Annales de l'institut Fourier

Ronald R. Coifman
D. G. Deng
Yves Meyer

Domaine de la racine carrée de certains opérateurs différentiels accrétifs

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 2 (1983), p. 123-134
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_123_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 123-134.

DOMAINE DE LA RACINE CARRÉE DE CERTAINS OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ACCRÉTIFS

par R. R. COIFMAN, D. G. DENG et Y. MEYER

1. Énoncé du théorème et calculs préliminaires.

Soit $A(x) = ((a_{j,k}(x)))_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ une matrice à coefficients dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Soit $<\eta, \xi> = \sum_1^n \eta_j\xi_j$ le produit scalaire hermitien dans $\mathbf{C}^n$ et supposons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que l'on ait presque partout

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Re} < A(x)\xi, \xi > \ \geqslant \delta|\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbf{C}^n$.

A l'aide de $A(x)$, on construit, suivant Kato [4] la forme bilinéaire $J : H^1(\mathbf{R}^n) \times H^1(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{C}$ définie par

$$\text{(2)} \qquad J[u,v] = \int_{\mathbf{R}^n} \langle A(x)\,\mathrm{Grad}\, u,\ \mathrm{Grad}\, v\rangle\, dx\,.$$

Ici $H^1(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev usuel des fonctions $f \in L^2(\mathbf{R}^n; dx)$ dont le gradient, noté $\mathrm{Grad}\, f$, pris au sens des distributions appartient à $L^2(\mathbf{R}^n; dx)$.

A l'aide de la forme J, on construit un opérateur T_J, défini sur un sous-espace dense V de $L^2(\mathbf{R}^n)$, à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et tel que

$$\text{(3)} \qquad \int_{\mathbf{R}^n} T_J(u)\bar{v}\, dx = J[u,v]\,.$$

Pour que T_J soit maximal (c'est-à-dire ne se prolonge pas en un opérateur défini sur un domaine plus grand et respectant encore (3)), il convient de définir V comme l'ensemble de tous les $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$ tels qu'il existe $C = C(u)$ de sorte que $|J[u,v]| \leqslant C(u)\|v\|_2$ pour tout $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$.

On montre alors facilement que V est dense dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et dépend de façon non-linéaire de $A(x)$. En particulier V n'est pas un espace fonctionnel classique.

En outre $T_J : V \to L^2(\mathbf{R}^n)$ est m-accrétif. Cela signifie que $\operatorname{Re}\langle T_J f, f\rangle \geqslant \delta\|\operatorname{Grad} f\|_2^2$ et que $1 + T_J : V \to L^2$ est un isomorphisme. Nous avons posé ici $\langle u,v\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\bar{v}(x)\,dx$.

On désignera désormais par A l'opérateur défini sur $(L^2(\mathbf{R}^n))^n$, à valeurs dans $(L^2(\mathbf{R}^n))^n$ et où $v = Au$ signifie que u est le vecteur colonne des $u_k(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, v celui des v_j et que $v_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(x)u_k(x)$.

On pose $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, on appelle D le vecteur colonne formé des opérateurs D_j, $D^* = (D_1, \ldots, D_n)$ et l'on a, formellement et sur le domaine V de T_J, $T_J = D^*AD$.

Kato [4] définit $\sqrt{T_J} = L$ comme l'unique opérateur m-accrétif dont le carré soit T_J et conjecture que le domaine de L est $H^1(\mathbf{R}^n)$. C'est le cas si la matrice $A(x)$ est auto-adjointe pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

THÉORÈME 1. — *Il existe, pour tout* $n \geqslant 1$, *une constante* $\varepsilon_n > 0$ *telle que, si* $\|A(x) - 1\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$, *le domaine de l'opérateur* $\sqrt{T_J}$ *défini ci-dessus soit* $H^1(\mathbf{R}^n)$.

Dans cet énoncé 1 est la matrice identité et le choix de la norme sur $M_n(\mathbf{C})$ n'a aucune importance puisque la valeur numérique de ε_n n'est pas connue.

La première tâche pour démontrer le théorème 1 est d'écrire un algorithme définissant $\sqrt{T_J}$ à l'aide de la résolvante de T_J. Ensuite il importe d'avoir une bonne connaissance de cette résolvante. Enfin (et là réside la difficulté), il faudra former un calcul pseudo-différentiel adapté à la multiplication par les fonctions de $L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Dans le lemme qui suit, il est commode d'appeler H l'espace de Hilbert $(L^2(\mathbf{R}^n))^n$ muni de sa norme canonique. Supposons que

$B(x) = ((b_{j,k}(x)))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ où $b_{j,k}(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et que la norme de l'opérateur $B : H \to H$ défini par la multiplication matricielle par $B(x)$ soit strictement inférieure à 1. Ce sera le cas si $B(x) = 1 - A^{-1}(x)$ et si $\|1 - A(x)\|_\infty \leqslant \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n > 0$ est assez petit.

Posons $R_t = (1 + t^2 DD^*)^{-1} : H \to H$, opérateur dont la norme est égale à 1 et $Q_t = R_t t D = P_t t D$ où $P_t = (1 - t^2 \Delta)^{-1}$.

Avec ces notations, on a

Lemme 1.

$$\sqrt{T_J} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(B, \ldots, B), \tag{4}$$

où

$$T_k(B, \ldots, B) = \int_0^\infty Q_t^*(BR_t)^k D \frac{dt}{t}. \tag{5}$$

La convergence a lieu au sens suivant : lorsqu'on se restreint au domaine V de T_J, on doit d'abord pour $R > \varepsilon > 0$ fixés, sommer $\sum_{k \geqslant 0} \int_\varepsilon^R Q_t^*(BR_t)^k D \frac{dt}{t}$ pour ensuite passer à la limite lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$. La vérification de ces identités est très simple. Si X, Y, Z sont trois éléments d'une algèbre associative ayant une unité 1, si $XYZ + 1$, Y et $1 + ZX$ sont inversibles et si $Y^{-1} = 1 - B$, on a

$$(XYZ + 1)^{-1} XY = X(1 + ZX)^{-1}(1 - B(1 + ZX)^{-1})^{-1}.$$

Dans notre cas, on obtient l'identité résolvante suivante

$$(t^2 D^* A D + 1)^{-1} t D^* A = t D^*(1 + t^2 DD^*)^{-1}(1 - BR_t)^{-1}. \tag{6}$$

On utilise alors la formule de Kato donnant la racine carrée *m*-accrétive d'un opérateur *m*-accrétif

$$\sqrt{T_J} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (t^2 T_J + 1)^{-1} T_J \, dt = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, R \uparrow +\infty} \int_\varepsilon^R \ldots dt \tag{7}$$

sur le domaine V de T_J.

Il vient, grâce à (6),

$$\sqrt{T_J} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, R \uparrow +\infty} L^{(\varepsilon,R)}(B)D \tag{8}$$

où

$$L^{(\varepsilon,R)}(B) = \frac{2}{\pi} \int_\varepsilon^R Q_t^* (1 - BR_t)^{-1} \frac{dt}{t} = \sum_{k \geqslant 0} L_k^{(\varepsilon,R)}(B).$$

Nous allons généraliser les opérateurs tronqués $L_k^{(\varepsilon,R)}(B)$. On pose

$$L_k(B; M) = \int_0^\infty Q_t^* (BR_t)^k M(t) \frac{dt}{t} \tag{9}$$

où $M(t)$ est un vecteur colonne dont les coefficients $m_j(t)$ appartiennent à $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et où $M(t) = 0$ si t est suffisamment petit ou grand.

Avec ces notations, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. — *Il existe, pour tout entier* $n \geqslant 1$, *une constante* C_n *telle que la norme de l'opérateur* $L_k(B; M) : L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *ne dépasse pas* $C_n^k \|B\|_\infty^k \|M\|_\infty$.

