

JEAN-LOUIS LIEUTENANT

**Fronts d'onde à l'infini des fonctions
analytiques réelles**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 1 (1984), p. 111-140

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_111_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FRONTS D'ONDE À L'INFINI DES FONCTIONS ANALYTIQUES RÉELLES

par Jean-Louis LIEUTENANT (*)

Table des matières

INTRODUCTION

1. DESCRIPTION DU CADRE GEOMETRIQUE ET ENONCE DES RESULTATS .	112
2. UNE SUITE EXACTE DE FAISCEAUX SUR LA SPHERE	117
3. PASSAGE SUR LA SPHERE DUALE.	125
4. FRONTS D'ONDE A L'INFINI	135
5. BIBLIOGRAPHIE	139

Introduction.

Soient E un espace \mathbf{R} -vectoriel de dimension finie, E^* son dual et $E^{\mathbf{C}} = E + iE$ son complexifié. On sait à présent que si $\Gamma_j (j \in J)$ est une famille finie de cônes convexes saillants dont les polaires recouvrent E^* , toute fonction analytique sur E s'exprime comme somme de fonctions holomorphes sur des voisinages complexes V_j de E incluant respectivement un tube de profil $E + i\Gamma_j$. Nous nous proposons ici de caractériser les fonctions analytiques sur E admettant des décompositions de ce type qui soient plus spécifiques (c'est-à-dire pour lesquelles la condition sur les polaires des Γ_j est moins restrictive).

La méthode que nous proposons repose sur l'utilisation systématique des constructions géométriques décrites dans le premier chapitre de l'article fondamental [15] de M. Sato, T. Kawai et

(*) Chargé de Recherches du Fonds National de la Recherche Scientifique.

M. Kashiwara. Ces constructions permettent de définir de manière intrinsèque (c'est-à-dire fonctorielle) un faisceau \mathcal{E}^f de "microfonctions invariantes par translations réelles" sur la sphère S^* cotangente à E en 0 . Nous démontrons alors que ce faisceau joue vis-à-vis de l'espace des fonctions analytiques sur E (que l'on peut identifier à un faisceau sur $\{0\}$) un rôle analogue à celui du faisceau \mathcal{C} des microfonctions vis-à-vis de celui des hyperfonctions.

De plus, dans le traitement des équations aux dérivées partielles à coefficients analytiques, l'importance des microfonctions n'a cessé d'augmenter depuis leur introduction par M. Sato en 1969 (cf. [14]) et dans un article en préparation, nous montrons que le faisceau \mathcal{E}^f est quant à lui particulièrement bien adapté au traitement des équations à coefficients constants.

Nous tenons enfin à remercier M. le Professeur P. Schapira qui nous a suggéré les idées maîtresses de ce travail et nous a aidé à le réaliser. Les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui nous ont été très profitables.

1. Description du cadre géométrique et énoncé des résultats.

Soit E un espace \mathbf{R} -vectoriel de dimension finie n muni d'une topologie équivalente à celle définie par la norme euclidienne. Notons E^* le dual de E (qui s'identifie à l'espace cotangent à E en 0), \langle, \rangle le couplage entre E et E^* , $E^{\mathbf{C}} = E + iE$ le complexifié de E et S (resp. S^*) la sphère $[E \setminus \{0\}]/\mathbf{R}^+$ (resp. $[E^* \setminus \{0\}]/\mathbf{R}^+$) tangente (resp. cotangente) à E en 0 . Pour tout $\underline{\xi} \in E \setminus \{0\}$ (resp. $\underline{\eta} \in E^* \setminus \{0\}$), nous notons $\underline{\xi}$ (resp. $\underline{\eta}$) le point de S (resp. de S^*) correspondant.

Munissons les transformées monoïdales $(E \times S) \cup (E^{\mathbf{C}} \setminus E)$ et $S \cup (iE \setminus \{0\})$ [resp. comonoïdales $(E \times S^*) \cup (E^{\mathbf{C}} \setminus E)$ et $S^* \cup (iE \setminus \{0\})$] des topologies d'éclaté [resp. de coéclaté] définies dans [15] et qui induisent sur $E \times S$ et S [resp. $E \times S^*$ et S^*] la topologie produit habituelle. Si on munit

$$DE = \{(x, \underline{\xi}, \underline{\eta}) \in E \times S \times S^* : \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle \geq 0\}$$

et $D = \{(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \in S \times S^* : \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle \geq 0\}$ des topologies induites respectivement par $E \times S \times S^*$ et $S \times S^*$, les projections suivantes sont continues :

$$\gamma : E^{\mathbb{C}} \longrightarrow iE : \gamma(x + ix') = ix'$$

$$\alpha : S \cup (iE \setminus \{0\}) \longrightarrow iE : \alpha(\underline{\xi}) = 0 \text{ si } \underline{\xi} \in S \\ \alpha(ix) = ix \text{ si } x \in E \setminus \{0\},$$

$$\beta : S^* \cup (iE \setminus \{0\}) \longrightarrow iE : \beta(\underline{\eta}) = 0 \text{ si } \underline{\eta} \in S^* \\ \beta(ix) = ix \text{ si } x \in E \setminus \{0\},$$

$$\tau : (E \times S) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E) \longrightarrow E^{\mathbb{C}} : \tau(x, \underline{\xi}) = x \text{ si } (x, \underline{\xi}) \in E \times S \\ \tau(z) = z \text{ si } z \in E^{\mathbb{C}} \setminus E,$$

$$\pi : (E \times S^*) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E) \longrightarrow E^{\mathbb{C}} : \pi(x, \underline{\eta}) = x \text{ si } (x, \underline{\eta}) \in E \times S^* \\ \pi(z) = z \text{ si } z \in E^{\mathbb{C}} \setminus E,$$

$$\lambda : (E \times S) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E) \longrightarrow S \cup (iE \setminus \{0\}) : \\ \lambda(x, \underline{\xi}) = \underline{\xi} \text{ si } (x, \underline{\xi}) \in E \times S \\ \lambda(x + ix') = ix' \text{ si } x + ix' \in E^{\mathbb{C}} \setminus E,$$

$$\mu : E \times S^* \longrightarrow S^* : \mu(x, \underline{\eta}) = \underline{\eta},$$

$$\nu : DE \longrightarrow D : \nu(x, \underline{\xi}, \underline{\eta}) = (\underline{\xi}, \underline{\eta}),$$

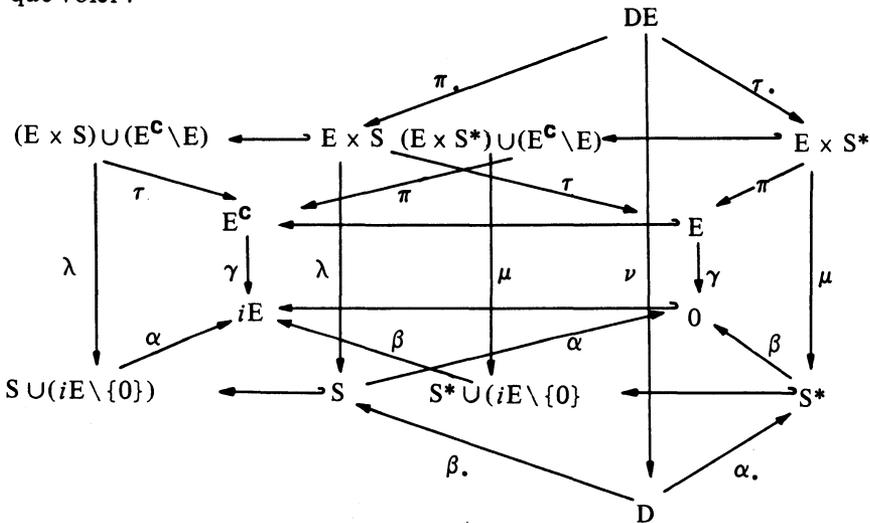
$$\alpha : D \longrightarrow S^* : \alpha(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \underline{\eta},$$

$$\beta : D \longrightarrow S : \beta(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \underline{\xi},$$

$$\tau : DE \longrightarrow E \times S^* : \tau(x, \underline{\xi}, \underline{\eta}) = (x, \underline{\eta}),$$

$$\pi : DE \longrightarrow E \times S : \pi(x, \underline{\xi}, \underline{\eta}) = (x, \underline{\xi}).$$

On peut résumer cette situation sur le diagramme commutatif que voici :



Désignons par \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $E^{\mathbb{C}}$ et par $\mathcal{A} = \mathcal{O}|_E$ celui des germes de fonctions analytiques sur E . Considérons alors les faisceaux sur S suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0 &= (\alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{O})|_S \\ \mathcal{O}_1 &= (\lambda_* \tau^{-1} \mathcal{O})|_S \\ \mathcal{O}_{1,0} &= \mathcal{O}_1 / \mathcal{O}_0 \\ \mathcal{O}_{2,0} &= \mathcal{H}\mathcal{E}_S^1(\alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{O}), \end{aligned}$$

et sur $E \times S$ le faisceau $\mathcal{B} = \mathcal{H}\mathcal{E}_{E \times S}^1(\tau^{-1} \mathcal{O})$ introduit dans [15]. Grâce au théorème de H. Grauert [4] assurant l'existence pour tout ouvert de E d'une base de voisinages pseudoconvexes dans $E^{\mathbb{C}}$, à sa version "tuboïdale" due à J. Bros et D. Jagolnitzer [2], à plusieurs résultats dûs à M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara [8], [15] et au théorème de décomposition [11], il vient en notant \mathbf{D}_X la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux au-dessus d'un espace topologique X :

THEOREME 1. — Sur S , on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{1,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{2,0} \longrightarrow \lambda_* \mathcal{B} \longrightarrow 0$$

qui correspond dans \mathbf{D}_S au triangle

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{1,0} & \\ \swarrow & & \searrow + 1 \\ \mathbf{R}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \mathcal{O}[1] & \longrightarrow & \mathbf{R}\lambda_* \mathbf{R}\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[1] \end{array}$$

dont les trois sommets sont des complexes de faisceaux dont la cohomologie est concentrée en degré 0.

