Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1983), 201-208

STABILITÉ DES C*-ALGÈBRES DE FEUILLETAGES

par M. HILSUM et G. SKANDALIS

Introduction.

Dans la théorie des C*-algèbres des feuilletages développée par A. Connes [1] ch. 7, apparaissent dans plusieurs constructions [2, 3] des bimodules reliant deux telles algèbres. Il est souvent facile de décider quand un tel bimodule est un bimodule d'imprimitivité. Il y a donc un certain nombre de cas où des C*-algèbres de feuilletages différents sont équivalentes au sens de Morita.

Dans ce travail, nous montrons que la C*-algèbre associée à tout feuilletage (de dimension non nulle) est stable (i.e. isomorphe à son produit tensoriel par l'algèbre des opérateurs compacts).

En particulier, deux telles algèbres équivalentes au sens de Morita sont isomorphes.

Nous donnons en corollaire deux illustrations de cette situation.

Soit (V, F) une variété feuilletée de classe $C^{\infty,0}$ de dimension $p \neq 0$ et de codimension q.

V est supposée sans bord, séparée, dénombrable à l'infini.

Le résultat principal de cet article est :

1. THEOREME. – *La* C^**-algèbre associée* $C^*(V, F)$ *est stable.*

Le résultat suivant, qui est crucial dans notre démonstration, semble généralement connu, du moins admis. Nous en incluons une preuve cependant, pour être plus complets.

2. LEMME. — *Il existe un recouvrement distingué* [5] *localement fini de* V *par des ouverts trivialisants* Ω_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ *et des transversales* T_i *dans* Ω_i *tels que les adhérences* $\overline{T}_i$ *dans* V *des* T_i *soient deux à deux disjointes.*

Preuve. — Partons d'un recouvrement distingué localement fini O_j, $\overline{O}_j \subset O'_j$. Nous construisons par récurrence des ouverts $\Omega_{j,1}, \ldots, \Omega_{j,k_j}$ et des transversales $T_{j,1}, \ldots, T_{j,k_j}$ tels que :

i) $\Omega_{j,i} \subset O_j$ et $\Omega_{j,i}$ est saturé dans O_j (i.e. une réunion de plaques de O_j).

ii) $O_j = \bigcup_i \Omega_{j,i}$.

iii) $T_{j,i} \cap T_{k,\ell} = \emptyset$ pour $(j, i) \neq (k, \ell)$.

$T_{k,\ell}$ est supposé construit pour $k < j$ par hypothèse de récurrence.

Ecrivons $O'_j = \varphi_j(D_2^p \times D_2^q)$ et $O_j = \varphi_j(D_1^p \times D_1^q) \subset O'_j$ (où on a posé $D_r^k = \{x \in \mathbf{R}^k, \|x\| < r\}$, $\|.\|$ étant la norme euclidienne).

Comme $\bigcup_{\ell,i} \overline{T}_{\ell,i} (\ell < j)$ ne rencontre chaque plaque de O_j qu'un nombre fini de fois, il existe pour tout $x \in \overline{D_1^q}$ des disques $D_x \subset D_2^q$ centré en x et $D'_x \subset D_1^p$ tels $\varphi_j(\overline{D'_x \times D_x}) \cap \overline{T}_{\ell,i} = \emptyset$ pour $\ell < j$.

Il existe $x_1, \ldots, x_{k_j} \in \overline{D}_1^q$ tels que $\overline{D}_1^q \subset \bigcup_1^{k_j} D_{x_i}$.

On pose $\Omega_{j,i} = \varphi_j(D_1^p \times D''_{x_i})$ où $D''_{x_i} = D_{x_i} \cap D_1^q$.

En prenant, pour $i = 1, \ldots, k_j$ des $u_i \in D'_{x_i}$ deux à deux distincts, on obtient le résultat avec $T_{j,i} = \varphi_j(\{u_i\} \times D''_{x_i})$.

□

Avec les notations du lemme précédent, choisissons des voisinages trivialisants distingués $\Omega'_i = \varphi'_i(D_1^p \times D_1^q)$ de T_i dans Ω_i deux à deux disjoints avec $\varphi'_i(\{0\} \times D_1^q) = T_i$. Posons $\Omega''_i = \varphi'_i(D_1^{p+q})$.