2. Plan de la démonstration du théorème 2.

Posons $P_t = (1 - t^2\Delta)^{-1}$ où $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$ et désignons par $R_j = \frac{D_j}{\sqrt{-\Delta}}$ les transformations de Riesz $\left(\text{de symbole } \frac{\xi_j}{|\xi|}\right)$. Alors on a $R_t = (1 + t^2 DD^*)^{-1} = 1 - RR^* + P_t RR^*$ où R est le vecteur colonne des R_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

On a $R_t tD = Q_t = P_t tD$, $tD^* R_t = Q_t^*$ et $t \frac{\partial}{\partial t} Q_t^* = - Q_t^* + 2P_t Q_t^*$

$$\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 Q_t^* = Q_t^* - 8Q_t^* Q_t Q_t^* \quad \text{et} \quad t \frac{\partial}{\partial t} R_t = - 2Q_t Q_t^*.$$

Grâce à ces identités et à une intégration par parties, nous allons ramener la preuve du théorème 2 à l'étude d'une fonctionnelle quadratique (à la

Littlewood-Paley-Stein). On rappelle que H est l'espace de Hilbert $(L^2(\mathbf{R}^n))^n$ avec sa structure canonique. On écrira tout élément $F \in H$ comme un vecteur colonne dont les composantes $f_j \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Finalement, si $F \in H$, on pose

$$(10) \qquad G_k(F)(x) = \left(\int_0^\infty |Q_t^*(BR_t)^k F|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$$

et l'on désigne par γ_k la plus petite constante $\geqslant 0$, éventuellement $+\infty$, telle que l'on ait

$$(11) \qquad \|G_k(F)\|_2 \leqslant \gamma_k \|B\|_\infty^k \|F\|_H .$$

On a alors

Proposition 1. — *La norme, notée* $\|L_k(B)\|$ *de l'opérateur* $L_k(B) : H \to L^2(\mathbf{R}^n)$ *admet la majoration*

$$(12) \qquad \|L_k(B)\| \leqslant 100(\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_k)\|B\|_\infty^k \|M\|_\infty .$$

Pour le voir, on note $\mathbf{R}_+^{n+1}$ le produit $\mathbf{R}^n \times]0, +\infty[$ que l'on munit de la mesure $dx \frac{dt}{t}\cdot$ On désigne par K l'espace de Hilbert $\left(L^2\left(\mathbf{R}_+^{n+1}; dx \frac{dt}{t}\right)\right)^n$ muni de la structure canonique. Un élément $G \in K$ sera écrit comme une colonne de fonctions $g_j \in L^2\left(\mathbf{R}_+^{n+1}; \frac{dx\, dt}{t}\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et pour presque tout t, $G_t \in H$ désigne la fonction $x \mapsto G(x, t)$.

Lemme 2. — *Avec les notations précédentes, on a pour tout* $g \in L^2(\mathbf{R}^n; dx)$,

$$(13) \qquad \int_0^\infty \|Q_t g\|_H^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \|g\|_2^2 .$$

La preuve est immédiate : on calcule, pour tout t fixé,

$$\|Q_t g\|_H^2 = \sum_1^n \|tD_j P_t g\|_2^2$$

par la formule de Plancherel. On obtient

$$\|Q_t g\|_H^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{t^2|\xi|^2}{(1+t^2|\xi|^2)^2} |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi .$$

On intègre alors en t et le calcul se termine aisément.

LEMME 3. — *Pour tout* $G \in K$, *on a*

$$\left\| \int_0^\infty Q_t^*(G_t) \frac{dt}{t} \right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|G\| \tag{14}$$

où $\|G\| = \left(\int_0^\infty \|G_t\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$.

La preuve du lemme 3 ne présente aucune difficulté si l'on calcule la norme du membre de gauche de (14) en majorant les produits scalaires (dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n; dx)$) entre $\int_0^\infty Q_t^*(G_t) \frac{dt}{t}$ et $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Il suffit alors de faire porter l'action de Q_t sur g et d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La preuve de la proposition 1 est une adaptation de [1]. On écrit $Q_t^* = \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 Q_t^* + 8 Q_t^* Q_t Q_t^*$ et l'opérateur $L_k(B)$ se décompose, de façon correspondante, en $L_k^{(1)}(B) + 8 L_k^{(2)}(B)$. Le traitement de $L_k^{(2)}(B)$ se fait en appliquant directement le lemme 3, ce qui conduit à la fonctionnelle quadratique.

