ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROGER CARLES

Sur la structure des algèbres de Lie rigides

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 3 (1984), p. 65-82

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_65_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 65-82

SUR LA STRUCTURE DES ALGÈBRES DE LIE RIGIDES

par Roger CARLES

0. Notations et introduction.

Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ utilisées sont de dimension finie sur un corps $\mathbf{K}$ algébriquement clos et de caractéristique 0. On désigne respectivement par $\Delta(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $Z(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ (ou $\mathfrak{n}$) l'algèbre des dérivations, le groupe des automorphismes, le centre et le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. On appelle *parfaite* une algèbre de Lie égale à son idéal dérivé. La variété des lois d'algèbres de Lie sur $\mathbf{K}^m$ est notée $L_m(\mathbf{K})$ ou plus simplement L_m, de même R_m et N_m sont les sous-variétés des lois d'algèbres de Lie résolubles et nilpotentes respectivement. Les autres notations sont classiques ou définies dans le texte. Une algèbre de Lie est *rigide* dans L_m, R_m ou N_m si son orbite sous l'action classique $s * \Phi = s \circ \Phi(s^{-1}, s^{-1})$ de $GL_m(\mathbf{K})$ est ouverte. Nous nous proposons d'étudier la structure de ces algèbres.

Après avoir regardé comment se construisent les algèbres de Lie décomposables et algébriques, on considère dans L_m ou R_m l'ensemble $E(\mathfrak{a})$ des lois qui admettent un idéal de codimension 1 isomorphe à une algèbre de Lie donnée $\mathfrak{a}$. On étudie ensuite la rigidité d'une algèbre de Lie (non parfaite) dans $E(\mathfrak{a})$ pour un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1, ceci conduit à la proposition 2.19. Ce résultat est ensuite utilisé pour l'étude de la rigidité dans L_m ou R_m (on a une étude analogue dans N_m). La condition $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ apparaît assez naturellement ici ce qui amène à regarder ces algèbres, cf proposition 3.1 ; elles sont algébriques et de plus le centre est nul lorsque codim $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > 1$. Ces résultats conduisent aux conditions nécessaires de rigidité de la proposition 4.1. On rappelle enfin les critères cohomologiques de rigidité connus en comparaison avec ce qui précède.

Ce travail était partiellement annoncé dans [1].

Remerciements. – Je tiens à remercier ici G. Rauch pour de nombreuses précisions apportées au manuscrit ainsi que B. Grimonprez pour les discussions que nous avons eues en 1978 sur la condition $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$.

1. Algèbres de Lie décomposables et algébriques.

Une algèbre de Lie linéaire est scindable si elle contient les parties semi-simple et nilpotente de ses éléments. Elle admet alors une décomposition scindable $S \oplus A \oplus N$ avec S une sous-algèbre de Levi, N le plus grand idéal de nilpotence (pour la représentation naturelle) et A une sous-algèbre abélienne d'endomorphismes semi-simples qui commutent avec S. La scindabilité concerne la structure linéaire ; la notion correspondante pour la structure d'algèbre de Lie est celle de décomposabilité introduite et développée par A.I. Malcev dans [11].

DEFINITION 1.1 *(décomposabilité).* – *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est dite décomposable si elle s'écrit* $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ *avec* $\mathfrak{s}$ *une sous-algèbre de Levi,* $\mathfrak{n}$ *le plus grand idéal nilpotent et* $\mathfrak{u}$ *une sous-algèbre constituée d'éléments* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$*-semi-simples telle que* $[\mathfrak{s} + \mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = 0$.

La décomposition $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ est dite normale et 2 décompositions normales sont conjuguées par automorphisme.

Remarque 1.2. – Dans le cas général on a toujours l'écriture $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{k} + \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre nilpotente du radical qui commute avec $\mathfrak{s}$. Les couples $(\mathfrak{s}, \mathfrak{k})$ maximaux pour l'inclusion sont conjugués par automorphisme.

Les notions de scindabilité et décomposabilité sont liées entre elles par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{g}$ *est décomposable,*

(ii) ad $\mathfrak{g}$ *est scindable,*

(iii) $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à une algèbre de Lie linéaire scindable sur un espace vectoriel de dimension finie.*

Preuve. – l'équivalence de (i) et (ii) est classique [11]. Il est facile d'obtenir une décomposition normale à partir d'une décomposition scindable puisque l'adjoint d'un endomorphisme semi-simple est semi-simple, donc (iii) entraîne (i). Réciproquement, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ une décomposition normale, d'après le théorème d'Ado il existe une représentation fidèle ρ d'espace V de $\mathfrak{g}$ ($\dim V < \infty$) telle que $\rho(\mathfrak{n})$ soit constitué d'endomorphismes nilpotents. L'isomorphisme ρ conserve les décompositions normales et l'on vérifie que l'application $\rho' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ définie par ρ sur $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$ et par la partie semi-simple de ρ sur $\mathfrak{u}$ est une représentation fidèle d'image scindable (utiliser le fait que ad $\mathfrak{u}$ et ad $\rho(\mathfrak{u})$ sont constitués d'endomorphismes semi-simples).

CQFD

Adoptons la définition suivante élargie aux algèbres abstraites :

DEFINITION 1.4 *(algébricité). – Une algèbre de Lie est dite algébrique si elle est isomorphe à une algèbre de Lie linéaire algébrique (c.à.d. l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire algébrique).*

Une algèbre de Lie linéaire algébrique est scindable, cf [4], et l'on peut supposer de plus dans sa décomposition scindable que A est linéaire algébrique (décomposition de Chevalley).