Les Ω''_i vérifient :

i) Ils sont deux à deux disjoints.

ii) Tout compact de V rencontre au plus un nombre fini de Ω''_i.

iii) Toute feuille rencontre au moins un Ω''_i.

iv) Pour toute feuille $\mathfrak{L}$, l'intersection de $\mathfrak{L}$ avec la réunion des frontières des Ω_i'' est négligeable pour la classe de mesure de Lebesgue longitudinale.

Dans toute la suite, nous poserons

$$\Omega = \bigcup_i \Omega_i'' \text{ et } \mathrm{T} = \bigcup_i \mathrm{T}_i . \text{ On a } \Omega \cong \mathrm{D}_1^p \times \mathrm{T} .$$

Soit G le groupoïde d'holonomie du feuilletage (V, F) [1].

Pour toutes parties A, B $\subset$ V, nous notons :

$$\mathrm{G}_\mathrm{B}^\mathrm{A} = \{\gamma \in \mathrm{G}, r(\gamma) \in \mathrm{A}, s(\gamma) \in \mathrm{B}\}.$$

Si W est une sous-variété $C^{\infty,0}$ de V transverse à F, (*), $\mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W}$ est une sous-variété et un sous-groupoïde de G.

Soit $C_r^*(\mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W})$ la C*-algèbre réduite associée à ce groupoïde avec "Système de Haar" [6]. C'est le complété de l'algèbre involutive $C_c(\mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W}, \Omega^{1/2})$ (**) munie de la convolution, complété par rapport à la famille des représentations régulières λ_x, $x \in \mathrm{V}$.

Si $f, g \in C_c(\mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W}, \Omega^{1/2})$, leur produit de convolution est donné par $(\gamma \in \mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W})$:

$$f * g(\gamma) = \int f(\gamma_1)\, g(\gamma_1^{-1}\gamma) .$$

Pour $x \in \mathrm{V}$ et $\xi \in L^2(\mathrm{G}_x^\mathrm{W})$, on pose $(\gamma \in \mathrm{G}_x^\mathrm{W})$:

$$(\lambda_x(f)\,\xi)(\gamma) = \int f(\gamma_1)\,\xi(\gamma_1^{-1}\gamma) .$$

Les intégrales ci-dessus sont prises sur $\mathrm{G}_\mathrm{W}^{r(\gamma)}$.

Soient W_1 et W_2 deux sous-variétés de V transverses à F.

On définit le C*-module hibertien [4] $\mathcal{E}_{\mathrm{W}_1}^{\mathrm{W}_2}$, sur $C_r^*(\mathrm{G}_{\mathrm{W}_1}^{\mathrm{W}_1})$, obtenu en complétant $C_c(\mathrm{G}_{\mathrm{W}_1}^{\mathrm{W}_2}, \Omega^{1/2})$ relativement au produit scalaire à valeurs dans $C_r^*(\mathrm{G}_{\mathrm{W}_1}^{\mathrm{W}_1})$:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle(\gamma) = \int_{\mathrm{G}_{r(\gamma)}^{\mathrm{W}_2}} \overline{\xi_1(\gamma_1)}\, \xi_2(\gamma_1\gamma) \quad (\gamma \in \mathrm{G}_{\mathrm{W}_1}^{\mathrm{W}_1}).$$

(*) La transversalité ici signifie que : tout $x \in \mathrm{W}$ admet un voisinage dans V, $\mathrm{U} = \mathrm{D}_1^p \times \mathrm{D}_1^q$ avec $\mathrm{W} \cap \mathrm{U} = \mathrm{D}^k \times \mathrm{D}^q$ ($\dim \mathrm{W} = q + k, 0 \leq k \leq p$).

(**) $\Omega^{1/2}$ est le fibré des densités d'ordre 1/2 le long des feuilles du feuilletage de $\mathrm{G}_\mathrm{W}^\mathrm{W}$.

Avec ces notations, on a :

3. PROPOSITION. 1) $\mathcal{E}_W^W \cong C_r^*(G_W^W)$ *en tant que* C^**-module hilbertien sur lui-même.*

2) *Si* U_1 *et* U_2 *sont des ouverts disjoints de* V, *on a* :

$$\mathcal{E}_W^{U_1 \cup U_2} = \mathcal{E}_W^{U_1} \oplus \mathcal{E}_W^{U_2}$$

3) *Avec la transversale* T *fidèle définie ci-dessus, on a* :

$$\mathcal{K}(\mathcal{E}_T^W) \cong C_r^*(G_W^W)$$

où $\mathcal{K}(\mathcal{E}_T^W)$ *est l'algèbre des opérateurs compacts de* $\mathcal{E}_T^W$ [4].

4) $\mathcal{E}_W^\Omega \cong L^2(D_1^p) \otimes \mathcal{E}_W^T$.

Preuve. — 1), 2) résultent de la définition.

3) L'action de $C_r^*(G_W^W)$ dans $\mathcal{E}_T^W$ est donnée par :

$$f * \xi(\gamma) = \int_{G_W^{r(\gamma)}} f(\gamma_1)\, \xi(\gamma_1^{-1}\gamma)$$

quand $f \in C_c(G_W^W, \Omega^{1/2})$, $\xi \in C_c(G_T^W, \Omega^{1/2})$.

Le fait que cette action se prolonge en un homorphisme injectif $\pi : C_r^*(G_W^W) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}_T^W)$ résulte de l'égalité

$$\mathcal{E}_T^W \otimes_{C_r^*(G_T^T)} \ell^2(G_x^T) = L^2(G_x^W) \text{ et } (\pi(f) \otimes 1) = \lambda_x(f)$$

pour $f \in C_c(G_W^W, \Omega^{1/2})$ $(x \in V)$.

Le fait que les compacts de $\mathcal{E}_T^W$ sont inclus dans $\pi(C_r^*(G_W^W))$ résulte du fait suivant :

Soient $\xi, \eta \in C_c(G_T^W, \Omega^{1/2})$, alors $\theta(\xi, \eta) = \pi(\varphi)$, avec $\varphi \in C_c(G_W^W, \Omega^{1/2})$:

$$\varphi(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in G_T^{s(\gamma)}} \xi(\gamma\gamma_1)\, \overline{\eta(\gamma_1)} \quad (\gamma \in G_W^W).$$

Enfin, pour prouver que $\pi(C_r^*(G_W^W)) \subset \mathcal{K}(\mathcal{E}_T^W)$, on remarque que $C_r^*(G_W^W)$ admet une unité approchée dans $C_C(U \cap G_W^W, \Omega^{1/2})$ où U est un voisinage de $G^{(0)} = V$ dans G, donc, en utilisant une partition de l'unité, il suffit de prouver $\pi(f) \in \mathcal{K}(\mathcal{E}_T^W)$ pour $f \in C_c(G(\Omega_i) \cap G_W^W, \Omega^{1/2})$ où les Ω_i sont définis au Lemme 2 et où $G(\Omega_i)$ est le groupoïde d'holonomie du feuilletage restreint à Ω_i,

$$G(\Omega_i) \approx D_1^p \times D_1^p \times T_i.$$

Or pour $f(u, u', t) = f_1(u) . f_2(u') g_1(t) . g_2(t)$, on a $\pi(f) = \theta_{\xi_1, \xi_2}$ où $\xi_i \in C_c(G(\Omega_i) \cap G^W_{T_i}, \Omega^{1/2})$

$$\xi_i(u, t) = f_i(u) g_i(t).$$

4) On a $G^\Omega_W \cong D^p_1 \otimes G^T_W$ et pour

$$\xi \in C_c(D^p_1, \Omega^{1/2}), \quad \eta \in C_c(G^T_W, \Omega^{1/2}),$$

on définit $\xi \otimes \eta \in C_c(G^\Omega_W, \Omega^{1/2})$ par $\xi \otimes \eta(x, \gamma) = \xi(x) \otimes \eta(\gamma)$.

Cette application se prolonge de manière unique en un isomorphisme de C*-modules hilbertiens sur $C^*_r(G^W_W)$, $L^2(D^p_1) \otimes \mathcal{E}^T_W \longrightarrow \mathcal{E}^\Omega_W$.

□

Le lemme crucial pour la démonstration du théorème est le suivant :

4. LEMME. – *Soit* C *un fermé de* V *tel que, pour toute feuille* $\mathfrak{L}$, $C \cap \mathfrak{L}$ *soit négligeable pour la classe de mesure de Lebesgue longitudinale. Alors, pour tout ouvert* 0 *de* V *et toute sous-variété* W *transverse à* F, *l'application naturelle* $\mathcal{E}^{0\setminus C}_W \longrightarrow \mathcal{E}^0_W$ *est un isomorphisme de* C**-modules hilbertiens.*

Preuve. – Fixons-nous $\xi \in C_c(G^0_W, \Omega^{1/2})$. Le support de f est inclus dans une réunion finie de $W(\pi, \pi') \cap G^0_W$ (avec les notations de [1] chap. 7). Il suffit donc de prouver qu'on peut approcher ξ par des éléments de $C_c(G^{0\setminus C}_W, \Omega^{1/2})$ si supp $\xi \in W(\pi, \pi') \cap G^0_W$.

Ecrivons $W(\pi, \pi') \cap G^0_W \cong D^p_1 \times D^k_1 \times T'$ (la dimension de W est $q + k$).

Pour $\eta \in C_c(G^0_W, \Omega^{1/2})$ supp $\eta \subset W(\pi, \pi')$, on a :

$$\|\eta\|^2 = \| \langle \eta, \eta \rangle \| \leqslant \sup_{t \in T} \int |\eta(u, u', t)|^2 .$$

Pour $t \in T'$ soit α_t la densité sur D^p_1

$$\alpha_t = \int_{D^k_1} |\xi(u, u', t)|^2 .$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe une fonction φ_ϵ positive sur $D^p_1 \times T'$, $\varphi_\epsilon = 1$ au voisinage de C et $\int \alpha_t \varphi^2_\epsilon < \epsilon^2$. Donc,

$$\xi_\epsilon = (1 - \varphi_\epsilon) \xi \in C_c(G^{0\setminus C}_W, \Omega^{1/2}) \quad \text{et} \quad \|\xi - \xi_\epsilon\| \leqslant \epsilon .$$

□

Fin de la démonstration du théorème 1. – D'après le lemme 4 et la proposition 3, $\mathcal{E}_T^V = \mathcal{E}_T^\Omega \oplus \mathcal{E}^{V\setminus\Omega} \cong \mathcal{H} \otimes C_r^*(G_T^T) \oplus \mathcal{E}_T^{V\setminus\bar{\Omega}}$ et donc $\mathcal{E}_T^V \cong \mathcal{H} \otimes C_r^*(G_T^T)$ en vertu du théorème de stabilisation pour les C^*-modules hilbertiens [4].

Et donc, par la proposition 3.3, on a :

$$C^*(V, F) = C_r^*(G_V^V) \cong \mathcal{K}(\mathcal{E}_T^V) \cong \mathcal{K} \otimes C_r^*(G_T^T).$$

□

5. *Remarque.* – Le résultat, ainsi que la méthode, restent valables si on considère au lieu de $C^*(V, F)$ la C^*-algèbre "maximale" i.e. la C^*algèbre $C^*(G)$ associée au groupoïde G avec "système de Haar", cf. [6].

6. Corollaire. – 1) *Si* T *est une transversale fidèle de* V *on a* : $C^*(V, F) \cong \mathcal{K} \otimes C_r^*(G_T^T)$.

2) *L'algèbre* $C^*(V, F)$ *ne dépend pas à isomorphisme près de la structure* C^∞ *longitudinale.*

Preuve. – 2) résulte trivialement de 1), et il est facile de voir que $\mathcal{E}_T^V$ est un bimodule d'imprimitivité entre $C^*(V, F)$ et $C_r^*(G_T^T)$. Ceci démontre 1) par [7].

□

Supposons que (V,F) est de classe C^∞, et soit f une submersion d'une variété W dans V/F, et G_f son graphe [2]. Nous dirons que f est rétroconnexe si l'application $s : G_f \longrightarrow V$ est rétroconnexe. On a alors :

7. Corollaire. – *Si* $f : W \longrightarrow V/F$ *est une submersion surjective et rétroconnexe, et si le feuilletage* F_W *de* W *image réciproque est de dimension non nulle, alors* $C^*(W, F_W)$ *est isomorphe à* $C^*(V, F)$.

Preuve. – Soit $\mathcal{E}_f$ le bimodule de [3] chap. 4.

On a $C^*(W, F_W) \subset \mathcal{K}(\mathcal{E}_f)$ [3] chap. 4. Comme f est rétroconnexe, on a $C^*(W, F_W) \supset \mathcal{K}(\mathcal{E}_f)$ et comme f est surjective, $\langle \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f \rangle = C^*(V, F)$, $\mathcal{E}_f$ est donc un bimodule d'imprimitivité.

□

8. *Remarque.* – Si W est une sous-variété transverse de V de dimension $>q$ alors :

i) $C_r^*(G_W^W)$ est stable.

ii) Si W est fidèle, $C_r^*(G_W^W)$ et $C^*(V, F)$ sont isomorphes.

9. *Exemples.* 1) Prenons $V = \mathbf{T}^3$ muni d'un feuilletage de Kronecker par $\mathbf{R}^2$ et soit $T = S^1$ une transversale à F. Soit $K = S^1 \times \bar{D}^2$ un voisinage de T dans V feuilleté par $\bar{D}^2$ (où $\bar{D}^2$ est une petit disque fermé de $\mathbf{R}^2$). Soit M_k le tore à k trous privé d'un petit disque ouvert. Soit (V_k, F_k) la variété feuilletée obtenue à partir de (V, F) en remplaçant K par $K_k = S^1 \times M_k$. Par le corollaire 7, on a : $C^*(V_k, F_k) \cong C^*(V, F)$. Sans changer la C^*-algèbre on a modifié la feuille générique. En particulier la caractéristique d'Euler des feuilletages mesurés (V, F) et (V_k, F_k) sont différentes :

$\chi(V, F) = 0$ et $\chi(V_k, F_k) = -2k\,\Lambda(T)$ (cf [1] § VIII).

2) Dans l'exemple précédent on peut mettre dans K un feuilletage de Reeb (K, R) après avoir rendu le feuilletage initial tangent à la frontière de K. Soit (V', F') la variété feuilletée ainsi obtenue. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow C^*(V, F) \longrightarrow C^*(V', F') \longrightarrow C^*(K, R) \longrightarrow 0$$

(car $C^*(V' \backslash K, F') \cong C^*(V, F)$).

10. *Remarque.* – Les résultats précédents restent valables si V est une variété à bord et si F est tangent ou transverse au bord. Dans le cas où F est transverse au bord, remarquons que l'inclusion naturelle $C^*(V \backslash \partial V, F) \longrightarrow C^*(V, F)$ est un isomorphisme par le lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, *Lect. Notes in Math.*, n° 725, Springer (1979), 19 à 143.

[2] A. Connes, Survey of foliations and operator algebras, Operator algebras and applications, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, vol 38, part 1, A.M.S., Providence 1982.

[3] A. CONNES, G. SKANDALIS, The longitudinal index theorem for foliations, *Preprint I.H.E.S.* /M/82/24.

[4] G.G. KASPAROV, Hilbert C*-modules, Theorems of Stinespring and Voiculescu, *Journal of Operator Theory*, vol. 4 n° 1 (1980).

[5] J.F. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.*, 102 (1975).

[6] J.N. RENAULT, A groupoid approach to C*-algebras, *Lect. Notes in Math.*, n° 793, Springer (1980).

[7] M. RIEFFEL, Morita equivalence for C* and W* algebras, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 5 (1974).

Manuscrit reçu le 25 octobre 1982.

M. HILSUM et G. SKANDALIS,
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
Tour 45-46, 3ème étage
75230 Paris Cedex 05.