Le foncteur \mathbf{T} de \mathbf{D}_S dans \mathbf{D}_S^* défini par

$$\mathbf{T}\mathcal{F} = \mathbf{R}\alpha_* \beta^{-1} \mathcal{F}^a[n-1], \quad \forall \mathcal{F} \in \text{Obj}(\mathbf{D}_S),$$

où \mathcal{F}^a désigne l'image de \mathcal{F} par l'homéomorphisme involutif antipodal : $\xi \rightarrow (-\xi)$, transforme les triangles en triangles. Désignons alors par \mathcal{C}^f le faisceau de cohomologie d'ordre 0 du complexe $\mathbf{T}\mathcal{O}_{1,0}$, ce qui revient à poser

$$\mathcal{C}^f = (\mathbf{R}^{n-1} \alpha_*) \beta^{-1} \mathcal{O}_{1,0}^a.$$

Grâce au théorème du "Edge of the wedge" cohomologique de M. Morimoto [13], à un argument du type Vietoris-Begle et à la cohomologie de Čech, on obtient alors le

THEOREME 2. — *La cohomologie des complexes $\mathbf{T} \Theta_{1,0}$, $\mathbf{T} \mathbf{R} \Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R} \gamma_* \Theta[1]$ et $\mathbf{T} \mathbf{R} \lambda_* \mathbf{R} \Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \Theta[1]$ est concentrée en degré 0 et sur S^* on a la suite exacte courte de faisceaux suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^t \longrightarrow \mathcal{H}_{S^*}^n (\beta^{-1} \gamma_* \Theta)^a \longrightarrow \mu_* \mathcal{C} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{C} = \mathcal{H}_{E \times S^*}^n (\pi^{-1} \Theta)^a$ désigne le faisceau des microfonctions de M. Sato (aux orientations près).

L'exactitude de la suite courte fondamentale de la théorie des microfonctions

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \pi_* \mathcal{C} \longrightarrow 0, \quad (*)$$

où $\mathcal{B} = \mathcal{H}_E^n (\Theta)$ est le faisceau des hyperfonctions (aux orientations près), permet alors de démontrer l'exactitude d'une suite analogue à (*) pour les fonctions analytiques sur E c'est-à-dire

THEOREME 3. — *Il existe un morphisme canonique $b : \gamma_* \mathcal{A} \longrightarrow \beta_* \mathcal{C}^t$ qui rend la suite*

$$0 \longrightarrow \alpha_* \Theta_0 \longrightarrow \gamma_* \mathcal{A} \longrightarrow \beta_* \mathcal{C}^t \longrightarrow 0,$$

exacte. Autrement dit, il existe un isomorphisme

$$\mathcal{C}^t(S^*) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ m \in \mathbf{N}}} \frac{\mathcal{A}(E)}{\Theta(E + i\Omega_m)},$$

où $\{\Omega_m : m \in \mathbf{N}\}$ désigne une base de voisinages ouverts de 0 dans E.

Cette théorie permet en particulier de définir de manière intrinsèque une notion de *front d'onde à l'infini* (ou invariant par translations réelles) pour les fonctions analytiques sur E en adoptant la

DEFINITION. — *Pour tout $f \in \mathcal{A}(E)$, on pose*

$$\mathbf{W.F.}^t(f) = \text{supp}_{\mathcal{C}^t}(bf),$$

où b désigne le morphisme de $\gamma_* \mathcal{A}$ dans $\beta_* \mathcal{C}^t$ obtenu au théorème 3.

Pour toute partie A de S (resp. de S^*), désignons par Γ_A l'enveloppe conique de A, c'est-à-dire l'image inverse de A par

la projection naturelle de $E \setminus \{0\}$ sur S (resp. de $E^* \setminus \{0\}$ sur S^*) et par A^\perp le polaire de A défini par $\bigcap_{\xi \in A} \{\underline{\eta} \in S^* : \langle \xi, \eta \rangle \geq 0\}$ (resp. $\bigcap_{\eta \in A} \{\underline{\xi} \in S; \langle \xi, \eta \rangle \geq 0\}$). Si $\Omega \subset E$ et $\omega \subset S$ sont des ouverts, rappelons encore qu'un ensemble V de E^C est de profil $\Omega + i\Gamma_\omega$ (cf. J. Bros et D. Iagolnitzer [2]) s'il est inclus dans $\Omega + i\Gamma_\omega$ et si pour tous compacts $K \subset \Omega$ et $\kappa \subset \omega$ il existe $\rho_0 > 0$ tel qu'on ait

$$\{x + i\rho \xi / |\xi| : x \in K, \xi \in \kappa, \rho \in]0, \rho_0]\} \subset V.$$

En particulier, nous notons T_ω la famille des tubes de profil $E + i\Gamma_\omega$, c'est-à-dire des ouverts de profil $E + i\Gamma_\omega$ qui s'écrivent $E + i\Gamma_{\omega'}$ avec Ω' ouvert dans E . On peut alors énoncer le

THEOREME 4. — a) *Considérons une famille finie $\omega_j (j \in J)$ d'ouverts de S vérifiant*

$$- \bigcup_{j \in J} \omega_j^\perp = S^*$$

— $\forall j \in J, \Gamma_{\omega_j}$ est convexe et saillant (i.e. n'inclut aucune droite). Pour tout $f \in \mathcal{A}(E)$, il existe des tubes $V_j' \in T_{\omega_j}$, des ouverts pseudoconvexes $V_j \supset V_j' \cup E$ et des fonctions $f_j \in \mathcal{O}(V_j)$ tels qu'on ait $f = \sum_{j \in J} f_j$ sur E .

b) *Soit ω un ouvert de S tel que Γ_ω est convexe.*

Pour tout $g \in \mathcal{O}^t(S^)$, on a*

$$\text{supp}_c \tau(g) \subset \omega^\perp \iff g = b(f|_E),$$

où f est une fonction holomorphe sur un voisinage de E incluant un tube de profil $E + i\Gamma_\omega$ univoquement déterminée, modulo l'addition d'une section de \mathcal{O}_0 .

c) *Soient $\underline{\eta} \in S^*$ et $f \in \mathcal{A}(E)$. On a*

$$\underline{\eta} \notin \text{W.F.}^t(f) \iff f = \sum_{j \in J} f_j \text{ sur } E,$$

où J est fini et où chaque f_j est holomorphe sur l'union de E et d'un élément de T_{ω_j} avec ω_j ouvert dans S tel que Γ_{ω_j} soit convexe et $\omega_j^\perp \not\ni \underline{\eta}$. ()*

(*) Les différences de signe entre ces résultats et ceux annoncés dans [12] sont dues aux définitions distinctes de T adoptées dans ces deux notes.

2. Une suite exacte de faisceaux sur la sphère.

On introduit un faisceau auxiliaire \mathcal{O}_2 sur S puis on explicite la forme des sections de \mathcal{O}_0 , \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 . On en déduit des isomorphismes de faisceaux $\lambda_* \mathcal{O} = \mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_{2,0} = \mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_0$ puis on prouve le théorème 1. On termine ce paragraphe en démontrant que les ouverts de S dont l'enveloppe conique est convexe sont acycliques pour $\mathcal{O}_{1,0}$.

DEFINITION 2.1. — Notons j l'identité de $iE \setminus \{0\}$ dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$ et définissons le faisceau \mathcal{O}_2 sur S par

$$\mathcal{O}_2 = (j_* [(\gamma_* \mathcal{O})|_{iE \setminus \{0\}}])|_S.$$

PROPOSITION 2.2. — a) *Le faisceau \mathcal{O}_0 est constant sur S et admet pour fibre l'espace $\lim_{\Omega \ni 0} \mathcal{O}(E + i\Omega)$.*

b) *Pour tout ouvert ω de S , notons $\{\omega_i : i \in I\}$ la partition de ω en composantes connexes. On a alors un isomorphisme*

$$\mathcal{O}_1(\omega) \simeq \prod_{i \in I} \lim_{V_i \in \vec{T}_{\omega_i}} \mathcal{O}(V_i) \cap \mathcal{A}(E).$$

c) *Pour tout ouvert ω de S , on a un isomorphisme*

$$\mathcal{O}_2(\omega) \simeq \lim_{V \in \vec{T}_\omega} \mathcal{O}(V).$$

Preuve. — a) Pour tout $\underline{\xi} \in S$, on a

$$(\mathcal{O}_0)_{\underline{\xi}} \simeq (\gamma_* \mathcal{O})_{\alpha(\underline{\xi})} = \lim_{i\Omega \ni 0} \mathcal{O}(\gamma^{-1} i\Omega),$$

où Ω parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de 0 dans E .

b) Comme S est fermé dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$, il vient

$$\mathcal{O}_1(\omega) = \lim_{U \supset S} (\tau^{-1} \mathcal{O})(\lambda^{-1} U),$$

où U parcourt la famille des voisinages ouverts de ω dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$. La limite inductive permet de se restreindre aux U vérifiant $U \setminus S \subset \Gamma_\omega$, donc de supposer que les $\tau \lambda^{-1} U$ s'écrivent sous la forme d'unions $\bigcup_{i \in I} (E \cup V_i)$ avec $V_i \in \vec{T}_{\omega_i}$. La conclusion découle directement du théorème de prolongement

analytique et de l'interprétation des sections de $\tau^{-1} \Theta$ en termes d'applications localement constantes.

c) se démontre comme b). \square

PROPOSITION 2.3. — *Tout ouvert U de $(E \times S) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E)$ tel que $U \setminus (E \times S)$ est un ouvert d'holonomie vérifie*

$$H^p(U, \tau^{-1} \Theta) = 0, \quad \forall p \neq 0.$$

De plus, tout ouvert Λ de $E \times S$ tel que pour tout $x \in \tau(\Lambda)$

$$P_x = \{\xi \in E \setminus \{0\} : (x, \xi) \in \Lambda\}$$

est un cône convexe admet une base de voisinages composée de tels ouverts.

Preuve. — La deuxième partie de l'énoncé résulte immédiatement du théorème 3 de [2] car pour tout voisinage U de Λ dans $(E \times S) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E)$ inclus dans

$$\Lambda \cup \{x + ix' : x \in \tau(\Lambda), x' \in P_x\},$$

$U \setminus \Lambda$ est un tuboïde de profil $\bigcup_{x \in \tau(\Lambda)} (x, P_x)$ au sens de J. Bros et D. Iagolnitzer.