Une algèbre de Lie algébrique est donc décomposable et nous pouvons énoncer la proposition 1.5 (à comparer avec 1.3) dont la preuve figure dans [4].

PROPOSITION 1.5. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{g}$ *est algébrique* (Déf. 1.4),

(ii) ad $\mathfrak{g}$ *est linéaire algébrique,*

(iii) $\mathfrak{g}$ *est décomposable et admet une décomposition normale* $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ *telle que le tore linéaire* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{u}$ *soit algébrique.*

Rappelons, cf [3], que l'on appelle *tore (extérieur) sur* $\mathfrak{g}$

toute sous-algèbre abélienne de dérivations semi-simples de $\mathfrak{g}$ (d'intersection nulle avec $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$) ; il est dit maximal et noté T (respectivement T_e) s'il l'est pour l'inclusion et la dimension commune de ces tores est notée $t(\mathfrak{g})$ (respectivement $t_e(\mathfrak{g})$).

Sont algébriques les algèbres de Lie nilpotentes, semi-simples et plus généralement toutes celles dont le radical est nilpotent, en particulier est algébrique toute algèbre de Lie parfaite cf [4]. Si l'on se donne une telle algèbre $\mathfrak{a}$ il est facile de paramétrer les algèbres de Lie décomposables $\mathfrak{g}$ dont la partie $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ soit exactement $\mathfrak{a}$.

Prenons le tore extérieur maximal T_e sur $\mathfrak{a}$ défini par 0 sur $\mathfrak{s}$ et dont la restriction à $\mathfrak{n}$ soit un tore maximal du centralisateur de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}}\mathfrak{s}$ dans $\Delta(\mathfrak{n})$. Pour $0 \leqslant r \leqslant t_e(\mathfrak{a})$ on obtient ces algèbres (à isomorphisme près) par les produits semi-directs $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{u}$ varie dans la Grassmannienne $Gr_r(T_e)$. Les algèbres isomorphes obtenues correspondent aux orbites sous l'action d'un groupe fini, cf [11]. D'après la proposition 1.5 celles qui sont algébriques correspondent aux sous-tores algébriques de T_e. Est également algébrique toute algèbre de Lie complète (c.à.d. telle que les groupes de cohomologie adjointe de degré 0 et 1 soient nuls), cf [4].

2. Relations fondamentales et condition nécessaire de rigidité.

On appelle *extension élémentaire d'algèbres de Lie,* de noyau $\mathfrak{a}$, toute suite exacte d'algèbres de Lie

$$(\epsilon)\; 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{i} \mathfrak{g} \xrightarrow{p} \mathsf{K} \longrightarrow 0$$

et par abus de langage l'algèbre $\mathfrak{g}$ elle-même.

Identifions $\mathfrak{a}$ à son image et à K^{m-1} comme espace vectoriel, de même $\mathfrak{g}$ à K^m. Soit ν une section linéaire de p définie par $\nu(1) = v$. La dérivation $\delta = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} v \,|\, \mathfrak{a}$ définit l'extension (ϵ) et l'algèbre $\mathfrak{g}$ est notée $\mathfrak{a}^{(\delta)}$, c'est le produit semi-direct $\mathsf{K}\delta \oplus \mathfrak{a}$ défini par $[v, x] = \delta(x)$ pour $x \in \mathfrak{a}$.

Un morphisme de (ϵ) vers (ϵ') est l'ensemble de 3 flèches verticales (homomorphismes d'algèbres de Lie) qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{lccccccccc} (\epsilon) & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathbf{K} & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (\epsilon') & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}' & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathbf{K} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a un isomorphisme lorsque les 3 flèches sont inversibles, ce qui donne, lorsque $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s_1"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "s"] & \mathbf{K} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{g}' \arrow[r, "p"] & \mathbf{K} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et s un élément du sous-groupe $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ de $GL_m(\mathbf{K})$ qui stabilise la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ (espace vectoriel et crochet). Si $s \in \mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ est défini par $s|\mathfrak{a} = s_1$ et $s(v) = \lambda v + a \ (a \in \mathfrak{a})$, l'égalité $[v, y]' = s[s^{-1} v, s^{-1} y]$ donne

$$\delta' = \frac{1}{\lambda}(s_1 . \delta . s_1^{-1} - \mathrm{ad}\, a) \qquad 2.1$$

pour $\delta' = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} v|\mathfrak{a}$.

L'ensemble des δ' qui donnent des extensions isomorphes à $\mathfrak{a}^{(\delta)}$ est l'orbite $\omega(\delta)$ de δ dans l'algèbre $\Delta = \Delta(\mathfrak{a})$ des dérivations de $\mathfrak{a}$ sous l'action du groupe $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ définie par 2.1 ; notons $*$ cette action. L'espace tangent à $\omega(\delta)$ au point δ est égal à

$$\mathbf{K}\delta + [\Delta(\mathfrak{a}), \delta] + \mathrm{ad}\, \mathfrak{a} . \qquad 2.2$$

Notons $O(\delta)$ ou encore $O(\mathfrak{g})$ (pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{(\delta)}$) l'ensemble des $\delta' \in \Delta$ tels que l'algèbre $\mathfrak{a}^{(\delta')}$ soit isomorphe à $\mathfrak{g}$. L'application μ qui à δ associe la loi $\mathfrak{a}^{(\delta)}$ est une injection affine de Δ dans L_m ; si $\Omega(\mathfrak{g})$ est l'orbite de $\mathfrak{g}$ par $GL(\mathfrak{g})$ pour l'action classique $*$ dans(1) L_m on a $O(\mathfrak{g}) = \mu^{-1}(\Omega(\mathfrak{g}) \cap \mu(\Delta))$.

