

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NGHIÊM XUÂN HAI

La transformation de Fourier Plancherel analytique des groupes de Lie. II : les groupes nilpotents

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 1 (1984), p. 1-37

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LA TRANSFORMATION
DE FOURIER-PLANCHEREL ANALYTIQUE
DES GROUPES DE LIE.
II. LES GROUPES NILPOTENTS**

par **NGHIÊM XUÂN HAI**

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce travail [5], référencée I dans la suite, a été construite la représentation π de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe nilpotent G par des opérateurs différentiels rationnels. Cette représentation est liée à la conjecture de Gelfand et Kirillov [4,6]. Par exponentiation de cette représentation infinitésimale, on obtient directement la Transformation de Fourier-Plancherel du groupe, avec de très bonnes propriétés : analyticité, décroissance à l'infini, propriétés différentielles vis-à-vis des opérateurs invariants à gauche ou à droite sur le groupe. On donne ensuite l'interprétation en termes d'opérateurs Fourier-Intégraux pour obtenir des résultats très proches du cas commutatif. On illustre la Théorie par son application au cas des algèbres de Lie ayant un idéal commutatif assez grand, c'est-à-dire tel que l'action adjointe dans le corps enveloppant de cet idéal sépare un supplémentaire de cet idéal. Les résultats sont particulièrement simples pour les groupes de degré de nilpotence ≤ 2 et les groupes triangulaires de matrices.

La représentation π réalise \mathfrak{g} par des opérateurs différentiels antisymétriques du premier ordre sur un ouvert affine $\mathfrak{V} = \Omega \times \mathbf{R}^M$ où Ω est l'ouvert de Zariski de \mathbf{R}^R défini par la non-nullité d'un polynôme $\delta_n(z)$. Les G -orbites dans \mathfrak{V} sont de la forme $\{z\} \times \mathbf{R}^M$ et la mesure de Lebesgue est G -invariante. Il existe une mesure canonique sur Ω qui est à densité et s'écrit $d\mu(z) = |\delta(z)| dz$; elle servira dans ce qui suit.

On note Π la représentation unitaire de G dans l'espace \mathcal{H} des fonctions de carré sommable sur \mathcal{V} obtenue par exponentiation de π . La représentation Π se décompose suivant les G -orbites dans \mathcal{V} en une somme directe continue de représentations unitaires irréductibles de G dans les espaces de Hilbert \mathcal{H}_z des fonctions de carré sommables sur les G -orbites qui sont des espaces \mathbf{R}^M . L'espace Ω muni de $d\mu(z)$ apparaît comme le dual réduit de G . Ceci est l'objet du Théorème 1 et est traité au chapitre I.

Au chapitre II, on étudie les propriétés différentielles et analytiques de Π et de son noyau. Du fait de sa définition analytique comme exponentielle de la représentation π , on a explicitement les équations différentielles satisfaites par le noyau quand on fait agir l'algèbre enveloppante à gauche ou à droite: ces équations font simplement intervenir π ou sa transposée. En particulier, les éléments de matrices généralisés, qui sont des valeurs du noyau, sont des fonctions propres d'une algèbre commutative d'opérateurs différentiels sur le groupe définie par l'action à gauche et à droite d'une sous-algèbre commutative de l'algèbre enveloppante (qu'on a déterminée dans [5]). Ainsi, sur la variété du groupe G , on a mis en évidence une algèbre commutative d'opérateurs différentiels par lesquels on peut faire une analyse spectrale de l'espace des fonctions de carré sommable sur le groupe (Théorème de Parseval). Ceci est une question posée dans [9]. La réponse est dans le Théorème 2.

Au chapitre III, on aborde une interprétation très simple de la représentation π en termes d'opérateurs Fourier-Intégraux. On peut dire que dans la partie I de ce travail [5], on a établi l'existence d'une représentation π' de \mathfrak{g} par des opérateurs Fourier-Intégraux qui sont rationnels et antisymétriques; l'exponentielle de cette représentation infinitésimale est une représentation du groupe par un opérateur Fourier-Intégral défini comme l'exponentielle d'une phase qui est encore rationnelle (plus exactement la phase est polynômiale, à une localisation par un invariant près). Cette phase Ψ est connue avec assez de précision et on peut calculer la Transformée de l'algèbre des opérateurs différentiels polynômiaux sur G . On montre que la formule d'inversion s'écrit comme dans le cas commutatif avec la phase opposée. Ainsi, on a obtenu une généralisation de la transformation de Fourier commutative

grâce aux opérateurs Fourier-Intégraux à phase rationnelle (au lieu d'être bilinéaire). Au premier ordre la phase Ψ est bilinéaire, les variables conjuguées aux paramètres du groupe (qui est un espace \mathbf{R}^{2M+R}) apparaissant comme les valeurs de la représentation π^* , ce qui montre le caractère intrinsèque de la représentation π^* (ou π , ce qui revient au même). Ce résultat est exposé dans le Théorème 3.

En fin de ce chapitre, on montre comment la Théorie s'applique à des groupes "assez commutatifs". Sont ainsi traités tous les groupes de degré de nilpotence ≤ 2 (donc les groupes de Heisenberg) et les groupes triangulaires de matrices.

Ce travail appelle quelques remarques. Il est entièrement inédit et n'utilise *aucun* résultat de la théorie classique de Kirillov, exposée dans [11, 12] par exemple. On peut lui reprocher de retrouver des faits plus ou moins connus. Par exemple, les propriétés de dérivabilité et de décroissance rapide sont "connus" [3], mais les propriétés d'analyticité, plus ou moins sous-jacentes à la théorie classique (modulo un paramétrage analytique des orbites, des polarisations et des espaces de Hilbert de la représentation induite) n'ont jamais été mises en évidence, et encore moins de manière canonique. Par ailleurs, le travail de la partie I donne directement une telle paramétrisation, et ceci en fonction d'un objet canonique puisqu'il s'agit de l'espace des caractères d'une algèbre de Weyl canonique. Mais à notre sens, ce retour en arrière ne présente pas d'intérêt s'il s'agit d'obtenir les représentations du dual réduit de G . Nous proposons ici une méthode nouvelle, analytique et globale pour obtenir la Transformation de Fourier-Plancherel du groupe. Des essais d'obtention de la Transformation de Fourier-Plancherel en termes d'objets analytiques existent; des résultats voisins du nôtre se trouvent dans [1], mais, de l'avis même des auteurs, le cas du groupe nilpotent général semble "intractable". Ceci est dû à la grande liberté de choix que laisse la Théorie classique (choix des polarisations, des bases etc...). Objectivement parlant, la partie consacrée aux algèbres de Lie nilpotentes de I correspond à un choix algébrique des données pour la Théorie de Kirillov, et on peut concevoir qu'un tel choix présente quelques complications.

Nous croyons que la présentation de la Transformation de Fourier-Plancherel donnée dans le Théorème 3 est une réponse correcte à la question précédente. Elle semble particulièrement

simple, avec des propriétés analytiques qui doivent être utilisables pour l'analyse sur le groupe. Enfin, elle établit un lien direct entre la conjecture de Gelfand et Kirillov (et les algèbres de Weyl que l'on retrouve dans l'étude des idéaux de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$) avec la dérivée de la représentation du groupe par des opérateurs Fourier-Intégraux, les générateurs des algèbres de Weyl se réalisant comme des variables conjuguées [2,4].

Enfin, la Théorie s'applique aussi au cas des groupes résolubles ; ceci fera partie d'un autre exposé.

Le cas général nous semble encore difficile, essentiellement parce que le cas d'un groupe semi-simple n'a pas trouvé de réponse satisfaisante en ce qui concerne notre optique. Nous avons quelques indications pour ramener l'étude algébrique du cas général à celui d'une algèbre de Lie semi-simple [8].

I. LA REPRESENTATION UNITAIRE Π .

I.1.

La représentation Π est l'exponentielle de la représentation infinitésimale π de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe G (nilpotent, réel, connexe et simplement connexe) décrite par le Théorème B de I. La représentation π réalise \mathfrak{g} par des opérateurs différentiels du premier ordre en $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}$, à coefficients polynômes en $x = (x_1, x_2, \dots, x_M) \in \mathbf{R}^M$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_R) \in \mathbf{R}^R$ hormis un dénominateur qui divise $\delta_n = \pi(\Delta_n)$. Le semi-invariant Δ_n est défini dans la Proposition 1 de I ; δ_n est un polynôme en z et son ouvert de non nullité dans \mathbf{R}^R est noté Ω . Ainsi, \mathfrak{g} est représentée par des champs de vecteurs (avec un terme constant) réguliers dans $\mathfrak{V} = \Omega \times \mathbf{R}^M$.

I.2.

Soit \mathfrak{l} une base ordonnée de \mathfrak{g} . On se sert de \mathfrak{l} comme ensemble ordonné d'indices et on paramètre G par l'application exponentielle produit :

$$g(t) = \prod_{L \in \mathfrak{l}} \exp(t_L \cdot L) \quad \text{avec} \quad t = (t_L)_{L \in \mathfrak{l}} \in \mathbf{R}^{\mathfrak{l}}. \quad (1)$$

Le produit des sous-groupes à un paramètre $\exp(t_L \cdot L)$ de G défini par $L \in \mathfrak{l}$ et paramétré par $t_L \in \mathbf{R}$ est ordonné suivant l'ordre de \mathfrak{l} ; il définit un isomorphisme analytique de $\mathbf{R}^{\mathfrak{l}}$ sur G et on choisira la base \mathfrak{l} la mieux adaptée pour chaque situation. La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{\mathfrak{l}}$ se transporte en une mesure invariante sur G que l'on note indifféremment dt ou $dg = dg(t)$. Un changement de la base \mathfrak{l} multipliera la mesure invariante par l'inverse de la valeur absolue du déterminant du changement de base.

I.3.

L'image $\pi(\mathfrak{l})$ est formée d'opérateurs différentiels du premier ordre (en x) réguliers sur $\mathfrak{V} = \Omega \times \mathbf{R}^M$. Le jacobien δ du changement de base algébrique

$$\left(1, z_1, z_2, \dots, z_R, x_1, x_2, \dots, x_M, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}\right) \longrightarrow (1, \pi(\mathfrak{l}))$$

est égal, à une puissance de $\sqrt{-1}$ près, à l'image par π du jacobien du changement de base

$$(Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M) \longrightarrow (Z_0, \mathfrak{l})$$

(cf. I Th. A, Prop. 1 et Prop. 2); la fonction rationnelle δ est régulière sur Ω .

I.4.

Soit \mathfrak{H} l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $\mathfrak{V} = \Omega \times \mathbf{R}^M$ pour la mesure $|\delta| dz dx$ ($dz dx$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^R \times \mathbf{R}^M$). L'espace \mathfrak{H} est une intégrale directe d'espaces de Hilbert \mathfrak{H}_z de fonctions de carré sommable sur \mathbf{R}^M :

$$\mathfrak{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathfrak{H}_z |\delta| dz.$$

Pour tout $L \in \mathfrak{l}$, on note $\Pi(\exp(t_L \cdot L)) = \exp(t_L \cdot \pi(L))$

l'opérateur unitaire dans \mathcal{H} obtenu par exponentiation de l'opérateur antihermitien $t_L \cdot \pi(L)$ et on définit la représentation unitaire Π de G par le produit ordonné

$$\Pi(g(t)) = \prod_{L \in \mathfrak{g}} \exp(t_L \cdot \pi(L)). \quad (2)$$

On note Π_z la restriction de Π à \mathcal{H}_z qui n'est autre que l'exponentielle de la restriction π_z de π à \mathcal{H}_z . Pour toute fonction $\psi \in C^\infty$ à support compact sur G on note

$$\Pi(\psi) = \int_G \Pi(g) \psi(g) dg$$

$$\Pi_z(\psi) = \int_G \Pi_z(g) \psi(g) dg.$$

On a le théorème suivant.

