$

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ peuvent être joints dans } \mathrm{D}(z_0, kr) \cap \Omega\,. \tag{3}$$

$$\exists k > 1\,,\ \forall\, z_0 \in \mathbf{C}\,,\ \forall r > 0\,,\ \forall\, z_1, z_2 \in \Omega \backslash \mathrm{D}(z_0, kr)\,,$$

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ peuvent être joints dans } \Omega \setminus \mathrm{D}(z_0, r)\,. \tag{4}$$

La propriété (3) se démontre grâce à un argument analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4 de [8]. Pour démontrer (4), on utilise le théorème suivant :

THEOREME 3 [2]. – *Si* Ω *est un domaine simplement connexe ne vérifiant pas* (4), *alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *on peut trouver* $z_0 \in \Omega$, $w \in \mathrm{D}(0, \epsilon)$, *et* g *une représentation conforme de* Ω *sur* D *telle que* $g(z_0) = 0$ *et telle que*

$$f_\epsilon(z) = (z - z_0) \exp \left\{ w \int_{z_0}^{z} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du \right\}$$

ne soit pas univalente dans Ω.

Ce théorème admis, posons $\psi_\epsilon = f_\epsilon \circ \Phi$. Alors

$$\mathrm{Log}\ \psi'_\epsilon - \mathrm{Log}\ \Phi' = \mathrm{Log}\, f'_\epsilon \circ \Phi$$

et

$$f'_\epsilon(z) = (1 + wg(z)) \exp \left\{ w \int_{z_0}^{z} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du \right\}.$$

L'application $k(z) = g \circ \Phi(z)$ est de la forme $k(z) = e^{ia} \dfrac{z - u_0}{z - \overline{u}_0}$

où $u_0 = \Phi^{-1}(z_0)$ et l'on a

$$\mathrm{Log}\, f'_\epsilon \circ \Phi = \mathrm{Log}(1 + wk(z)) + w \int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du\,.$$

Puisque $|k(z)| \leqslant 1$, on voit immédiatement qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que $\| \mathrm{Log}(1 + wk(z)) \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \mathrm{C}\epsilon$.

D'autre part, en posant $\mathrm{F}(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{\Phi(z)} \frac{g(u)}{u - z_0}\, du$, il vient

$$\mathrm{F}'(z) = k(z) \frac{d}{dz} \left(\mathrm{Log}\, \frac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \right) + k'(z)\,.$$

Les résultats de [3] prouvent qu'il existe une constante absolue $\mathrm{C} > 0$ telle que $\left\| \mathrm{Log}\, \dfrac{\Phi(z) - z_0}{k(z)} \right\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \mathrm{C}$.

En utilisant la caractérisation de BMO par les mesures de Carleson, on en déduit que $\| \operatorname{Log} f_\epsilon' \circ \Phi \|_{BMO} \leqslant C\epsilon$.

Nous pouvons alors conclure. Si Ω ne vérifie par (4), nous venons de voir que l'on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction $\psi_\epsilon : \mathbf{R}_+^2 \longrightarrow \mathbf{C}$, non univalente, telle que

$$\| \operatorname{Log} \Phi' - \operatorname{Log} \psi_\epsilon' \|_{BMO} \leqslant C\epsilon .$$

Mais ceci est en contradiction avec le fait que $\operatorname{Log} \Phi'$ est intérieur à $\widetilde{\mathcal{D}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS, Zur Theorie des "Uberlagerungs-flächen, *Acta. Math.*, 65 (1935), 157-194.

[2] K. ASTALA, F. GEHRING, Injectivity criteria and the quasidisk, Preprint (University of Michigan).

[3] A. BAERNSTEIN, Univalence and bounded mean oscillation, *Mich. Math. Journal*, 23 (1976), 217-223.

[4] A. DENJOY, Les continus cycliques et la représentation conforme, *Bull. Soc. Math de France*, 70 (1942), 97-125.

[5] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1969.

[6] F. GEHRING, Spirals and the universal Teichmüller space, *Acta Math.*, 141 (1978), 99-113.

[7] C. POMMERENKE, *Univalent functions*, Vanden-hoeck et Ruprecht, Göttingen, 1975.

[8] M. ZINSMEISTER, Représentation conforme et courbes presque lipschitziennes, *Ann Inst. Fourier*, 34, 2 (1984), 29-44.

Manuscrit reçu le 19 mars 1984.

Michel ZINSMEISTER,
Département de Mathématiques
Université de Rouen
U.E.R. Sciences
76130 Mt St Aignan.