La partition $O(\ )$ est donc localement fermée, moins fine que $\omega(\ )$ et distincte en général ; elle ne dérive a priori de l'action d'aucun groupe.

Si $J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$ désigne le sous-espace (localement fermé) de la Grassmannienne $Gr_{m-1}(\mathfrak{g})$ constitué des idéaux de $\mathfrak{g}$ isomorphes à $\mathfrak{a}$ (comme algèbre de Lie), on aura

(1) Aucune confusion n'est à craindre avec l'action $*$ définie par 2.1 qui opère sur Δ ni avec $*$ définie par 2.4 qui opère sur $GL(\mathfrak{g}) \times \Delta$.

LEMME 2.3. –
$\dim O(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + \dim \Delta(\mathfrak{a}) - \dim \Delta(\mathfrak{g}) + \dim J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$.

Preuve. – Les groupes $GL(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ opèrent librement et algébriquement sur la variété $GL(\mathfrak{g}) \times \Delta$ sous les actions suivantes notées $*$ et $\overset{g}{.}$:

$$h * (s, \delta) = (s.h^{-1}, h * \delta), \text{ pour } h \in \mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \text{ (cf 2.1)}, \qquad 2.4$$

$$\sigma \overset{g}{.} (s, \delta) = (\sigma.s, \delta), \text{ pour } \sigma \in GL(\mathfrak{g}). \qquad 2.5$$

Ces actions commutent entre elles d'où une action du groupe produit $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \times GL(\mathfrak{g})$ et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & GL(\mathfrak{g}) \times \Delta \arrow[dl, "pr_2"'] \arrow[dr] & \\ \Delta \arrow[dr] & & (GL(\mathfrak{g}) \times \Delta)/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \arrow[dl] \\ & \Delta/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) & \end{tikzcd} \qquad 2.6$$

après identification de $(GL(\mathfrak{g}) \times \Delta)/GL(\mathfrak{g})$ à Δ et de

$$(GL(\mathfrak{g}) \times \Delta)/(GL(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Stab}(\mathfrak{a})) \text{ à } \Delta/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}).$$

L'application f qui à (s, δ) associe $(s, s * \mu(\delta))$ est un isomorphisme algébrique de $GL(\mathfrak{g}) \times \Delta$ sur son image Y dans $GL(\mathfrak{g}) \times L_m$ qui permet d'obtenir (par transport de structure) les actions suivantes des groupes $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ et $GL(\mathfrak{g})$ sur Y

$$h \overset{d}{.} (s, \Phi) = (s.h^{-1}, \Phi), \text{ pour } h \in \mathrm{Stab}(\mathfrak{a}), \qquad 2.7$$

$$\sigma \overset{g}{*} (s, \Phi) = (\sigma.s, \sigma * \Phi), \text{ pour } \sigma \in GL(\mathfrak{g}). \qquad 2.8$$

Ces actions commutent entre elles d'où une action produit et le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr, "q \times 1_L"] & \\ Y/GL(\mathfrak{g}) \arrow[dr] & & J_{[\Delta]}(E(\mathfrak{a})) \arrow[dl] \\ & Y/(GL(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Stab}(\mathfrak{a})) & \end{tikzcd} \qquad 2.9$$

où q est le morphisme algébrique de $GL(\mathfrak{g})$ sur $Gr_{m-1}(\mathfrak{g})$ qui à s associe $s(\mathfrak{a})$. Les fibres de $q \times 1_L$ (1_L désigne l'identité sur L_m) sont les orbites de $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ pour 2.7 et $Y/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ s'identifie à l'image de $q \times 1_L$. Celle-ci est l'ensemble de tous les couples $(\mathfrak{a}', \mathfrak{g}')$ donnant lieu à une extension isomorphe à une extension élémentaire de noyau $\mathfrak{a}$; notons $J_{[\Delta]}(E(\mathfrak{a}))$ cet espace où $E(\mathfrak{a})$ est l'orbite de $\mu(\Delta)$ pour l'action $*$ de $GL(\mathfrak{g})$ et où $[\Delta]$ désigne l'ensemble $\Delta/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a})$ des classes d'extensions.

Considérons à présent une loi d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'image inverse F de $\{\mathfrak{g}\}$ par $pr_2 \circ f$ et $U = f(F)$. Les diagrammes commutatifs suivants s'obtiennent par restriction des diagrammes 2.6 et 2.9 :

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "pr_2"'] \arrow[dr] & \\ O(\mathfrak{g}) \arrow[dr] & & F/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \arrow[dl] \\ & O(\mathfrak{g})/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) & \end{tikzcd} \qquad 2.10$$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U/\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \arrow[dr] & & J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g}) \arrow[dl] \\ & U/(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Stab}(\mathfrak{a})) & \end{tikzcd} \qquad 2.11$$

L'isomorphisme f donne par restriction l'isomorphie des diagrammes 2.10 et 2.11 donc des espaces suivants (pour les structures de la géométrie algébrique qui sont conservées par quotient)

(i) $F \simeq U$; 2.12

(ii) $O(\mathfrak{g}) \simeq U/\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$;

(iii) $F/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \simeq J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$;

(iv) $F/(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Stab}(\mathfrak{a})) \simeq U/(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Stab}(\mathfrak{a}))$.