En ce qui concerne $L_k^{(1)}(B)$, on procède par intégration par parties en supposant, dans un premier temps, $M(t)$ suffisamment régulière. Puisque $t \frac{\partial}{\partial t} R_t = -2 Q_t Q_t^*$, on est conduit (après intégration par parties) à des termes qui se majorent grâce au lemme 3. Il reste cependant un terme récalcitrant, à savoir

$$- \int_0^\infty \left[\left(t \frac{\partial}{\partial t} \right) Q_t^* \right] (BR_t)^k \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right) M(t) f \frac{dt}{t}$$

que l'on ne peut estimer directement. On pose

$$M_1(t) = t \frac{\partial}{\partial t} M(t), \qquad M_2(t) = \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right) M_1(t) = \left(t \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 M(t)$$

et une seconde intégration par parties conduit à

$$\int_0^\infty Q_t^* (BR_t)^k M_2(t) \frac{dt}{t},$$

modulo des termes que l'on estime directement par le lemme 3. Cela signifie qu'en appelant $\tilde{M}$ la différence $M - M_2$ et en posant $\tilde{L}_k(B) = \int_0^\infty Q_t^*(BR_t)^k \tilde{M}(t)\frac{dt}{t}$, on a

$$\|\tilde{L}_k(B)\| \leqslant 10(\gamma_0 + \cdots + \gamma_k)(\|M\|_\infty + \|M_1\|_\infty)\|B\|_\infty^k.$$

Il ne reste plus qu'à renverser le rôle de M et de $\tilde{M}$ en observant que si $N(t) \in L^\infty(0, +\infty)$ est arbitraire, on peut résoudre $M - \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 M = N$ et que la solution M appartient à $L^\infty(0, +\infty)$ ainsi que $t\frac{\partial}{\partial t}M$. La proposition 1 est démontrée.

Pour alléger les notations, désignons par $|||\,.\,|||_2$ la norme dans $L^2\left(\mathbf{R}_+^{n+1}; dx\frac{dt}{t}\right)$ et réservons $\|\,.\,\|_2$ pour la norme dans $L^2(\mathbf{R}^n; dx)$. Nous nous proposons de comparer les fonctionnelles

$$J_k^{(1)}(F) = |||Q_t^*(BR_t)^k F|||_2, \qquad F \in H = (L^2(\mathbf{R}^n))^n$$
$$J_k^{(2)}(F) = |||Q_t^*(BR_t)^{k-1}BP_t\tilde{F}|||_2 + |||Q_t^*(BR_t)^{k-1}G|||_2$$

où $G = B(F - \tilde{F})$ et $\tilde{F} = RR^*F$

$$J_k^{(3)}(F) = |||Q_t^*(BR_t)^{k-1}BW_t\tilde{F}|||_2$$

où $W_t : L^2 \to L^2$ est l'opérateur (scalaire) dont le symbole est $\exp(-t^2|\xi|^2)$ (le lien entre opérateur et symbole étant le même que pour les opérateurs pseudo-différentiels).

Désignons par B_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, les vecteurs colonnes (à coordonnées dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$) composant la matrice B. La fonctionnelle suivante est

$$J_k^{(4)}(F) = \sum_{j=1}^n |||(W_t\tilde{F})(Q_t^*(BR_t)^{k-1}B_j)|||_2.$$

Deux autres fonctionnelles sont nécessaires. A savoir

$$J_k^{(5)}(h) = \left(\int_0^R\int_{\mathbf{R}^n} |Q_t^*(BR_t)^{k-1}B_j|^2|W_Rh|^2\,\frac{dx\,dt}{t}\right)^{1/2}$$

et

$$J_k^{(6)}(h) = |||Q_t^*(BR_t)^{k-1}(B_jW_Rh)|||_2.$$

Le but que nous nous proposons est de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *Il existe une constante* C_n *telle que*

$$(15)\quad \sup\{J_k^{(1)}(F);\ \|F\|_H \leqslant 1\} \leqslant C_n^k \|B\|_\infty^k + C_n \|B\|_\infty \sup\{J_{k-1}^{(1)}(F); \|F\|_H \leqslant 1\}.$$

Lorsque $k = 0$, $J_k^{(1)}(F) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|F\|_H$ de sorte que la proposition 2 et une récurrence évidente donnent le théorème 1.

Pour démontrer la proposition 2, nous allons majorer, dans cet ordre, $J_k^{(6)}(h)$ lorsque $\|h\|_2 \leqslant 1$, puis $J_k^{(5)}(h)$ dans les mêmes conditions.

De proche en proche nous majorerons toutes les fonctionnelles jusqu'à $J_k^{(1)}(F)$. Les deux outils employés seront un lemme (classique) de L. Carleson sur les « mesures de Carleson » et un résultat permettant d'estimer le commutateur entre l'action d'opérateurs pseudo-différentiels et la multiplication ponctuelle par des fonctions non régulières. C'est l'objet des deux paragraphes qui suivent.

3. L'espace fonctionnel B_q et l'action des opérateurs R_t.

Dans cette section q sera un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$. Une fonction mesurable $b : \mathbf{R}_+^{n+1} \to \mathbf{C}$ appartient à B_q si

$$\sup_{(x,t)\in \mathbf{R}_+^{n+1}} \left(\frac{1}{t^n}\int_{|y-x|\leqslant t} |b(y,t)|^q\, dy\right)^{1/q} = \|b\|_{B_q} < +\infty .$$

Soit $Z : L^q(\mathbf{R}^n) \to L^q(\mathbf{R}^n)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau $Z(x,y)$ vérifie $|Z(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1}$ lorsque $|x-y| \geqslant 1$. Définissons $U_t : L^q(\mathbf{R}^n) \to L^q(\mathbf{R}^n)$ par $(U_t f)(x) = f(tx)$ et posons $Z_t = U_t^{-1} Z U_t$. Le noyau $Z_t(x,y)$ de Z_t est égal à $\dfrac{1}{t^n} Z\left(\dfrac{x}{t}, \dfrac{y}{t}\right)$.

Finalement, avec ces notations, on a

PROPOSITION 3. — *Il existe une constante* $C = C(q,n,Z)$ *telle que si* $b \in B_q$ *et* $b_t(x) = b(x,t)$, *alors la fonction* $\beta(x,t) = \beta_t(x) = Z_t(b_t)$ *appartient également à* B_q *avec*

$$(16)\qquad \|\beta\|_{B_q} \leqslant C(q,n,Z)\|b\|_{B_q}.$$

La preuve est immédiate : par changement d'échelle on ramène cette vérification à la remarque très simple suivante : si $f \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, uniformément sur les translatées de la boule unité, alors il en est de même pour $Z(f)$.

COROLLAIRE 1. — *Il existe une constante* $C(q,n)$ *de sorte que*

(17) $$\|R_t b_t\|_{B_q} \leqslant C(q,n)\|_{B_q}$$

pour $b_t(x) = b(x,t) \in B_q$.

COROLLAIRE 2. — *Si* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ *vérifie* $|f(x)| \leqslant 1$ *presque partout, alors pour tout* $k \geqslant 0$,

(18) $$\|(R_t B)^k f\|_{B_q} \leqslant (C(q,n))^k \|B\|_\infty^k .$$

4. Le lemme de commutation.

Dans la proposition qui suit, $2n < q < +\infty$ et $Z_t : L^q(\mathbf{R}^n) \to L^q(\mathbf{R}^n)$ est un opérateur linéaire continu dépendant mesurablement de t (par exemple l'opérateur de la proposition 3).

PROPOSITION 4. — *Supposons que le noyau* $Z_t(x,y)$ *de* Z_t *vérifie*

$$|Z_t(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n}\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^{-1} .$$

Si $w_t(x) : \mathbf{R}_+^{n+1} \to \mathbf{C}$ *est mesurable, nous poserons*

(19) $$\delta(w_t) = \left(\iiint_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0,+\infty[} \frac{|w_t(x) - w_t(y)|^2}{|x-y|^{n+1}}\, dx\, dy\, dt\right)^{1/2} .$$

Alors pour toute fonction $b \in B_q$, *on a*

(20) $$\||Z_t(b_t w_t) - w_t Z_t(b_t)\||_2 \leqslant C'(q,n)\, \|b\|_{B_q}\, \delta(w_t) .$$

Désignons par $\Delta(t,x)$ la différence $Z_t(b_t w_t) - w_t Z_t(b_t)$. On a

$$\Delta(t,x) = \int_{\mathbf{R}^n} Z_t(x,y)(w_t(y) - w_t(x)) b(y,t)\, dy$$

et donc

$$|\Delta(t,x)| \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} |w_t(y) - w_t(x)||b(y,t)||x-y|^{-n}\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^{-1} dy$$

$$\leqslant C\left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|w_t(x) - w_t(y)|^2}{|x-y|^{n+1}}\, dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|b(y,t)|^2}{|x-y|^{n-1}\left(1 + \left|\frac{x-y}{t}\right|\right)^2}\, dy\right)^{1/2} .$$

Puisque $q > 2n$, la seconde intégrale est finie et est majorée par $C'(q,n)t^{1/2}\|b\|_{B_q}$. Il vient alors, comme annoncé,

$$|||\Delta(t,x)|||_2 \leqslant CC'(q,n)\,\delta(w_t)\,\|b\|_{B_q}.$$

Remarque 1. — Supposons $w_t(x) = (W_t f)(x)$. Alors

$$\delta(w_t) = \gamma_n \|f\|_2 .$$

Remarque 2. — Soit $R > 0$ et $w_t(x) = (W_R f)(x)$ pour $0 < t < R$, $w_t(x) = 0$ si $t > R$. Alors

$$\delta(w_t) \leqslant C_n \|f\|_2 .$$

En effet le changement de variable $y = x + h$, $x = x$ et le calcul de la norme dans $L^2(dx)$ par la formule de Plancherel conduisent à

$$\delta(w_t) = \left((2\pi)^{-n} \iiint_0^R |e^{ih\cdot\xi} - 1|^2 |h|^{-n-1} \exp(-2R^2|\xi|^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\, dh\, dt\right)^{1/2}.$$

On intègre d'abord par rapport à h et l'on obtient $c_n|\xi|$. Ensuite l'intégration en t donne R et l'on majore

$$c_n R|\xi| \exp(-2R^2|\xi|^2) \quad \text{par} \quad C_n .$$

5. Fin de la démonstration de la proposition 2.

Convenons encore que B désigne *l'opérateur* (matriciel) de multiplication ponctuelle des vecteurs $f(x) \in (L^2(\mathbf{R}^n))^n$ par la matrice $((b_{j,k}(x)))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$. En revanche nous désignerons par $\underset{\sim}{B}(x)$ la *fonction* appartenant à $L^\infty(\mathbf{R}^n, M_n(\mathbf{C}))$ qui à presque tout x associe la matrice correspondante. Avec ces notations, on a

LEMME 4. — *Il existe, pour tout entier* $n \geqslant 1$ *une constante* $C(n)$ *telle que, pour tout* $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ *et* $\underset{\sim}{B}(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^n, M_n(\mathbf{C}))$, *on a, pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$(21) \qquad (R_t B)^k W_t f = (W_t f)((R_t B)^{k-1} R_t \underset{\sim}{B}) + \rho_k(x,t)$$
$$\text{où} \quad |||\rho_k(x,t)|||_2 \leqslant (\tilde{C}(n))^k \|B\|_\infty^k \|f\|_2 .$$

Naturellement ce résultat s'obtient par récurrence sur k et pour passer de k à $k+1$, on pose $\beta_k(x,t) = (R_t B)^{k-1} R_t \underset{\sim}{B}$. Alors le corollaire 2 de la proposition 3 donne $\|\beta_k\|_{B_q} \leqslant (C(q,n))^k \|B\|_\infty^k$.

On est alors amené à calculer $R_t((W_t f)(B\beta_k))$. On applique alors la proposition 4 de sorte que $\rho_{k+1}(x,t)$ est la somme de $R_t \underset{\sim}{B} \rho_k$ et du terme d'erreur apparaissant dans la proposition 4. On choisit $\tilde{C}$ assez grand pour que

$$(\tilde{C}(q_1n))^{k+1} \geqslant C'(q_1n)(C(q_1n))^k + (\tilde{C}(q_1n))^k$$

et le lemme 4 est démontré en choisissant, par exemple, $q = 2n + 1$. Il reste à observer que la conclusion du lemme 4 ne change pas si W_tf est remplacée par w_t tandis que $\|f\|_2$ est remplacée par $\delta(w_t)$. En particulier si $w_t = W_Rf$ pour $0 \leqslant t \leqslant R$ et $w_t = 0$ si $t > R$, on a encore

$$(R_tB)^k w_t = w_t(R_tB)^{k-1}R_t\underset{\sim}{B} + \rho_k(x,t) \tag{22}$$

où

$$|||\rho_k(x,t)|||_2 \leqslant (\tilde{C}(n))^k\|B\|_\infty^k\|f\|_2 . \tag{23}$$

Une dernière observation est que dans (21), (22) et (23) $(R_tB)^k$ peut être remplacé par $Q_t^*B(R_tB)^{k-1}$ sans changer ni la démonstration, ni la conclusion.

Le dernier ingrédient de la démonstration de la proposition 2 est un lemme de Carleson que nous énonçons sous une forme un peu différente.

Proposition 5. — *Soit $d\mu(x,t)$ une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Alors les deux propriétés suivantes de μ sont équivalentes*

(24) *il existe C_μ telle que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a*

$$\left(\iint_{\mathbf{R}_+^{n+1}} |W_tf|^2\, d\mu(x,t)\right)^{1/2} \leqslant C_\mu\|f\|_2$$

(25) *il existe C'_μ telle que, pour tout $R > 0$ et toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on a*

$$\left(\iint_{\mathbf{R}^n\times[0,R]} |W_Rf|^2\; d\mu(x,t)\right)^{1/2} \leqslant C'_\mu\|f\|_2 .$$

De plus on peut toujours choisir $C_\mu \leqslant C_nC'_\mu$ où C_n ne dépend que de la dimension.

Revenons aux fonctionnelles $J_k^{(1)}, \ldots, J_k^{(6)}$ de la proposition 2. Proposons-nous de majorer $J_{k+1}^{(1)}$.

On part de

$$J_{k+1}^{(6)}(h) = |||J_k^{(1)}(B_jW_Rh)|||_2 \leqslant \|B\|_\infty \sup_{\|h\|_2\leqslant 1} |||J_k^{(1)}(h)|||_2,$$

ceci lorsque $\|h\|_2 \leqslant 1$. Le contrôle de $J^{(5)}_{k+1}(h)$ s'obtient alors en appliquant le lemme 4 sous la forme décrite par les inégalités (22), (23) et les observations qui s'y rattachent.

La proposition 5 intervient et donne la majoration souhaitée de $J^{(4)}_{k+1}$. Alors le lemme 4 intervient à nouveau et permet de contrôler $J^{(3)}_{k+1}(F)$. Il reste à remplacer W_t par P_t. On a, en fait

$$|||P_t f - W_t f|||_2 \leqslant C\|f\|_2$$

en appliquant la formule de Plancherel. Il en résulte que

$$|||Q_t^*(BR_t)^k BP_t\tilde{F}|||_2 \leqslant |||Q_t^*(BR_t)^k BW_t\tilde{F}|||_2 + C\|B\|_\infty^{k+1}\|\tilde{F}\|_2 .$$

Enfin $R_t = 1 - RR^* + P_t RR^*$ si bien que, par l'inégalité triangulaire, $J^{(1)}_{k+1}(F) \leqslant J^{(2)}_{k+1}(F)$.

La preuve de la proposition 2 est terminée.

E. Fabes, D. Jerison et C. Kenig ont également obtenu le théorème 2, par une démonstration différente. Ces deux démonstrations ont eu, pour origine, un travail non publié de R. R. Coifman et D. G. Deng dans lequel le théorème 2 était démontré avec l'estimation

$$\|L_k(B)\| \leqslant C(n,k)\|B\|_\infty^k\|M\|_2$$

où $C(n,k)$ ne pouvait être précisée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. R. COIFMAN, A. MCINTOSH et Y. MEYER, L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes, *Annals of Maths*, 116 (1982), 361-387.

[2] E. FABES, D. JERISON et C. KENIG, Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA, 79 (1982), 5746-5750.

[3] Ch. FEFFERMAN and E. STEIN, H^p-spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137-193.

[4] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, N.Y. (1966).

Manuscrit reçu le 14 février 1983.

R. COIFMAN,
Department of Mathematics Yale
New Haven, CT 06520 (USA).

D. G. DENG,
Department of Mathematics
Peking University
Beijing (China).

Y. MEYER,
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
91128 Palaiseau (France).