Pour démontrer la première assertion, considérons la suite d'espaces $U \setminus \Lambda \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{\tau} E^{\mathbb{C}}$, où Λ et ι désignent respectivement l'intersection $U \cap (E \times S)$ et l'inclusion naturelle. Avec les notations de [15] p. 270 (cf. également [9]), on obtient un triangle dans la catégorie dérivée de celle des espaces linéaires :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R}\Gamma(U \xrightarrow{\tau} E^{\mathbb{C}}, \Theta) & \\ & \swarrow & \nwarrow + 1 \quad (*) \\ \mathbf{R}\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\tau \circ \iota} E^{\mathbb{C}}, \Theta) & \longrightarrow & \mathbf{R}\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\iota} U, \tau^{-1} \Theta). \end{array}$$

Comme $\tau \circ \iota$ est un plongement de l'ouvert $U \setminus \Lambda$ dans $E^{\mathbb{C}}$, il vient $\mathbf{R}\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\tau \circ \iota} E^{\mathbb{C}}, \Theta) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{(U \setminus \Lambda)}(E^{\mathbb{C}}, \Theta)$ et la suite exacte de cohomologie relative

$$\dots \longrightarrow H^k_{(U \setminus \Lambda)}(E^{\mathbb{C}}, \Theta) \longrightarrow H^k(E^{\mathbb{C}}, \Theta) \longrightarrow H^k(U \setminus \Lambda, \Theta) \longrightarrow \dots$$

assure alors, en vertu du théorème B de Cartan, que la cohomologie de $R\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\tau \circ \iota} E^{\mathbf{C}}, \Theta)$ est concentrée en degré 1 puisque $H_{(U \setminus \Lambda)}^0(E^{\mathbf{C}}, \Theta)$ s'annule en vertu du théorème de prolongement analytique. Pour calculer $R\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\iota} U, \tau^{-1} \Theta)$, remarquons que l'on a $\mathcal{O}ist_{\iota}^k(\tau^{-1} \Theta) = 0$ pour $k \neq 0$. En effet, comme ι est une application propre entre espaces paracompacts, il vient

$$\mathcal{O}ist_{\iota}^k(\tau^{-1} \Theta)_z = H^k(\tau^{-1}(z) \longrightarrow \{z\}, \Theta_{\tau(z)}), \quad \forall k, \forall z \in U$$

et ces espaces sont nuls pour tout $k \neq 0$ ou $k \in \mathbf{Z}$ selon que z appartient ou non à Λ . On en déduit de suite (aux orientations près) $R\Gamma(U \setminus \Lambda \xrightarrow{\iota} U, \tau^{-1} \Theta) = R\Gamma(U \mathcal{O}ist_{\iota}^0(\tau^{-1} \Theta)) \simeq \mathcal{A}(\tau\Lambda)$ en vertu du théorème de H. Grauert puisque l'on a $\mathcal{O}ist_{\iota}^0(\tau^{-1} \Theta) = \Theta_{\tau(z)}$ pour tout $z \in \Lambda$. La suite exacte de cohomologie associée au triangle (*) procure alors les annulations suivantes :

$$H^p(U \xrightarrow{\iota} E^{\mathbf{C}}, \Theta) = 0, \quad \forall p \neq 1,$$

et pour conclure, il suffit de se reporter à la suite exacte qui définit $R\Gamma(U \xrightarrow{\iota} E^{\mathbf{C}}, \tau^{-1} \Theta)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^k(U \xrightarrow{\iota} E^{\mathbf{C}}, \Theta) &\longrightarrow H^k(E^{\mathbf{C}}, \Theta) \\ &\longrightarrow H^k(U, \tau^{-1} \Theta) \longrightarrow \dots \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 2.4. — Soit $\Omega_j (j \in \mathbf{N})$ un recouvrement ouvert d'un ouvert Ω de E tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$, il existe au plus un nombre fini de Ω_k qui rencontrent Ω_j . Soient également ω_j, V_j et $F_j (j \in \mathbf{N})$ respectivement un ouvert de S , un ouvert de profil $\Omega_j + i\Gamma_{\omega_j}$ et une fonction holomorphe sur V_j . Si pour tous $j, k \in \mathbf{N}$, il existe un voisinage complexe $\underline{V}_{j,k} = \underline{V}_{k,j}$ de $\Omega_j \cap \Omega_k$ et une fonction $H_{j,k} \in \mathcal{O}(\underline{V}_{j,k})$ tels qu'on ait

$$F_j - F_k = H_{j,k} \quad \text{sur} \quad V_j \cap V_k \cap \underline{V}_{j,k},$$

il existe aussi des ouverts V'_j de profil $\Omega_j + i\Gamma_{\omega_j}$ et $F \in \mathcal{O}(\bigcup_{j=0}^{\infty} V'_j)$ tels que $F_j - F$ admette un prolongement holomorphe sur un voisinage complexe de Ω_j .

Preuve. — On vérifie de suite l'existence d'ouverts \underline{V}_j de $E^{\mathbf{C}}$ incluant les Ω_j correspondants et tels que $\underline{V}_j \cap \underline{V}_k$ soit inclus dans $\underline{V}_{j,k}$ pour tous $j, k \in \mathbf{N}$. Le théorème de H. Grauert

rappelé au chapitre 1 assure l'existence d'un ouvert d'holomorphic \underline{V} vérifiant $\Omega \subset \underline{V} \subset \cup \underline{V}_j$. Les $\underline{V}'_j = \underline{V}_j \cap \underline{V}$ recouvrent donc \underline{V} et en résolvant un problème de Cousin de première espèce, on peut écrire les $H_{j,k}$ sous la forme $H_j - H_k$ avec $H_j \in \mathcal{O}(\underline{V}'_j)$. Pour conclure, il suffit de prendre $\underline{V}'_j = \underline{V}'_j \cap \underline{V}_j$ et $F = F_j - H_j$ sur \underline{V}'_j . \square

PROPOSITION 2.5. — *Si $\{\omega_\iota : \iota \in I\}$ est la partition en composantes connexes d'un ouvert ω de S , on a un isomorphisme $(\lambda_* \mathcal{Q})(\omega) \simeq \prod_{\iota \in I} \{[f] : f \in \mathcal{O}(V), V = \text{ouvert de profil } E + i\Gamma_{\omega_\iota}\}$, où $[f]$ désigne la classe de f pour la relation d'équivalence " $f \sim g$ si et seulement si $f - g$ admet un prolongement holomorphe sur un voisinage de E ".*

Preuve. — Un élément s de $(\lambda_* \mathcal{Q})(\omega)$ est une application localement constante qui, au voisinage de chaque $(x, \xi) \in E \times \omega$, coïncide avec un élément $\sigma_{x,\xi}$ de $H^1_{E \times S}(U_{x,\xi}, \tau^{-1} \mathcal{O})$, où $U_{x,\xi}$ désigne un voisinage de (x, ξ) dans $(E \times S) \cup (E^{\mathbb{C}} \setminus E)$ que l'on peut d'ailleurs supposer vérifier les hypothèses de la proposition 2.3. En tenant compte du théorème de prolongement analytique qui permet d'annuler les $H^0_{E \times \omega}(U_{x,\xi}, \tau^{-1} \mathcal{O})$, les suites exactes de cohomologie relative s'écrivent

$$0 \longrightarrow H^0(U_{x,\xi}, \tau^{-1} \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(U_{x,\xi} \setminus (E \times S), \tau^{-1} \mathcal{O}) \longrightarrow H^1_{E \times \omega}(U_{x,\xi}, \tau^{-1} \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

et permettent d'interpréter les $\sigma_{x,\xi}$ comme classes d'équivalence d'applications $f_{x,\xi}$ localement constantes sur les $U_{x,\xi} \setminus (E \times S)$ et à valeurs dans les germes de fonctions holomorphes pour la relation d'équivalence

$$f'_{x,\xi} \sim f''_{x,\xi} \iff f'_{x,\xi} - f''_{x,\xi} \in \tau^{-1} \mathcal{O}(U_{x,\xi}).$$

Ces $f_{x,\xi}$ étant localement constants, on peut leur associer de manière biunivoque une fonction $F_{x,\xi} \in \mathcal{O}(U_{x,\xi} \setminus (E \times \omega))$.

Considérons alors $\iota \in I$: comme ω_ι est connexe, il existe une suite croissante de compacts connexes κ_ρ de S tels que $\bigcup_{\rho \in \mathbb{N}} \kappa_\rho = \omega_\iota$. Il existe également des compacts connexes $K_m \subset E$

tels que $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} K_m = E$ et $K_m \cap (\bigcup_{m' \geq m+2} K_{m'}) = \emptyset$. Fixons $\ell_0 \in \mathbf{N}$; il existe une suite croissante d'entiers $M_m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et de points $(x_j, \xi_j) \in E \times \omega (j \in \mathbf{N} \setminus \{0\})$ tels qu'on ait

$$K_m \times \kappa_{\ell_0} \subset \bigcup_{M_m < j < M_{m+1}} U_{x_j, \xi_j}$$

et le lemme précédent assure l'existence d'ouverts $V_j (j \in \mathbf{N} \setminus \{0\})$ de même profil que les $U_{x_j, \xi_j} \setminus (E \times S)$ ainsi que de F_{ℓ_0} holomorphe sur $V'_{\ell_0} = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ tels que $(F_{x_j, \xi_j} - F_{\ell_0})|_{V_j}$ admette un prolongement holomorphe sur un voisinage complexe de $\tau[U_{x_j, \xi_j} \cap (E \times S)]$. De cette manière, on peut exprimer s au voisinage de $E \times \kappa_{\ell_0}$ à partir de la classe d'équivalence σ_{ℓ_0} de l'application localement constante définie sur $\tau^{-1}(V'_{\ell_0})$ à partir de F_{ℓ_0} . Laissons alors ℓ_0 varier dans \mathbf{N} ; un raisonnement par connexité assure l'existence, pour tout $\ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ d'un voisinage W_ℓ de E et d'une fonction $H_\ell \in \mathcal{O}(W_\ell)$ tels qu'on ait

$$F_{\ell-1} - F_\ell = H_\ell \text{ sur } V'_{\ell-1} \cap V'_\ell \cap W_\ell.$$

Cela étant, remarquons que la fonction $F^{(\iota)}$ définie par

$$F^{(\iota)} = \begin{cases} F_0 & \text{sur } V'_0 \\ F_\ell + \sum_{j=1}^{\ell} H_j & \text{sur } V'_\ell \cap (\bigcap_{j=1}^{\ell} W_j), \quad \forall \ell \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

est holomorphe sur un ouvert $V^{(\iota)}$ de profil $E + i\Gamma_{\omega_\iota}$ et permet d'exprimer s sur $E \times \omega_\iota$.

Pour conclure, il suffit enfin de prouver que l'opérateur r qui, à $s \in (\lambda_* \mathcal{Z})(\omega)$ associe la famille des $[F^{(\iota)}]$ obtenus comme ci-dessus est linéaire et bijectif, ce qui s'obtient aisément. \square

PROPOSITION 2.6. — *Le faisceau $\lambda_* \mathcal{Z}$ est isomorphe au faisceau quotient $\mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_1$ et la cohomologie de $R\lambda_* \mathcal{Z} = R\lambda_* R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[1]$ est concentrée en degré 0.*

Preuve. — Soit $\xi \in S$. Un élément de $(\mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_1)_\xi$ s'écrit donc comme l'image de la classe d'équivalence d'une fonction f holomorphe sur un ouvert $V \in T_\omega$ pour la relation: $f' \sim f'' \Leftrightarrow f' - f''$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de E . Comme V est un ouvert de profil $E + i\Gamma_\omega$, on peut donc associer à cet

élément celui de $(\lambda_* \mathcal{Q})_{\underline{\xi}}$ qui, avec les notations de la proposition précédente est caractérisé par $[f]$. L'opérateur ainsi défini est visiblement linéaire et injectif. Sa surjectivité découle alors immédiatement du théorème de décomposition établi dans [11].

En vertu du théorème 1.3.1 de [15], on a dans \mathbf{D}_S

$$\mathbf{R}\lambda_* \mathcal{Q} = \mathbf{R}\lambda_* \mathbf{R}\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[1].$$

Comme le foncteur $\Gamma_{E \times S}$ conserve les faisceaux flasques, il suffit alors de prouver que si $\mathcal{O} \rightarrow \tau^{-1} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}_.$ est une résolution flasque de $\tau^{-1} \mathcal{O}$, la cohomologie des complexes $0 \rightarrow \lambda_* \Gamma_{E \times S}(\omega_m, \mathcal{F}_.)$, où $\{\omega_m : m \in \mathbf{N}\}$ désigne une suite de voisinages ouverts de $\underline{\xi}$ dans S dont les enveloppes coniques sont convexes, est concentrée en degré 1. Cela s'obtient sans peine à partir de la suite exacte longue de cohomologie relative, du théorème de prolongement analytique, du théorème B de Cartan et de la proposition 2.3. \square

LEMME 2.7. — *La cohomologie du complexe $\mathbf{R}\gamma_* \mathcal{O}$ est concentrée en degré 0.*

Preuve. — La résolution de P. Dolbeault du faisceau \mathcal{O} assure l'existence d'un isomorphisme entre $\mathbf{R}\gamma_* \mathcal{O}$ et le complexe $\dots \rightarrow 0 \rightarrow \gamma_* C_{\infty}^{(0, \cdot)}$ au sein de \mathbf{D}_{iE} . Comme γ_* est exact à gauche et conserve les faisceaux mous et comme tout point de iE admet une base de voisinages convexes, la suite $\gamma_* C_{\infty}^{(0, \cdot)}$ est une suite exacte de faisceaux puisque le problème du $\bar{\partial}$ admet toujours une solution sur les ouverts convexes (cf. [6]). D'où la conclusion. \square

PROPOSITION 2.8. — *La cohomologie du complexe*

$$\mathbf{R}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \mathcal{O} \in \text{Obj } \mathbf{D}_S$$

est concentrée en degré 1 et on a un isomorphisme entre $\mathcal{O}_2/\mathcal{O}_0$ et $\mathbf{R}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_ \mathcal{O}[1] = \mathcal{O}_{2,0}$.*

Preuve. — On adapte ici la démonstration du théorème 1.3.1 de [15]. Soient \mathcal{F} un faisceau sur iE , $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}_.$ et $0 \rightarrow \alpha^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_.$ les résolutions canoniques de \mathcal{F} et $\alpha^{-1} \mathcal{F}$; pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\underline{\xi}_0 \in S$, que nous pouvons d'ailleurs supposer tel que $\underline{\xi}_0 = (1, 0, \dots, 0)$ quitte à effectuer

une rotation, posons

$$\Omega_\epsilon = \{x \in E : (\sum x_j^2)^{1/2} < \epsilon\} \text{ et } \Gamma_\epsilon = \{x \in E : (\sum_{j \geq 2} x_j^2)^{1/2} \geq \epsilon x_1\}.$$

On remarque aisément l'existence d'opérateurs linéaires u et u_* rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & \varinjlim_{\epsilon > 0} \Gamma_{i\Gamma_\epsilon}(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F}) & \longrightarrow \varinjlim_{\epsilon > 0} \Gamma_{i\Gamma_\epsilon}(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{G}.) \\ & \downarrow u & \downarrow u_* \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{H}_S^0(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0} & \longrightarrow \mathcal{H}_S^0(\mathfrak{H}.)_{\underline{\xi}_0} \end{array} .$$

On en déduit immédiatement l'existence d'opérateurs naturels induits u^* de $\varinjlim_{\epsilon > 0} H_{i\Gamma_\epsilon}^*(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F})$ dans $\mathcal{H}_S^*(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0}$. Comme α

est un homéomorphisme de $E^c \setminus E$ sur lui-même, on obtient directement des isomorphismes naturels i et i_* entre $\varinjlim \mathfrak{F}[i(\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon)]$ et $\varinjlim (\alpha^{-1}\mathfrak{F})(U \setminus S)$ et entre $\varinjlim H^*[i(\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon), \mathfrak{F}]$ et $\varinjlim H^*[U \setminus S, \alpha^{-1}\mathfrak{F}]$, où U parcourt les voisinages ouverts de $\underline{\xi}_0$ dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$. Si on écrit alors les suites exactes de cohomologie à support relatives aux situations ci-dessus en tenant compte des annulations de $\varinjlim_{\epsilon} H^p(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F})$ et de $\mathcal{H}_S^p(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0}$ pour

$p > 0$, on obtient les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \varinjlim_{\epsilon} \Gamma_{i\Gamma_\epsilon}(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F}) & \longrightarrow & \varinjlim_{\epsilon} \mathfrak{F}(i\Omega_\epsilon) & \longrightarrow & \varinjlim_{\epsilon} \mathfrak{F}[i(\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon)] & \longrightarrow & \varinjlim_{\epsilon} H_{i\Gamma_\epsilon}^1(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F}) & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow u^* & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow i & & \downarrow u_1^* & & (*) \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{H}_S^0(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0} & \longrightarrow & (\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0} & \longrightarrow & \varinjlim (\alpha^{-1}\mathfrak{F})(U \setminus S) & \longrightarrow & \mathcal{H}_S^1(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où, en vertu du lemme des cinq, u^* et u_1^* sont bijectifs) et

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{\epsilon} H^p[i(\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon), \mathfrak{F}] & \xrightarrow{\sim} & \varinjlim_{\epsilon} H_{i\Gamma_\epsilon}^{p+1}(i\Omega_\epsilon, \mathfrak{F}) \\ \downarrow i_p & & \downarrow u_p^* \\ \varinjlim_{\epsilon} H^p(U \setminus S, \alpha^{-1}\mathfrak{F}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}_S^{p+1}(\alpha^{-1}\mathfrak{F})_{\underline{\xi}_0} \end{array} , \forall p \geq 1. (**)$$

Particularisons alors au cas où $\mathfrak{F} = \gamma_* \Theta$; le théorème B de Cartan assure [cf. (**)] l'annulation des $\mathfrak{H}_S^p(\alpha^{-1} \gamma_* \Theta)$ pour $p \geq 2$ vu que les $\gamma^{-1}[i(\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon)]$ sont convexes. De plus, le théorème de prolongement analytique assure aussi l'annulation de $\mathfrak{H}_S^0(\alpha^{-1} \gamma_* \Theta)$ et on a

$$\mathfrak{H}_S^1(\alpha^{-1} \gamma_* \Theta)_{\xi_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Theta[\gamma^{-1}(i\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_\epsilon)]}{\Theta(\gamma^{-1} i\Omega_\epsilon)} = \left(\frac{\Theta_2}{\Theta_0} \right)_{\xi_0}$$

en vertu de la proposition 2.2, ce qui suffit vu l'isomorphisme au sein de D_{iE} entre $\gamma_* \Theta$ et $R\gamma_* \Theta$ (cf. lemme précédent). \square

Démonstration du théorème 1. — La définition de $\Theta_{1,0}$ et les propositions 2.6 et 2.8 assurent l'exactitude des deux premières lignes et colonnes non nulles du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Theta_0 & \xlongequal{\quad} & \Theta_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Theta_1 & \longrightarrow & \Theta_2 & \longrightarrow & \lambda_* \mathfrak{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \Theta_{1,0} & \longrightarrow & \Theta_{2,0} & \longrightarrow & \lambda_* \mathfrak{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Le lemme des neuf assure alors l'exactitude de la dernière ligne, ce qui, en recourant à nouveau aux propositions 2.6 et 2.8 correspond au triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & \Theta_{1,0} & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 R\Gamma_S \alpha^{-1} R\gamma_* \Theta[1] & \longrightarrow & R\lambda_* \mathfrak{Z} = R\lambda_* R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \Theta[1]. \square
 \end{array}$$

LEMME 2.9. — La cohomologie du complexe $R\lambda_* \tau^{-1} \Theta$ est concentrée en degré 0.

Preuve. — Soit $0 \longrightarrow \tau^{-1} \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}$, une résolution flasque de $\tau^{-1} \mathcal{O}$. Il suffit de démontrer que pour tout $p > 0$ et tout $x \in S \cup (iE \setminus \{0\})$, le p -ème espace de cohomologie du complexe $0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(\lambda^{-1} U)$, où U parcourt une base de voisinages de x dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$ est nul. Si x appartient à $iE \setminus \{0\}$, c'est immédiat car τ est un homéomorphisme de $iE \setminus \{0\}$ sur lui-même. Si x appartient à S , la proposition 2.3 permet de conclure. \square

PROPOSITION 2.10. — *Tout ouvert ω de S dont l'enveloppe conique est convexe est acyclique pour $\mathcal{O}_{1,0}$ (i.e. vérifie $H^p(\omega, \mathcal{O}_{1,0}) = 0$ pour $p > 0$).*

Preuve. — Montrons d'abord que ω est acyclique pour \mathcal{O}_1 . Comme l'image directe et la restriction à un fermé conservent les faisceaux flasques, le lemme 2.9 assure que si $0 \rightarrow \tau^{-1} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$, est une résolution flasque de $\tau^{-1} \mathcal{O}$, $0 \rightarrow \mathcal{O}_1 \rightarrow (\lambda_* \mathcal{F})|_S$ est une résolution flasque de \mathcal{O}_1 . Vu l'exactitude du foncteur \varinjlim , on est donc ramené à prouver l'annulation des

$$\lim_{\vec{U}} H^p(\lambda^{-1} U, \tau^{-1} \mathcal{O}), \quad \forall p > 0,$$

où U parcourt une base de voisinages de ω dans $S \cup (iE \setminus \{0\})$. Comme on démontre sans peine que les voisinages U de ω tels que $U \setminus S$ soit convexe forment une base de voisinages de ω , la proposition 2.3 achève la première partie de cette démonstration.

Comme ω est contractile et que \mathcal{O}_0 est constant sur S , on a également $H^p(\omega, \mathcal{O}_0) = 0$ pour tout $p > 0$ et la suite exacte longue de cohomologie à sections globales sur ω déduite de la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{1,0} \longrightarrow 0$ permet de conclure. \square

3. Passage sur la sphère duale.

On examine la structure des images par T des trois sommets du triangle du théorème 1. Pour prouver que la cohomologie de $TR\Gamma_S \alpha^{-1} R\gamma_* \mathcal{O}$ est concentrée en un seul degré, on établit un théorème du type "Edge of the wedge" global à partir des résultats de M. Morimoto [13]. On prouve alors le théorème 2

grâce à la cohomologie de Čech et à l'obtention d'une formule permettant le calcul explicite de la cohomologie des complexes du type $T\mathcal{F}$.

PROPOSITION 3.1. — Dans D_{S^*} , on a un isomorphisme entre $TR\lambda_* \mathcal{Q}$ et $\mu_* \mathcal{C}$. En particulier, la cohomologie du complexe $R\alpha_* \beta_*^{-1} R\lambda_* R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}$ est concentrée en degré n .

Preuve. — On a successivement

$$\begin{aligned} TR\lambda_* \mathcal{Q} &\underset{(1)}{\simeq} (R\alpha_* \beta_*^{-1} R\lambda_* R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[n])^a \\ &\underset{(2)}{\simeq} (R\alpha_* R\nu_* \pi_*^{-1} R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[n])^a \\ &\simeq (R(\alpha \circ \nu)_* \pi_*^{-1} R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[n])^a \\ &\underset{(3)}{\simeq} (R\mu_* R\tau_* \pi_*^{-1} R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[n])^a \\ &\underset{(4)}{\simeq} R\mu_* (R\Gamma_{E \times S} \pi^{-1} \mathcal{O}[n])^a \simeq R\mu_* \mathcal{C} \underset{(8)}{\simeq} \mu_* \mathcal{C} \end{aligned}$$

en tenant compte en (1) de la proposition 2.6, en (2) de la proposition 2.3.11 de [9] (qui constitue à la fois une simplification et une généralisation du lemme 1.4.2. de [15]) que l'on peut appliquer au diagramme

$$\begin{array}{ccc} E \times S & \xleftarrow{\pi_*} & DE = (E \times S) \times D \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \nu \\ S & \xleftarrow{\beta_*} & D \end{array}$$

puisque λ et ν sont des applications fermées et que tous les ouverts de D et $E \times S$ sont paracompacts, en (4) de la proposition 1.2.2 de [15] et en (8) du fait que le faisceau \mathcal{C} est flasque (cf. [15] p. 473). \square

UN RESULTAT DU TYPE "EDGE OF THE WEDGE" 3.2. — Soient Γ un cône convexe saillant et fermé de E admettant $\{0\}$ pour sommet et d'intérieur non vide. Pour tout ouvert Ω de E contenant 0 tel que $\Gamma \setminus \Omega$ soit convexe et $\Gamma \cap \Omega$ soit borné, on a

$$H_{E+i\Gamma}^p(E + i\Omega, \mathcal{O}) = 0, \quad \forall p \neq n.$$

Preuve. — On démontre sans peine que les fermés Γ et $\Gamma \setminus \Omega$ vérifient les hypothèses des théorèmes 1 et 2 de M. Morimoto [13]. Cela étant, écrivons la suite exacte de cohomologie suivante :

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{E+i(\Gamma \setminus \Omega)}^p(E^{\mathbf{C}}, \Theta) &\longrightarrow H_{E+i\Gamma}^p(E^{\mathbf{C}}, \Theta) \\ &\longrightarrow H_{E+i\Gamma}^p(E+i\Omega, \Theta) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Le théorème de prolongement analytique permet d'annuler les groupes de cohomologie d'ordre 0 car $\Gamma \setminus \Omega$ et $\Gamma \cap \Omega$ sont d'intérieur non vide. Le théorème 1 de [13] permet d'annuler aussi les $H_{E+i\Gamma}^p(E^{\mathbf{C}}, \Theta)$ et $H_{E+i(\Gamma \setminus \Omega)}^p(E^{\mathbf{C}}, \Theta)$ pour $p \in \mathbf{N} \setminus \{n\}$, d'où on en déduit de suite les relations annoncées pour $p \neq n$ et $p \neq n-1$. Enfin, l'exactitude de la suite

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{E+i\Gamma}^{n-1}(E+i\Omega, \Theta) &\longrightarrow H_{E+i(\Gamma \setminus \Omega)}^n(E^{\mathbf{C}}, \Theta) \\ &\longrightarrow H_{E+i\Gamma}^n(E^{\mathbf{C}}, \Theta) \longrightarrow H_{E+i\Gamma}^n(E+i\Omega, \Theta) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et le théorème 2 de [13] fournissent l'annulation de

$$H_{E+i\Gamma}^{n-1}(E+i\Omega, \Theta). \quad \square$$

PROPOSITION 3.3. — Dans \mathbf{D}_{S^*} , on a un isomorphisme entre $\mathbf{TR}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \Theta[1]$ et $\mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \Theta)^a$. En particulier, la cohomologie du complexe

$$\mathbf{R}\Gamma_{S^*} \beta^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \Theta = (\mathbf{TR}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \Theta[1-n])^a \quad (*)$$

est concentrée en degré n .

Preuve. — La proposition 1.2.2. de [15] fournit directement

$$\mathbf{TR}\Gamma_S \alpha^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \Theta[1] \simeq (\mathbf{R}\Gamma_{S^*} \beta^{-1} \mathbf{R}\gamma_* \Theta[n])^a,$$

d'où on déduit de suite (*). Pour conclure, il suffit donc en vertu du lemme 2.7, de prouver l'annulation des $\mathcal{H}_{S^*}^k(\beta^{-1} \gamma_* \Theta)$ pour $k \neq n$. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\underline{\eta}_0 \in S^*$ tel que $|\eta_0| = 1$, posons $\Gamma_\epsilon = \{x \in E : \langle x, \eta_0 \rangle \leq -\epsilon(|x|^2 - \langle x, \eta_0 \rangle^2)^{1/2}\}$ et $\Omega_\epsilon = \{x \in E : \langle x, \eta_0 \rangle > -\epsilon\}$. Vu la proposition 1.2.3. de [15], il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{S^*}^p(\beta^{-1} \gamma_* \Theta)_{\underline{\eta}_0} &\simeq \lim_{\epsilon > 0} H_{i(\Gamma_\epsilon \cap \Omega_\epsilon)}^p(iE, \gamma_* \Theta) \\ &\simeq \lim_{\epsilon > 0} H_{E+i(\Gamma_\epsilon \cap \Omega_\epsilon)}^p(E^{\mathbf{C}}, \Theta) \end{aligned}$$

et comme on a $H^p_{E+i(\Gamma_\epsilon \cap \Omega_\epsilon)}(E^{\mathbb{C}}, \Theta) \simeq H^p_{E+i\Gamma_\epsilon}(E + i\Omega_\epsilon, \Theta)$ en vertu du théorème d'excision, le résultat précédent permet de conclure. \square

LEMME 3.4. — *Pour tout faisceau \mathfrak{F} sur S et tout $\underline{\eta}_0 \in S^*$, on a un isomorphisme naturel*

$$H^p(\mathbf{R}\alpha_* \beta^{-1} \mathfrak{F}^a)_{\underline{\eta}_0} \simeq \varinjlim_{\epsilon > 0} H^p(S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp, \mathfrak{F}), \quad \forall p$$

où $\omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}$ désigne un ouvert de S^* contenant $\underline{\eta}_0$ dont l'enveloppe conique est convexe et polyédrique et vérifiant

$$\text{diam} \left(\left\{ \eta - \frac{\eta_0}{|\eta_0|} : |\eta| = 1, \eta \in \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0} \right\} \right) \leq \epsilon.$$

Preuve. — Soient $0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$ et $0 \rightarrow \beta_*^{-1} \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{H}_\bullet$ les résolutions canoniques de \mathfrak{F} et $\beta_*^{-1} \mathfrak{F}$. Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que η_0 s'écrit $(0, \dots, 0, 1)$ et, pour fixer les idées, prenons pour $\omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}$ la trace sur S^* de l'intérieur

du cône $\left\{ \sum_{j=1}^n r_j \eta_j : r_j > 0 \right\}$ avec

$$\eta_{j < n} = (1 + \epsilon^2)^{-1/2} (0, \dots, 0, \epsilon, 0, \dots, 0, 1)$$

$$\eta_n = [1 + (n - 1) \epsilon^2]^{-1/2} (-\epsilon, \dots, -\epsilon, 1).$$

On démontre aisément l'existence d'opérateurs linéaires u_ϵ et $u_{\bullet, \epsilon}$ rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \mathfrak{F}(S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp) & \longrightarrow & \mathcal{G}_\bullet(S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp) \\ \downarrow u_\epsilon & & \downarrow u_{\bullet, \epsilon} \\ 0 \longrightarrow \beta_*^{-1} \mathfrak{F}^a(\alpha_*^{-1} \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_\bullet^a(\alpha_*^{-1} \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}) \end{array} \quad \forall \epsilon \in]0, 1[$$

puisque β_* est un opérateur ouvert, que $\omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}$ est connexe et que, l'on a successivement

$$\begin{aligned} -\beta_* \alpha_*^{-1}(\omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}) &= \beta_* (\{(\underline{\xi}, \underline{\eta}) : \underline{\eta} \in \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}, \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle < 0\}) \\ &= \bigcup_{\underline{\eta} \in \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}} \{\underline{\xi} : \langle \underline{\xi}, \underline{\eta} \rangle < 0\} = \mathbb{C} \left[\bigcap_{\underline{\eta} \in \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}} \{\underline{\eta}\}^\perp \right] = S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp. \end{aligned}$$

Par passage aux limites inductives lorsque ϵ tend vers 0, on obtient le diagramme commutatif de complexes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \dots \rightarrow 0 \rightarrow \lim_{\epsilon > 0} \mathcal{G}_\epsilon(S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp) & & \\ & \downarrow u. & \\ \dots \rightarrow 0 \rightarrow (\alpha_{.*} \mathcal{H}^a)_{\underline{\eta}_0} & (*) & \end{array}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $u.$ est un quasi isomorphisme (i.e. induit des isomorphismes en cohomologie). Une première application du théorème II. 10.5 de [1] en prenant respectivement pour X, φ, \mathcal{H} et A , la sphère S , la famille des fermés de S , les ensembles $S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp$ et l'hémisphère fermé

$$F = \{ \underline{\xi} \in S : \langle \underline{\xi}, \underline{\eta}_0 \rangle \geq 0 \}$$

fournit des isomorphismes

$$\lim_{\epsilon > 0} H^p(S \setminus \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp, \mathcal{H}) \simeq H^p(F, \mathcal{H}|_F), \quad \forall p.$$

Comme les groupes de cohomologie de (*) s'écrivent

$$\lim_{\epsilon > 0} H^p(\alpha_{.*}^{-1} \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}, \beta_{.*}^{-1} \mathcal{H}^a),$$

une seconde application de ce théorème procure

$$\lim_{\epsilon > 0} H^p(\alpha_{.*}^{-1} \omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}, \beta_{.*}^{-1} \mathcal{H}^a) \simeq H^p(\alpha_{.*}^{-1} \{ \underline{\eta}_0 \}, (\beta_{.*}^{-1} \mathcal{H}^a)|_{\alpha_{.*}^{-1} \{ \underline{\eta}_0 \}}), \quad \forall p,$$

ce qui suffit puisque $\beta_{.*}$ est un homéomorphisme de $\alpha_{.*}^{-1} \{ \underline{\eta}_0 \}$ sur F . \square

COROLLAIRE 3.5. — Le faisceau

$$H^n(\mathbf{R} \alpha_{.*} \beta_{.*}^{-1} \mathcal{O}_{1,0}) = \mathbf{R}^n \alpha_{.*} \beta_{.*}^{-1} \mathcal{O}_{1,0}$$

est nul.

Preuve. — Soit $\underline{\eta}_0$ un point de S^* et reprenons les notations du lemme précédent. Pour tout $\epsilon > 0$, considérons un recouvrement $\{ \gamma_{j,\epsilon} : 1 \leq j \leq n \}$ de $E \setminus [\{0\} \cup \Gamma_{\omega_{\epsilon, \underline{\eta}_0}^\perp}]$ par n cônes ouverts convexes dont nous notons $\omega_{j,\epsilon}$ les traces sur S et

posons $\mathcal{U}_\epsilon = \{\omega_{j,\epsilon} : 1 \leq j \leq n\}$ (on vérifie aisément que c'est toujours possible puisque $\Gamma_{\omega_{\epsilon,\eta_0}^\perp}$ est polyédrique). La conclusion découle alors de suite du lemme précédent, de la proposition 2.10 et du théorème de J. Leray sur la cohomologie de Čech car on a

$$(R^n \alpha_* \beta_*^{-1} \mathcal{O}_{1,0})_{\eta_0} \simeq \varinjlim_{\epsilon > 0} \check{H}^n(\mathcal{U}_\epsilon, \mathcal{O}_{1,0}) = 0. \quad \square.$$

Démonstration du théorème 2. — Appliquons le foncteur T au triangle obtenu dans le théorème 1. En tenant compte des propositions 3.1 et 3.3 qui assurent la concentration en degré 0 de la cohomologie des complexes $TR\lambda_* R\Gamma_{E \times S} \tau^{-1} \mathcal{O}[1] = TR\lambda_* \mathcal{B}$ et $TR\Gamma_S \alpha^{-1} R\gamma_* \mathcal{O}[1]$, il vient

$$\begin{array}{ccc} & T \mathcal{O}_{1,0} & \\ \swarrow & & \searrow + 1 \\ \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mu_* \mathcal{C} \end{array}$$

La suite exacte longue de cohomologie déduite de ce triangle procure l'annulation des $H^p(T \mathcal{O}_{1,0}) = (R^{p+n-1} \alpha_*) \beta_*^{-1} \mathcal{O}_{1,0}^a$ pour $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ et la conclusion découle alors de suite du corollaire 3.5. \square

PROPOSITION 3.6. — *On a $(R^p \beta_*) \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O}) = 0$ pour tout $p \neq 0$ et il existe une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \alpha_* \mathcal{O}_0 \longrightarrow \gamma_* \mathcal{B} \longrightarrow \beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O}) \longrightarrow 0.$$

Preuve. — Appliquons la proposition 1.2.5 de [15] au faisceau $\gamma_* \mathcal{O}$ en tenant compte du lemme 2.7. On obtient le triangle suivant aux orientations près :

$$\begin{array}{ccc} & \gamma_* \mathcal{O}|_0 & \\ \swarrow & & \searrow + 1 \\ R\Gamma_{\{0\}} R\gamma_* \mathcal{O}[n] & \longrightarrow & R\beta_* R\Gamma_{S^*} \beta^{-1} R\gamma_* \mathcal{O}[n]. \end{array}$$

On vérifie immédiatement l'existence d'un isomorphisme entre

$\gamma_* \Theta|_0$ et $\alpha_* \Theta_0$ au moyen de la proposition 2.2.a. Comme on a $R^p \gamma_* \Theta = 0$ pour $p \neq 0$, on obtient

$$R\Gamma_{\{0\}} R\gamma_* \Theta[n] = R\gamma_* R\Gamma_E \Theta[n] \stackrel{(1)}{=} R\gamma_* \mathcal{B} \stackrel{(2)}{=} \gamma_* \mathcal{B},$$

si on tient compte en (1) du fait que E est pur de codimension n dans E^c pour Θ et en (2) du fait que \mathcal{B} est un faisceau flasque. La suite exacte de cohomologie associée au triangle ci-dessus assure alors que la cohomologie de $R\beta_* R\Gamma_{S^*} \beta^{-1} R\gamma_* \Theta[n]$ est concentrée en degré 0 et -1 . D'où la conclusion grâce à la proposition 3.3 car $H^{-1}(R\beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \Theta))$ est visiblement nul. \square

PROPOSITION 3.7. — *Les suites*

$$0 \longrightarrow \beta_* \mathcal{C}^t \longrightarrow \beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \Theta)^a \longrightarrow \beta_* \mu_* \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \gamma_* \mathcal{A} \longrightarrow \gamma_* \mathcal{B} \longrightarrow \gamma_* \pi_* \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Preuve. — Si on applique le foncteur β_* à la suite exacte obtenue dans le théorème 2, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \beta_* \mathcal{C}^t \longrightarrow \beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \Theta)^a \longrightarrow \beta_* \mu_* \mathcal{C} \longrightarrow (R^1 \beta_*) \mathcal{C}^t \longrightarrow \dots$$

Or, il vient successivement

$$\begin{aligned} (R^1 \beta_*) \mathcal{C}^t &= H^1(R\beta_* T \Theta_{1,0}) \\ &= H^1(R(\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \Theta_{1,0}^a [n-1]) \\ &\stackrel{(*)}{=} H^n(R\alpha_* R\beta_* \beta^{-1} \Theta_{1,0}^a) \stackrel{(**)}{=} H^n(R\alpha_* \Theta_{1,0}^a) \end{aligned}$$

en tenant compte en (*) de la relation $\beta \circ \alpha_* = \alpha \circ \beta_*$ et en (**) du fait que β_* est une application propre séparante et à fibre contractile, ce qui entraîne $R\mathcal{O}ist_{\beta}(\Theta_{1,0}^a) = 0$. On vérifie de suite l'existence d'un isomorphisme entre $H^n(R\alpha_* \Theta_{1,0}^a)$ et $H^n(S, \Theta_{1,0}^a)$ sur le seul ouvert non vide de $\{0\}$. Cela étant, considérons un recouvrement \mathcal{U} de S par $n+1$ ouverts dont l'enveloppe conique est convexe. Le lemme 1 de [10] assure alors que l'intersection de ces ouverts est vide et comme en vertu de la

proposition 2.10, on peut appliquer le théorème de J. Leray relatif à la cohomologie de Čech, il vient

$$[(R^1 \beta_*) \mathcal{C}^t](0) \simeq \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{1,0}^a) \simeq 0,$$

ce qui suffit.

Pour la deuxième partie de l'énoncé, appliquons le foncteur γ_* à la suite exacte (*) du chapitre 1. En procédant comme ci-dessus, on vérifie de suite qu'il suffit de prouver que $H^1(E, \mathcal{A})$ est nul, ce qui découle de suite du théorème de H. Grauert déjà invoqué. \square

PROPOSITION 3.8. — Il existe un morphisme canonique b de $\gamma_* \mathcal{A}$ dans $\beta_* \mathcal{C}^t$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \gamma_* \mathcal{A} & \xrightarrow{b} & \beta_* \mathcal{C}^t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma_* \mathcal{B} & \longrightarrow & \beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O})^a \end{array}$$

Preuve. — Appliquons le foncteur $\mathcal{H} \rightarrow (\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \mathcal{H}^a$ au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{1,0} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_2 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{2,0} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Les deux lignes étant exactes, on obtient au niveau des $(n - 1)$ -èmes foncteurs dérivés le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R^{n-1}(\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \mathcal{O}_1^a & \xrightarrow{b} & R^{n-1}(\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \mathcal{O}_{1,0}^a \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{n-1}(\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \mathcal{O}_2^a & \longrightarrow & R^{n-1}(\beta \circ \alpha)_* \beta^{-1} \mathcal{O}_{2,0}^a \end{array}$$

dont les sommets s'écrivent encore $H^0(\mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_1)$, $H^0(\mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_2)$ ainsi que $\beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n(\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O})^a$ et $\beta_* \mu_* \mathcal{C}$ [cf. propositions 3.1 et 3.3]. Remarquons tout d'abord l'égalité $H^0(\mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_1) = \gamma_* \mathcal{A}$.

En effet, il vient successivement

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_1 &\stackrel{(1)}{=} \mathbf{R}\alpha_* \mathbf{R}\beta_* \beta_*^{-1} [(\mathbf{R}\lambda_* \tau^{-1} \mathcal{O})|_S]^a [n-1] \\
 &\stackrel{(2)}{=} \mathbf{R}\alpha_* [(\mathbf{R}\lambda_* \tau^{-1} \mathcal{O})|_S]^a [n-1] \\
 &\stackrel{(3)}{=} \mathbf{R}\alpha_* \mathbf{R}\lambda_* (\tau^{-1} \mathcal{O})|_{E \times S} [n-1] \\
 &\stackrel{(4)}{=} \mathbf{R}\gamma_* \mathbf{R}\tau_* \tau^{-1} \mathcal{O} [n-1]
 \end{aligned}$$

si on tient compte en (1) de l'égalité $\beta \circ \alpha_* = \alpha \circ \beta_*$ et de la proposition 2.9, en (2) du fait que β_* est une application propre, séparée et à fibre contractile entre espaces paracompacts (ce qui entraîne $\mathbf{R}\mathcal{O}ist_{\beta_*} = 0$), en (3) de la relation $\mathbf{R}\alpha_* a^{-1} = \mathbf{R}(\alpha \circ a)_* = \mathbf{R}\alpha_*$ et des égalités

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{R}\lambda_* \mathcal{F})|_S]_{\underline{\xi}} &= (\mathbf{R}\lambda_* \mathcal{F})_{\underline{\xi}} = \mathbf{R}\Gamma(\lambda^{-1} \underline{\xi}, \mathcal{F}_{\underline{\xi}}) \\
 &= \mathbf{R}\Gamma(\lambda^{-1} \underline{\xi}, (\mathcal{F}|_{E \times S})_{\underline{\xi}}) = (\mathbf{R}\lambda_* \mathcal{F}|_{E \times S})_{\underline{\xi}}, \quad \forall \underline{\xi} \in S
 \end{aligned}$$

valables pour tout faisceau \mathcal{F} sur $(E \times S) \cup (E^c \setminus E)$ puisque tous les ouverts de cet espace sont paracompacts et que λ est fermé et en (4) de l'égalité $\gamma \circ \tau = \alpha \circ \lambda$. Cela étant, considérons le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{R}\mathcal{O}ist_{\tau}(\mathcal{F}) & \\
 & \swarrow & \searrow +1 \\
 \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbf{R}\tau_* \tau^{-1} \mathcal{F}
 \end{array}$$

où \mathcal{F} désigne un faisceau sur \mathbf{R} . Comme τ est fermé et que tous les ouverts de $E \times S$ et de E sont paracompacts, on a également

$$\mathbf{R}\mathcal{O}ist_{\tau}(\mathcal{F})_x = \mathbf{R}\Gamma(\tau^{-1}(x)) \longrightarrow \{x\}, \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x[-n], \quad \forall x \in E$$

puisque $\tau^{-1}(x)$ est une sphère de dimension $n-1$. Ainsi, $\tau : S \longrightarrow E$ est pur de codimension $n-1$ et on a $\mathbf{R}^p \tau_* \tau^{-1} \mathcal{F} = \mathcal{F}$ ou 0 selon que p appartient ou non à $\{0, n-1\}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^0(\mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_1) &= \mathbf{R}^{n-1} (\gamma \circ \tau)_* \tau^{-1} \mathcal{O} \\
 &= \mathbf{R}^{n-1-(n-1)} \gamma_* (\mathbf{R}^{n-1} \tau_* \tau^{-1} \mathcal{O}) = \gamma_* \mathcal{O}. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit donc de prouver que l'on a $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}\beta_* \mathbf{T} \mathcal{O}_2) = \gamma_* \mathcal{O}$. On vérifie immédiatement l'égalité $\mathcal{O}_2 = \mathbf{R}j_* (\mathbf{R}\gamma_* \mathcal{O}|_{E \setminus \{0\}})|_S$ au sein de \mathbf{D}_S . Il vient alors en

désignant par I_1 et I_2 les inclusions $S \hookrightarrow S \cup (iE \setminus \{0\})$ et $iE \setminus \{0\} \hookrightarrow iE$

$$\begin{aligned}
 R\beta_* T \mathcal{O}_2 &= (R\alpha_* R\beta_* \beta^{-1} I_1^{-1} Rj_* I_2^{-1} R\gamma_* \mathcal{O}) [n-1] \\
 (1) &= R\alpha_* I_1^{-1} Rj_* I_2^{-1} R\gamma_* \mathcal{O} [n-1] \\
 (2) &= (R\alpha_* Rj_* I_2^{-1} R\gamma_* \mathcal{O})|_0 [n-1] \\
 (3) &= (RI_2 I_2^{-1} R\gamma_* \mathcal{O})|_0 [n-1] \\
 (4) &
 \end{aligned}$$

en tenant compte en (1) de l'égalité $\alpha \circ \beta_* = \beta \circ \alpha_*$, en (2) de l'annulation de $R\mathcal{O}ist_{\beta_*}$ et de l'égalité $R\alpha_* = R\alpha_*$ (cf. [15] p. 278), en (3) du lemme 1.4.2 de [15] et en (4) de l'égalité $\alpha \circ j = I_2$. Comme I_2 est un plongement, il vient $R\mathcal{O}ist_{I_2}(\mathcal{F}) = R\Gamma_{\{0\}}(\mathcal{F})$ pour tout faisceau \mathcal{F} sur iE et comme γ est pur de codimension 0 et E pur de codimension n dans E^C par rapport à \mathcal{O} , il vient

$$H^0(R\beta_* T \mathcal{O}_2) = H^n(R\gamma_* R\Gamma_E \mathcal{O}) = R\gamma_* \mathcal{B} = \gamma_* \mathcal{B}$$

puisque \mathcal{B} est flasque. \square

Preuve du théorème 3. – Le morphisme b est bien sûr celui du résultat précédent. Cela étant, en combinant les propositions 3.6, 3.7 et 3.8 et en tenant compte de l'égalité $\beta \circ \mu = \gamma \circ \pi$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \alpha_* \mathcal{O}_0 & \longrightarrow & \gamma_* \mathcal{A} & \longrightarrow & \beta_* \mathcal{C}^f \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \alpha_* \mathcal{O}_0 & \longrightarrow & \gamma_* \mathcal{B} & \longrightarrow & \beta_* \mathcal{H}_{S^*}^n (\beta^{-1} \gamma_* \mathcal{O})^a \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \gamma_* \pi_* \mathcal{C} & \xlongequal{\quad} & \beta_* \mu_* \mathcal{C} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où les colonnes et la ligne du milieu sont exactes. D'où la conclusion par le lemme des neuf. Le cas particulier découle de suite de la connexité de S . \square

4. Fronts d'onde à l'infini.

Nous obtenons tout d'abord plusieurs suites exactes sur S qui sont en quelque sorte "duales" de celles obtenues sur S^* dans la section précédente. On démontre ensuite point par point le théorème 4.

PROPOSITION 4.1. — *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \lambda_* \mathcal{Q} \longrightarrow \alpha^{-1} \beta_* \mu_* \mathcal{C} \longrightarrow \beta_{.*} \alpha_*^{-1} \mu_* \mathcal{C} \longrightarrow 0.$$

De plus, le faisceau $(R^p \beta_{.*})(\alpha_*^{-1} \mu_* \mathcal{C})$ est nul pour tout $p \neq 0$.

Preuve. — La proposition 1.4.4. de [15] appliquée au faisceau $(\lambda_* \mathcal{Q})^a$ fournit (aux orientations près) le triangle

$$\begin{array}{ccc} & \lambda_* \mathcal{Q} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \alpha^{-1} R\beta_* T\lambda_* \mathcal{Q} & \longrightarrow & R\beta_{.*} \alpha_*^{-1} T\lambda_* \mathcal{Q}. \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ + 1 \end{array}$$

En vertu de la proposition 3.1 et du caractère flasque du faisceau $\mu_* \mathcal{C}$, il vient $\alpha^{-1} R\beta_* T\lambda_* \mathcal{Q} \simeq \alpha^{-1} \beta_* \mu_* \mathcal{C}$ et on en déduit immédiatement que la cohomologie de $R\beta_{.*} \alpha_*^{-1} T\lambda_* \mathcal{Q}$ est concentrée en degrés -1 et 0 . Comme ce complexe s'écrit encore $R\beta_{.*} \alpha_*^{-1} \mu_* \mathcal{C}$, sa cohomologie est en fait concentrée en degré 0 et s'écrit donc plus simplement $\beta_{.*} \alpha_*^{-1} \mu_* \mathcal{C}$. D'où la conclusion. \square

PROPOSITION 4.2. — *Il existe des morphismes de faisceaux naturels qui rendent le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} \Theta_1^a & \longrightarrow & \alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{A} & \longrightarrow & \beta_{.*} \alpha_*^{-1} \mathcal{C}^t & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \Theta_{1,0}^a & \longrightarrow & \alpha^{-1} \beta_* \mathcal{C}^t & \longrightarrow & \beta_{.*} \alpha_*^{-1} \mathcal{C}^t \longrightarrow 0 \end{array}$$

commutatif et les deux lignes exactes. De plus, le faisceau $(R^p \beta_{**})(\alpha^{-1} \mathcal{C}^t)$ est nul pour tout $p \neq 0$.

Preuve. — Appliquons à nouveau la proposition 1.4.4 de [15] mais cette fois à \mathcal{O}_1^a et à $\mathcal{O}_{1,0}^a$. Comme sa démonstration repose sur la théorie des foncteurs dérivés (qui conservent les morphismes de triangles : cf. [5]) et comme il existe un morphisme de faisceaux naturel $\mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{1,0}$, on obtient en tenant compte du théorème 2 le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{O}_1^a & \longrightarrow & H^0(\alpha^{-1} R\beta_* T \mathcal{O}_1) & \longrightarrow & H^0(R\beta_* \alpha^{-1} T \mathcal{O}_1) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{1,0}^a & \longrightarrow & \alpha^{-1} \beta_* \mathcal{C}^t & \longrightarrow & \beta_{**} \alpha^{-1} \mathcal{C}^t & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Grâce à un raisonnement semblable à celui de la proposition 3.7, on a tôt fait de montrer que la cohomologie de $R\beta_* \mathcal{C}^t$ est concentrée en degré 0 et on démontre que $(R^p \beta_{**})\alpha^{-1} \mathcal{C}^t = 0$ pour tout $p \neq 0$ comme on l'a fait pour $R\beta_* \alpha^{-1} T\lambda_* \mathcal{Z}$ dans la proposition précédente.

La formule (*) de la proposition 3.8 et l'exactitude du foncteur image inverse fournissent de suite

$$H^0(\alpha^{-1} R\beta_* T \mathcal{O}_1) = \alpha^{-1} H^0(R\beta_* T \mathcal{O}_1) = \alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{A}.$$

D'où la conclusion. \square

PROPOSITION 4.3. — *On a une suite exacte de faisceaux et de morphismes canoniques*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^a \longrightarrow \alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{A} \longrightarrow \beta_{**} \alpha^{-1} \mathcal{C}^t \longrightarrow 0.$$

Preuve. — La définition de $\mathcal{O}_{1,0}$ et la proposition précédente fournissent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_0^a & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^a & \longrightarrow & \mathcal{O}_{1,0}^a \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_0^a & \longrightarrow & \alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{A} & \longrightarrow & \alpha^{-1} \beta_* \mathcal{C}^t \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \beta_{.*} \alpha^{-1} \mathcal{C}^t & \equiv & \beta_{.*} \alpha^{-1} \mathcal{C}^t \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où la ligne du milieu s'obtient à partir du théorème 3 en tenant compte du fait que \mathcal{O}_0 est un faisceau constant. Ainsi toutes les lignes et la dernière colonne de ce diagramme sont exactes et le lemme des neuf permet à nouveau de conclure. \square

Preuve du théorème 4. — Le point a) constitue en fait un théorème de décomposition dont nous donnons une démonstration directe dans [10] (*).

Démontrons ensuite le point b). Comme ω est connexe et comme $\alpha: S \rightarrow \{0\}$ est une application ouverte on a $\alpha^{-1} \gamma_* \mathcal{A}(\omega) \simeq \mathcal{A}(E)$ ainsi que $\alpha_* \beta_*^{-1}(-\omega) = S^* \setminus \omega^\perp$ et la proposition 4.3. assure l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^a(-\omega) \longrightarrow \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{C}^t(S^* \setminus \omega^\perp). \quad (*)$$

Le théorème 3 fournit $f \in \mathcal{A}(E)$ défini modulo l'addition d'une fonction holomorphe sur un tube ouvert incluant E tel qu'on ait $g = b(f)$. On déduit alors de (*) que $\text{supp}_{\mathcal{C}^t} g$ est inclus

(*) Au cours d'une discussion récente que nous avons eue avec lui, le Professeur A. Kaneko nous a signalé que M. Sato possédait déjà une preuve de ce résultat basée sur la théorie des hyperfonctions de Fourier.

dans ω^\perp si et seulement si f est l'image d'un élément de $\mathcal{O}_1(\omega)$, c'est-à-dire si et seulement si le voisinage complexe de E sur lequel f s'étend en fonction holomorphe inclut un tube de profil $E + i\Gamma_\omega$. L'unicité de f s'obtient grâce au théorème de prolongement analytique.

L'implication \Leftarrow du point c) est une conséquence directe de b) et pour prouver sa réciproque, désignons par $\omega_{\epsilon, \eta}$ un voisinage de η dans S^* inclus dans $S^* \setminus W.F. \text{ } ^t(f)$ et semblable à celui décrit dans le lemme 3.4. En vertu de ce lemme, on a $\mathcal{C}_\eta^f \simeq \varinjlim_{\epsilon > 0} H^{n-1}(S \setminus \omega_{\epsilon, \eta}^\perp, \mathcal{O}_{1,0})$ et comme $\eta \notin W.F. \text{ } ^t(f)$, il

existe $\epsilon_0 > 0$ tel que l'image de f dans $H^{n-1}(S \setminus \omega_{\epsilon_0, \eta}^\perp, \mathcal{O}_{1,0})$ soit nulle. Si on désigne alors par \mathcal{U} un recouvrement ouvert de $S \setminus \omega_{\epsilon_0, \eta}^\perp$ par n ouverts $\omega_j \ni -\eta$ dont l'enveloppe conique est convexe, ce dernier espace s'écrit encore $\check{H}^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{1,0})$ vu la proposition 2.10 et le théorème de J. Leray relatif à la cohomologie de Čech. On en déduit de suite que f s'écrit dans cet espace comme un $n - 2$ cobord de Čech c'est-à-dire qu'il existe des $f_j \in \mathcal{O}_{1,0}(\bigcap_{k \neq j} \omega_k)$ tels que $f = \sum_{j=1}^n f_j$ sur E , ce qui suffit puisque les $\bigcap_{k \neq j} \omega_k$ contiennent $-\eta$, ce qui implique $(\bigcap_{k \neq j} \omega_k)^\perp \not\supset \eta$. \square

Remarque 4.4. — Le point a) permet en fait de donner une forme explicite au morphisme b dont le théorème 3 affirme l'existence. Par la proposition 1.4.4. de [15] et le théorème 2, on a en effet

$$\begin{aligned} \beta_* \mathcal{C}^f &= R\beta_* T \mathcal{O}_{1,0} = R\alpha_* \mathcal{O}_{1,0} [n - 1] \\ &= (R^{n-1} \alpha_*) \mathcal{O}_{1,0} = H^{n-1}(S, \mathcal{O}_{1,0}). \end{aligned}$$

Dès lors, si les $\omega'_j (j = 1, \dots, n + 1)$ sont des ouverts qui recouvrent S^* et vérifient $S = \bigcup_{j=1}^{n+1} (\bigcap_{k \neq j} \omega'_k)^\perp$, posons $\mathcal{U} = \{(\bigcap_{k \neq j} \omega'_k)^\perp : 1 \leq j \leq n + 1\}$. Il vient alors en raisonnant comme ci-dessus :

$$\beta_* \mathcal{C}^f = H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{1,0})$$

et pour tout $f \in \mathcal{A}(E)$, $b(f)$ apparaît comme la décomposition de f obtenue dans [10].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.E. BREDON, *Sheaf theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1967.
- [2] J. BROS et D. IAGOLNITZER, Tuboïdes dans \mathbf{C}^n et généralisation d'un théorème de Cartan et Grauert, *Ann. Inst. Fourier*, XXVI, 1 (1976), 49-72.
- [3] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et Théorie des Faisceaux* Herman, Paris, 1970.
- [4] R. GRAUERT, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, *Ann. of Math.*, 68 (1958), 460-472.
- [5] R. HARTSHORNE, Residues and duality, *Lecture Notes in Math.* n° 20, Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [6] L. HORMANDER, *An Introduction to complex Analysis in several Variables*, North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [7] A. KANEKO, *Introduction à la théorie des hyperfonctions I, II*, Edition ronéotypée, Labo. Math. pures Université scientifique et médicale, Grenoble, 1978.
- [8] M. KASHIWARA and T. KAWAI, Second microlocalization and asymptotic expansions, *Lect. Notes in Physics* n° 126 (1979), 21-76.
- [9] M. KASHIWARA, T. KAWAI and T. KIMURA, Daisû kaiseki gaku no kisô, Kinokuniya shoten, Tokyo, 1980, (en japonais).
- [10] J.-L. LIEUTENANT, Decomposition of analytic functions on \mathbf{R}^n in sum of holomorphic functions in conic tubes, *Bull. Soc. Royale Sci. Liège* 49 (1980), 347-357.
- [11] J.-L. LIEUTENANT, Decomposition of functions holomorphic in tuboids, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 49 (1980), 402-404.
- [12] J.-L. LIEUTENANT, Décomposition des singularités des fonctions analytiques, *C.R.A.S., Paris*, 294, I, 16 (1982), 529-532.
- [13] M. MORIMOTO, Sur les ultradistributions cohomologiques, *Ann. Inst. Fourier*, XIX-2 (1969), 129-153.
- [14] M. SATO, Hyperfunctions and partial differential equations, *Proc. Int. Conf. on Functional Analysis*, Tokyo, (1969), 91-94.

- [15] M. SATO, T. KAWAI and M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lect. Notes in Math.*, n° 287 (1973), 265-529.
- [16] P. SCHAPIRA, Théorie des hyperfonctions, *Lect. Notes in Math.* n° 126, Springer Verlag, Berlin, 1970.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1982.

Jean-Louis LIEUTENANT,
Chargé de Recherches du F.N.R.S.
Institut de Mathématiques, D.1
15, avenue des Tilleuls
4000 Liège (Belgique).