On en déduit les égalités dimensionnelles et le lemme 2.3. CQFD

De façon analogue, si $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\mathfrak{a}$ désigne l'orbite de $\mathfrak{a} \in Gr_{m-1}(\mathfrak{g})$ par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{(\delta)}$, l'orbite de δ vérifie.

LEMME 2.13.

$$\dim \omega(\delta) = \dim \mathfrak{g} + \dim \Delta(\mathfrak{a}) - \dim \Delta(\mathfrak{g}) + \dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\mathfrak{a}$$

Preuve. – Si l'on restreint encore les diagrammes 2.6 et 2.9 à $F' = F \cap (GL(\mathfrak{g}) \times \omega(\delta))$ et $U' = f(F')$, on obtient respectivement

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[dl, "pr_2"'] \arrow[dr] & \\ \omega(\delta) \arrow[dr] & & F'/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \arrow[dl] \\ & [\delta] \text{ (singulet)} & \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

et

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ U'/\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\mathfrak{a} \arrow[dl] \\ & [(\mathfrak{a},\mathfrak{g})] & \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

(singulet donnant la classe de l'extension définie par $(\mathfrak{a},\mathfrak{g})$)

ainsi que les isomorphismes suivants :

2.16 (i) $F' \simeq U'$;

(ii) $\omega(\delta) \simeq U'/\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$;

(iii) $F'/\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\mathfrak{a}$.

On en déduit les égalités dimensionnelles et le lemme 2.13. CQFD.

Note 2.17. La méthode employée ci-dessus s'applique à d'autres classes d'extensions d'algèbres de Lie, nous l'avons développée dans un cadre tout à fait général.

Si l'extension (ϵ) est donnée par des algèbres de Lie nilpotentes, alors $O(\mathfrak{g})$ est contenu dans le fermé des dérivations nilpotentes de $\mathfrak{a}$ et l'on utilise le lemme suivant :

LEMME 2.18. – *Les éléments nilpotents d'une algèbre de Lie linéaire scindable* $\mathfrak{g}$ *constituent un fermé irréductible de dimension* $\dim \mathfrak{g} - r$ *où* r *est la dimension commune des tores maximaux dans* $\mathfrak{g}$.

Preuve. – Soit $S \oplus A \oplus N$ une décomposition scindable de $\mathfrak{g}$. Toute sous-algèbre maximale constituée d'éléments nilpotents contient N et s'écrit $\mathfrak{n}^+ \oplus N$ où $\mathfrak{n}^+$ est le plus grand idéal nilpotent d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de S. En tenant compte de la conjugaison des sous-algèbres de Borel par le groupe des automorphismes élémentaires de S (engendré par les $e^{\mathrm{ad}x}$ pour x nilpotent dans S) le sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathrm{Aut}_0(S) . \mathfrak{n}^+ + N$; il est irréductible. L'algèbre $\mathfrak{n}^+$ résulte du déploiement de S pour une sous-algèbre de Cartan et une base B du système de racines associé. Il existe un ouvert de Zariski U_1 non vide de $\mathfrak{n}^+$ tel que le tangent à l'orbite $\mathrm{Aut}_0(S) . \mathfrak{n}^+$ en chaque $x \in U_1$ soit $\mathfrak{n}^+ + [S, x]$. L'ensemble des éléments $x \in S$ (dits principaux) tels que la dimension du noyau de $\mathrm{ad}\, x$ soit égale au rang de S rencontre $\mathfrak{n}^+$ en l'ensemble des vecteurs de composantes non nulles sur les vecteurs e_α d'une base canonique pour les $\alpha \in B$. Si U_2 désigne cet ouvert on aura $\mathfrak{n}^+ \subset [S, x]$ pour $x \in U_1 \cap U_2$ puisque $[\mathfrak{b}, x] = \mathfrak{n}^+$, d'où l'égalité $\dim(\mathrm{Aut}_0(S) . \mathfrak{n}^+) = \dim S - \mathrm{rang}(S)$ et le lemme en tenant compte de $r = \mathrm{rang}(S) + \dim A$. CQFD

L'espace $E(\mathfrak{a})$ (introduit pour 2.9) constitué de toutes les lois dans L_m qui possèdent un idéal de codimension 1 isomorphe à $\mathfrak{a}$ est irréductible et constructible. On peut énoncer :

PROPOSITION 2.19. – *Pour chaque idéal* $\mathfrak{a}$ *de codimension* 1 *de* $\mathfrak{g}$ *on a :*

(i) $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \geqslant \dim \mathfrak{g} + \dim J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$;

si de plus $\mathfrak{g}$ *est nilpotente, alors on aura*

(ii) $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \geqslant \dim \mathfrak{g} + t(\mathfrak{a}) + \dim J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$.

