

MAURICE BLAMBERT

R. PARVATHAM

**Sur une inégalité fondamentale et les singularités
d'une fonction analytique définie par un
élément LC -dirichlétien**

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 4 (1983), p. 135-160

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_135_0

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE INÉGALITÉ FONDAMENTALE
ET LES SINGULARITÉS
D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DÉFINIE
PAR UN ÉLÉMENT LC-DIRICHLÉTIIEN**

par **M. BLAMBERT** et **R. PARVATHAM**

INTRODUCTION

Ce travail comporte deux chapitres : dans le premier, utilisant une fonction entière $g \in B[1, T]$ (la classe des fonctions entières au plus de l'ordre borélien 1 et au plus du type fini T de leur ordre si cet ordre est égal à 1) et les propriétés relatives à son diagramme indicateur et à son diagramme conjugué, on établit une inégalité fondamentale liée au terme général d'un élément LC-dirichlétien. La méthode à la fois simple et élégante est distincte de celle utilisée par T. M. Gallie [6] dans le cas d'un élément C-dirichlétien et conduit à un résultat contenant celui de cet auteur comme cas particulier. La méthode est aussi beaucoup plus simple que celle due à M. M. Dzrbasjan [5] pour établir l'inégalité fondamentale obtenue dans un mémoire antérieur [3].

Dans le chapitre II, on donne des propriétés de convergence (un peu plus générales que celles introduites dans [1]) dans le but d'utiliser l'inégalité fondamentale obtenue dans le chapitre I pour préciser certaines propriétés liées au prolongement analytique de la fonction définie par l'élément LC-dirichlétien dans un ouvert connexe de convergence uniforme. Cette inégalité peut servir aussi à l'étude des ordres supérieur et inférieur au sens de Ritt pour les fonctions entières et permet de retrouver ainsi les résultats établis dans [3].

CHAPITRE PREMIER

On considère un élément LC-dirichlétien :

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) \exp(-\lambda_n s), \quad \text{avec } s = \sigma + it, (\sigma, \tau) \in \mathbf{R}^2$$

où $P_n(s) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{nj} s^j$, les a_{nj} étant des constantes complexes avec $a_{nm_n} \neq 0$ et où les λ_n sont des constantes complexes telles que la suite des modules de λ_n , $(|\lambda_n|)$ est une D-suite ($\Leftrightarrow |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$). On pose

$$D^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (m_i + 1)}{|\lambda_n|} \right\}$$

et

$$\beta^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{m_n}{|\lambda_n|} \right\}.$$

On désigne par \mathcal{E}_n l'ensemble des points de \mathbf{C} qui sont des zéros pour le polynôme P_n et par \mathcal{E}_∞ l'ensemble des points de \mathbf{C} qui sont chacun un zéro pour une infinité de polynômes P_n . On pose $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^d \cup \mathcal{E}_\infty$ où \mathcal{E}^d désigne le dérivé de $\mathcal{E} = \bigcup_n \mathcal{E}_n$. On suppose $D^* < +\infty$ ($\Rightarrow \beta^* < +\infty$) et $\mathbf{C} - \mathcal{E}^* \neq \emptyset$. Pour chaque point $s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ on a $P_n(s) \neq 0$ à partir d'une certaine valeur de l'entier n , dépendant évidemment du point s considéré. On pose :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \delta_*(s) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-\text{Log } |P_n(s) \exp(-\lambda_n s)|}{|\lambda_n|} \right\}$$

et

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \mathcal{D}_{*\alpha} = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* / \delta_*(s) > \alpha\}.$$

On considère, en outre, une fonction entière g satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) g admet, pour chaque $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, λ_n pour zéro à l'ordre $m_n + 1$;

2) g est au plus d'ordre borélien égal à 1 et du type fini T de cet ordre si cet ordre est égal à 1 ($\Leftrightarrow g \in B[1, T]$);

3) désignant par \mathcal{C} l'image par rapport à l'axe imaginaire du diagramme indicateur de g , on a : $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{*, \beta}^*$.

Remarque I.1. — On sait que [4] le diagramme indicateur (et donc aussi \mathcal{C}) est inclus dans l'adhérence du disque de centre $s = 0$ et de rayon égal à T (on note $\overline{d(0, T)}$ cette adhérence) et qu'il a un point commun avec $\text{Fr } \overline{d(0, T)}$. En outre, \mathcal{C} est un compact.

Remarque I.2. — Eu égard à la condition $D^* < +\infty$, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} [1 - (s/\lambda_n)^2]^{m_n+1}$ est absolument convergent dans \mathbf{C} (on note $\bar{L}(s)$ sa valeur au point $s \in \mathbf{C}$). La fonction $\bar{L} : \mathbf{C} \ni s \mapsto \bar{L}(s)$ satisfait aux conditions 1) et 2) ci-dessus si $T \geq \pi D^*$; on peut alors évidemment choisir pour fonction g la fonction \bar{L} si elle satisfait en outre à la condition 3).

On considère, pour chaque $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, l'application

$$\psi_n : \mathbf{C} \ni s \Rightarrow \psi_n(s) = \frac{g(s)}{(s - \lambda_n)^{m_n+1}}$$

(définie par continuité au point λ_n). Chaque ψ_n est holomorphe dans \mathbf{C} , avec $\psi_n(\lambda_n) \neq 0$. Pour chaque $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on considère la fonction φ_n , méromorphe dans \mathbf{C} , définie comme il suit :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j} \varphi_n(s) = \frac{1}{\psi_n(s)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(\lambda_n) = \frac{1}{\psi_n(\lambda_n)}.$$

φ_n admet pour chaque $j \neq n$, l'élément λ_j pour pôle d'ordre $m_j + 1$; φ_n est évidemment holomorphe au point λ_n . On pose :

$$A_j(\lambda_n) = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j \varphi_n}{ds^j} \right\}_{s=\lambda_n}$$

et pour $t \in \{1, 2, \dots, m_n + 1\}$:

$$Q_{n,t}(s) = \sum_{j=0}^{m_n-t+1} A_j(\lambda_n)(s - \lambda_n)^j;$$

($Q_{n,t}(s)$ est la valeur en s du polynôme-section de degré $m_n - t + 1$ du

germe taylorien de φ_n au point λ_n , ainsi que :

$$\forall_{s \in \mathbb{C}} \Omega_{n,t}(s) = \frac{\Psi_n(s) Q_n(s) (s - \lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!}. \quad (\text{I.1})$$

L'application $\Omega_{n,t} : \mathbb{C} \ni s \mapsto \Omega_{n,t}(s)$ est évidemment holomorphe dans \mathbb{C} et a le même diagramme indicateur que Ψ_n et donc que g , en outre $\Omega_{n,t} \in \mathcal{B}[1, T]$.