THEOREME 1. — 1. *Pour toutes les valeurs de $z \in \Omega$, les représentations Π_z de G sont unitaires, continues et irréductibles et elles sont inéquivalentes entre elles.*

2. *Pour toute fonction $\psi \in C^\infty$ à support compact sur G , $\Pi_z(\psi)$ est un opérateur traçable donné par un noyau $\mathcal{K}_z(\psi; x; x^\sim)$ qui est C^∞ en $(z, x, x^\sim) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$. Ce noyau est à décroissance rapide en (z, x, x^\sim) sur l'ouvert de $\mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ défini par $|\delta_n| > \alpha$ (α est un nombre réel positif arbitraire). On a donc*

$$\text{Tr } \Pi_z(\psi) = \int_{\mathbb{R}^M} \mathcal{K}_z(\psi; x; x) dx. \quad (3)$$

3. *On a la formule de Fourier-Plancherel*

$$(2\pi)^{M+R} \psi(0) = \int_{\Omega} |\delta| dz \text{ Tr } \Pi_z(\psi) \quad (4)$$

dans laquelle on a noté 0 l'élément neutre de G et l'intégrale est définie lorsque l'on somme sur les variables z suivant un ordre convenable. Cette intégrale est absolument convergente si ψ est de type positif.

4. *On a la décomposition en intégrale directe*

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} |\delta| dz \mathcal{H}_z \text{ et } \Pi = \int_{\Omega}^{\oplus} |\delta| dz \Pi_z$$

et la mesure de Plancherel de G est égale à $|\delta| dz$ et supportée par Ω .

I.5.

Nous donnons une brève démonstration de ce Théorème, esquisant seulement les calculs, somme toute évidents, déjà donnés dans [7]. Le plan est le suivant :

- (i) Propriétés utiles de π et de Π obtenues dans I.
- (ii) La méthode du repère mobile coïncidant et relations avec la Théorie de Kirillov.
- (iii) Le calcul du noyau de Π .
- (iv) Preuve finale du Théorème.

i. *Propriétés des représentations.*

Nous utilisons un paramétrage de G directement lié aux constructions de I. La base \mathfrak{l} de \mathfrak{g} est la réunion des bases partielles $\mathfrak{l}_{p,j}$ pour $p = 1, 2, \dots, n$ et $j = 1, 2, \dots, n + 1$. On définit un ordre sur \mathfrak{l} et en même temps un ordre sur l'ensemble des générateurs Z_j, Q_k, P_k en utilisant le fait que les générateurs s'obtiennent à partir de \mathfrak{l} par une substitution triangulaire.

La base pure (Q_1, Q_2, \dots, Q_N) de K_n et la base $(Z_0, q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{n,n})$ de l'algèbre de Heisenberg \mathfrak{H}_n s'obtiennent par substitution triangulaire à partir des $\mathfrak{l}_{p,j}$ de même indice que $q_{p,j}$ (la réunion des $q_{p,j}$ avec $p < j$ donne la base pure de K_n). Pour tout $Q_{p,j,k} \in q_{p,j}$, il existe un semi-invariant $D_{p,j} \in A_{p-1, n+1}$ et un élément $L_{p,j,k} \in \mathfrak{l}_{p,j}$ tel que

$$\begin{aligned}
 Q_{p,j,k} &\in D_{p,j} L_{p,j,k} \\
 &+ A_{p-1} \{ Z_0, \mathfrak{l}_{p,j-1}, \mathfrak{l}_{p,j-2}, \dots, \mathfrak{l}_{p,2}, \mathfrak{l}^{p-1, >} \} \quad (5) \\
 \mathfrak{l}^{p-1, >} &= \bigcup_{p-1 > i > r > 2} \mathfrak{l}_{i,r}.
 \end{aligned}$$

Au second membre de (5) figure le module symétrisé sur A_{p-1} engendré par la base écrite entre les accolades. Pour la preuve de ce résultat voir I lemme 1 P. 4. La base standard

$$(Z_0, Q_{N+1}, Q_{N+2}, \dots, Q_M, P_{N+1}, P_{N+2}, \dots, P_M)$$

de \mathfrak{H}_n s'obtient en diagonalisant symplectiquement $(Z_0, q_{2,2}, q_{3,3}, \dots, q_{n,n})$. On peut de plus choisir les Q_k dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Avec un ordre convenable sur les

$$\ell_{p,p} = (L_{p,p,1}, L_{p,p,2}, \dots, L_{p,p,2d})$$

on induit par (5) un ordre sur $q_{p,p} = (Q_{p,p,1}, Q_{p,p,2}, \dots, Q_{p,p,2d})$ tels que les pfaffiens \mathcal{R}_b des matrices

$$[Q_{p,p,1}, Q_{p,p,2}, \dots, Q_{p,p,2b}; Q_{p,p,1}, Q_{p,p,2}, \dots, Q_{p,p,2b}]^{(1)}$$

soient non nuls. On peut alors choisir les générateurs itérativement : $Q_{p,1} = Q_{p,p,2}$, $P_{p,1} = \mathcal{R}_1^{-1} Q_{p,p,1}$ puis en notant V_b le sous espace vectoriel sur $K_{p-1,n+1}$ engendré par $Q_{p,p,1}, \dots, Q_{p,p,2b}$ on choisira les uniques éléments commutants à V_b :

$$Q_{p,b+1} \in \mathcal{R}_b Q_{p,p,2b+2} + V_b$$

$$P_{p,b+1} \in (\mathcal{R}_b \mathcal{R}_{b+1})^{-1} Q_{p,p,2b+1} + V_b.$$

On note $q_{p,+} = (Q_{p,1}, Q_{p,2}, \dots, Q_{p,d})$,
 $q_{p,-} = (P_{p,1}, P_{p,2}, \dots, P_{p,d})$;

ces ensembles sont constitués par des éléments de bases standard et proviennent par substitutions triangulaires (de même type que (5)) à partir des bases

$$\ell_{p,+} = (L_{p,p,2}, L_{p,p,4}, \dots, L_{p,p,2d})$$

$$\text{et } \ell_{p,-} = (L_{p,p,1}, L_{p,p,3}, \dots, L_{p,p,2d-1}).$$

On choisit la base standard de \mathfrak{F}_n formée des générateurs conjugués

$$\text{et } (Q_{N+1}, Q_{N+2}, \dots, Q_M) = (q_{2,+}, q_{3,+}, \dots, q_{n,+})$$

$$(P_{N+1}, P_{N+2}, \dots, P_M) = (p_{2,+}, p_{3,+}, \dots, p_{n,+}).$$

La base ℓ est décomposée en deux parties ℓ^+ et ℓ^- ordonnées suivant :

$$\ell^+ = (\ell_{n,n+1}, \ell_{n,+}, \ell_{n-1,n+1}, \ell_{n-1,n}, \ell_{n-1,+}, \dots,$$

$$\ell_{2,n+1}, \ell_{2,n}, \dots, \ell_{2,+}, \ell_{1,n+1})$$

$$\ell^- = (\ell_{2,-}, \ell_{3,2}, \ell_{3,-}, \ell_{4,2}, \ell_{4,3}, \ell_{4,-}, \dots,$$

$$\ell_{n,2}, \ell_{n,3}, \dots, \ell_{n,n-1}, \ell_{n,-})$$

(1) Cette notation désigne la matrice des commutateurs entre les éléments figurant de part et d'autre du point-virgule.

et son ordre est celui de $\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}^+, \mathfrak{l}^-)$. Comme on se sert de \mathfrak{l} comme ensemble d'indices, les ensembles \mathfrak{l}^+ et \mathfrak{l}^- apparaissent comme des sous-ensembles ordonnés d'indices dans les notations suivantes qui s'expliquent d'elles mêmes :

$$t = (t_L)_{L \in \mathfrak{l}} \in \mathbf{R}^{\mathfrak{l}}, t = (t^+, t^-) \text{ avec} \\ t^+ = (t_L^+)_{L \in \mathfrak{l}^+} \quad \text{et} \quad t^- = (t_L^-)_{L \in \mathfrak{l}^-}.$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on peut écrire $\pi(X) = \pi_0(X) + \pi_1(X)$ en notant $\pi_0(X)$ le terme constant de l'opérateur différentiel $\pi(X)$ et $\pi_1(X)$ sa partie du premier ordre :

$$\pi_1(X) = \sum_{k=1}^M a_k(X) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Ce champ de vecteur est entièrement déterminé par l'action adjointe de X sur les Q_k : $a_k(X) = \sqrt{-1}^{-d(Q_k)} \pi([X, Q_k])$.

Le coefficient constant $\pi_0(X)$ est donné par la formule (5), à une fonction polynômiale en les variables de ligne plus petite que $p^{(2)}$ près quand $X = L_{p,j,k}$. L'opérateur différentiel restant $\pi_1(X)$ a donc les propriétés données par le lemme 1 de I :

si $i < j$, $[\mathfrak{l}_{i,r}; q_{p,j}] = 0$

si $i = j$, $[\mathfrak{l}_{i,r}; q_{p,i}]$ est une matrice à coefficients semi-invariants appartenant à $\mathbf{A}_{p-1, n+1}$ et cette matrice est nulle si $r < p$.

Les éléments de $q_{p,j}$ pour $p \leq j$ sont des \mathfrak{g} -vecteurs propres (de poids nul) modulo $\mathbf{A}_{p-1, j+1}$ (cf. I Prop.2. 1) (donc $a_k(X)$ est un polynôme en les seules variables de ligne plus petite que x_k et de colonne plus grande que x_k).