L'égalité dans (i) *(respect. dans* (ii)*) est vérifiée si et seulement si l'orbite* $\Omega(\mathfrak{g})$ *est ouverte dans* $E(\mathfrak{a})$ *(respect. dans* $E(\mathfrak{a}) \cap N_m$ *).*

Preuve. – L'assertion (i) résulte du lemme 2.3 ; si de plus $\mathfrak{g}$ est nilpotente alors $O(\mathfrak{g})$ est constitué de dérivations nilpotentes de $\mathfrak{a}$ et le lemme 2.18 appliqué à $\Delta(\mathfrak{a})$ pour $r = t(\mathfrak{a})$ donne (ii). L'orbite $\Omega(\mathfrak{g})$ est ouverte dans $E(\mathfrak{a})$ si et seulement si $O(\mathfrak{g})$ est ouvert dans $\Delta(\mathfrak{a})$, ce qui équivaut à l'égalité des dimensions (même preuve pour $E(\mathfrak{a}) \cap N_m$ en considérant l'espace des dérivations nilpotentes de $\mathfrak{a}$).

Il en découle immédiatement les assertions suivantes :

COROLLAIRE 2.20. – Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ on a $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \geqslant \dim \mathfrak{g}$. (Autres preuves dans [6] et [8]).

COROLLAIRE 2.21. – *Si* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ *tout idéal de codimension* 1 *de* $\mathfrak{g}$ *est caractéristique.*

(Autre preuve dans [8]).

PROPOSITION 2.22 *(Condition de Rigidité).* – *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *, non parfaite, rigide dans* L_m *ou* R_m *(respectivement dans* N_m*) vérifie* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + \dim J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$ *(respectivement* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + t(\mathfrak{a}) + \dim J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$*) pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de codimension* 1.

Le lemme suivant sera utile pour la suite.

LEMME 2.23. – *Pour* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{(\delta)}$, *les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\mathfrak{a}$;

(ii) $\omega(\delta)$ *est dense dans* $\Delta(\mathfrak{a})$;

(iii) $\Delta(\mathfrak{a}) = K\delta + (\mathrm{ad}\,\delta)^{\infty}\,\Delta(\mathfrak{a}) + \mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$;

(iv) $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}|\mathfrak{a}$ *est égal à son normalisateur dans* $\Delta(\mathfrak{a})$; *si le plus grand idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$ *n'est pas contenu dans* $\mathfrak{a}$ *alors chacune de ces assertions équivaut à* $\Delta(\mathfrak{a}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}|\mathfrak{a}$.

Preuve. – L'équivalence des 4 assertions résulte du lemme 2.13 et de 2.2. S'il existe $x \in \mathfrak{n}$ avec $x \notin \mathfrak{a}$, alors la dérivation

$\delta = \mathrm{ad}\,x \,|\, \mathfrak{a}$ est nilpotente et (iii) entraîne $\Delta(\mathfrak{a}) = \mathrm{ad}\ \mathfrak{g} \,|\, \mathfrak{a}$.

CQFD

COROLLAIRE 2.24. — *Si* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente de dimension* > 1, *on a* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \geqslant \dim \mathfrak{g} + 1 + \dim \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) . \mathfrak{a}$ *pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de codimension* 1.

3. Sur les algèbres de Lie qui vérifient $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$.

Un certain nombre de travaux sont consacrés à ces algèbres, cf [7], [8], [9], [10] et [15]. Nous établissons ici l'algébricité ainsi que la nullité du centre dans certains cas ; on obtient alors des algèbres de Lie complètes.

On a :

PROPOSITION 3.1. — *Toute algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *qui vérifie* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim\ \mathfrak{g}$ *est algébrique (donc décomposable). De plus si* $\mathrm{codim}\,[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] > 1$ *elle est complète.*

La preuve utilise le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Pour tout idéal caractéristique* $\mathfrak{a}$ *de codimension* 1 *de* $\mathfrak{g}$, *on a* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) - \dim \mathfrak{g} = \dim (\Delta(\mathfrak{g}) \,|\, \mathfrak{a}) - \dim (\mathrm{ad}\ \mathfrak{g} \,|\, \mathfrak{a})$.

Preuve du lemme. — Toute dérivation δ de $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{a}$ est nulle sur l'idéal dérivé et vérifie $[\delta . \mathfrak{g} , \mathfrak{a}] = 0$. Si $\mathfrak{a}$ n'est pas facteur direct on a $\delta . \mathfrak{g} \subset Z(\mathfrak{a})$ et si l'on remarque que tout endomorphisme de $\mathfrak{g}$ nul sur $\mathfrak{a}$ et d'image contenue dans $Z(\mathfrak{a})$ est une dérivation, on aura

$$\dim (\Delta(\mathfrak{g}) \,|\, \mathfrak{a}) = \dim \Delta(\mathfrak{g}) - \dim Z(\mathfrak{a}),$$

il suffit alors de tenir compte de

$$\dim \mathfrak{g} = \dim (\mathrm{ad}\ \mathfrak{g} \,|\, \mathfrak{a}) + \dim Z(\mathfrak{a}) .$$

Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est facteur direct il doit être parfait pour être caractéristique et l'on vérifie directement l'égalité.

CQFD

Preuve de la proposition 3.1. – Si l'on tient compte du corollaire 2.21 et du lemme 3.2 on a $\Delta(\mathfrak{g})|\mathfrak{a} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}|\mathfrak{a}$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ contenu dans un idéal de codimension 1.

Lorsque le radical est non nilpotent la restriction de $\Delta(\mathfrak{g})$ à l'idéal $\mathfrak{a} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$ a un noyau J tel que $J^2 = 0$ et $\Delta(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} + J$.