PROPOSITION I.3. — *On a*

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}} \exists_{M_1(=\mathcal{M}_1(\varepsilon))} \forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \forall_{s \in \mathbb{C}} |\Psi_n(s)| \leq M_1(\varepsilon) \exp[(T + \varepsilon)|s|].$$

Démonstration. — Puisque $g \in \mathcal{B}[1, T]$, on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{r_\varepsilon > 0} \forall_{s \in \mathbb{C} - \overline{d(0, r_\varepsilon)}} |g(s)| < \exp[(T + \varepsilon)|s|].$$

Posant $M(g; r) = \text{Sup} \{|g(s)| \mid |s| \leq r\}$ et

$$M^+(g; r_\varepsilon) = \text{Max} \{1, M(g, r_\varepsilon)\},$$

et eu égard à l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\forall_{s \in \mathbb{C}} |g(s)| \leq M^+(g; r_\varepsilon) \exp[(T + \varepsilon)|s|].$$

On considère le disque ouvert de centre λ_n et de rayon 1, que l'on note $d(\lambda_n, 1)$. Si $s \in \mathbb{C} - d(\lambda_n, 1)$, on a :

$$\left| \frac{g(s)}{(s - \lambda_n)^{m_n+1}} \right| \leq |g(s)| \leq M^+(g; r_\varepsilon) \exp[(T + \varepsilon)|s|].$$

Si $s \in \overline{d(\lambda_n, 1)}$, alors il existe un point $s_1 \in \text{Fr} \{d(\lambda_n, 1)\}$ tel que

$$|\Psi_n(s)| = \left| \frac{g(s)}{(s - \lambda_n)^{m_n+1}} \right| \leq |g(s_1)| \leq M^+(g; r_\varepsilon) \exp[(T + \varepsilon)|s_1|].$$

(On rappelle que Ψ_n au point λ_n est définie par continuité). Or $s \in d(\lambda_n, 1)$ et $s_1 \in \text{Fr} \{d(\lambda_n, 1)\}$ entraînent $|s_1| \leq |s| + 2$, et donc :

$$|\Psi_n(s)| = \left| \frac{g(s)}{(s - \lambda_n)^{m_n+1}} \right| \leq M^+(g; r_\varepsilon) \exp[(T + \varepsilon)(|s| + 2)].$$

Posant $M_1(\varepsilon) = M^+(g; r_\varepsilon) \exp [2(T + \varepsilon)]$, on a :

$$\forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \quad \forall_{s \in \mathbb{C}} \quad |\Psi_n(s)| \leq M_1(\varepsilon) \exp [(T + \varepsilon)|s|]$$

(où $M_1(\varepsilon)$ est indépendant de n et de s).

PROPOSITION I.4. — On a, pour chaque $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

- 1) $\forall_{j(\neq n) \in \mathbb{N} - \{0\}} \quad \forall_{r \in \{0, 1, 2, \dots, m_n\}} \quad \Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_j) = 0,$
- 2) $\forall_{r(\neq t-1) \in \{0, 1, 2, \dots, m_n\}} \quad \Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_n) = 0$ et $\Omega_{n,t}^{(t-1)}(\lambda_n) = 1,$

(où $\Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_j)$ désigne la valeur en λ_j de la dérivée d'ordre r de $\Omega_{n,t}$).

Démonstration. — L'assertion (1) est triviale eu égard à la représentation (I.1) de $\Omega_{n,t}(s)$.

On considère un disque de centre λ_n et de rayon $\rho > 0$ — noté $d(\lambda_n, \rho)$ — dans lequel le germe taylorien de φ en λ_n est convergent (on peut choisir le disque de convergence de ce germe au point λ_n . Ce disque n'est pas vide puisque φ_n est holomorphe en λ_n). On a :

$$\begin{aligned} & \forall_{s \in d(\lambda_n, \rho)} \quad \Omega_{n,t}(s) \\ &= \frac{\Psi_n(s)(s - \lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} \left[\varphi_n(s) - \sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s - \lambda_n)^j \right] \\ &= \frac{(s - \lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} - \frac{\Psi_n(s)(s - \lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} \sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s - \lambda_n)^j \\ &= \frac{(s - \lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} - \frac{\Psi_n(s)(s - \lambda_n)^{m_n+1}}{(t-1)!} \sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s - \lambda_n)^{j+t-m_n-2}. \end{aligned}$$

Eu égard à cette dernière représentation, l'assertion (2) est triviale.

On pose :

$$\begin{aligned} \omega_{n,t} &= \frac{1}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |A_j(\lambda_n)| |\lambda_n|^{j+t-m_n-1} \\ M_n &= \text{Max} \{ |A_j(\lambda_n)| \mid j \in \{0, 1, 2, \dots, m_n + 1\} \} \\ \gamma &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } M_n}{|\lambda_n|}. \end{aligned}$$

PROPOSITION I.5. — On a : $-T \leq \gamma \leq +\infty$.

En effet, on a :

$$|\varphi_n(\lambda_n)| = |A_0(\lambda_n)| \leq M_n$$

où par la proposition I.3. :

$$|\varphi_n(\lambda_n)| = \frac{1}{|\psi_n(\lambda_n)|} \geq \frac{1}{M_1(\varepsilon)} \cdot \exp[-(T+\varepsilon)|\lambda_n|];$$

d'où

$$\limsup \frac{\text{Log}[1/M_1(\varepsilon)]}{|\lambda_n|} - (T+\varepsilon) \leq \gamma,$$

$$-T \leq \gamma.$$

Notations. — Soient un point donné s_1 et une partie donnée E de \mathbf{C} ; on désigne par $\{s_1\} + E$ l'ensemble $\{s \in \mathbf{C} | s = s_1 + s' \text{ avec } s' \in E\}$. On pose : $E_0 = \{s \in \mathbf{C} | |s| \leq 1\}$

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \varepsilon E_0 = \{s \in \mathbf{C} | |s| \leq \varepsilon\}.$$

E_1 et E_2 étant deux parties de \mathbf{C} , on désigne par $E_1 + E_2$ l'ensemble $\{s + s' | s \in E_1 \wedge s' \in E_2\}$.

DÉFINITION I.6. — Soit F une fonction holomorphe dans un ouvert $G \neq \emptyset$. Soient s_1 un point et E un compact tels que $\{s_1\} + E \subset G$. Soient s_2 un point distinct de s_1 et \mathcal{L} un chemin (continu) rectifiable joignant les points s_1 et s_2 . On pose :

$$G_1 = \bigcup_{s \in \mathcal{L}} (\{s\} + E).$$

Si F admet une extension holomorphe dans $G \cup G_1$, on convient de dire, avec S. Mandelbrojt, que F admet une extension holomorphe, au moyen de E , de $\{s_1\} + E$ à $\{s_2\} + E$, le long de \mathcal{L} .

On énonce :

PROPOSITION I.7. — Sous les conditions :

1) Il existe un point s_1 tel que l'ensemble $\{s_1\} + \mathcal{C}$ est inclus dans un composant connexe D de $\mathcal{D}_{*,\beta}^*$ (avec $D^* < +\infty$);

2) L'application $f : D \ni s \mapsto f(s) = \{f\}_s$ admet une extension holomorphe, au moyen de \mathcal{C} , de $\{s_1\} + \mathcal{C}$ à $\{s_2\} + \mathcal{C}$, le long d'un chemin rectifiable \mathcal{L} joignant s_1 à s_2 (puisque $\{s_2\} + \mathcal{C}$ est un compact, il existe donc $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que f est holomorphe sur le compact $\{s_2\} + \mathcal{C} + \varepsilon E_0$);

alors, posant $m^f = \text{Max} \{|f(s)| \mid s \in \{s_2\} + \mathcal{C} + \varepsilon E_0\}$, il existe un entier n_1 et une constante K ne dépendant que de ε et de g telle que pour chaque $n \geq n_1$:

$$\forall_{t \in \{1, 2, \dots, m_n + 1\}} \frac{|P_n^{(t-1)}(s_2) \exp(-s_2 \lambda_n)|}{(t-1)!} \leq \frac{K m^f |\lambda_n|^{m_n} Z^{m_n+1} \omega_{n,t}(m_n+1)!}{\varepsilon^{m_n+1}}.$$

Démonstration. — \mathcal{L} est un continu borné, donc un compact. La fonction f a une extension holomorphe sur le compact $\{s\} + \mathcal{C}$, indexé par $s \in \mathcal{L}$. On a :

$$\exists_{\eta \in]0, 1[} \forall_{s \in \mathcal{L}} f \text{ est holomorphe sur } \{s\} + \mathcal{C} + \eta E_0.$$

On désigne par Γ_η la frontière de $-\mathcal{C} + \eta E_0$ et par $b_{n,t}$ la transformée de Borel de $\Omega_{n,t}$. On considère l'intégrale :

$$(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta} f(s-z) b_{n,t}(z) dz.$$

On sait que $b_{n,t}$ est holomorphe dans le complémentaire par rapport à \mathbb{C} du diagramme conjugué de $\Omega_{n,t}$; celui-ci étant l'image du diagramme indicateur de $\Omega_{n,t}$ par rapport à l'axe réel, $-\mathcal{C}$ est donc précisément le diagramme conjugué de $\Omega_{n,t}$ et $b_{n,t}$ est holomorphe sur Γ_η . On pose :

$$\Delta = \bigcup_{s \in \mathcal{L}} (\{s\} + \mathcal{C} + \eta E_0).$$

$\Delta \cup D$ est un connexe. En chaque point $s \in \mathcal{L}$, il existe un disque ouvert $d(s, \rho_s)$, centré en s et de rayon égal à $\rho_s > 0$, tel que la fonction des deux variables complexes ζ et z :

$$f_s : d(s, \rho_s) \times (-\mathcal{C} + \eta E_0) \ni (\zeta, z) \mapsto f(\zeta - z)$$

est holomorphe sur $\overline{d(s, \rho_s)} \times (-\mathcal{C} + \eta E_0)$. Il en résulte que l'application

$$d(s, \rho_s) \ni \zeta \mapsto (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta} f(\zeta - z) b_{n,t}(z) dz$$

est holomorphe dans son support $d(s, \rho_s)$. On désigne par F_n la fonction définie comme suit : à $\zeta \in \bigcup_{s \in \mathcal{L}} d(s, \rho_s)$, on associe un point $s_\zeta \in \mathcal{L}$ tel que $\zeta \in d(s_\zeta, \rho_{s_\zeta})$ et on fait correspondre à ζ la valeur en ζ de l'application

$$(I.2) \quad d(s_\zeta, \rho_{s_\zeta}) \ni \zeta' \mapsto (1/2 \pi i) \oint_{\Gamma_\eta} f(\zeta' - z) b_{n,t}(z) dz.$$

F_n est, comme il est évident, holomorphe dans $\bigcup_{s \in \mathcal{L}} d(s, \rho_s)$. On désigne par ℓ_η la longueur de Γ_η et on pose :

$$\begin{aligned} B_{n,\eta} &= \text{Sup} \{ |b_{n,t}(z)| \mid z \in \Gamma_\eta \}, \\ m(f; s_2, \eta) &= \text{Sup} \{ |f(\zeta)| \mid \zeta \in \{s_2\} + \mathcal{C} + \eta E_0 \}. \end{aligned}$$

On a :

$$(I.3) \quad |(1/2 \pi i) \oint_{\Gamma_\eta} f(s_2 - z) b_{n,t}(z) dz| \leq (1/2 \pi) \ell_\eta B_{n,\eta} m(f; s_2; \eta).$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(s - \lambda_n)^{t-1} Q_{n,t}(s)}{(t-1)!} \right| &= \frac{1}{(t-1)!} \left| \sum_{j=0}^{m_n-t+1} A_j(\lambda_n) (s - \lambda_n)^{j+t-1} \right| \\ &\leq \frac{\left(1 + \frac{|s|}{|\lambda_n|}\right)^{m_n}}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |\lambda_n|^{j+t-1} |A_j(\lambda_n)| \\ &= \frac{(|s| + |\lambda_n|)^{m_n}}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |\lambda_n|^{j+t-m_n-1} |A_j(\lambda_n)| \\ &= (|s| + |\lambda_n|)^{m_n} \omega_{n,t}. \end{aligned}$$

Eu égard à ce résultat, on a :

$$\forall_{r>0} \text{Sup} \{ |\Omega_{n,t}(s)| \mid |s| = r \} \leq \omega_{n,t} (r + |\lambda_n|)^{m_n} \text{Sup} \{ |\psi_n(s)| \mid |s| = r \}.$$

Puisque $b_{n,t}$ est la transformée de Borel de $\Omega_{n,t} \in \mathcal{B}[1, T]$, on a, comme on le sait :

$$\forall_{z \in E(\theta, T)} b_{n,t}(z) = \exp(-i\theta) \int_0^{+\infty} \Omega_{n,t}(r \exp(-i\theta)) \exp[-zr \exp(-i\theta)] dr$$

où la constante $\theta \in]-\pi, \pi]$ et où $E(\theta, T)$ désigne le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}[z \exp(-i\theta)] > T\}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ arbitraire fixé; on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Sup} \{ |b_{n,t}(z)| | z \in E(\theta, T + \varepsilon) \} \\ \leq \omega_{n,t} \int_0^{+\infty} (r + |\lambda_n|)^{m_n} \exp[-r(T + \varepsilon)] \cdot \operatorname{Sup} \{ |\Psi_n(\zeta)| | |\zeta| = r \} dr. \end{aligned}$$

Eu égard à la proposition V.3, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Sup} \{ |b_{n,t}(z)| | z \in E(\theta, T + \varepsilon) \} \\ \leq \omega_{n,t} M_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^{+\infty} (r + |\lambda_n|)^{m_n} \exp[-r(T + \varepsilon)] \exp \left[r \left(T + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] dr \\ = \omega_{n,t} M_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^{+\infty} (r + |\lambda_n|)^{m_n} \exp \left[-\frac{\varepsilon r}{2} \right] dr. \end{aligned}$$

On a : $\exists \forall_{n_1} \forall_{n \geq n_1} |\lambda_n| \geq 1$; d'où :

$$\begin{aligned} \forall_{n \geq n_1} \{ \operatorname{Sup} |b_{n,t}(z)| | n \in E(\theta, T + \varepsilon) \} \\ \leq \omega_{n,t} |\lambda_n|^{m_n} M_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^{+\infty} (1+r)^{m_n} \exp \left(-\frac{\varepsilon r}{2} \right) dr. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1+r)^{m_n} \exp \left(-\frac{\varepsilon r}{2} \right) dr &= \frac{1}{(\varepsilon/2)} \left[1 + \sum_{i=0}^{m_n-1} \frac{m_n(m_n-1) \dots (m_n-i)}{(\varepsilon/2)^{i+1}} \right] \\ &< \frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}} \quad (\text{puisque } \varepsilon \in]0, 1[). \end{aligned}$$

En définitive, on a pour $\theta \in]-\pi, \pi]$ et pour $n \geq n_1$:

$$(I.4) \quad \forall_{\varepsilon \in]0, 1[} \operatorname{Sup} \{ |b_{n,t}(z)| | z \in E(\theta, T + \varepsilon) \} \leq \omega_{n,t} |\lambda_n|^{m_n} M_1(\varepsilon/2) \frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}}.$$

Le majorant obtenu est indépendant de θ sur $]-\pi, \pi]$. De ce dernier résultat, on déduit :

$$\begin{aligned} (I.5) \quad \forall_{\varepsilon \in]0, 1[} \operatorname{Sup} \{ |b_{n,t}(z)| | z \in \operatorname{Fr} \{ d(0, T + \varepsilon) \} \} \\ \leq \omega_{n,t} |\lambda_n|^{m_n} M_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}}. \end{aligned}$$

On considère maintenant la restriction de F_n au disque $d(s_1, \rho_{s_1})$; on a

$$\forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} F_n(s) = (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} f(s-z) b_{n,t}(z) dz;$$

or

$$\forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} \forall_{z \in \Gamma_\eta} s - z \in \mathcal{D}_{*, \beta^*};$$

d'où :

$$f(s-z) = \{f\}_{s-z}.$$

Eu égard à la convergence uniforme de l'élément LC-dirichlétien

$$\{f\} : \sum_{j=1}^{\infty} P_j(s-z) \exp[-\lambda_j(s-z)]$$

par rapport au couple $(s, z) \in d(s_1, \rho_{s_1}) \times \Gamma_\eta$, on a :

$$\begin{aligned} \forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} F_n(s) &= (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} \left(\sum_{j=1}^{\infty} P_j(s-z) \exp[-\lambda_j(s-z)] \right) b_{n,t}(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-s\lambda_j) [(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz \\ = \sum_{i=0}^{m_j} a_{j,i} \left[(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} (s-z)^i \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz \right]. \end{aligned}$$

On sait que :

$$\Omega_{n,t}(\lambda_j) = (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz,$$

et donc

$$(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \cap} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz = \sum_{i=0}^{m_j} a_{j,i} \sum_{v=0}^i \binom{i}{v} (-1)^v s^{i-v} \Omega_{n,t}^{(v)}(\lambda_j).$$

Or, on a montré que (Proposition I.4) :

$$\forall_{j(\neq n) \in \mathbb{N} - \{0\}} \forall_{v \in \{0, 1, 2, \dots, m_n\}} \Omega_{n,t}^{(v)}(\lambda_j) = 0$$

et que :

$$\forall_{v(\neq t-1) \in \{0,1,2,\dots,m_n\}} \Omega_{n,t}^{(v)}(\lambda_n) = 0$$

et

$$\Omega_{n,t}^{(t-1)}(\lambda_n) = 1.$$

Il en résulte :

$$(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_{\eta}} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ \sum_{i=t-1}^{m_n} a_{n,i} \binom{i}{t-1} (-1)^{t-1} s^{i-t+1} & \end{cases}$$

En définitive, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} F_n(s) &= \exp(-s\lambda_n) \left[\sum_{i=t-1}^{m_n} (-1)^{t-1} a_{n,i} \binom{i}{t-1} s^{i-t+1} \right] \\ &= (-1)^{t-1} \frac{P_n^{(t-1)}(s)}{(t-1)!} \exp(-s\lambda_n). \end{aligned}$$

Ainsi F_n holomorphe dans $\bigcup_{s \in \mathcal{L}} d(s, \rho_s)$ est l'extension à cet ouvert connexe de la fonction

$$d(s_1, \rho_{s_1}) \ni s \mapsto (-1)^{t-1} \frac{P_n^{(t-1)}(s)}{(t-1)!} \exp(-s\lambda_n).$$

On a donc :

$$\forall_{s' \in \bigcup_{s \in \mathcal{L}} d(s, \rho_s)} F_n(s') = (-1)^{t-1} \frac{P_n^{(t-1)}(s')}{(t-1)!} \exp(-s'\lambda_n);$$

en particulier, on a :

$$(I.6) \quad F_n(s_2) = (-1)^{t-1} \frac{P_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!} \exp(-s_2\lambda_n).$$

Eu égard aux majorations obtenues antérieurement, ((I.2), (I.3) et (I.6)) on a :

$$\left| \frac{P_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!} \exp(-s_2\lambda_n) \right| \leq (1/2\pi) \ell_{\eta} B_{n,\eta} m(f; s_2; \eta).$$

Choisissant maintenant $\varepsilon = \eta \in]0, 1[$, on a, pour $n \geq n_1$, par (I.5)

$$B_{n,\eta} \leq \omega_{n,t} |\lambda_n|^{m_n} M_1(\eta/2) \frac{(m_n + 1)!}{(\eta/2)^{m_n + 1}}.$$

En définitive, on a, K étant une constante ne dépendant que de η et de la fonction g et pour $n \geq n_1$:

$$\left| \frac{P_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!} \exp(-s_2 \lambda_n) \right| \leq Km(f; s_2; \eta) \frac{\omega_{n,t} |\lambda_n|^{m_n} (m_n + 1)! 2^{m_n+1}}{\eta^{m_n+1}}$$

(où $m(f; s_2; \eta)$ n'est autre, par le choix $\varepsilon = \eta$, que le m^f de l'énoncé de la proposition I.7) qui établit la proposition.

CHAPITRE II

On considère la condition suivante (dite condition (C)) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n (m_j + 1)}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0.$$

Elle implique, comme il est trivial :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} &= 0, \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} &= 0. \end{aligned}$$

La condition $D^* < +\infty$ implique que la condition (C) est satisfaite mais, par contre la condition (C) n'implique pas nécessairement $D^* < +\infty$ (ni nécessairement $\beta^* < +\infty$). Soit $s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. On sait que :

$$\exists_{n' (=n_s)} \quad \forall_{n \geq n'} \quad P_n(s) \exp(-s\lambda_n) \neq 0$$

et donc $-\text{Log} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < +\infty$; on pose :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \forall_{n \geq n'} \quad \delta^\varepsilon(n, s) &= \frac{-\text{Log} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}, \\ \delta_*^\varepsilon(s) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta^\varepsilon(n, s), \end{aligned}$$

et

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \quad \mathcal{D}_{*\alpha}^\varepsilon = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^* \mid \delta_*^\varepsilon(s) > \alpha\}.$$

PROPOSITION II.1. — *Sous la condition (C) l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$ converge absolument dans $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$ pour chaque $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé. Si $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \neq \emptyset$, soit un point $s \in \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$. On a : $\delta_*^\varepsilon(s) > 0$ et

$$\forall \varepsilon' \in]0, \delta_*^\varepsilon(s)[\quad \exists_{n' (=n_{s, \varepsilon, \varepsilon'})} \quad \forall_{n \geq n'} \quad \delta^\varepsilon(n, s) > \varepsilon'$$

d'où :

$$\forall_{n \geq n'} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[-\varepsilon' |\lambda_n|^{1+\varepsilon}].$$

Or la condition (C) implique :

$$\forall_{\varepsilon'' > 0} \exists_{n'' (=n_{\varepsilon, \varepsilon''})} \forall_{n \geq n''} \frac{n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} < \varepsilon''.$$

Rapprochant ces inégalités, on a :

$$\forall_{n \geq \max(n', n'')} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp\left[\frac{-n\varepsilon'}{\varepsilon''}\right].$$

L'élément $\{f\}$ converge donc absolument en chaque point $s \in \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$.

PROPOSITION II.2. — Désignant par E_a^f l'ensemble de convergence absolue de l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$, on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{s \in E_a^f \cap (C - \mathcal{E}^*)} \delta_*^\varepsilon(s) \leq \delta_*(s).$$

Démonstration. — Soit $s \in C - \mathcal{E}^*$; on a :

$$\exists_{n' (=n_s)} \forall_{n \geq n'} -\text{Log} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < +\infty.$$

Soit s appartenant à $E_a^f \cap (C - \mathcal{E}^*)$ supposé non vide; on a :

$$\exists_{n'' (=n_s)} \forall_{n \geq n''} 0 < -\text{Log} |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < +\infty$$

et donc $\forall_{\varepsilon > 0} \delta^\varepsilon(n, s) < \delta(n, s)$; d'où : $\delta_*^\varepsilon(s) \leq \delta_*(s)$.

PROPOSITION II.3. — Sous la condition (C), on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \subset \mathcal{D}_{*0}.$$

Démonstration. — Sous la condition (C) et eu égard à la proposition II.1 on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \subset E_a^f \cap (C - \mathcal{E}^*);$$

d'où, eu égard à la proposition II.2, on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \{ \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \ni s \Rightarrow 0 < \delta_*^\varepsilon(s) \leq \delta_*(s) (\Rightarrow s \in \mathcal{D}_{*0}) \}$$

et donc

$$\forall_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \subset \mathcal{D}_{*0}.$$

\mathcal{K} désignant un compact quelconque de \mathbf{C} , on énonce :

PROPOSITION II.4. — $\varepsilon > 0$ étant arbitraire fixé, on a :

- 1) $\forall_{\mathcal{X} \subset \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \exists_{n' (=n_{\mathcal{X}})} \forall_{n \geq n'} \{ \text{la fonction } \mathcal{X} \ni s \mapsto \delta^\varepsilon(n, s) \text{ est lipschitzienne} \}$.
- 2) Sous la condition (C), on a :

$$\exists_{\alpha \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}} \delta_*^\varepsilon(\mathbf{C} - \mathcal{E}^*) = \{\alpha\},$$

(l'image par δ_*^ε de son support $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ se réduit à un seul point réel pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$).

Démonstration. — En suivant la démonstration du lemme 1 dans [2], on a :

$$\forall_{\varepsilon' \in]0, \varepsilon_{\mathcal{X}}[} \exists_{n' (=n_{\varepsilon'})} \forall_{n \geq n'} \forall_{(s, s') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}} |\delta^\varepsilon(n, s) - \delta^\varepsilon(n, s')| \leq \mu_{n, \varepsilon'}^\varepsilon |s - s'|$$

où

$$\forall_{\mathcal{X} \subset \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \mathcal{E}_{\mathcal{X}} = \text{dist}(\mathcal{X}, \mathcal{E}^*)$$

et

$$\mu_{n, \varepsilon'}^\varepsilon = \frac{1}{|\lambda_n|^\varepsilon} \left[1 + \frac{m_n}{\varepsilon' |\lambda_n|} \right],$$

qui établit l'assertion (1).

Soit un compact \mathcal{X} inclus dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ et soit ε' fixé dans $]0, \varepsilon_{\mathcal{X}}[$. La condition (C) implique : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n, \varepsilon'}^\varepsilon = 0$. Il en résulte :

$$\forall_{(s, s') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}} d_*^\varepsilon(s) = \delta_*^\varepsilon(s).$$

Soit s_0 un point arbitraire fixé dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. \mathcal{X} étant un compact inclus dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$, l'ensemble $\{s_0\} \cup \mathcal{X}$ est encore un compact inclus dans

$\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. Posant $\alpha = \delta_{*0}^\varepsilon(s_0)$, on a donc :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^*} \delta_{*0}^\varepsilon(s) = \alpha.$$

L'assertion (2) est établie.

PROPOSITION II.5. — Sous la condition $D^* < +\infty$, on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon = \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon.$$

Démonstration. — Sous la condition $D^* < +\infty$, on sait que $\{f\}$ converge absolument en chaque point $s \in \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$. On a alors, pour s arbitraire fixé dans $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$:

$$\forall_{\varepsilon' \in]0, \delta_{*0}^\varepsilon(s)[} \exists_{n' (=n_{s, \varepsilon'})} \forall_{n \geq n'} \frac{-\text{Log } |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|} > \varepsilon' > 0;$$

d'où :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{n \geq n'} \frac{-\text{Log } |P_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = \delta^\varepsilon(n, s) > \frac{\varepsilon'}{|\lambda_n|^\varepsilon} > 0$$

et donc $\delta_{*0}^\varepsilon(s) \geq 0$ ($\Rightarrow s \in \overline{\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon} \cap \mathbf{C} - \mathcal{E}^*$ puisque, eu égard à l'assertion (2) de la proposition II.4, δ_{*0}^ε est trivialement continue dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$). Ainsi : $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \ni s \Rightarrow s \in (\overline{\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon} \cap (\mathbf{C} - \mathcal{E}^*))$. Or $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$ est un ouvert et donc

$$\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \subset \text{Int}(\overline{\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon} \cap (\mathbf{C} - \mathcal{E}^*)).$$

En outre, eu égard à l'assertion (2) de la proposition II.4, l'ensemble $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$ est aussi un ouvert; enfin, $\text{Int}(\overline{\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon} \cap (\mathbf{C} - \mathcal{E}^*)) = \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$. D'où : $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon \subset \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$, et, eu égard à la proposition II.3, on a, en définitive : $\mathcal{D}_{*0}^\varepsilon = \mathcal{D}_{*0}^\varepsilon$.

Remarque II.6. — On considère un disque $d(s, \rho)$, de centre s et de rayon ρ , dont l'adhérence, $\overline{d(s, \rho)}$, est incluse dans $\mathbf{C} - \mathcal{E}^*$. Eu égard à la proposition II.4, on sait qu'il existe pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, un indice n' tel que les applications $\overline{d(s, \rho)} \ni \zeta \mapsto \delta^\varepsilon(n, \zeta)$, indexées par $n \geq n'$, sont lipschitziennes (donc continues). En outre, il est évident que ces applications sont dérivables dans $d(s, \rho)$ partiellement par rapport à $\text{Re } \zeta$ et $\text{Im } \zeta$. On désignera par $\delta_\sigma^\varepsilon(n, s)$ la valeur au point $\zeta = s = \sigma + it$ de la dérivée partielle de l'application d'indice n .

On considère la suite (P'_n) des dérivées premières des polynômes de la suite (P_n) . On désigne par $\mathcal{E}_n^{(1)}$ l'ensemble des points de \mathbf{C} qui sont des zéros de P'_n . Désignant par $\mathcal{E}^{(1)d}$ le dérivé de $\mathcal{E}^{(1)} = \bigcup_n \mathcal{E}_n^{(1)}$, on pose $\mathcal{E}^{(1)*} = \mathcal{E}^{(1)d} \cup \mathcal{E}_\infty^{(1)}$, où $\mathcal{E}_\infty^{(1)}$ est l'ensemble des points de \mathbf{C} qui sont chacun zéro d'une infinité de polynômes P'_n . En d'autres termes, on a considéré pour les polynômes P'_n des ensembles analogues à ceux considérés pour les polynômes P_n . Supposant $\mathbf{C} - \mathcal{E}^{(1)*} \neq \emptyset$, on a :

$$\forall s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^{(1)*} \quad \exists n' (=n_s) \quad \forall n \geq n' \quad P'_n(s) \neq 0$$

et on pose, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé et s et n satisfaisant aux choix ci-dessus :

$$\delta^{\varepsilon(1)}(n,s) = \frac{-\text{Log } |P'_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et

$$\delta_*^{\varepsilon(1)}(s) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-\text{Log } |P'_n(s) \exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \right\}.$$

Considérant un ensemble E de \mathbf{C} et les ensembles associés suivants :

$$\forall \alpha \in E \quad \Delta_\alpha = \{s \in \mathbf{C} \mid \text{Im } s = \text{Im } \alpha \wedge \text{Re } s \leq \text{Re } \alpha\},$$

$$\Delta_E = \bigcup_{\alpha \in E} \Delta_\alpha,$$

(Δ_α est un fermé de \mathbf{C} mais Δ_E n'est pas nécessairement un fermé), on convient d'appeler « étoile rectiligne associée à E » l'ouvert $\mathbf{C} - \bar{\Delta}_E$; on le note $\mathcal{E}(E)$.

PROPOSITION II.7. — Supposant $\mathcal{E}(\mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*}) \neq \emptyset$, on a :

$$\forall s \in \mathcal{E}(\mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*}) \quad \delta_*^\varepsilon(s) \leq \delta_*^{\varepsilon(1)}(s) \leq \delta_*^\varepsilon(s) - \liminf \frac{\text{Log} \left| 1 - \delta_\sigma^\varepsilon(n,s) |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \text{Arg } \lambda_n) + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial \text{Arg } A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}},$$

où : $\varepsilon > 0$ est arbitraire fixé;

$\left(\frac{\partial(\text{Arg } A_n)}{\partial \sigma}\right)_s$ désigne la valeur en un point $s \in \mathcal{E}(\mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*})$ de la dérivée partielle de la fonction

$$\mathcal{E}(\mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*}) \ni s \mapsto \text{Arg } A_n(s),$$

avec $\text{Arg } A_n(s) \in]-\pi, \pi]$, où $A_n(s) = P_n(s) \exp(-s\lambda_n)$; $\text{Arg } \lambda_n \in]-\pi, \pi]$.

Démonstration. — Soient $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé et $s \in \mathbb{C} - (\mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*})$; on a :

$$\forall \rho \in]0, \text{dist}(s, \mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*})[\quad \exists n' (= n_\rho) \quad \forall n \geq n' \quad \forall s' \in d(s, \rho) \quad \{P_n(s') \neq 0 \text{ et } P_n'(s') \neq 0\}.$$

On fixe $\rho \in]0, \text{dist}(s, \mathcal{E}^* \cup \mathcal{E}^{(1)*})[$; pour $n \geq n' (= n_\rho)$, on a, pour $s' \in d(s, \rho)$:

$$\delta^\varepsilon(n, s') = \frac{-\text{Log } |P_n(s') \exp(-s'\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et

$$\begin{aligned} A_n(s') &= |A_n(s')| \exp[i \text{Arg } A_n(s')] \\ &= \exp[-\delta^\varepsilon(n, s') |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i \text{Arg } A_n(s')], \end{aligned}$$

avec

$$\text{Arg } A_n(s') \in]-\pi, \pi].$$

Posant $s' = s + h$, avec $0 < |h| < \rho$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{P_n(s+h) - P_n(s)}{h} &= \frac{1}{h} \{ \exp[-\delta^\varepsilon(n, s+h) |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i \text{Arg } A_n(s+h) + (s+h)\lambda_n] \\ &\quad - \exp[-\delta^\varepsilon(n, s) |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i \text{Arg } A_n(s) + s\lambda_n] \}. \end{aligned}$$

Posant : $\theta_h = \delta^\varepsilon(n, s+h) - \delta^\varepsilon(n, s)$ et $\alpha_h = \text{Arg } A_n(s+h) - \text{Arg } A_n(s)$, le membre de droite de l'égalité ci-dessus, peut s'écrire :

$$\frac{1}{h} \{ \exp[-\delta^\varepsilon(n, s) |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i \text{Arg } A_n(s) + s\lambda_n] \{ \exp[h\lambda_n - \theta_h |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h] - 1 \},$$

et $\exp[h\lambda_n - \theta_h |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h]$ peut s'écrire

$$\exp \{ \lambda_n [h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \text{Arg } \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}] \}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\exp [h\lambda_n - \theta_h |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h] - 1}{h} \\ &= \frac{\exp \{ \lambda_n [h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}] \} - 1}{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}} \\ & \quad \cdot \frac{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}}{h} \end{aligned}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}\} = 0$, puisque $\zeta \mapsto \delta^\varepsilon(n, \zeta)$ est lipschitzien sur tout compact $\mathcal{X} \subset \mathbb{C} - \mathcal{E}^*$ dès que n est supérieur à un certain $n_{\mathcal{X}}$. En outre :

$$\begin{aligned} & \frac{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}}{h} \\ &= 1 - |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) \frac{\theta_h}{h} + i\lambda_n^{-1} \frac{\alpha_h}{h} \end{aligned}$$

avec :

$$\lim \frac{\theta_h}{h} = \lim \frac{\delta^\varepsilon(n, s+h) - \delta^\varepsilon(n, s)}{h} = \delta'_\sigma(n, s)$$

et

$$\lim \frac{\alpha_h}{h} = \lim \frac{\operatorname{Arg} A_n(s+h) - \operatorname{Arg} A_n(s)}{h} = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{Arg} A_n \right)_s,$$

lorsque h réel tend vers 0, et enfin

$$\lim \frac{\exp \{ \lambda_n [h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}] \} - 1}{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}} = \lambda_n$$

lorsque h tend vers 0 (cette limite est, en effet, la valeur de la dérivée de la fonction $\mathbb{C} \ni s \mapsto \exp(s\lambda_n)$ au point $s = 0$). On obtient donc, pour h réel tendant vers 0 :

$$\begin{aligned} & \lim \frac{h - \theta_h |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i\alpha_h \lambda_n^{-1}}{h} \\ &= 1 - |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) \delta'_\sigma(n, s) + i\lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \operatorname{Arg} A_n \right)_s \end{aligned}$$

Or P_n étant holomorphe dans C , on a :

$$\forall_{s \in C} \left(\frac{\partial P_n}{\partial \sigma} \right)_s = P'_n(s) = -i \left(\frac{\partial P}{\partial \tau} \right)_s;$$

il en résulte que, pour h réel tendant vers 0, on a, en définitive :

$$P'_n(s) = \lambda_n \{ \exp[-\delta^\varepsilon(n,s) |\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i \operatorname{Arg} A_n(s) + s \lambda_n] \left[1 - |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) \delta_\sigma^\varepsilon(n,s) + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right] \}.$$

De ce résultat, on déduit :

$$\delta^{\varepsilon(1)}(n,s) = \delta^\varepsilon(n,s) - \frac{\operatorname{Log} |\lambda_n|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} + \frac{i \operatorname{Arg} A_n(s)}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} - \frac{\operatorname{Log} \left| 1 - \delta_\sigma^\varepsilon(n,s) |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et enfin :

(II.1)

$$\begin{aligned} \delta_*^\varepsilon(s) - \limsup & \frac{\operatorname{Log} \left| 1 - \delta_\sigma^\varepsilon(\sigma) |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \\ & \leq \delta_*^{\varepsilon(1)}(s) \\ & \leq \varepsilon_*^\varepsilon(s) - \liminf \frac{\operatorname{Log} \left| 1 - \delta_\sigma^\varepsilon(n,\sigma) |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

On se propose de déterminer un minorant de la limite supérieure figurant ci-dessus. Pour cela, on constate facilement que, au point s considéré, on a :

$$(II.2) \quad \left(\frac{\partial |A_n|}{\partial \sigma} \right)_s = \frac{A'_n(s)}{A_n(s)} - i \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s$$

(où $\left(\frac{\partial |A_n|}{\partial \sigma} \right)_s$ désigne la valeur en s de la dérivée partielle par rapport à $\operatorname{Re} \zeta$ de la fonction $d(s,\rho) \ni \zeta \mapsto |A_n(\zeta)|$),

$$\delta_\sigma^\varepsilon(n,s) = - \frac{1}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \left(\frac{\partial |A_n|}{\partial \sigma} \right)_s,$$

et par (II.2)

$$(II.3.) \quad |\lambda_n|^\varepsilon \delta_\sigma^\varepsilon(n,s) \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n) \\ = -\frac{1}{|\lambda_n|} \left\{ \frac{A'_n(s)}{A_n(s)} - i \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s \right\} \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n)$$

avec

$$\frac{A'_n(s)}{A_n(s)} = \frac{P'_n(s)}{P_n(s)} - \lambda_n$$

et

$$(II.4) \quad \left| -\frac{1}{|\lambda_n|} \frac{A'_n(s)}{A_n(s)} \right| \leq 1 + \frac{1}{|\lambda_n|} \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s-\alpha_{nj}|} \leq 1 + \frac{m_n}{\rho|\lambda_n|}.$$

D'autre part, on a :

$$\exists_{K_0(=K_0(n)) \in \mathbb{Z}} \operatorname{Arg} A_n(s) = \operatorname{Arg} a_{n,m_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \operatorname{Arg} (s-\alpha_{nj}) + 2\pi K_0$$

et

$$\exists_{K_1(=K_1(n)) \in \mathbb{Z}} \operatorname{Arg} (\exp(-s\lambda_n)) = -\operatorname{Im} (s\lambda_n) + 2\pi K_1$$

(avec la convention : $\operatorname{Arg} z$ désigne l'argument principal du nombre complexe z , à savoir, par définition : $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$).

$$A_n(s) = |A_n(s)| \exp \left\{ i \left[\operatorname{Arg} a_{n,m_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \operatorname{Arg} (s-\alpha_{nj}) - \operatorname{Im} (s\lambda_n) + 2\pi(K_0 + K_1) \right] \right\}$$

d'où :

$$(II.5) \quad \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma} \right)_s = \sum_{j=1}^{m_n} (\operatorname{Arg} (s-\alpha_{nj}))'_\sigma - (\operatorname{Im} (s\lambda_n))'_\sigma.$$

De $s - \alpha_{nj} = |s - \alpha_{nj}| \exp [i \operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj})]$, on déduit :

$$1 = (|s - \alpha_{nj}|)'_\sigma \exp [i \operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj})] \\ + i |s - \alpha_{nj}| \exp [i \operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj})] (\operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj}))'_\sigma$$

d'où :

$$i |s - \alpha_{nj}| (\operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj}))'_\sigma = \exp [-i \operatorname{Arg} (s - \alpha_{nj})] - (|s - \alpha_{nj}|)'_\sigma$$

et donc, puisque $|(s - \alpha_{nj})'_\sigma| \leq 1$:

$$(II.6) \quad \begin{aligned} |(\text{Arg}(s - \alpha_{nj})'_\sigma)| &\leq \frac{2}{|s - \alpha_{nj}|} \\ \left| \sum_{j=1}^{m_n} (\text{Arg}(s - \alpha_{nj})'_\sigma) \right| &\leq 2 \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s - \alpha_{nj}|}. \end{aligned}$$

En outre :

$$(\text{Im}(s\lambda_n))'_\sigma = \text{Im}(\lambda_n)$$

et donc

$$(II.7) \quad |(\text{Im}(s\lambda_n))'_\sigma| = |\text{Im}(\lambda_n)| \leq |\lambda_n|.$$

Réunissant ces résultats, (II.5), (II.6) et (II.7)), on a :

$$(II.8) \quad \left| \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} (\text{Arg } A_n) \right)_s \right| \leq |\lambda_n| + 2 \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s - \alpha_{nj}|};$$

utilisant (II.4) et (II.8) dans (II.3) on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_n|^\varepsilon |\delta'_\sigma(n,s) \exp(-i \text{Arg } \lambda_n)| &\leq \frac{1}{|\lambda_n|} \left| \frac{A'_n(s)}{A_n(s)} \right| + \frac{1}{|\lambda_n|} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Arg } A_n \right)_s \right| \\ &\leq 2 + \frac{3}{|\lambda_n|} \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s - \alpha_{nj}|} \leq 2 + \frac{3m_n}{\rho|\lambda_n|} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| 1 - \delta'_\sigma(n,s) |\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \text{Arg } \lambda_n) + i\lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Arg } A_n \right)_s \right| \\ \leq 4 + \frac{5}{|\lambda_n|} \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s - \alpha_{nj}|} \leq 4 + \frac{5m_n}{\rho|\lambda_n|} \end{aligned}$$

et eu égard à la condition (C) :

$$(II.9) \quad \limsup \frac{\text{Log } |\dots|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leq \limsup \frac{\text{Log} \left[4 + \frac{5m_n}{|\lambda_n|^\rho} \right]}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0.$$

La proposition II.7 résulte de (II.1) et (II.9).

Soit $T_0 = \text{Inf} \{m_n | n \in \mathbf{N} - \{0\}\}$. j étant un entier positif fixé, tel que $j \in \{0, \dots, T_0\}$, on pose :

$$\forall_{n \in \mathbf{N} - \{0\}} \quad \forall_{j \in \{0, \dots, T_0\}} \quad \forall_{s \in \mathbf{C}} \quad A_n^{(j)}(s) = P_n^{(j)}(s) \exp(-s\lambda_n),$$

où $P_n^{(j)}(s)$ désigne la valeur en s de la dérivée d'ordre j de P_n . On définit pour la suite des dérivées $j^{\text{ième}}$ des polynômes de la suite (P_n) des ensembles $\mathcal{E}^{(j)}$, $\mathcal{E}^{(j)d}$, $\mathcal{E}_\infty^{(j)}$, $\mathcal{E}^{(j)*}$ respectivement analogues aux ensembles \mathcal{E} , \mathcal{E}^d , \mathcal{E}_∞ , \mathcal{E}^* définies pour la suite (P_n) . En outre pour $\varepsilon \geq 0$, on définit, à l'aide des $A_n^{(j)}$ des fonctions $s \mapsto \delta^{\varepsilon(j)}(n,s)$, $s \mapsto \delta_*^{\varepsilon(j)}(s)$ respectivement analogues aux fonctions $s \mapsto \delta^\varepsilon(n,s)$, $s \mapsto \delta_*^\varepsilon(s)$ définies à l'aide des A_n , et on pose :

$$(II.10) \quad \forall_{j \in \{0, \dots, T_0\}} \quad \forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \quad \mathcal{D}_{*\alpha}^{\varepsilon(t)} = \{s \in \mathbf{C} - \mathcal{E}^{(t)*} | \delta_*^{\varepsilon(t)} > \alpha\}$$

avec les conventions, pour $\varepsilon = 0$ et $t = 0$:

$$\mathcal{E}^{(0)*} = \mathcal{E}^*; \quad \delta^{(0)}(n,s) = \delta(n,s), \quad \delta_*^{(0)}(s) = \delta_*(s); \quad \mathcal{D}_{*\alpha}^{(0)} = \mathcal{D}_{*\alpha}.$$

À l'aide d'une technique analogue à celle utilisée dans la démonstration de la proposition II.7, on prouve :

PROPOSITION II.8. — *Supposant $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{(j)*} \cup \mathcal{E}^{(j+1)*}) \neq \emptyset$, on a :*

$$\forall_{j \in \{0, \dots, T_0\}} \quad \forall_{s \in \mathcal{E}(\mathcal{E}^{(j)*} \cup \mathcal{E}^{(j+1)*})} \quad \delta_*^{\varepsilon(j)}(s) \leq \delta_*^{\varepsilon(j+1)}(s)$$

$$\leq \delta_*^{\varepsilon(j)}(s) - \liminf \left\{ \frac{\text{Log} \left| 1 - \delta_\sigma^{\varepsilon(j)}(n,s) |\lambda_n|^\varepsilon \exp[-i \text{Arg} \lambda_n] + i \lambda_n^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \text{Arg} A_n^{(j)} \right) \right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \right\}$$

où : $\varepsilon > 0$ est arbitraire fixé;

$\left(\frac{\partial \text{Arg} A_n^{(j)}}{\partial \sigma} \right)_s$ désigne la valeur en $s \in \mathcal{E}(\mathcal{E}^{(j)*} \cup \mathcal{E}^{(j+1)*})$ de la dérivée partielle de la fonction $s \mapsto \text{Arg} A_n^{(j)}(s)$ avec

$$\text{Arg} A_n^{(j)}(s) \in] -\pi, \pi]; \quad \text{Arg} \lambda_n \in] -\pi, \pi].$$

PROPOSITION II.9. — Soit t un entier positif fixé tel que $t \in \{0, \dots, T_0\}$.
 Sous la condition $\mathcal{E}\left(\bigcup_{j=0}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right) \neq \emptyset$, on a :

$$\forall_{s \in \mathcal{E}\left(\bigcup_{j=1}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right)} \delta_{*}^{\varepsilon}(s) \leq \delta_{*}^{\varepsilon(t)}(s)$$

(avec $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé).

Procédant comme dans la démonstration de la proposition II.5 et eu égard à la proposition II.9, on énonce :

PROPOSITION II.10. — Sous les conditions : $D^* < +\infty$, $t \in \{0, \dots, T_0\}$
 et $\mathcal{E}\left(\bigcup_{j=0}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right) \neq \emptyset$, on a, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé et t entier positif :

$$\mathcal{D}_{*0}^{(t)} = \mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon(t)}$$

et

$$\mathcal{D}_{*0} \cap \left(\mathcal{E}\left(\bigcup_{j=0}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right)\right) = \mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon} \cap \left(\mathcal{E}\left(\bigcup_{j=0}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right)\right) \subset \mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon(t)} \cap \left(\mathcal{E}\left(\bigcup_{j=0}^t \mathcal{E}^{(j)*}\right)\right)$$

On se propose maintenant d'utiliser certaines propriétés établies antérieurement en vue du prolongement de la fonction définie par l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$. On énonce :

PROPOSITION II.11. — Sous les conditions $D^* < +\infty$ et $\gamma < +\infty$, il n'existe pas d'extension holomorphe, au moyen de \mathcal{C} , de la fonction

$$\mathcal{D}_{*\beta*} \ni s \mapsto \{f\}_s$$

de $\{s_1\} + \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{*\beta*}$ à $\{s_2\} + \mathcal{C}$, avec $s_2 \in (\mathbb{C} - \mathcal{E}^{(t-1)*}) - \overline{\mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}}$ (où $\{f\}_s$ désigne la somme en s de la série $\{f\} : \Sigma P_n(s) \exp(-s\lambda_n)$ avec $t \in \{1, \dots, T_0 + 1\}$).

Démonstration. — On suppose fausse l'assertion; il existe alors $s_2 \in (\mathbb{C} - \mathcal{E}^{(t-1)*}) - \overline{\mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}}$ où $t \in \{1, \dots, T_0 + 1\}$ tel que $\mathcal{D}_{*\beta*} \ni s \mapsto \{f\}_s$ admet une extension holomorphe de $\{s_1\} + \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_{*\beta*}$ à $\{s_2\} + \mathcal{C}$, au moyen de \mathcal{C} , le long d'un arc rectifiable joignant les points s_1 et s_2 . Eu égard à la proposition I.7, on a pour chaque $n \geq n_1$:

$$\forall_{t \in \{1, 2, \dots, m_n + 1\}} \frac{|P_n^{(t-1)}(s_2) \exp(-s_2\lambda_n)|}{(t-1)!} \leq \frac{K m^n |\lambda_n|^{m_n} 2^{m_n+1} \omega_{n,t}(m_n+1)!}{\eta^{m_n+1}}$$

où : η est une constante appartenant à l'intervalle $]0,1[$, K est une constante ne dépendant que de η et de la fonction g ,

$$\omega_{n,t} = \frac{1}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |A_j(\lambda_n)| |\lambda_n|^{j+t-m_n-1}$$

avec $|A_j(\lambda_n)| \leq M_n$; d'où, pour n tel que $|\lambda_n| \geq 1$:

$$\omega_{n,t} \leq \frac{m_n M_n}{(t-1)!}.$$

Pour $t \in \{1, 2, \dots, m_n + 1\}$ (donc pour $t \in \{1, \dots, T_0 + 1\}$) et $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, on a :

$$\forall_{n \geq n_1} \frac{\text{Log } |P_n^{(n-1)}(s_2) \exp(-s_2 \lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leq \frac{\text{Log } (K m^n |\lambda_n|^{m_n} 2^{m_n+1} \omega_{n,t} (m_n + 1)! / 2^{m_n+1})}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}},$$

d'où, comme il est évident (sous la condition $D^* < +\infty$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } |P_n^{(t-1)}(s_2) \exp(-s_2 \lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log } M_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}.$$

Or la condition $\gamma < +\infty$, jointe à la proposition I.5, implique : $|\gamma|$ fini;

d'où : $\limsup \frac{\text{Log } M_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0$, et enfin, puisque $s_2 \in \mathbb{C} - \mathcal{E}^{(t-1)*}$:

$\delta_*^{\varepsilon(t-1)}(s_2) \geq 0$ qui implique, eu égard à II.10 : $s_2 \in \overline{\mathcal{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}}$. Il y a contradiction; ce qui établit l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, Ultraconvergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 29-1 (1979), 239-262.
- [2] M. BLAMBERT and R. PARVATHAM, On the overconvergence of certain series, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 2 (1979), 45-60.
- [3] M. BLAMBERT et R. PARVATHAM, Sur les ordres inférieur et supérieur des fonctions entières définies par des éléments L-dirichlétiens (à paraître).
- [4] R. P. BOAS, *Entire functions*, Academic Press, New York (1954).

- [5] M. M. DZRBASJAN, Uniqueness theorems for analytic functions asymptotically representable by Dirichlet-Taylor series, *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 20 (1973), 603-649.
- [6] T. M. GALLIE, Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 57-72.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1980.

M. BLAMBERT †,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Institut Fourier
38402 St-Martin-d'Hères Cedex.

R. PARVATHAM,
Ramanujan Institute
for Advanced Study in Mathematics
University of Madras
Madras 600 005 (Inde).