On obtient aisément le groupe unitaire à un paramètre $t_L \longrightarrow \exp(t_L \cdot \pi(L))$. Le champ de vecteurs $\pi_1(L)$ induit un groupe de déplacement $\gamma_L(t_L)$ sur la variété qui dépend polynômialement de t_L et de (x, z) . Quand $L \in \mathfrak{l}_{i,r}$, $\gamma_L(t_L)$ laisse invariantes les variables x_k de colonne $> i$ et effectue sur les variables x_k de colonne i une translation

(2) On dit qu'une variable provenant de $q_{p,j}$ est de ligne p et de colonne j , et qu'elle précède une variable provenant de $q_{r,k}$ si $(p,j) < (r,k)$ avec l'ordre lexicographique.

$$x_k \longrightarrow x_k + t_L \sqrt{-1}^{-d(Q_k)} \pi([L, Q_k])$$

et le facteur de t_L est un polynôme des variables z_j de ligne plus petite que x_k . Sur les variables x_k de colonne $< i$, on a aussi une translation mais dépendant polynômialement de t_L et des variables x_j et z_j de ligne plus petite que x_k et de colonne plus grande que x_k . La contribution du terme constant $\pi_0(L)$ est le changement de phase (ie. la multiplication par l'exponentielle de la phase)

$$\Phi_L(t_L, z, x) = \int_0^{t_L} \pi_0(L)(z, \gamma_L(s)x) ds. \quad (6)$$

Dans cette formule, on a explicité la dépendance de $\pi_0(L)$ en fonction des variables (z, x) par l'intermédiaire du groupe de déplacement γ_L . Le groupe $\exp(t_L \cdot \pi(L))$ agit sur une fonction $f(z, x)$ suivant la formule

$$(\exp(t_L \cdot \pi(L))f)(z, x) = e^{\Phi_L(t_L, z, x)} f(z, \gamma_L(t_L)x).$$

Bien entendu, il laisse stable l'argument z de la fonction f et son action dans \mathcal{H}_z qui est l'ensemble des fonctions de carré sommable en x est donnée encore par la même formule, à condition d'oublier la dépendance en z de la fonction f qui y figure. Lorsque le champ de vecteurs $\pi_1(L)$ s'annule en $x = x^\circ$, le groupe γ_L stabilise le point x° et l'action du groupe unitaire se réduit au changement de phase $t_L \cdot \pi_0(L)$:

$$(\exp(t_L \cdot \pi(L))f)(z, x^\circ) = e^{t_L \cdot \pi_0(L)} f(z, x^\circ).$$

En composant les groupes unitaires à un paramètre, on obtient la représentation Π sous la forme

$$\Pi(g(t))f(z, x) = e^{\Phi(t, z, x)} f(z, \gamma(t)x). \quad (7)$$

La phase $\Phi(t, z, x)$ est la somme des phases partielles $\Phi_L(t_L, z, x)$ sur lesquelles ont agi les groupes de déplacement qui se trouvent à leur gauche dans le produit ordonné et $\gamma(t) = \prod_{L \in \mathcal{L}} \gamma_L(t_L)$ est le déplacement sur la variété résultant du produit des groupes de déplacement γ_L .

ii. *Le repère mobile coïncidant et la Théorie de Kirillov.*

Pour $j > p$ on réécrit la formule (5)

$$Q_{p,j,k} = D_{p,j} L_{p,j,k} + R_0 + R_1 \quad \text{avec}$$

$$R_0 \in (\mathbf{A}_{p-1})_E \{Z_0, q_{2,+}, q_{3,+}, \dots, q_{p,+}, q_{p,p+1}, q_{p,p+2}, \dots, q_{p,j-1}\}$$

$$R_1 = \sum_{L \in \mathfrak{L}^-} a_L L \in (\mathbf{A}_{p-1})_E \{\ell_{2,-}, \ell_{3,-}, \dots, \ell_{p,-}, \ell^{p,>}\}$$

$$\ell^{p,>} = \bigcup_{p \geq i > r \geq 2} \ell_{i,r}.$$

Les modules ici écrits sont des modules à gauche sur $(\mathbf{A}_{p-1})_E$ et on localise seulement par un semi-invariant diviseur du produit des facteurs $D_{r,k}$ des formules (5) relatives aux générateurs figurant à droite de R_0 . Une formule similaire vaut si $p = j^{(3)}$. On pose $d = d(D_{p,j}) = d(Q_{p,j,k}) - 1$ et on note par l'exposant $^\circ$ l'évaluation au point (z°, x°) d'un élément $\pi(A)$ pour

$$A \in k(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M).$$

On pose $\sqrt{-1}^d X = \pi(D_{p,j})^\circ L_{p,j,k} + \sum_{L \in \mathfrak{L}^-} \pi(a_L)^\circ L.$

On dit que X est l'évaluée partielle de $Q_{p,j,k}$ en (z°, x°) et on note $X = (Q_{p,j,k})^{(\circ)}$. Il vient

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}^d X &= (\pi(D_{p,j})^\circ - D_{p,j}) L_{p,j,k} \\ &+ \sum_{L \in \mathfrak{L}^-} (\pi(a_L)^\circ - a_L) L + Q_{p,j,k} - R_0. \end{aligned}$$

L'évaluée partielle X a la propriété de se représenter par π en un opérateur différentiel tel que $\pi_1(X)$ s'annule en (z°, x°) . Sa partie constante $\pi_0(X)$ vaut alors

$$\pi_0(X) (z^\circ, x^\circ) = \sqrt{-1} x_{p,j,k}^\circ - \sqrt{-1}^{-d} \pi(R_0)^\circ. \quad (8)$$

On a noté ici $x_{p,j,k} = \sqrt{-1}^{-d(Q_{p,j,k})} \pi(Q_{p,j,k})$. A un terme correctif dépendant seulement des variables de colonne plus grande ou de ligne plus petite près, l'action de l'évaluée partielle X de $Q_{p,j,k}$ en (z°, x°) est un changement de phase linéaire en $x_{p,j,k}^\circ$.

Les évaluées partielles de la base

(3) Ces résultats de substitution triangulaire sont faciles et sont de plus explicités dans [7] II.2. \mathfrak{A}_5 5.

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M)$$

en un point (z°, x°) tel que $\pi(\Delta_n)^\circ$ ne s'annule pas donnent une base du stabilisateur \mathfrak{g}° du point (z°, x°) dans \mathfrak{g} . Ce stabilisateur est un algèbre de Lie où on peut définir une forme linéaire φ en posant, avec X donné par les formules précédentes,

$$\varphi(X) = -\sqrt{-1} \pi_0(X)(z^\circ, x^\circ).$$

La forme linéaire φ est telle que \mathfrak{g}° est isotrope maximal pour tout prolongement de φ à \mathfrak{g} [10]. Ainsi nous avons obtenu une paramétrisation algébrique des données de Kirillov (ie. forme linéaire et polarisation) par (z, x) . Ces données de Kirillov apparaissent comme des objets tangents pour notre construction. On peut reconstituer la représentation unitaire définie à partir de ces données de Kirillov par la théorie classique de l'induction tordue et interpréter le facteur de torsion grâce à la différence entre les produits symétrisé et non symétrisé; on obtient alors la même représentation Π_z . Nous ne donnerons pas les détails de ce procédé qui permet de relier notre construction à la théorie classique; le lecteur pourra trouver une partie de ces résultats sous forme infinitésimale dans la référence [10]. Dans cette même référence, il est montré que si z° est fixé tel que $\pi(\Delta_n)$ ne s'annule pas en z° , l'ensemble de tous les prolongements de φ en une forme linéaire sur \mathfrak{g} et ceci pour toutes les valeurs de x° , est une G -orbite dans le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} : la variable z est une coordonnée locale de \mathfrak{g}^*/G et on retrouve un résultat classique sur la mesure de Plancherel pour un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe [12].

iii. Calcul du noyau de Π par la méthode du repère mobile.

L'ensemble $(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M)$ est ordonné par l'ordre induit à partir de celui de \mathfrak{l}^+ grâce à la substitution triangulaire (5). On évalue partiellement cette base de générateurs en (z°, x°) pour obtenir une base partielle de \mathfrak{g} formée par les éléments $Z_k^{(\circ)}$ et $Q_k^{(\circ)}$. Cette base, avec l'ordre induit, est notée \mathfrak{l}'^+ . On pose encore $\mathfrak{l}'^- = \mathfrak{l}^-$ et $\mathfrak{l}' = (\mathfrak{l}'^+, \mathfrak{l}'^-)$. On se sert de \mathfrak{l}' comme ensemble d'indices et on note

$$g'(t') = \prod_{L \in \mathfrak{l}'} \exp(t'_L \cdot L) \quad \text{pour } t' = (t'_L)_{L \in \mathfrak{l}'} \in \mathbf{R}^{\mathfrak{l}'}$$

Avec $g(t)$ définie par la formule (1), le changement de paramétrage de $G : t \longrightarrow t'$ donné par la condition $g(t) = g'(t')$ est un isomorphisme de variétés analytiques qui est même polynômial. Les mesures invariantes sur G définies par t et t' sont proportionnelles

$$dt' = |\delta_1(z^\circ)| dt$$

$$\delta_1(z^\circ) = \frac{D(\varrho)}{D(\varrho')} (= \text{Jacobien du changement de base } \varrho \longrightarrow \varrho').$$

Avec les définitions

$$\delta(z) = \pi \left(\frac{D(Z_0, \varrho^+, \varrho^-)}{D(Z_0, Z_1, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M)} \right)$$

$$\delta_2(z) = \pi \left(\frac{D(Z_0, Z_1, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \varrho^-)}{D(Z_0, Z_1, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M)} \right)$$

on a
$$\delta(z^\circ) = \delta_1(z^\circ) \delta_2(z^\circ)$$

et
$$\delta_2(z) = \pi(\det[\varrho^- ; Q_1, Q_2, \dots, Q_M]).$$

Pour tout $t^- = (t_L^-)_{L \in \varrho^-} \in \mathbf{R}^{\varrho^-}$, on note $\gamma^-(t^-)$ le déplacement de \mathbf{R}^M défini par $\gamma^-(t^-) = \prod_{L \in \varrho^-} \gamma_L(t_L^-)$.

Les groupes de déplacement γ_L agissent de manière "triangulaire" lorsque L varie dans ϱ^- . Pour tout $x \in \mathbf{R}^M$ l'application $t^- \longrightarrow x \sim = \gamma^-(t^-) x$ est un difféomorphisme de \mathbf{R}^{ϱ^-} sur \mathbf{R}^M tel que $dx \sim = |\delta_2(z)| dt^-$. On a $x = x \sim$ si et seulement si $t^- = 0$. Rappelons que les ensembles $\varrho = (\varrho^+, \varrho^-)$ et $\varrho' = (\varrho'^+, \varrho'^-)$ servent à indexer les paramètres $t \in \mathbf{R}^{\varrho}$ et $t' \in \mathbf{R}^{\varrho'}$, ces paramètres étant eux aussi décomposés en deux parties : $t = (t^+, t^-)$, $t' = (t'^+, t'^-)$ avec

$$t^+ = (t_L^+)_{L \in \varrho^+}, t^- = (t_L^-)_{L \in \varrho^-},$$

$$t'^+ = (t_L'^+)_{L \in \varrho'^+} \text{ et } t'^- = (t_L'^-)_{L \in \varrho'^-}.$$

Au point (z°, x°) les groupes unitaires $\exp(t_L'^+ \cdot \pi(L))$ avec $L \in \varrho'^+$ agissent seulement par le changement de phase $t_L'^+ \cdot \pi_0(L)^\circ$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Pi(g(t)) f(z^\circ, x^\circ) &= \Pi(g'(t')) f(z^\circ, x^\circ) \\
&= \prod_{L \in \mathfrak{L}'^+} \exp(t_L'^+ \cdot \pi(L)) \prod_{L \in \mathfrak{L}'^-} \exp(t_L'^- \cdot \pi(L)) f(z^\circ, x^\circ) \\
&= e^{\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}'^+} t_L'^+ \cdot \pi_0(L) + \Phi_1 \right)} f(z^\circ, \gamma^-(t'^-) x^\circ).
\end{aligned}$$

Φ_1 est une phase supplémentaire due aux termes constants $\pi_0(L)$ pour les L appartenant à \mathfrak{L}^- et elle sera nulle quand t'^- est nul.

Notant δ_M la mesure de Dirac à l'origine de \mathbf{R}^M , on peut réécrire $\Pi(g(t))$ avec le noyau intégral

$$\mathfrak{K}_{z^\circ}(g(t); x^\circ; x^\sim) = e^{\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}'^+} t_L'^+ \cdot \pi_0(L) + \Phi_1 \right)} \delta_M(\gamma^-(t'^-) x^\circ - x^\sim). \quad (9)$$

Lorsque ψ est une fonction C^∞ à support compact sur G , on a

$$\begin{aligned}
\Pi_{z^\circ}(\psi) f(z^\circ, x^\circ) &= \int \psi(t^+, t^-) \exp\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}'^+} t_L'^+ \cdot \pi_0(L) + \Phi_1 \right) \\
&\quad f(z^\circ, \gamma^-(t'^-) x^\circ) dt^+ dt^-
\end{aligned}$$

et par les changements de variables

$$(t^+, t^-) \longrightarrow (t'^+, t'^-) \longrightarrow (t'^+, x^\sim) \text{ avec } x^\sim = \gamma^-(t'^-) x^\circ$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{z^\circ}(\psi) f(z^\circ, x^\circ) &= \int \psi(t^+, t^-) e^{\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}'^+} t_L'^+ \cdot \pi_0(L) + \Phi_1 \right)} \\
&\quad \frac{D(t^+, t^-)}{D(t'^+, t'^-)} \frac{D(t'^-)}{D(x^\sim)} f(z^\circ, x^\sim) dt'^+ dx^\sim.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi le noyau de $\Pi_{z^\circ}(\psi)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_{z^\circ}(\psi; x^\circ; x^\sim) &= \int \psi(t^+, t^-) \exp\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}'^+} t_L'^+ \cdot \pi_0(L) + \Phi_1 \right) \quad (10) \\
&\quad |\delta_1(z^\circ) \delta_2(z^\circ)|^{-1} dt'^+.
\end{aligned}$$

Dans cette formule $t' = (t'^+, t'^-)$ est fixé par les conditions $\gamma^-(t'^-) x^\circ = x^\sim$ et $g(t) = g'(t')$. Lorsque (z°, x°) et t' doivent rester dans des compacts fixes, x restera aussi dans un compact. Comme ψ est à support compact, on en déduit que le

noyau $\mathfrak{K}_{z^\circ}(\psi; x^\circ; x^\sim)$ est à support compact en x^\sim lorsque (z°, x°) est fixé. Ce noyau a une expression diagonale très simple

$$\mathfrak{K}_{z^\circ}(\psi; x^\circ; x^\circ) = \int \psi(t^+, t^-) \exp\left(\sum_{L \in \mathfrak{L}^+} t_L^+ \cdot \pi_0(L)\right) |\delta(z^\circ)|^{-1} dt'^+ \quad (11)$$

En effet, on a $x^\sim = x^\circ$ donc $t'^- = 0$ et Φ_1 aussi doit s'annuler. On a maintenant $t' = (t'^+, 0)$ et $t = (t^+, t^-)$ vérifiant $g(t) = g'(t')$. La trace de ce noyau donnant le caractère de la représentation, on a une expression analytique du caractère en intégrant l'exponentielle figurant au second membre de (11) sur la variable dx° .

iv. *Preuve du Théorème 1 (fin).*

a) L'unitarité et la continuité de la représentation Π_z sont visibles à travers les formules que nous avons écrites. On peut même se contenter de le voir pour les groupes à un paramètre. On obtient aussi aisément l'irréductibilité: Comme les générateurs Q_j et $\Delta_n P_j$ sont des éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, Les opérateurs x_j et $\frac{\partial}{\partial x_j}$ sont affiliés [12] à l'algèbre de Von Neumann de la représentation Π_z (on suppose $\pi(\Delta_n)(z) \neq 0$). Les groupes unitaires à un paramètre qu'ils engendrent qui sont les changements de phases $\exp(\sqrt{-1} a_j x_j)$ et les translations $T_{x_j}(b_j): x_j \longrightarrow x_j + b_j$ (dans lesquels les paramètres a_j et b_j varient dans \mathbf{R}) appartiennent aussi à l'algèbre de Von Neumann. Soient f et h deux éléments de $L^2(\mathbf{R}^M)$. Si f est orthogonal aux éléments $\Pi_z(g(t))h$, on a aussi, en notant $a = (a_1, a_2, \dots, a_M)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)$:

$$\int \exp(\sqrt{-1} \sum_{j=1}^M a_j x_j) h(x + b) f(x) dx = 0.$$

Comme la fonction $x \longrightarrow h(x + b) f(x)$ est sommable, la nullité de cette intégrale pour tout a implique que cette fonction est négligeable. Si h est non négligeable, en faisant varier b , on en déduit que f est nulle presque partout *c.q.f.d.* Pour différentes valeurs de z , les éléments $Z_k \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ agissent par des scalaires différents, donc les représentations sont inéquivalentes.

b) On remet la preuve de 2 au chapitre suivant où on étudiera en détail l'analyticité du noyau $\mathcal{K}_z(\psi; x; x^\sim)$.

c) On remarque que le noyau est C^∞ en $(z, x, x^\sim) \in \Omega \times \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M$ et reste borné sur tout $\mathbf{R}^R \times \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M$. Les divergences de l'intégrale (4) proviennent seulement des zéros de $\delta(z)$. Le polynôme $\delta(z)$ ne dépend que des variables z_k de ligne $< n - 1$. Grâce à la décroissance rapide en (z, x) cette intégrale a un sens si on intègre seulement en x et en les variables z_k de ligne n . Il nous suffit de montrer que l'on se ramène alors au cas du groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_{n-1} car le raisonnement par récurrence sur le degré de nilpotence de \mathfrak{g} ne pose pas de difficultés.

La formule (10) montre que $\mathcal{K}_{z^\circ}(\psi; x^\circ; x^\circ)$ est une intégrale de Fourier de la fonction $\psi_1(t'^+, 0) = \psi(t^+, t^-)$ qui est encore C^∞ à support compact. L'intégrale en dx et les dz_k de ligne n étant absolument convergente, on peut intégrer d'abord en les variables x_j et z_k de ligne n . On peut alors appliquer les Théorèmes d'inversion de Fourier ordinaires car les groupes unitaires à un paramètre correspondants opèrent par un changement de phase classique (cf. formule (11) et (8)), à une fonction des variables de ligne $< n$ près. Cette intégration partielle sur les variables de ligne n donne donc l'évaluation de $\psi_1(t'^+, 0) = \psi(t^+, t^-)$ en un point où les composantes t_L sont nulles si L est de ligne n . On se retrouve alors exactement sur le sous-groupe d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_{n-1} . On vérifie que le jacobien $\delta(z)$ disparaît au fur et à mesure des intégrations successives et que les facteurs 2π de la formule (4) sont ceux introduits par les formules d'inversion classiques.

d) Les assertions de 4. sont maintenant triviales.

I.6.

La détermination analytique de la représentation Π repose sur l'action adjointe de \mathfrak{g} dans un sous-ensemble de caractères unitaires de $\mathbf{B}_n = \mathbf{K}_n \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La base pure

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

de \mathbf{K}_n étant construite, on a pu trouver un semi-invariant $\Delta_n \in \mathbf{k}[Z_1, Z_2, \dots, Z_R]$ tel que

$$\mathbf{B}_n \subset \mathbf{k}[Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_N]_{\Delta_n} = \mathbf{A}_n$$

et identifier l'ensemble des caractères unitaires de B_n n'annulant pas Δ_n avec l'ouvert affine $\Omega \times \mathbb{R}^N$ défini par $\Delta_n(z) \neq 0$. Cette possibilité est générale et ne dépend pas du choix d'une base pure raisonnable de K_n .

PROPOSITION 1. — Soient $(Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R)$ une base pure de $K_{n,n+1}$ sur k et $(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N)$ une base pure de K_n sur $K_{n,n+1}$ telle que $A'_n = k[Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N]$ soit une sous-algèbre \mathfrak{g} -invariante de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Il existe alors un élément $\Delta'_n \in k[Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R]$ tel que B_n soit contenu dans le localisé de A'_n par Δ'_n .

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que tout Q_j appartient à $K_{n,n+1}[Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N]$. Comme Q_j appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, il engendre un \mathfrak{g} -module W_j de dimension finie. Si Q_j n'est pas polynômial dans $K_{n,n+1}(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N)$, on peut toujours trouver dans W_j un élément non polynômial tel que ses commutateurs avec tous les $X \in \mathfrak{g}$ soient polynômiaux. Notons la forme irréductible de cet élément P/R . On a

$$[X, P/R] = S \in K_{n,n+1}[Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N]$$

$$[X, P]R - [X, R]P = SR^2.$$

Donc R divise $[X, R]$. On écrit R comme un polynôme en les variables Q_j à coefficients dans $K_{n,n+1}$ ce qui est possible puisque tout Q'_k appartient à B_n ; comme \mathfrak{g} agit sur Q_j en le transformant en un polynôme en les variables qui précèdent Q_j , on voit que R ne peut diviser $[X, R]$ que si $[X, R] = 0$. Donc $R \in K_{n,n+1}$ ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. — Soit Ω' l'ouvert de \mathbb{R}^R défini par la non nullité de Δ'_n (on identifie l'espace des caractères de A'_n avec $\mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^N$). Les G -orbites dans $\Omega' \times \mathbb{R}^N$ sont des hyperplans du type $\{\omega'\} \times \mathbb{R}^N$ avec $\omega' \in \Omega'$ dont les mesures de Lebesgue sont G -invariantes.

La correspondance

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

$$\longrightarrow (Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N)$$

est, à une localisation par Δ_n et par Δ'_n près, bipolynômiale. Les G -orbites dans $\Omega \times \mathbb{R}^N$ (qui est l'ouvert de non nullité de Δ_n dans l'ensemble des caractères de \mathbf{A}_n) sont des hyperplans $\{\omega\} \times \mathbb{R}^N$ dont la mesure de Lebesgue est G -invariante. Le jacobien de cette correspondance est un élément de $(\mathbf{A}_n)_{\Delta_n}$ et son inverse un élément de $(\mathbf{A}'_n)_{\Delta'_n}$. En conséquence, ce jacobien appartient à $k(Z_1, Z_2, \dots, Z_R)$ et reste constant sur toute G -orbite. Une G -orbite dans $\Omega' \times \mathbb{R}^N$ est de dimension N dans un hyperplan $\{\omega'\} \times \mathbb{R}^N$ et lui est égal.

COROLLAIRE 2. — Soit \mathfrak{l} une base de \mathfrak{g} . On complète la base algébrique $(Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N)$ avec des variables conjuguées $P'_j \in \mathfrak{g}_n K_n$ et une base standard de $\mathfrak{g}_n^{(4)}$ pour obtenir $(Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_M, P'_1, P'_2, \dots, P'_M)$. Le jacobien δ' du changement de base

$$(Z_0, \mathfrak{l}) \longrightarrow (Z_0, Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_M, P'_1, P'_2, \dots, P'_M)$$

est un semi-invariant tel que

$$\delta' = \frac{D(Z_0, Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_R)}{D(Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_R)} \frac{D(Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M)}{D(Z_0, \mathfrak{l})}$$

Le corollaire résulte du fait que pour des bases standard, c'est-à-dire symplectiques, un jacobien de changement de base du type

$$\frac{D(Z_0, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_M, P'_1, P'_2, \dots, P'_M)}{D(Z_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M)}$$

vaut toujours 1.

Ce corollaire montre la relation existant entre les différents jacobiens δ lorsque l'on varie les choix des bases. On vérifie a posteriori que la mesure de Plancherel (qui s'écrit $|\delta(z)| dz$) ne dépend pas des choix des coordonnées (z, x) de l'ouvert de Zariski $\Omega \times \mathbb{R}^N$ constitué par les caractères unitaires "génériques" de \mathbf{B}_n . Pour différents choix des générateurs

(4) Cf. I Théorème A II.3.

Z_j, Q_k, P_k la représentation Π varie, mais on a, par des calculs aisés et explicites, les opérateurs d'entrelacement sous forme analytique.

II. ANALYTICITE ET DECROISSANCE

II.1.

Pour toute fonction ψ appartenant à l'espace $\mathcal{O}(G)$ des fonctions C^∞ à support compact sur G et toutes $f, h \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ où $\mathcal{V} = \Omega \times \mathbf{R}^M$, on considère f et h comme des éléments de $L^2(\mathcal{V})$ et on introduit le produit scalaire $\langle \Pi(\psi)f, \bar{h} \rangle$. On a

PROPOSITION 2. — *Il existe une unique distribution \mathfrak{N} sur $\mathcal{V} \times G \times \mathcal{V}$ telle que $(\mathfrak{N}, h \otimes \psi \otimes f) = \langle \Pi(\psi)f, \bar{h} \rangle$ pour toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{O}(G), f, h \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$. La distribution \mathfrak{N} est même une mesure sur $\mathcal{V} \times G \times \mathcal{V}$.*

L'application $(h, \psi, f) \longrightarrow \langle \Pi(\psi)f, \bar{h} \rangle$ est trilinéaire et continue pour les normes uniformes lorsque les fonctions h, ψ et f ont leurs supports contenus dans un compact fixe. Par densité du produit tensoriel, on conclut à l'existence et à l'unicité de la distribution \mathfrak{N} (théorème des noyaux de L. Schwartz).

II.2.

On étudie les dérivées de la distribution \mathfrak{N} . Si L est un élément de \mathfrak{g} , L définit les champs de vecteurs sur G \mathcal{R}_L (invariant à gauche) et \mathcal{L}_L (invariant à droite) suivant les formules

$$\mathcal{R}_L \psi(g(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \psi(g(t) \exp sL)$$

$$\mathcal{L}_L \psi(g(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \psi(\exp sLg(t)).$$

Ces champs de vecteurs sont des opérateurs de dérivations et agissent aussi sur les distributions de manière standard, une fois que la mesure bi-invariante de G est prise (égale à $dt = dg(t)$):

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_L \mathfrak{N}, \psi) &= (\mathfrak{N}, \mathcal{R}_L \psi) \\ (\mathcal{L}_L \mathfrak{N}, \psi) &= -(\mathfrak{N}, \mathcal{L}_L \psi). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3. — La distribution \mathfrak{N} (cf. Proposition 2) vérifie les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L \mathfrak{N} &= \mathfrak{N} \pi(L)^t \\ \mathcal{L}_L \mathfrak{N} &= \pi(L) \mathfrak{N} \end{aligned} \quad (12)$$

pour tout élément L de \mathfrak{g} . Dans cette formule, les conventions suivantes sont prises : \mathcal{R}_L et \mathcal{L}_L agissent sur la variable du milieu de $\mathfrak{W} = \mathfrak{V} \times G \times \mathfrak{V}$, l'opérateur $\pi(L)^t$ écrit à droite agit sur la variable de droite et $\pi(L)$ écrit à gauche agit sur la variable de gauche. On note $\pi(L)^t$ la transposée de $\pi(L)$ qui est le complexe conjugué de l'adjoint de $\pi(L)$.

Les seconds membres des égalités (12) sont par exemple définis par

$$(\mathfrak{N} \pi(L)^t, h \otimes \psi \otimes f) = (\mathfrak{N}, h \otimes \psi \otimes (\pi(L)f))$$

$$(\pi(L) \mathfrak{N}, h \otimes \psi \otimes f) = (\mathfrak{N}, (\pi(L)^t h) \otimes \psi \otimes f)$$

$$\pi(L)^t h = \overline{\pi(L)^* h} = \overline{(\pi(L)^* \bar{h})}.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_G \langle \Pi(g(t)f, \bar{h}) \psi(g(t)) dt \\ &= \int_G \langle \Pi(g(t) \exp sL) f, \bar{h} \rangle \psi(g(t) \exp sL) dt \\ &= \int_G \langle \Pi(g(t)) \exp(s\pi(L)) f, \bar{h} \rangle \psi(g(t) \exp sL) dt \end{aligned}$$

et aussi en différentiant en s à $s = 0$

$$\langle \Pi(\psi) \pi(L) f, \bar{h} \rangle + \langle \Pi(\mathcal{R}_L \psi) f, \bar{h} \rangle = 0$$

$$(\mathfrak{N}, h \otimes \psi \otimes (\pi(L)f)) + (\mathfrak{N}, h \otimes (\mathcal{R}_L \psi) \otimes f) = 0.$$

On en déduit la première formule de (12). La seconde s'obtient par le même calcul effectué à gauche.

II.3. Le noyau intégral.

PROPOSITION 4. — Pour toute $\psi \in \mathcal{D}(G)$ la mesure sur $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$ définie par $h \otimes f \rightarrow \langle \Pi(\psi) f, h \rangle$ (avec f, h quelconques dans $\mathcal{D}(\mathfrak{V})$) se réalise par un noyau $\mathfrak{K}_z(\psi; x; x^{\sim})$ qui est C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ et vérifie

$$\langle \Pi(\psi) f, h \rangle = \int_G |\delta(z)| dz \int_{\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M} \mathfrak{K}_z(\psi; x; x^\sim) f(z, x) h(z, x^\sim) dx dx^\sim$$

et $\mathfrak{K}_z(\psi; x; x^\sim)$ n'est autre que le noyau intégral de $\Pi_z(\psi)$ opérant dans $\mathfrak{E}_z = L^2(\mathbb{R}^M)$.

Le noyau intégral de $\Pi_z(\psi)$ est déjà donné dans la formule (10). En tout point z où $\delta_n(z) = \pi(\Delta_n)$ est non nul, la phase qui figure dans cette formule est une fonction analytique de toutes les variables car elle est en fait une fonction polynômiale, excepté un dénominateur en une puissance de δ_n . On conclut que le noyau est bien C^∞ . Une démonstration directe est possible en ce qui concerne les variables x et x^\sim : On sait que $\Delta_n P_j$ est élément de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et se représente par $\sqrt{-1}^{-d(Q_j)} \delta_n \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Pour tout opérateur différentiel D en x à coefficients constants, on se sert de la Proposition 3 pour reporter l'action de D opérant à gauche ou à droite sur \mathfrak{K}_z en l'action de D opérant à gauche ou à droite sur ψ , et ceci moyennant une localisation par une puissance de δ_n seulement. Si D et D' sont de tels opérateurs et f, h sont C^∞ à support dans un compact fixe, l'application $f \otimes h \longrightarrow \langle \Pi(\psi) Df, D'h \rangle$ est donc continue pour les normes uniformes et par suite le noyau est bien C^∞ en (x, x^\sim) .

PROPOSITION 5. — *Le noyau $\mathfrak{K}_z(\psi; x; x^\sim)$ est à décroissance rapide en (z, x, x^\sim) et quand (z, x) varie dans un compact fixe de $\Omega \times \mathbb{R}^M$, ce noyau a un support compact en x^\sim .*

Le preuve est similaire à celui de la Transformation de Fourier classique. La Proposition 3 réalise l'équivalent de l'intégration par parties. Le noyau étant fonction propre des opérateurs différentiels à gauche et à droite provenant de générateurs Z_j et Q_k , avec les valeurs propres z_j et x_k à gauche et z_j et x^\sim_k à droite, on obtient de la même façon que $\mathfrak{K}_z(\psi; x; x^\sim)$ reste borné même après multiplication par un polynôme quelconque en (x, x^\sim) . La dernière assertion est une remarque déjà faite à propos de la formule (10).

II.4. Les distributions propres.

A (z, x, x^{\sim}) fixé, le noyau $\mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim})$ qui est donné par exemple par la formule (9), est une mesure sur G (si on suppose $\delta_n(z) \neq 0$). On peut réinterpréter les résultats obtenus en termes de distributions propres.

THEOREME 2. — L'application $\psi \longrightarrow \mathcal{K}_z(\psi; x; x^{\sim})$ pour $\psi \in \mathcal{D}(G)$ est une distribution sur G que l'on note encore $\mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim})$. Elle vérifie les relations différentielles

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L \mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim}) &= \mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim}) \pi(L)^f \\ \mathcal{L}_L \mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim}) &= \pi(L) \mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim}) \quad (5) \end{aligned} \quad (13)$$

pour tout $L \in \mathfrak{g}$. Ces relations se prolongent de manière évidente à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

En particulier pour tout $(z, x, x^{\sim}) \in \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$, la distribution $\mathcal{K}_z(g(t); x; x^{\sim})$ est une fonction propre de l'algèbre $\mathbf{k}[Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M]$ avec des valeurs propres qui sont des polynômes en z, x et x^{\sim} suivant les formules (13); en ce qui concerne $\mathbf{B}_n[Q_{N+1}, Q_{N+2}, \dots, Q_M] = \mathbf{D}$ on a le même résultat à une localisation par $\delta_n(z)$ près.

Lorsque (z, x, x^{\sim}) varie dans $\Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$, on obtient un ensemble de distributions sur G qui sont des fonctions propres pour l'action à droite et l'action à gauche de la sous-algèbre commutative (maximale après localisation par Δ_n) \mathbf{D} de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Cet ensemble de distributions est assez riche pour permettre un développement de Fourier sans perte de norme (Théorème de complétude de Parseval).

Nous arrivons ainsi à une réponse positive à la question suivante : Existe-t-il dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ une sous-algèbre commutative maximale (réponse : \mathbf{D}) telle que les opérateurs différentiels à gauche et à droite sur le groupe qu'elle induit forment une algèbre commutative d'opérateurs différentiels sur G qui permet une analyse spectrale de l'espace $L^2(G)$? La dernière assertion signifie

(5) Par convention $\pi(L)$ agit sur la variable x et $\pi(L)^f$ sur la variable x^{\sim} .

que l'on peut développer toute fonction de $L^2(G)$ suivant les distributions propres de ces opérateurs différentiels sans perte de norme. De plus ces distributions propres doivent apparaitre comme des éléments de matrices généralisés de représentations unitaires irréductibles du groupe [9]. Ici nous donnons une réponse positive à cette conjecture, avec en plus un caractère d'analyticité grâce à notre méthode globale.

III. OPERATEURS FOURIER-INTEGRAUX

D'après la formule (9), le noyau intégral de $\Pi_z(g(t))$ contient une mesure de Dirac et ne possède pas les propriétés de régularité voulues. La situation est bien meilleure si on effectue une Transformation de Fourier partielle sur la variable x^\sim . On introduit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M) \in \mathbf{R}^M$ la variable conjuguée à x^\sim et on

note $\xi \cdot x = \sum_{j=1}^M x_j \xi_j$.

Avec
$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^M \int_{\mathbf{R}^M} e^{-\sqrt{-1}\xi \cdot x} f(x) dx$$

on a
$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^M} e^{\sqrt{-1}\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

D'après (7), l'opérateur $\Pi_z(g(t))$ agit par le changement de phase $\Phi(t, z, x)$ et par le déplacement $x \longrightarrow \gamma(t)x$; son action se décrit donc par

$$\Pi_z(g(t))f(x) = \int_{\mathbf{R}^M} e^{\Phi(t, z, x) + \sqrt{-1}\xi \cdot \gamma(t)x} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Le noyau Fourier-Intégral de $\Pi_z(g(t))$ est donc l'exponentielle de la phase

$$\Psi'(t, z, x, \xi) = \Phi(t, z, x) + \sqrt{-1}\xi \cdot \gamma(t)x. \quad (15)$$

Cette phase est une fonction algébrique régulière sur $G \times \Omega \times \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^M$ qui, à bien des égards, est très proche de la forme bilinéaire de la Transformation de Fourier commutative. On peut dire qu'elle est égale à une telle forme à un terme correctif de type "triangulaire" qui exprime la "presque-commutativité" du

groupe nilpotent. Tout ce chapitre est voué à l'étude de cette Transformation de Fourier "presque-commutative". Le groupe G est une variété isomorphe à \mathbf{R}^{2M+R} et la formule (1) donne une identification $t \longrightarrow g(t)$. L'algèbre \mathcal{A} des opérateurs différentiels en t à coefficients polynômiaux en t est un objet intrinsèque sur G car il ne dépend pas du paramétrage polynômial que l'on choisit sur G . Donc les espaces de Schwartz $\mathcal{O}(G)$, $\mathcal{S}(G)$ (= ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur G) et leurs duals $\mathcal{O}'(G)$, $\mathcal{S}'(G)$ sont canoniques. Nous allons donc étudier la Transformation de Fourier de ces objets.

Le plan de ce chapitre est le suivant :

1. Le paramétrage.
2. La phase Ψ .
3. La Transformation de Fourier de \mathcal{A} .
4. La Formule d'inversion.
5. La Transformation de Fourier des espaces fonctionnels.

III.1. Le paramétrage.

Nous reprenons les constructions de II mais avec un ordre légèrement différent de la base \mathfrak{l} de \mathfrak{g} et nous garderons abusivement les mêmes notations, laissant au lecteur le soin de faire les changements s'il le juge nécessaire. La base \mathfrak{l} est munie de l'ordre opposé à l'ordre lexicographique :

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{l}_{n,n+1}, \mathfrak{l}_{n,n}, \dots, \mathfrak{l}_{n,2}, \mathfrak{l}_{n-1,n+1}, \mathfrak{l}_{n-1,n}, \dots, \mathfrak{l}_{n-1,2}, \dots, \mathfrak{l}_{2,n+1}, \mathfrak{l}_{2,n}, \dots, \mathfrak{l}_{2,2}, \mathfrak{l}_{1,n+1})$$

et ceci pour que les groupes unitaires à un paramètre de l'expression

$$\Pi(g(t)) = \prod_{L \in \mathfrak{l}} \exp(t_L \cdot \pi(L))$$

agissent suivant l'ordre lexicographique des générateurs $L \in \mathfrak{l}$.

On utilisera les conventions suivantes :

– Les éléments de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ sont appelés des *générateurs*, les quantités z, x et leurs composantes sont appelés des *variables*, les composantes t_L de $t \in \mathbf{R}^{\mathfrak{q}}$ et t lui-même sont appelés des *paramètres*.

– Les générateurs $L \in \mathfrak{l}_{p,j}$ pour $p < j$ et les générateurs $L_{p,p,2b} \in \mathfrak{l}_{p,p}$ introduits en II.5. (i) sont dits “de position” et les autres éléments de base $\in \mathfrak{l}$ sont dits “d’impulsion”.

– La substitution triangulaire (5) met en correspondance chaque élément de base L avec un générateur Q_j ou P_j ou Z_k et ce générateur correspond à une variable par la représentation π (du moins lorsque L est de position). On transporte donc sur les variables et les paramètres (qui sont indexés par $L \in \mathfrak{l}$!) les notions déjà définies : de ligne p , de colonne j , de position, d’impulsion, ainsi que l’ordre opposé à celui de \mathfrak{l} (ie. l’ordre lexicographique) qui sera donc défini indifféremment entre générateurs variables et paramètres et qui sera noté avec le symbole $<$. D’autre part, chaque variable x_k (ou z_j) correspond à un unique vecteur de base L , nous ferons la convention simplificatrice suivante : en tant qu’indices, nous *identifierons* k et L (pour z_j , on notera $z_j = x_L$). Par exemple on peut dire que t_L précède x_k ou x_L , et noter $t_L < x_L$.

III.2. La phase Ψ .

Le calcul de cette phase passe par la détermination précise des groupes unitaires à un paramètre et l’utilisation des propriétés algébriques de l’opérateur $\pi(L)$. On décompose cet opérateur : $\pi(L) = \pi_0(L) + \pi_1(L)$ en son terme constant $\pi_0(L)$ et sa partie dominante de degré 1 : $\pi_1(L) = \sum_{k=1}^M a_k(L) \frac{\partial}{\partial x_k}$.

– Le coefficient constant $\pi_0(L)$, hormis un dénominateur divisant $\delta_n(z) = \pi(\Delta_n)$, est un polynôme en (z, x) . Si $L \in \mathfrak{l}_{p,j}$, on a (cf. (5) par exemple)

$$\pi_0(L) = \sqrt{-1}^d \pi(D_{p,j})^{-1} x_L + b_L \tag{16}$$

avec $d \in \mathbf{N}$ et b_L fonction seulement des variables qui précèdent L . Si de plus L est un générateur d’impulsion, le premier terme de cette somme disparaît.

– Les coefficients $a_k(L)$ sont des *fonctions polynômiales* des variables de ligne plus petite et de colonne plus grande que x_k . Supposons que la variable x_k provient de $q_{r,s}$ et $L \in \mathfrak{l}_{p,j}$. On alors les renseignements suivants :

- i. Si $(p, j) < (s, r)$, alors $a_k(L) = 0$.
- ii. Si $(p, j) = (s, r)$, alors $a_k(L)$ est un diviseur de $\delta_n(z)$ dépendant seulement des variables z_i de ligne $\leq r - 1$. La matrice formée par les $a_k(L)$ avec x_k provenant de $q_{j,p}$ et $L \in \mathfrak{L}_{p,j}$ est une matrice carrée régulière.
- iii. Si $(p, j) = (s, r) = (p, p)$, alors $a_k(L)$ est nul si L précède x_k et est un diviseur $\neq 0$ de δ_n si x_k vient juste après L (ceci est dû à la diagonalisation symplectique de I.5.i).
- iv. Si $(p, j) > (s, r)$, on n'a pas de renseignements supplémentaires.

– Rappelons que $\delta_n(z)$ est un polynôme en seulement les variables z_k de ligne $\leq n - 1$ et que son ouvert de non nullité est $\Omega \subset \mathbb{R}^R$.

Les propriétés que l'on a passées en revue ont les effets suivants :

Si $L \in \mathfrak{L}_{p,j}$, L n'agit pas sur les variables x_k provenant de $q_{r,s}$ avec $(p, j) < (s, r)$, i.e. sur les variables dont la transposition suit $L^{(6)}$. Pour les variables dont la transposition est de même double indice que L , on a une action de translation linéaire en les paramètres, avec un jacobien non nul diviseur de δ_n .

Le groupe de déplacement $\gamma_L(t_L)$ agit sur toute composante x_k par une translation qui est polynômiale en t_L et en les variables de ligne plus petite que x_k et de colonne plus grande. Il laisse invariantes les variables dont la transposition suit L : on a donc une action triangulaire par blocs, et pour chaque bloc diagonal, la translation est fonction linéaire de paramètres, à coefficients diviseurs de δ_n et dépendant seulement des z_k de ligne plus petite et à jacobien non nul. Lorsque l'on compose les $\gamma_L(t_L)$ suivant l'ordre lexicographique, agissent sur les variables figurant dans $\gamma_L(t_L)$ *seulement* les $\gamma_Y(t_Y)$ tels que $L < Y$, ce qui changera chaque monôme en lui ajoutant seulement un polynôme en les t_Y avec $L < Y$ et les variables dont le rang précède le rang (maximum) de variables qui figurent effectivement dans ce monôme. L'effet

(6) La transposition concerne le double indice (r,s) de $\mathfrak{L}_{r,s} \ni Y$ servant à indexer les variables en question : on note Y^\sim le rang lexicographique de (s,r) et si $s = r$, on décide que le rang de Y^\sim est celui de Y .

global de $\gamma(t)$ sur une variable x_L se décrit donc

$$x_L \longrightarrow x_L + \sum_{Y \geq L \sim} t_Y \cdot (a_L(Y) + c_L(Y)) \quad (17)$$

(on somme sur $Y \in \mathfrak{L}$), et la fonction $c_L(Y)$ est un polynôme en les variables $< L$ et les paramètres $\geq Y$ et ce polynôme a une valuation par rapport aux paramètres qui est non nulle. Il apparaît comme le terme correctif d'ordre supérieur et il est "triangulaire". Le lecteur désirant des calculs plus explicites peut consulter [7] chapitre III.

La phase $\Phi(t, z, x)$ se calcule en sommant les phases partielles $\Phi_L(t_L, z, x)$ de (6), avec $\pi_0(L)$ venant de (16) et transformées par les $\gamma_Y(t_Y)$ tels que $L < Y$:

$$\Phi(t, z, x) = \sum_{L \in \mathfrak{L}} \Phi_L(t_L, z, x) = \sum_{L \in \mathfrak{L}} t_L \cdot (e_L x_L + b_L + d_L). \quad (18)$$

Ici e_L est l'inverse d'un diviseur de δ_n qui ne dépend que des variables z_k de ligne plus petite que x_L si L est de position et est nul sinon; b_L et d_L sont localisés de même. La fonction e_L est évidemment imaginaire pure. La fonction b_L est un polynôme en les seules variables $< L$ et d_L est un polynôme en ces mêmes variables et en les paramètres $\geq L$, avec une valuation non nulle par rapport aux paramètres (on a passé sous silence la localisation précédemment indiquée).

Comme il est l'habitude pour les opérateurs Fourier-Intégraux, on considère la phase

$$\Psi(t, z, x, \xi) = \Psi'(t, z, x, \xi) - \sqrt{-1} \sum_{j=1}^M \xi_j x_j \quad (\text{cf. (15)}).$$

On a donc la formule

$$\begin{aligned} \Psi(t, z, x, \xi) = & \sum_{L \in \mathfrak{L}} t_L (e_L x_L + b_L + d_L) \\ & + \sqrt{-1} \sum_{L \in \mathfrak{L}^+} \xi_L \sum_{Y \geq L \sim} t_Y (a_L(Y) + c_L(Y)). \end{aligned}$$

Pour bien faire apparaître la forme bilinéaire canonique, on considère le changement de variables $(z, x, \xi) \longrightarrow y = (y_L)_{L \in \mathfrak{L}}$ avec les nouvelles variables définies par

$$\sqrt{-1} y_L = \frac{\partial}{\partial t_L} \Big|_{t=0} \Psi(t, z, x, \xi). \quad (20)$$

Nous notons abusivement la fonction des nouvelles variables par la même lettre, i.e. $\Psi(t, y) = \Psi(t, z, x, \xi)$. La situation est décrite par la Proposition suivante.

PROPOSITION 6. — *La phase $\Psi(t, y)$ a une forme quasi-bilinéaire*

$$\Psi(t, y) = \sqrt{-1} \sum_{L \in \mathfrak{L}} t_L y_L + \mathcal{R} \quad (21)$$

dans laquelle le reste \mathcal{R} est une somme de monômes en (t, y) (à une localisation par un diviseur de δ_n près) ayant les deux propriétés suivantes : Chaque monôme est de valuation ≥ 2 par rapport aux paramètres t_L et est une fonction "triangulaire" de (y, t) dans le sens qu'il ne dépend effectivement que des paramètres dont le rang est strictement plus grand que le rang de toute variable qui y figure.

De plus les variables y_L vérifient l'identité

$$\sqrt{-1} y_L = \pi^*(L) \quad (22)$$

au second membre de laquelle figure la fonction de (z, x, ξ) provenant de $\pi(L)$ par changement des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_Y}$ en $\sqrt{-1} \xi_Y$ (Y varie dans \mathfrak{L}). Le changement de variable $(z, x, \xi) \longrightarrow (y) = (y_L)_{L \in \mathfrak{L}}$ est bipolynômial, hormis une localisation par δ_n et son jacobien est égal à $\delta(z)^{-1}$.

La première partie de la Proposition résulte des relations (16) à (19) et de la définition des coefficients $a_L(Y)$ qui figurent

dans $\pi_1(Y) = \sum_{L \in \mathfrak{L}} a_L(Y) \frac{\partial}{\partial x_L}$. On constate par ailleurs que la

partie de premier degré en les paramètres t_L , qui est bilinéaire par construction, a bien la dépendance en (z, x, ξ) donnée par (22). Le changement de variable $(z, x, \xi) \longrightarrow (y)$ correspond exactement au changement de base

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_R, Q_1, Q_2, \dots, Q_M, P_1, P_2, \dots, P_M) \longrightarrow (\mathfrak{L})$$

par l'intermédiaire de π et son jacobien est bien égal à l'inverse de $\delta(z)$ qui provient du jacobien du changement de base inverse.

Remarque. — Au sens des opérateurs Fourier-Intégraux, les variables y_L ne commutent pas ensemble car elles dépendent des variables x_k et des variables conjuguées ξ_k . Nous pouvons de plus donner une interprétation canonique de $\pi^*(L)$ (ou de $\pi(L)$ ce qui revient au même) : $\pi^*(L) = \sqrt{-1} y_L$ est la donnée tangente dans la direction définie par $\frac{\partial}{\partial t_L}$ de l'opérateur Fourier-Intégral qui décrit la Transformation de Fourier-Plancherel du groupe G . Comme opérateur Fourier-Intégral, $\pi^*(L)$ est une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et il détermine clairement la Transformation de Fourier-Plancherel de G .

Dans ce qui suit on appelle opérateur de Fourier-Plancherel de G l'opérateur Fourier-Intégral de phase $\Psi(t, y) = \Psi(t, z, x, \xi)$ opérant sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}^M suivant la formule

$$\begin{aligned} \Pi_z(g(t))f(x) &= \int_{\mathbb{R}^M} e^{\Psi(t, z, x, \xi) + \sqrt{-1} \sum_{k=1}^M \xi_k \cdot x_k} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (14) \\ \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^M \int_{\mathbb{R}^M} e^{-\sqrt{-1} \sum_{k=1}^M \xi_k \cdot x_k} f(x) dx. \end{aligned}$$

Soit G un groupe de Lie nilpotent réel connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On choisit une base \mathfrak{l} convenable de \mathfrak{g} (suivant III.1) et on paramètre G par $t = (t_L)_{L \in \mathfrak{l}} \in \mathbb{R}^q$ par $g(t) = \prod_{L \in \mathfrak{l}} \exp(t_L \cdot L)$. On a prouvé l'énoncé suivant :

THEOREME 3. — *Il existe deux entiers R et M , un polynôme $\delta_n(z)$ défini sur \mathbb{R}^R et une fonction rationnelle $\Psi(t, z, x, \xi)$ sur $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ tels que :*

- i. *La fonction $\delta_n(z) \Psi(t, z, x, \xi)$ est polynômiale.*
- ii. *L'opérateur de Fourier-Plancherel du groupe G a pour phase $\Psi(t, z, x, \xi)$ et opère suivant (14) sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_z des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}^M . Pour chaque z appartenant à l'ouvert Ω de non nullité de $\delta_n(z)$, l'opérateur $\Pi_z(g(t))$ défini par (14) est unitaire et réalise une représentation continue et irréductible de G . Pour différents z les représentations sont inéquivalentes.*

iii. Pour tout $L \in \mathfrak{g}$ on pose $\pi^*(L) = \frac{\partial}{\partial t_L} \Big|_{t=0} \Psi(t, z, x, \xi)$.

Alors π^* est une représentation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} par des opérateurs Fourier-Intégraux polynômiaux (à une localisation par $\delta_n(z)$ près) et qui sont au plus du premier ordre en ξ . En retour, l'exponentielle de la représentation π^* redonne la représentation de Fourier-Plancherel de G .

iv. Le changement de base $((\pi^*(L))_{L \in \mathfrak{g}}) \longrightarrow (z, x, \xi)$ est bipolynômial hormis une localisation par $\delta_n(z)$. Son jacobien $\delta(z)$ ne dépend que de z et la mesure de Plancherel de G est supportée par Ω avec la densité $|\delta(z)| dz$.

La connaissance précise de la phase $\Psi(t, z, x, \xi)$ permet d'aborder les paragraphes suivants.

III.3. La Transformation de Fourier des opérateurs différentiels polynômiaux sur G .

A toute fonction $\psi \in \mathcal{O}(G)$, on associe sa transformée de Fourier qui est une fonction sur $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^+ + 2M}$ (qu'on note $\hat{\psi}$ ou $\mathfrak{F}\psi$) au moyen de l'intégrale

$$\hat{\psi}(y) = \int_G e^{\Psi(t, y)} \psi(g(t)) dt. \quad (23)$$

Avec le changement de variable $(y) \longrightarrow (z, x, \xi)$ la fonction $\hat{\psi}(y)$ devient un opérateur Fourier-Intégral opérant dans \mathfrak{H}_z par une formule déduite de (14) et correspond exactement à l'opérateur $\Pi_z(\psi)$ défini dans le Théorème 1.

Pour toute valeur de y correspondant à $\delta_n(z) \neq 0$, la phase est une fonction régulière et imaginaire pure. En conséquence, $\psi(y)$ est définie et C^∞ pour ces valeurs de y . Dans les énoncés qui suivent, on omet toujours de parler de cette restriction et le lecteur se mettra de lui-même dans l'ouvert de Zariski défini par $\delta_n(z) \neq 0$. La Transformation de Fourier-Plancherel du groupe nilpotent G a pu se ramener à la forme (23) qui est commutative, avec une phase $\Psi(t, y)$ qui est bilinéaire au premier ordre (voir Prop. 1. formule (21)). On utilisera librement les techniques

classiques de dérivation sous signe intégral et d'intégration par parties et on omettra les justifications qui sont standard.

On a les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_L} \hat{\psi}(y) &= \int_G e^{\Psi(t,y)} \frac{\partial}{\partial y_L} \Psi(t,y) \psi(g(t)) dt \\ \mathfrak{F} \left(\frac{\partial}{\partial t_L} \psi \right) (y) &= \int_G e^{\Psi(t,y)} \left(- \frac{\partial}{\partial t_L} \Psi(t,y) \right) \psi(g(t)) dt \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_L} \Psi(t,y) &= \sqrt{-1} t_L + \frac{\partial}{\partial y_L} \mathcal{R} \\ \frac{\partial}{\partial t_L} \Psi(t,y) &= \sqrt{-1} y_L + \frac{\partial}{\partial t_L} \mathcal{R} \end{aligned} \tag{25}$$

qui sont tout à fait habituelles si l'on oublie le terme d'ordre supérieur \mathcal{R} . Comme ce terme est "triangulaire" (cf. Prop. 6) on peut faire les substitutions algébriques élémentaires pour obtenir ce qui suit.

PROPOSITION 7. — *Par Transformation de Fourier-Plancherel sur le groupe G, l'algèbre \mathcal{A} des opérateurs polynômiaux sur G se transforme en une sous-algèbre d'opérateurs différentiels sur \mathbb{R}^{R+2M} à coefficients polynômiaux hormis une localisation par $\delta_n(z)$. L'algèbre $\mathfrak{F} \mathcal{A}$ est engendrée par les opérateurs*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(t_L) &= -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_L} + C_L \\ \mathfrak{F} \left(\frac{\partial}{\partial t_L} \right) &= \sqrt{-1} y_L + D_L \end{aligned} \tag{26}$$

où C_L est une somme de monômes en $\left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ à une localisation par un diviseur de $\delta_n(z)$ près; chaque monôme est de valuation ≥ 1 en $\frac{\partial}{\partial y}$ et ne dépend que des $\frac{\partial}{\partial y_{L'}}$ avec $L < L'$ et des variables $Y_{L''}$ telles que $L'' < \text{Sup}(L')$.

De même D_L est de valuation ≥ 1 en $\frac{\partial}{\partial y}$ et est une

somme de monômes dépendant des $\frac{\partial}{\partial y_L}$ et des y_L tels que $\text{Sup}(L'') < \text{Sup}(L')$.

On a d'autre part les formules inverses

$$y_L = \mathfrak{F} \left(-\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial t_L} + E_L \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_L} = \mathfrak{F} (\sqrt{-1} t_L + F_L)$$
(27)

où "à une localisation par un diviseur de $\delta_n(z)$ près", E_L est une somme de monômes en les $\frac{\partial}{\partial t_{L'}}$ avec $L' < L$ et des seuls paramètres $t_{L''}$ tels que $\text{Inf}(L') < L''$ alors que F_L est une somme de monômes en les $\frac{\partial}{\partial t_{L'}}$ et les $t_{L''}$ tels que $\text{Inf}(L') < \text{Inf}(L'')$. Les polynômes E_L et F_L sont de valuation ≥ 1 en $\frac{\partial}{\partial t}$.

La Proposition résulte d'un examen soigné des termes correctifs de (25), en tenant compte du caractère "triangulaire" de \mathcal{R} signalé dans la Proposition 6. Pour prouver la première ligne de (26), on fait une récurrence sur les indices L décroissants. Par exemple, pour le plus grand indice L on a $C_L = 0$. Pour un indice L quelconque, par la présence même de la dérivation $\frac{\partial}{\partial y_L}$, ne contribueront que des monômes qui dépendent seulement des $t_{L'}$ avec $L < L'$ et on peut remplacer ces paramètres par les expressions déjà obtenues. La deuxième ligne s'obtient en reportant dans les termes correctifs les expressions de $t_{L'}$ tirées de la première ligne. Les formules (27) sont similaires à prouver; il suffit de raisonner sur les indices L croissants. On remarquera que les intégrations par parties demandent à être faites dans un ordre convenable et les écritures des expressions C_L, D_L, E_L et F_L doivent respecter cet ordre. Le problème des localisations se résoud "en chassant les dénominateurs" qui ne dépendent que des Y_L d'indices plus petits et déjà calculés par (27).

La Proposition 7 montre que si l'on localise par $\delta_n(z)$, l'algèbre des opérateurs différentiels polynômiaux localisés sur G

a pour Transformée de Fourier-Plancherel l'algèbre d'opérateurs différentiels polynômiaux localisés sur $\mathbf{R}^{\mathbf{R}+2\mathbf{M}}$.

III.4. La formule d'inversion.

La formule d'inversion s'obtient de deux manières. On peut appliquer le Théorème 1 en calculant explicitement l'opérateur $\Pi_z(g(t)^{-1})$: par une composition convenable on tire la valeur de $\psi(g(t))$. L'expression même de cet opérateur est remarquable. La Formule d'inversion étant écrite, on peut constater a posteriori qu'elle est bien l'unique expression qui convient.

PROPOSITION 8. — L'opérateur $\Pi_z(g(t)^{-1})$ agit dans \mathfrak{H}_z suivant la formule suivante (cf. (7)) :

$$\Pi_z(g(t)^{-1}) f(x) = e^{-\Phi(t,z,\gamma(t)^{-1}x)} f(\gamma(t)^{-1}x) \tag{28}$$

et l'opérateur de Fourier-Plancherel associé (agissant selon (14)) a pour phase

$$\Psi_1(t,y) = -\Phi(t,z,\gamma(t)^{-1}x) + \sqrt{-1} \xi \cdot (\gamma(t)^{-1}x - x).$$

Pour toute fonction $\psi \in \mathfrak{S}(G)$ on a les formules d'inversion

$$(2\pi)^{\mathbf{M}+\mathbf{R}} \psi(g(t)) = \int_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}} \text{Tr}(\Pi_z(g(t)^{-1}) \Pi_z(\psi)) |\delta(z)| dz \tag{30}$$

$$(2\pi)^{2\mathbf{M}+\mathbf{R}} \psi(g(t)) = \int_{\mathbf{R}^{2\mathbf{M}+\mathbf{R}}} e^{-\Psi(t,y)} \hat{\psi}(y) dy. \tag{31}$$

En particulier l'intégrale de (31) converge lorsque l'on effectue les intégrations sur les variables dy_L suivant l'ordre des indices L décroissants.

On vérifie immédiatement que $\Pi_z(g(t))^{-1}$ est bien égal à l'opérateur donné par (28). Sa phase d'opérateur Fourier-Intégral (après soustraction de $\sqrt{-1} \xi \cdot x$) est alors décrite par (29).

La formule (30) provient directement de la formule (4) du Théorème 1 en y changeant $\psi(g(t))$ en $\psi(g(s)g(t))$, ce qui donne la valeur de $\psi(g(s))$ pour l'intégrale du second membre de (4).

La formule (31) se dérive de (30) en tenant compte de (28) et d'une formule d'inversion partielle en la variable ξ qui redonne le noyau de $\Pi_z(\psi)$ à partir de $\hat{\psi}(z, x, \xi)$ (qui est égal par définition à $\hat{\psi}(y)$). La convergence signalée dans la dernière assertion résulte de l'expression bilinéaire modulo un terme triangulaire de $\psi(t, y)$ décrite dans la Proposition 6 : par exemple l'intégrale sur la variable dy_L avec L de rang maximum est une intégrale de Fourier ordinaire puisque la seule dépendance de la phase en y_L est $\sqrt{-1} t_L \cdot y_L$. L'intégration effectuée, on obtient l'annulation de tous les monômes dépendant de t_L dans la phase et on peut continuer la récurrence. . .

On remarquera l'extrême simplicité de la formule d'inversion par rapport à la Transformation de Fourier initiale. Comme la phase est l'opposée de sa valeur initiale, la formule d'inversion redonne exactement les mêmes relations que (24) lorsque l'on dérive ou intègre par parties sous le signe intégral, ce à quoi on s'attendait. Ainsi nos formules sont analogues au cas commutatif.

III.5. Transformation de Fourier des espaces fonctionnels.

La Transformation de Fourier de l'espace $\mathfrak{S}(G)$ s'obtient par la Proposition 7. L'image de $\mathfrak{S}(G)$ est formée de fonctions sur \mathbf{R}^{2M+R} qui sont dérivables et à décroissance rapide dans le sens suivant : Pour tout opérateur différentiel D appartenant à $\mathfrak{F}\mathcal{A}$, la fonction est dans le domaine de D et son image par D est uniformément bornée. On obtient grâce à $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ une famille dénombrable de semi-normes. Dans le cas où la fonction $\Psi(t, y)$ est sans localisation, on obtient exactement l'espace $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^{2M+R})$. Mais pour le cas général, une étude fine est nécessaire, le seul problème étant de montrer la surjectivité de la Transformation de Fourier-Plancherel. A cet égard, la formule d'inversion est très utile. Par exemple, on montre que si $\hat{\psi}(y)$ est à support compact et C^∞ à décroissance rapide au sens de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$, alors la formule d'inversion produit une fonction appartenant à $\mathfrak{S}(G)$. Mais nous pensons qu'une étude détaillée de ce problème mérite une meilleure place que la fin de ce travail.

En illustration de la méthode, nous allons écrire explicitement la Transformation de Fourier-Plancherel pour une classe de groupes

de Lie “assez commutatifs” et qui comprend en particulier les groupes de Heisenberg (en fait, les groupes nilpotents de degré de nilpotence ≤ 2) et les groupes de matrices triangulaires supérieures.

Dans ce qui suit, le groupe de Lie G a une algèbre de Lie \mathfrak{g} qui est le produit semi-direct d’une sous-algèbre \mathfrak{B} et d’un idéal abélien \mathfrak{A} “assez grand” : Soit $\mathbf{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{A})$; la représentation adjointe dans \mathbf{K} définit une représentation de $\mathbf{K} \mathfrak{g}$ dans l’algèbre $\text{Der} \mathbf{K}$ des dérivations de \mathbf{K} . On suppose que le noyau de cette représentation est réduit à \mathbf{K} ; il est équivalent de dire qu’une base de \mathfrak{B} définit un ensemble de dérivations de \mathbf{K} qui est libre sur \mathbf{K} . Soient (X_1, X_2, \dots, X_Q) une base de \mathfrak{A} et (Y_1, Y_2, \dots, Y_M) une base de \mathfrak{B} . On note $A_{i,j} = [Y_i, X_j]$. La représentation π s’écrit :

$$\pi(X_j) = \sqrt{-1} x_j \tag{32}$$

$$\pi(Y_i) = -\sqrt{-1} \sum_{j=1}^Q a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{33}$$

avec les coefficients $a_{i,j} = \pi(A_{i,j})$ déterminés par les relations (32).

Le groupe G est de dimension $M + Q$ et se paramètre par $(s, t) \in \mathbf{R}^M \times \mathbf{R}^Q$:

$$g(s, t) = \prod_{i=1}^Q \exp(t_j X_j) \prod_{i=1}^M \exp(s_i Y_i).$$

Par exponentiation les champs de vecteurs $\pi(Y_i)$ déterminent les groupes de déplacements à un paramètre $\gamma_i(s_i)$ dont le produit ordonné est noté $\gamma(s)$. Lorsque l’on désire avoir l’action explicite des opérateurs unitaires $\Pi_z(g(t))$, on doit choisir M variables principales X_j (que l’on supposera être les M premières dans ce qui suit). Par des calculs classiques [1, 12] (et qui sont effectués explicitement dans [7]) on a un changement de base algébrique transformant les variables restantes $X_{M+1}, X_{M+2}, \dots, X_Q$ en les variables centrales Z_1, Z_2, \dots, Z_R . Lorsque l’on s’intéresse seulement à la Transformation de Fourier-Plancherel, il n’est pas nécessaire de faire ce calcul. On obtient directement la Phase de l’opérateur Fourier-intégral :

$$\Psi(s, t ; x ; \xi) = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^Q t_j x_j + \sqrt{-1} \sum_{i=1}^M \xi_i ((\gamma(s)x)_i - x_i).$$

Cette phase est polynômiale, donc la transformation de Fourier-Plancherel fait correspondre $\mathfrak{S}(G)$ à $\mathfrak{S}(\mathbf{R}^{M+Q})$. On peut comparer ces résultats avec ceux de [1]. On remarquera la simplicité de ces calculs. Elle est due au caractère canonique de la plupart des objets introduits : par exemple les fonctions x_j sont les données $\pi^*(X_j)$ du Théorème 3. Par contre les variables conjuguées ξ_i dépendent du choix des variables principales X_i donc de la réalisation explicite des opérateurs Fourier-Intégraux.

Un autre exemple légèrement plus compliqué se présente lorsque l'on ne suppose plus l'existence de la sous-algèbre \mathfrak{B} , supplémentaire de l'idéal abélien "assez grand" \mathfrak{A} . Dans ce cas, les formules (33) ne réalisent plus une représentation des éléments Y_i , car le commutateur de deux tels éléments n'est pas toujours une combinaison linéaire des Y_i . On doit rajouter à l'opérateur différentiel $\pi(Y_i)$ un terme constant qui doit être la primitive d'un 2-cocycle. Dans cette primitive, il apparaîtra éventuellement la localisation par le déterminant de la matrice $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,M}$. Ces coefficients constants contribuent simplement par une phase supplémentaire dépendant seulement des paramètres s_j et des variables x_i .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. CORWIN & F.P. GREENLEAF Fourier Transform of smooth functions on certain Nilpotent Lie groups, *Jour. Funct. Anal.*, 37 (1980), 203-217.
- [2] J. DIXMIER *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [3] R.E. HOWE A connection between Nilpotent Lie Groups and Oscillatory integrals associated to singularities, *Pacific Jour. Math.*, 73 (1977), 329-364.
- [4] I.M. GELFAND & A.A. KIRILLOV Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes, *Publ. Math. IHES*, n° 31 (1966), 5-20.
- [5] NGHIÊM XUÂN HAI, La Transformation de Fourier-Plancherel analytique des groupes de Lie. I. Algèbres de Weyl et opérateurs différentiels, *Ann. Inst. Fourier*, 33-4 (1983), 95-133.

- [6] NGHIÊM XUÂN HAI Une variante de la conjecture de Gelfand-Kirillov et la Transformation de Fourier-Plancherel. *C.R.A.S.*, Paris, tome 293, série 1, p. 381-384.
- [7] NGHIÊM XUÂN HAI Construction analytique de la Transformation de Fourier-Plancherel des groupes de Lie. Cours de 3^e Cycle Orsay, Université de Paris-Sud (1979), *Publ. Math. Orsay*, (1979) n° 79.06.
- [8] NGHIÊM XUÂN HAI Algèbres de Heisenberg et géométrie symplectique des algèbres de Lie, *Publ. Math. Orsay* (1978) n° 78.08.
- [9] NGHIÊM XUÂN HAI Harmonic analysis on the Poincaré Group :
I. Generalized matrix elements, *Comm. Math. Phys.*, 12 (1969), 331-350.
II. The Fourier Transform, *Comm. Math. Phys.*, 22 (1971), 301-320.
- [10] NGHIÊM XUÂN HAI Sur certaines représentations d'une algèbre de Lie résoluble complexe (I), *Bull. Sc. Math.*, 97 (1973), 105-128.
- [11] A.A. KIRILLOV Unitary representations of nilpotent Lie Groups, *Uspekhi Math. Nauk.*, 17 (1962), 57-110.
- [12] L. PUKANSZKY *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967.
- [13] L. PUKANSZKY Unitary representations of solvable Lie Groups, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4^e Série, 4 (1971), 457-608.

Manuscrit reçu le 9 octobre 1981
révisé le 4 février 1983.

NGHIÊM XUÂN HAI,
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.