On a $\Delta(\mathfrak{g}) = \Gamma \oplus N$ avec Γ une sous-algèbre complètement réductible maximale de l'enveloppe scindable de ad $\mathfrak{g}$ et N le plus grand idéal de nilpotence, il est égal à $J + \mathrm{ad}\,\mathfrak{n}$ et le centre de $\mathfrak{g}$ à $Z(\mathfrak{n})^\Gamma$.

L'idéal I_0 constitué des endomorphismes nuls sur $\mathfrak{a}$ et dont l'image est centrale vérifie $I_0 \cap \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = (0)$ (en effet $[x,\mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g})$ entraîne $\Gamma . x = 0$ et $x \in Z(\mathfrak{g})$ si $[x,\mathfrak{a}] = 0$). On a donc

$$\dim(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} + I_0) = \dim \mathfrak{g} + (\mathrm{codim}\,\mathfrak{a} - 1) . \dim Z(\mathfrak{g}). \qquad 3.3$$

Si $\mathrm{codim}\,\mathfrak{a} > 1$ le centre est nul et $\mathfrak{g}$ est complète (donc algébrique).

Si $\mathrm{codim}\,\mathfrak{a} = 1$ on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathbf{K}x + \mathfrak{n}$ (avec $\mathfrak{k} = \mathbf{K}x$ dans la remarque 1.2). En tenant compte de 3.3 on a $\Delta(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \oplus I_0$ de sorte qu'il existe y tel que $\mathrm{ad}\,y|\mathfrak{a}$ soit la partie semi-simple de $\mathrm{ad}\,x|\mathfrak{a}$. La décomposition $\mathfrak{s} \oplus \mathbf{K}y \oplus \mathfrak{n}$ est normale et $\mathfrak{g}$ est décomposable ; le tore $\mathbf{K}.\mathrm{ad}\,y$ qui est maximal dans le centralisateur de ad $\mathfrak{s}$ dans $\Delta(\mathfrak{g})$ est algébrique ainsi donc que $\mathfrak{g}$ d'après la prop. 1.5. Nous avons donc prouvé l'algébricité dans tous les cas.

Supposons $\mathfrak{n} \not\subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (la deuxième assertion est déjà prouvée pour $\mathfrak{n} \subset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$), il existe alors un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1 qui ne contient pas $\mathfrak{n}$ et le lemme 2.23 donne $\Delta(\mathfrak{a}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}\,|\mathfrak{a}$. Si $\mathrm{codim}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] > 1$ l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas parfait et vérifie

$$0 \leqslant \dim \Delta(\mathfrak{a}) - \dim \mathfrak{a} \leqslant 1 - \dim Z(\mathfrak{g}),$$

d'où $Z(\mathfrak{g}) = 0$ ou $\mathbf{K}$. Montrons que cette deuxième possibilité est exclue. Soient $C_2(\mathfrak{g})$ l'idéal des x tels que $[x,\mathfrak{g}] \subset Z(\mathfrak{g})$ et I l'idéal des dérivations dont l'image est contenue dans $Z(\mathfrak{g})$.

Si $C_2(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$, le centre de ad $\mathfrak{g}$ (égal à $I \cap \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$) est nul et l'on a $\dim(I + \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + (\mathrm{codim}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] - 1) . \dim Z(\mathfrak{g})$ d'où $Z(\mathfrak{g}) = 0$.

Si $C_2(\mathfrak{g}) \neq Z(\mathfrak{g}) \simeq \mathbf{K}$ chaque vecteur non central $v \in C_2(\mathfrak{g})$ définit une forme linéaire non nulle λ_v par $[v, x] = \lambda_v(x).z$ (pour tout $x \in \mathfrak{g}$) si $\mathbf{K}z$ est le centre ; le noyau est un idéal $\mathfrak{a}'$ dont le centre contient $\mathbf{K}v \oplus Z(\mathfrak{g})$.

Supposons $\operatorname{codim}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}) \leqslant 1$ (cas restant à considérer en tenant compte de 3.3) ; l'égalité donne $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathbf{K}y + \mathfrak{n}$ avec $\operatorname{ad} y \in \Gamma$, $\Gamma . C_2(\mathfrak{g}) = 0$ et $y \in \mathfrak{a}'$ d'où $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{a}'$ pour les 2 cas. Le lemme 2.23 entraîne alors $\dim \Delta(\mathfrak{a}') < \dim \mathfrak{a}'$, ce qui est absurde d'après le corollaire 2.20 puisque $\mathfrak{a}'$ n'est pas parfait.

CQFD

Nous proposons le tableau suivant afin de résumer les diverses propriétés des algèbres de Lie telles que $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \leqslant \dim \mathfrak{g}$ en relation avec les questions d'existence. Remarquons en particulier l'existence de diverses classes à centre non nul.

TABLEAU 3.4. – *Toute algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \leqslant \dim \mathfrak{g}$ *est algébrique (soit* $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ *une décomposition normale) et appartient à l'un des cas du tableau suivant :*

$\dim \Delta(\mathfrak{g})$	$Z(\mathfrak{g})$	$\operatorname{codim}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$	$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$	existence de $\mathfrak{g}$
$< \dim \mathfrak{g}$	$\neq 0$	0 (parfaite)	0	oui (cf [10] et [15])
			$\neq 0$	?
$\dim \mathfrak{g}$	0 (complète)	0	0	*
		$\geqslant 1$	0	oui (si $\mathfrak{u} \neq 0$) ? (si $\mathfrak{u} = 0$)
	$\neq 0$	0	$\neq 0$	oui (cf [6])
		1	$\neq 0$	oui (si $\mathfrak{s} \neq 0$, $\mathfrak{u} = 0$ ou $\mathbf{K}$)** ? (si $\mathfrak{s} = 0$ et $\mathfrak{u} = \mathbf{K}$)

* Un exemple de T. Sato, correspondance personnelle (1977)

** Prendre un produit direct $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ avec (a) et (b) :

(a) $\dim \Delta(\mathfrak{g}_1) = \dim \mathfrak{g}_1$ et $\dim(\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]) = 1$ (par exemple $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{K}$ ou r_2)

(b) $\mathfrak{g}_2$ est parfaite à dérivations intérieures et centre non nul (cf [10] et [15]).

4. Structure des algèbres de Lie rigides.

Les conditions nécessaires de rigidité obtenues sont résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. – *Toute algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *rigide dans* L_m ou R_m *est algébrique et appartient à l'un des cas suivants :*

(i) *le radical n'est pas nilpotent et l'on a* $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ *(si de plus* $\operatorname{codim}[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] > 1$, $\mathfrak{g}$ *est complète) ;*

(ii) *le radical est nilpotent et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) $\mathfrak{g}$ *est parfaite ;*

(b) $\mathfrak{g}$ *est produit direct de* K *par une algèbre de Lie rigide parfaite dont chaque dérivation est intérieure ;*

(c) $\mathfrak{g}$ *est non parfaite, n'a pas de facteur direct abélien (non nul) et vérifie* $t_e(\mathfrak{g}) = t_e(\mathfrak{a}) = 0$ *pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de codimension* 1.

La preuve nécessite le lemme suivant :

LEMME 4.2. – *L'ensemble* $J_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{g})$ *est fini pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *qui contient le plus grand idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$.

Preuve du lemme. – Soient $(\mathfrak{s},\mathfrak{k})$ un couple associé à $\mathfrak{g}$.cf remarque 1.2, et $\mathfrak{w}$ un supplémentaire de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{k}$. Chaque idéal $\mathfrak{a}$ contenant $\mathfrak{n}$ admet une décomposition $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{w} \cap \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ avec $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{a} = \bigoplus_{i\in I'} \mathfrak{s}_i$ où I' est une partie de l'ensemble fini I des indices des composants simples de $\mathfrak{s}$, d'où une bijection entre ces idéaux et les couples possibles $\{I', \mathfrak{w}'\}$, $I' \subset I$ et $\mathfrak{w}' \subset \mathfrak{w}$.

Deux idéaux $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ isomorphes à $\mathfrak{a}$ possèdent des couples maximaux $(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{a}_i , \mathfrak{k}_i)$ tels que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{k}_i$. Si η est la restriction à $\mathfrak{n}$ d'un isomorphisme de $\mathfrak{a}_1$ vers $\mathfrak{a}_2$, la partie semi-simple σ de l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{n}$ vérifie $\sigma(\mathfrak{k}_2) = \eta \cdot \sigma(\mathfrak{k}_1) \cdot \eta^{-1}$, avec $\sigma(\mathfrak{k}_i) = \sigma(\mathfrak{w} \cap \mathfrak{a}_i)$ $(i = 1$ et $2)$, et injecte $\mathfrak{w}$ en un sous-tore sur $\mathfrak{n}$. Les idéaux isomorphes à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ (pour I' fixé) sont donc en bijection avec une famille de sous-tores conjugués entre eux par l'action adjointe d'un groupe. On conclut en remarquant que dans un tore, l'ensemble des sous-tores conjugués d'un tore donné par l'action adjointe est toujours fini.

CQFD

Preuve de la proposition. – L'algébricité et (i) résultent directement du lemme 4.2 et de la proposition 3.1.

Supposons à présent que le radical soit nilpotent. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas parfaite on a $t_e(\mathfrak{a}) = 0$ pour chaque idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1 sinon il existerait δ dans un tore extérieur sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^{(\delta)} \in E(\mathfrak{a})$ appartiendrait à un ouvert qui ne rencontre pas $\Omega(\mathfrak{g})$ (celui des algèbres dont le plus grand idéal nilpotent est de dimension $< \dim \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$), ce qui est absurde.

Si $\mathfrak{g}$ se factorise en $\mathbf{K} \times \mathfrak{g}'$ (cas b) l'algèbre $\mathfrak{g}'$ ne pouvant avoir d'idéal $\mathfrak{a}'$ de codimension 1 (on aurait alors $t_e(\mathbf{K} \times \mathfrak{a}') \neq 0$) est parfaite. La condition de rigidité 2.22 donne $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ puisque $J_{\mathfrak{g}'}(\mathfrak{g}) = \{\mathfrak{g}'\}$; si l'on compare avec la formule de la dimension de l'algèbre des dérivations d'un produit direct, cf [15] par exemple, on en déduit $\Delta(\mathfrak{g}') = \operatorname{ad} \mathfrak{g}'$. La rigidité de $\mathfrak{g}'$ dans L_{m-1} résulte d'un raisonnement par l'absurde sur les déformations de $\mathfrak{g}'$, d'où (b).

Supposons enfin $\mathfrak{g}$ non parfaite et sans facteur abélien. Soit $S \oplus A \oplus N$ une décomposition de Chevalley de $\Delta(\mathfrak{g})$ et posons $S = S' \times (\operatorname{ad} \mathfrak{g} \cap S)$; si B est une sous-algèbre de Borel de S', l'algèbre résoluble $B \oplus A \oplus N$ stabilise au moins un idéal $\mathfrak{a}$ de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ (théorème de Lie) mais la condition $t_e(\mathfrak{a}) = 0$ entraîne ici la nullité de $B \oplus A$ et donc de $t_e(\mathfrak{g})$.

CQFD

Remarque 4.3. – Une algèbre qui vérifie l'une des conditions de la proposition 4.1 n'est pas rigide en général, prendre par exemple pour (i) une algèbre complète de la famille continue de [1].

COROLLAIRE 4.4. – *Toute* $\mathfrak{g}$ *rigide dans* R_m *est algébrique et vérifie l'une des conditions suivantes pour* $m > 1$:

(i) $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ *(si* $\operatorname{codim} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] > 1$ *elle est complète)* ;

(ii) $\mathfrak{g}$ *est caractéristiquement nilpotente (c'est-à-dire toute dérivation est nilpotente) ainsi que tous ses idéaux de codimension* 1.

Remarque et conjecture 4.5. – S'il est facile de trouver des exemples d'algèbres de Lie rigides vérifiant (i), (a) ou (b) de (ii), la question reste encore sans réponse pour le cas (c), en particulier pour le cas (ii) du corollaire 4.4.

Toutes les algèbres de Lie rigides connues sont rationnelles (c'est-à-dire on peut trouver des constantes de structures entières pour une certaine base) et nous conjecturons ici que ce fait est toujours vrai.

5. Comparaison avec les critères cohomologiques de rigidité.

Si $H(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ désigne l'espace de cohomologie adjointe de $\mathfrak{g}$, le théorème classique de rigidité dit que $\mathfrak{g}$ est rigide dans L_m (et le schéma est réduit en ce point) si (et seulement si) on a $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$. Notons que la rigidité de beaucoup d'algèbres de Lie est donnée par ce critère, cf [2], [9], [12], [13]. Cette condition entraîne de plus, lorsque $\mathfrak{g}$ n'est pas parfaite, l'égalité $\dim \Delta(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ vérifie alors la proposition 3.1. Ceci résulte trivialement du lemme suivant :

LEMME 5.1. – *Si* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ *on a*

$$\dim \Delta(\mathfrak{g}) \leqslant \dim \mathfrak{g} + \dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}).$$

Preuve. – On utilise l'inégalité suivante, cf [6], pour $i = 2$, qui résulte d'une suite exacte de J. Dixmier [5] :

$$(-1)^i \dim H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) + (-1)^{i+1} \dim H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) + \ldots + (-1)^{2i} \dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \geqslant 0.$$

CQFD

Les premières algèbres de Lie rigides découvertes avec $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \neq 0$, soient les $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) \oplus V_i$ pour certaines valeurs de la dimension i du $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ module irréductible V_i (cf [12] et [13]), appartiennent au cas (ii) (a) de la proposition 4.1. Pour ces exemples G. Rauch montre que la rigidité provient de l'injectivité de l'application quadratique de D.S. Rim $Sq : H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow H^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, cf [14]. Dans [2] nous annonçons une série d'algèbres de Lie rigides complètes résolubles qui vérifient $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \neq 0$ pour les dimensions $m \geqslant 13$ et pour lesquelles l'application quadratique Sq est nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CARLES, Rigidité dans les variétés d'algèbres de Lie et composantes irréductibles, *C.R.A.S.*, t. 286 (1978), 1223-1226.

[2] R. CARLES, Sur certaines classes d'orbites ouvertes dans les variétés d'algèbres de Lie, *C.R.A.S.*, t. 293 (1981), 545-547.

[3] R. CARLES et Y. DIAKITE, Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension $\leqslant 7$, *J. of Algebra* (à paraître).

[4] C. CHEVALLEY, *Groupes de Lie,* Hermann, Paris, 1968.

[5] J. DIXMIER, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, *Acta Scientiarum Math.*, 16, fasc. 3-4 (1955), 246-250.

[6] J. DOZIAS, Sur les dérivations des algèbres de Lie, *C.R.A.S.*, t. 259 (1964), 2748-2750.

[7] M. FAVRE, Algèbres de Lie complètes, *C.R.A.S.*, t. 274 (1972), 1533-1535.

[8] B. GRIMONPREZ, Sur les algèbres de Lie ayant même dimension que l'algèbre de leurs dérivations, Poitiers (1975) non publié.

[9] G. LEGER and E. LUKS, Cohomology theorems for borel-like solvable Lie Algebras in arbitrary characteristic, *Can J. Math.*, vol. XXIV n° 6 (1972), 1019-1026.

[10] E. LUKS, Lie algebras with only inner derivations need not be complete, *J. of Alg,* 15 (1970), 280-282.

[11] A.I. MALCEV, On solvable Lie algebras, *Am. Math. Soc. Transl.*, n° 27 (1950), 329-356.

[12] G. RAUCH, Effacement et Déformation, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* 22-1 (1972), 239-269.

[13] R.W. RICHARDSON, JR, On the rigidity of semi-direct products of Lie algebras, *Pac. J. of Math.*, vol 22, n° 2 (1967), 339-344.

[14] D.S. RIM, Deformation of transitive Lie algebras, *Ann. of Math.*, (1966), 339-357.

[15] T. SATO, The Derivations of the Lie algebras, *Tôhoku Math. Jour.*, 23 (1971), 21-36.

Manuscrit reçu le 10 août 1983.

Roger CARLES,
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers.