ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

C. A. BERENSTEIN
B. A. TAYLOR
A. YGER

Sur les systèmes d'équations différence-différentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 1 (1983), p. 109-130
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 1 (1983), 109-130

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENCE-DIFFÉRENTIELLES

par C.A. BERENSTEIN, B.A. TAYLOR, A. YGER

Introduction.

Avant, qu'en 1975, dans [4], D.I. Gurevich ne vienne en donner un contre-exemple, le problème de la validité – ou non – de la synthèse spectrale pour les systèmes d'équations de convolution dans $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$ orienta nombre de recherches. Rappelons brièvement de quoi il s'agit ; étant donnés une distribution μ à support compact dans $\mathbf{R}^n$, et un élément $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, nous noterons $\mu * \check{f}$ l'élément de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n\,,\quad \mu * \check{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t - x)\, d\mu(t)$$

(voir [2] pour la définition précise). Toute solution C^∞ d'un système d'équations :

$$\mu_1 * \check{f} \equiv \ldots \equiv \mu_N * \check{f} \equiv 0 \tag{0.1}$$

($\mu_1, \ldots, \mu_N$ sont des distributions à support compact dans $\mathbf{R}^n$) est-elle limite, pour la topologie habituelle de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, d'une suite de combinaisons linéaires finies de solutions élémentaires du système (0.1), c'est-à-dire de solutions de (0.1) de la forme :

$$f(x) = P(x) \exp i(z_1 x_1 + \ldots + z_n x_n)\,, \tag{0.2}$$

avec $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$?

Le résultat fut démontré par Schwartz dans le cas où $n = 1$ et où N est quelconque, puis par Malgrange dans le cas où n est cette fois quelconque, mais où $N = 1$. L'un des travaux à notre avis les plus intéressants effectués depuis dans cette voie fut celui de Delsarte [2]; l'exemple étudié n'est pas tant important en lui-même que par les outils mis en œuvre dans ce dernier article. Delsarte étudie un système homogène de deux équations de convolution à deux inconnues $\mu_1 * \check{f} \equiv \mu_2 * \check{f} \equiv 0$, où μ_1 et μ_2 sont deux distributions sur $\mathbf{R}^2$ de la forme :

$$\mu_j = a_j \, \delta_{(0,0)} + b_j \, \delta_{(1,0)} + c_j \, \delta_{(0,1)} + d_j \, \delta_{(1,1)} + f_j \, , \quad j = 1 , 2 , \qquad (0.3)$$

où les éléments f_j sont des éléments de $L^1([0,1]^2)$ et où les coefficients complexes (a_j , b_j , c_j , d_j) satisfont la condition :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (0.4)$$

Le travail préliminaire consiste, pour cet exemple, à localiser le spectre du système, c'est-à-dire l'ensemble des couples (z , w) de $\mathbf{C}^2$ solutions de $\hat{\mu}_1(z , w) = \hat{\mu}_2(z , w) = 0$.

Il existe, pour cet exemple, une famille dénombrable $(\Omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'ouverts de diamètre inférieur ou égal à 1, à frontière régulière, tels que :

(i) $V = \{(z , w) \in \mathbf{C}^2 , \hat{\mu}_1(z , w) = \hat{\mu}_2(z , w) = 0\} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$;

(ii) $\exists \epsilon > 0 , \ \exists A > 0 , \ \forall (z , w) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \partial\Omega_n$,

$$|\hat{\mu}_1(z , w)| + |\hat{\mu}_2(z , w)| \geqslant \frac{\epsilon}{(1 + |z| + |w|)^A} \, e^{-A(|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, w|)} \, ;$$

(iii) $\mathrm{card}(\Omega_n \cap \{\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 0\}) \in \{1 , 2\}$.

En se plaçant dans le cas particulier où le spectre du système n'est constitué que de points simples, on démontre que toute solution du système $\mu_1 * \check{f} \equiv \mu_2 * \check{f} \equiv 0$, de classe C^∞, admet une représentation unique de la forme :

$$f(x , y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{(z_\ell , w_\ell) \in V \cap \Omega_k} c(z_\ell , w_\ell) \, e^{-i(z_\ell x + w_\ell y)} \Bigg) , \qquad (0.5)$$

convergente dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ [1, 2]. On utilise à cette fin une formule d'interpolation dite de Jacobi sur laquelle repose essentiellement le théorème de Berenstein-Taylor [1] sur lequel nous reviendrons. Disons enfin que le résultat obtenu ici par Delsarte est un résultat plus précis que le simple fait que le système étudié satisfasse à la propriété de la synthèse spectrale.

Dans un récent article [1], Berenstein et Taylor ont introduit, pour les n-uplets de fonctions analytiques sur $\mathbf{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$, la notion d'être à décroissance lente (s.d) relativement à un certain poids p. Notre point de vue restant celui de l'analyse harmonique, le poids auquel nous ferons dorénavant constamment référence sera le poids p défini sur $\mathbf{C}^n$ par :

$$p(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Im} z_k| + \log\left(1 + \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right).$$

Nous appellerons $A_p(\mathbf{C}^n)$ l'espace des fonctions F, analytiques sur $\mathbf{C}^n$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, telles qu'il existe deux constantes A et B, dépendant de la fonction, avec : $\forall \zeta \in \mathbf{C}^n$, $|F(\zeta)| \leqslant A e^{Bp(\zeta)}$.

Suivant la définition de [1], *un n-uplet* $(F_1, \ldots, F_n)$ *de* $(A_p(\mathbf{C}^n))^n$ *est s.d relativement au poids p s'il existe deux réels positifs* ϵ_1 *et* C_1 *tels que :*

a) *les composantes connexes de l'ensemble des* ζ *où*

$$\sum_{k=1}^{n} |F_k(\zeta)| < \epsilon_1 e^{-C_1 p(\zeta)}$$

sont bornées ;

b) *si* $\mathcal{C}$ *est l'une de ces composantes connexes, et si* ζ *et* ζ' *sont deux points de* $\mathcal{C}$, *on a* $p(\zeta) \leqslant K_1 p(\zeta') + K_2$ *où* K_1 *et* K_2 *sont indépendantes de* $\mathcal{C}$.

Sous ces hypothèses, et grâce à une méthode d'interpolation déjà évoquée, on peut montrer ([1], théorème 4.2), que l'idéal de $A_p(\mathbf{C}^n)$ engendré par $F_1, \ldots, F_n$, est fermé dans $A_p(\mathbf{C}^n)$ muni de sa topologie habituelle ($A_p(\mathbf{C}^n)$ étant défini comme une limite inductive d'espaces topologiques) et l'on a de plus la validité, dans ce cas, de la synthèse spectrale pour le système d'équations de convolution $\mu_1 * \check{f} \equiv \ldots \equiv \mu_n * \check{f} \equiv 0$, où $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\hat{\mu}_k = F_k$ (l'existence de μ_k résultant immédiatement du théorème de Paley-Wiener). Berenstein et Taylor démontrent également sous les mêmes hypothèses, l'existence, pour les solutions du système d'équations ci-dessus, d'une formule de représentation de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\zeta_\ell \in V_k} \left(\sum_{q=1}^{m(\zeta_\ell)} c(\ell, q, f)\, Q_{\ell,q}(x)\right) e^{-i\langle \zeta_\ell, x\rangle}, \tag{0.6}$$

convergente dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, où les ensembles V_k constituent une partition de $\{F_1 = \ldots = F_n = 0\}$ en partie finies disjointes et où, pour chaque ζ_ℓ de V_k, les polynômes $(Q_{\ell,q})_{q=1}^{q=m(\zeta_\ell)}$ constituent une base de l'espace vectoriel $\dfrac{\mathcal{O}_{\zeta_\ell}}{\sum_{k=1}^{n} F_k\, \mathcal{O}_{\zeta_\ell}}$ dont la dimension est précisément la multiplicité d'intersection en ζ_ℓ des hypersurfaces $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$; comme toujours $\mathcal{O}_{\zeta_\ell}$ désigne l'anneau local des germes de fonctions holomorphes au point ζ_ℓ. La solution f est représentée par les coefficients $c(\ell, q, f)$ de son développement ; on dispose de plus d'une information concernant la taille des coefficients $c(\ell, q, f)$.

Outre l'exemple développé par Delsarte (dans le cas $n = 2$), on peut relever comme exemple de n-uplet s.d relativement au poids p dans $(A_p(\mathbf{C}^n))^n$ celui des n-uplets $(F_1, \ldots, F_n)$ de transformées de Fourier de mesures à support fini, inclus dans $\mathbf{Q}^n$, lorsque la variété $V = \{F_1 = \ldots = F_n = 0\}$ est de dimension 0.

Comme la condition (a) de l'hypothèse s.d pour un n-uplet $(F_1, \ldots, F_n)$ implique que la variété V est discrète, on peut se demander si cette condition est toujours suffisante comme elle l'est pour les deux exemples cités. Il est facile de trouver deux mesures à support fini dans $\mathbf{R}^2$ telles que le couple $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ ne soit pas s.d relativement au poids p bien que le spectre $\{\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 0\}$ soit discret. En outre, il existe un ensemble de six distributions à support compact dans $\mathbf{R}^2$ telles que la synthèse spectrale ne soit pas satisfaite pour le système correspondant, et dont le spectre est vide [4]. Le problème que nous nous posons donc ici est celui de savoir si, pour tout n-uplet de distributions à support fini dans $\mathbf{R}^n$, de support inclus dans $\mathbf{Q}^n$, le n-uplet $(F_1, \ldots, F_n)$ est s.d lorsque le spectre V est discret.

Gurevich a démontré que, pour $n = 2$, pour toute famille de distributions à support fini dans $\mathbf{R}^2$, de support inclus dans $\mathbf{Q}^2$, la synthèse spectrale est satisfaite [5]. La démonstration repose sur le théorème suivant [6] :

THEOREME. – *Soit* I *un idéal de* $A_p(\mathbf{C}^n)$ *tel que la variété* $V(I) = \{\zeta \in \mathbf{C}^n, \forall \varphi \in I, \varphi(\zeta) = 0\}$ *est discrète ; alors l'adhérence* $\overline{I}$ *de* I *dans* $A_p(\mathbf{C}^n)$ *est égale à* $\overline{I} = \overline{\overline{I}} \cap A_p(\mathbf{C}^n)$, *où* $\overline{\overline{I}}$ *désigne l'adhérence de l'idéal* I *dans* $A_q(\mathbf{C}^n)$, *avec* $q(\zeta) = \|\zeta\|$.

Cependant, le résultat de Gurevich ne permet pas d'assurer que l'idéal I est fermé quand I est, dans le cas où $n = 2$, l'idéal engendré par deux transformées de Fourier de distributions de type considéré. En outre, la méthode utilisée, mettant en jeu des techniques d'une variable complexe, ne semble pas généralisable au cas où $n > 2$.

Le résultat principal que nous démontrerons dans cet article est le :

THEOREME. — *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux distributions sur* $\mathbf{R}^2$, *à support fini inclus dans* $\mathbf{Q}^2$; *on suppose de plus que*

$$\{\zeta \in \mathbf{C}^2 , \hat{\mu}_1(\zeta) = \hat{\mu}_2(\zeta) = 0\}$$

est discret ; le couple $(\hat{\mu}_1 , \hat{\mu}_2)$ *est alors s.d relativement au poids* p.

Les méthodes utilisées dans cette démonstration permettent de répondre (encore malheureusement partiellement) à la question de savoir si un résultat analogue subsiste dans $\mathbf{R}^n$. Nous pouvons également traiter des cas où les distributions ne sont plus qu'à support fini dans $\mathbf{R}^n$ avec cette fois une condition géométrique portant sur les supports de ces distributions et assurant par exemple, si V désigne le spectre du système :

$$\exists C > 0 , \ \forall \zeta \in V , \ \sum_{k=1}^{n} |\operatorname{Im} \zeta_k| \leqslant C(1 + \log(1 + \|\zeta\|)) .$$

La plupart de ces résultats feront l'objet d'une publication ultérieure; par exemple, dans l'exemple de Delsarte, il est possible de remplacer dans (0.3) les éléments $(f_j)_{j=1,2}$ par des distributions à support fini inclus dans $]0,1[^2 \ /\ $ ([12]).

Dans le langage plus familier des équations de convolution, le résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Etant donné un système d'équations différence-différentielles à coefficients constants où les retards sont commensurables, de la forme :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 * f(x) = \Sigma\, c_{\alpha,\beta}\, f^{(\alpha)}(x + \beta) = 0 \\ \\ \mu_2 * f(x) = \Sigma\, d_{\alpha,\beta}\, f^{(\alpha)}(x + \beta) = 0 \end{array} \right. , \ \beta \in \mathbf{Q}^2$$

si le système (S) n'est pas redondant (i.e si la variété $V = \{\zeta \in \mathbf{C}^2 , \hat{\mu}_1(\zeta) = \hat{\mu}_2(\zeta) = 0\}$ est discrète), toute solution C^∞ de (S) admet une représentation de la forme :

$$f(x) = \Sigma\, a_\gamma(x)\, e^{i\langle \gamma , x \rangle} , \tag{0.7}$$

où $\gamma \in \mathrm{V}$, et où $a_\gamma(x)\, e^{i\langle\gamma, x\rangle}$ est une solution du système (S) avec $a_\gamma \in \mathbf{C}[x_1, x_2]$. La série (0.7) est de plus convergente dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ après un groupement de termes indépendant de la solution f ; on peut d'autre part remplacer $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ par d'autres espaces de distributions.

De plus, le théorème 1 obtenu ci-dessous peut être interprété comme un théorème de petites valeurs ; nous espérons que ce type de résultat aura aussi des applications dans les problèmes de transcendance considérés par M. Waldschmidt et autres [8, 11].

Nous remercions nos collègues et en particulier M. Giusti, J.-P. Henry, M. Merle, Y. Meyer et B. Teissier pour les nombreux échanges d'idées que nous avons eus avec eux. Monsieur Berenstein tient aussi à remercier le General Research Board de l'Université de Maryland et la National Science foundation pour leur appui ; le Professeur Taylor a aussi bénéficié de l'appui de cette dernière organisation.

Section 1.

Nous considérerons dans cet article deux exponentielle-polynômes $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$, de deux variables (z, w), à fréquences dans $(i\mathbf{N})^2$; nous noterons ζ le couple (z, w) ; nous supposerons que la variété $\mathrm{V} = \{\zeta \in \mathbf{C}^2, \mathrm{F}_1(\zeta) = \mathrm{F}_2(\zeta) = 0\}$ est de dimension 0.

Sous ces conditions, nous démontrerons le théorème suivant :

THEOREME 1. – *Sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, quelque soient les constantes positives* ϵ *et* C, *il existe* ϵ_1, C_1, *constantes positives, telles que :*

a′) *les composantes connexes de l'ensemble*

$$\mathrm{S}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \epsilon_2, \mathrm{C}_1) = \{\zeta \in \mathbf{C}^2, \ |\mathrm{F}_1(\zeta)| + |\mathrm{F}_2(\zeta)| \leqslant \epsilon_1 e^{-\mathrm{C}_1 p(\zeta)}\}$$

sont bornées (ici, comme dans l'introduction, nous avons :

$$p(\zeta) = p(z, w) = |\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, w| + \mathrm{Log}(1 + |z| + |w|)) ;$$

b′) *si* $\mathcal{C}$ *est l'une de ces composantes connexes, on a :*

$$\forall \zeta \in \mathcal{C}, \ \ \forall \zeta' \in \mathcal{C}, \ d(\zeta, \zeta') \leqslant \epsilon e^{-\mathrm{C} p(\zeta)} .$$

Remarque 1. – L'exemple suivant montre que l'on a besoin de faire une hypothèse sur les fréquences des exponentielle-polynômes (ici par exemple qu'elles appartiennent à $(i\mathbf{N})^2$, ou, ce qui revient au même, à $(i\mathbf{Q})^2)$; considérons les deux exponentielle-polynômes $F_1(z, w) = \cos z\, f_1(w)$ et $F_2(z, w) = \cos(\lambda z)\, f_2(w)$, où f_1 et f_2 sont deux exponentielle-polynômes à fréquences dans $i\mathbf{R}$ sans zéros communs. Si λ est un nombre de Liouville, le couple (F_1, F_2) n'est pas s.d au sens de l'introduction bien que le spectre soit dans ce cas discret (la condition (b) de l'introduction est alors en défaut, et par conséquent la condition (b') également).

Pour commencer la preuve du théorème, nous avons besoin des lemmes algébriques suivants :

LEMME 1.1. – *Sous les hypothèses du théorème 1, on peut trouver dans l'idéal engendré par* F_1 *et* F_2 *(dans l'anneau* $\mathcal{R}$ *des exponentielle-polynômes à fréquences dans* $(i\mathbf{Z})^2$) *deux exponentielle-polynômes non nulles de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} G_1(\zeta) &= \sum_{k=0}^{m} A_k(z, w)\, e^{i(m-k)z} \\ G_2(\zeta) &= \sum_{k=0}^{n} B_k(z, w)\, e^{i(n-k)w} . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Preuve du lemme 1.1. – On peut écrire : $F_j(\zeta) = \sum_r C_{r,j}(\zeta)\, e^{irz}$; on peut même supposer que $C_{0,1} \cdot C_{0,2} \not\equiv 0$ (car e^{iz} est un élément inversible dans l'anneau $\mathcal{R}$ considéré).

On appelle $\mathcal{K}$ le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{A}$ des exponentielle-polynômes à fréquences dans $\{0\} \times i\mathbf{Z}$. Considérons les deux polynômes $\widetilde{F}_j$ de $\mathcal{K}[T]$ définis par : $\widetilde{F}_j(T) = \sum_r C_{r,j} T^r$.

Nous voulons montrer que les polynômes $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{K}[T]$. S'ils ne l'étaient pas, il existerait un polynôme U de $\mathcal{A}[T]$, de degré supérieur ou égal à 1, et deux éléments non-nuls V_1 et V_2 dans $\mathcal{A}$ tels que le polynôme U divise, dans $\mathcal{A}[T]$, les polynômes $V_1\widetilde{F}_1$ et $V_2\widetilde{F}_2$. Ecrivons U sous la forme : $U(T) = \sum_\ell u_\ell(\zeta)\, T^\ell$.

Considérons w_0 de manière à ce que la fonction d'une variable $V_1(z, w_0)\, V_2(z, w_0) \prod_\ell u_\ell(z, w_0)$ ne soit pas identiquement nulle (on considère seulement les $u_\ell \not\equiv 0$ dans ce produit) ; le produit $V_1(z, w_0)\, V_2(z, w_0)$ est un polynôme de la variable z tandis que la fonction de z définie par $\sum_\ell u_\ell(z, w_0)\, e^{i\ell z}$ est une exponentielle-polynôme comportant au moins deux monômes distincts ; il existe donc un nombre complexe z_0 tel que :

$$\sum_\ell u_\ell(z_0, w_0)\, e^{i\ell z_0} = 0$$

$$V_1(z_0, w_0)\, V_2(z_0, w_0) \neq 0 .$$

La fonction $\sum_\ell u_\ell(z, w)\, e^{i\ell z}$ divise donc localement, au voisinage de (z_0, w_0) les deux fonctions F_1 et F_2, ce qui contredit l'hypothèse de discrétion du spectre V.

Comme $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ sont premiers entre eux dans $\mathcal{K}[T]$, il existe, d'après le théorème de Bezout, deux polynômes H_1 et H_2 de $\mathfrak{A}[T]$ et un élément non nul G_2 de $\mathfrak{A}$ tels que :

$$G_2(\zeta) = H_1(T)\, \widetilde{F}_1(T) + H_2(T)\, \widetilde{F}_2(T) . \tag{1.2}$$

En remplaçant T par e^{iz}, on obtient que G_2 se trouve dans l'idéal engendré par F_1 et F_2 et a bien la forme voulue dans (1.1).

On fait le même raisonnement avec la variable w et l'on trouve de la même manière l'élément G_1. □

DEFINITION. – *On dit qu'une exponentielle-polynôme non nulle de deux variables est distinguée en la variable z si elle est de la forme :*

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} A_k(\zeta)\, e^{i(m-k)z} \tag{1.3}$$

où la variété algébrique $Z = \{A_0 = \ldots = A_m = 0\}$ *est de dimension* 0.

LEMME 1.2. – *Soit* P *un polynôme de* $\mathbf{C}[\zeta]$, *tel que la dérivée partielle* $\dfrac{\partial P}{\partial w}$ *ne soit pas identiquement nulle et* F *une exponentielle-polynôme de deux variables distinguée en la variable* z. *Le résultant de Sylvester* R *de* P *de* F, *considérés comme polynômes en la variable* w, *est une exponentielle-polynôme non nulle de la seule variable* z, *à fréquences dans* $i\mathbf{N}$.

Preuve du lemme 1.2. – Introduisons le polynôme

$$\widetilde{F}(\zeta, T) = \sum_{k=0}^{m} A_k(\zeta)\, T^{m-k},$$

que l'on peut écrire également sous la forme :

$$\widetilde{F}(\zeta, T) = \sum_{\ell=0}^{M} w^{M-\ell}\, V_\ell(z, T). \tag{1.4}$$

De même, écrivons P sous la forme :

$$P(\zeta) = w^N u_0(z) + \ldots + u_N(z) \tag{1.5}$$

avec $u_0 \not\equiv 0$ et $N \geqslant 1$.

Formons le déterminant de Sylvester, d'ordre $M + N$, de $\widetilde{F}$ et de P :

$$R_w(\widetilde{F}, P) = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots\cdots & u_N & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & u_0 & \cdots\cdots & u_N \\ v_0 & \cdots\cdots & v_M & 0 \\ 0 & v_0 & \cdots\cdots & v_M \end{vmatrix} = \Sigma\, r_j(z)\, T^j .$$

On a la relation : $R(z) = R_w(\widetilde{F}, P)|_{T=e^{iz}} = \Sigma\, r_j(z)\, e^{ijz}$.

Il en résulte que, si R est identiquement nul, les r_j sont tous identiquement nuls, donc $R_w(\widetilde{F}, P)$ l'est aussi.

Comme la variété algébrique Z est de dimension 0, il existe une constante K telle que $Z \subset \{\zeta \in \mathbf{C}^2, \|\zeta\| \leqslant K\}$. Prenons z_0 tel que $|z_0| > K$ et que $u_0(z_0) \neq 0$; d'après les propriétés du déterminant de Sylvester [10], il existe, pour tout T, un $w_0(T)$ solution de :

$$\begin{cases} P(z_0, w_0(T)) = 0 \\ \widetilde{F}(z_0, w_0(T), T) = 0. \end{cases}$$

Le nombre de choix possibles pour $w_0(T)$ est fini à cause de la première équation ; d'autre part, aucun point $(z_0, w_0(T))$ n'appartient à Z. On aboutit donc ici à une contradiction en construisant une suite T_n de réels positifs, tendant vers $+\infty$, telle que $w_0(T_n)$ reste constant, égal à w_0 ; en effet, le polynôme non nul $\widetilde{F}(z_0, w_0, T)$ aurait alors une infinité de racines. □

Remarque 2. – Si P ne dépend que de la seule variable z, alors le résultant de Sylvester de P et de F par rapport à la variable w sera le polynôme P lui-même.

Nous pouvons à ce moment donner le plan de la démonstration du théorème 1. Grâce au lemme 1.1, on peut trouver deux polynômes Δ_1 et Δ_2 de $\mathbf{C}[\zeta]$, deux exponentielle-polynômes G_1 et G_2 distinguées, l'une en z, l'autre en w, telles que $\Delta_1 G_1$ et $\Delta_2 G_2$ soient dans l'idéal (dans $\mathcal{E}$) engendré par F_1 et F_2. Il suffit de prendre pour Δ_1 et Δ_2 les PGCD respectifs des coefficients polynômiaux apparaissant dans les expressions (1.1). Le théorème 1 sera alors une conséquence des deux théorèmes suivants :

THEOREME 2. – *Soit* P *un polynôme irréductible de* $\mathbf{C}[\zeta]$; *soit* F *une exponentielle-polynôme à fréquences dans* $(i\mathbf{N})^2$, *non identiquement nulle sur la variété algébrique* $\{P = 0\}$; *le couple* (P, F) *satisfait à la conclusion du théorème 1.*

THEOREME 3. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux exponentielle-polynômes de deux variables distinguées, l'une en* z, *l'autre en* w; *le couple* (G_1, G_2) *satisfait à la conclusion du théorème 1.*

Remarque 3. – Le théorème 2 reste vrai sans aucune hypothèse sur les fréquences de F lorsque celles-ci sont imaginaires pures. Si les fréquences sont complexes quelconques, le résultat subsiste lorsque le poids p est remplacé par le poids $q(\zeta) = \|\zeta\|$.

Remarque 4. – Le théorème 3 donne une condition de discrétion du spectre, chose qui en général est difficile à vérifier. Dans la démonstration du théorème 2, apparaitront d'autres moyens de vérifier une telle conclusion.

On trouvera la démonstration du théorème 1 à la fin de la section 3.

Section 2.

Nous aurons besoin de la modification suivante apportée à la notion de s.d :

DEFINITION 2.1. – *Nous disons qu'une suite* $G_1, \dots, G_m$ *d'éléments de* $A_p(\mathbf{C}^2)$ *est f.s.d (c'est-à-dire «fortement à décroissance lente») si, pour tout couple* (ϵ, C) *de constantes positives, il existe des constantes positives* ϵ_1 *et* C_1 *telles que les conclusions* (a') *et* (b') *du théorème 1 soient vérifiées pour l'ensemble* $S(G_1, \dots, G_m, \epsilon_1, C_1)$ *défini par :*

$$S(G_1, \dots, G_m, \epsilon_1, C_1) = \left\{ \zeta \in \mathbf{C}^2 , \sum_{j=1}^{m} |G_j(\zeta)| \leqslant \epsilon_1 e^{-C_1 p(\zeta)} \right\}.$$

DEFINITION 2.2. – *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* $A_p(\mathbf{C}^2)$; *nous définissons la suite des idéaux jacobiens* $\mathfrak{J}_n$ *de la manière suivante :*

$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J}$$
$$\mathfrak{J}_{n+1} = \Lambda(\mathfrak{J}_n),$$

où $\Lambda(\mathfrak{J})$ *est l'idéal de* $A_p(\mathbf{C}^2)$ *engendré par* $\mathfrak{J}$ *et par tous les jacobiens* $\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(z, w)}$, *où* f *et* g *sont des éléments de* $\mathfrak{J}$.

PROPOSITION 2.1. – *Soit* $G_1, \dots, G_m$ *une suite d'éléments de* $A_p(\mathbf{C}^2)$ *engendrant un idéal* $\mathfrak{J}$. *La suite* $G_1, \dots, G_m$ *est f.s.d si et seulement si il existe deux entiers positifs* k *et* n, *et* n *éléments* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *de* $\mathfrak{J}_k$ *tels que la suite* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ *soit f.s.d.*

Preuve de la proposition 2.1. – Un sens de l'implication étant évident, nous montrons la réciproque en utilisant une induction descendante portant sur l'entier k.

$\mathfrak{J}$ étant finiment engendré, il en est de même pour tous les idéaux $\mathfrak{J}_k$. Soit $H_1, \dots, H_N$ un système de générateurs de $\mathfrak{J}_{k-1}$; définissons Γ par :

$$\Gamma(\zeta) = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant N} \left| \frac{\partial(H_s, H_t)}{\partial(z, w)} \right| .$$

Il est clair qu'il existe des constantes positives A et B telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} |\Gamma_j(\zeta)| < A e^{Bp(\zeta)} \Big(\Gamma(\zeta) + \sum_{j=1}^{N} |H_j(\zeta)| \Big).$$

Etant donnés ϵ et C, il existe donc ϵ_2 et C_2 tels que les conclusions (a') et (b') soient satisfaites pour l'ensemble $S(\Gamma, H_1, \dots, H_N, \epsilon_2, C_2)$.

Prenons pour l'instant $\epsilon_3 < \frac{\epsilon_2}{2}$, $C_3 \geqslant C_2$; le choix effectif de ces deux constantes sera donné ultérieurement.

Considérons une composante connexe de l'ensemble

$$S(H_1, \ldots, H_N, \epsilon_3, C_3) ;$$

ou bien elle est incluse dans une composante connexe de $S(\Gamma, H_1, \ldots, H_N, \epsilon_2, C_2)$, ou bien il existe un point ζ_0 de cette composante tel que : $\Gamma(\zeta_0) \geqslant \frac{\epsilon_2}{2} e^{-C_2 p(\zeta_0)}$

Il existe alors deux générateurs de $\mathfrak{I}_{k-1}$ (par exemple H_1 et H_2) tels que :

$$\left| \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z, w)} (\zeta_0) \right| \geqslant \epsilon_2' \, e^{-C_2 p(\zeta_0)} \tag{2.1}$$

où ϵ_2' se déduit facilement de ϵ_2 et de N.

D'après la formule de Taylor, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned} H_1(\zeta) - H_1(\zeta_0) &= (z - z_0) H_{1,1}(\zeta_0, \zeta) + (w - w_0) H_{1,2}(\zeta_0, \zeta) \\ H_2(\zeta) - H_2(\zeta_0) &= (z - z_0) H_{2,1}(\zeta_0, \zeta) + (w - w_0) H_{2,2}(\zeta_0, \zeta) . \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Dans une boule B de centre ζ_0 et de rayon $\lambda e^{-\mu p(\zeta_0)}$ (où $0 < \lambda \leqslant \epsilon$ et $\mu \geqslant C$ se calculent effectivement à l'aide de la taille de H_1 et H_2), on a :

$$\left| \det \begin{pmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{pmatrix} \right| \geqslant \frac{\epsilon_2'}{2} e^{-C_2 p(\zeta_0)} .$$

En utilisant le théorème de Cramer, quitte à choisir convenablement ϵ_3 et C_3, on a, sur la frontière de la boule B :

$$|H_1(\zeta)| + |H_2(\zeta)| \geqslant \epsilon_3 \, e^{-C_3 p(\zeta)} .$$

La composante connexe est alors incluse dans la boule B. Cela achève la preuve de la proposition par induction. □

Remarque 5. – Cette proposition ne dépend en fait pas du nombre de variables ; dans le cas d'une variable, on peut l'utiliser pour démontrer qu'une exponentielle-polynôme à fréquences imaginaires pures est f.s.d. Il existe bien sûr des résultats beaucoup plus raffinés connus dans ce cas [1, 3].

Preuve du théorème 2. – Si le polynôme P est affine, de la forme $\alpha z + \beta w + \gamma$, où α et β sont réels, on se ramène, après un changement de variables réel, au cas où $P = w - w_0$ et où, dans l'idéal engendré par F et P dans $A_p(\mathbf{C}^2)$, on a la fonction $F(z, w_0)$ qui est une exponentielle-polynôme non nulle de la seule variable z à fréquences imaginaires pures ; comme, d'après la remarque 5, $F(z, w_0)$ est f.s.d, il en est de même pour le couple (F, P) (F et P étant considérées comme des fonctions de deux variables). On verra plus loin que l'unique cas à distinguer effectivement est celui où P est de la forme $\alpha z + \beta w + \gamma$ où α et β sont à prendre dans un ensemble fini d'entiers ne dépendant que des fréquences de F.

Dans l'autre cas, la preuve du théorème se fait par induction sur le nombre N de monômes exponentiels figurant dans l'expression de F et non divisibles par P.

Si $N = 1$, le problème se réduit au cas de deux polynômes premiers entre eux ; dans ce cas, on peut trouver dans l'idéal qu'ils engendrent dans $\mathbf{C}[\zeta]$ un polynôme non nul de la seule variable z, un polynôme non nul de la seule variable w ; par conséquent, le couple (F, P) est bien f.s.d.

Dans le cas général où $N > 1$, nous pouvons supposer que : $F(\zeta) = \sum_{k=1}^{N} Q_k(z, w)\, e^{i(\lambda_k z + \mu_k w)}$, où P ne divise aucun des polynômes Q_k.

On forme : $J = \dfrac{\partial(F, P)}{\partial(z, w)} = \sum_{k=1}^{N} R_k(z, w)\, e^{i(\lambda_k z + \mu_k w)}$, où les R_k sont des éléments de $\mathbf{C}[\zeta]$.

On considère l'exponentielle-polynôme G définie par : $G = Q_N J - R_N F$.

Cette exponentielle-polynôme ne contient que $N - 1$ monômes exponentiels et si nous démontrons que P ne divise aucun des coefficients de G, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la proposition 2.1, nous en déduisons que le couple (F, P) est f.s.d. Il suffit en fait de démontrer que l'un des polynômes $Q_N R_k - Q_k R_N$, $k = 1, \ldots, N - 1$, n'est pas divisible par P.

On obtient alors, sur la variété $\{P = 0\}$ (notons que nous emploierons toujours les termes « variété » ou « spectre » pour désigner un ensemble analytique), l'identité

$$\frac{\partial P}{\partial z}\left[Q_N \frac{\partial Q_k}{\partial w} - Q_k \frac{\partial Q_N}{\partial w}\right] - \frac{\partial P}{\partial w}\left[Q_N \frac{\partial Q_k}{\partial z} - Q_k \frac{\partial Q_N}{\partial z}\right] \tag{2.3}$$
$$= iQ_k Q_N \left[(\mu_N - \mu_k)\frac{\partial P}{\partial z} - (\lambda_N - \lambda_k)\frac{\partial P}{\partial w}\right].$$

Plaçons-nous en un point régulier de la variété $\{P = 0\}$ où $Q_k Q_N \neq 0$; on supposera la variété $\{P = 0\}$ définie au voisinage de ce point par $w = \varphi(z)$ $\left(\text{on suppose qu'en ce point } \frac{\partial P}{\partial w} \neq 0\right)$. Introduisons le fonction ψ définie par : $\psi(z) = \frac{Q_k}{Q_N}(z, \varphi(z))$.

(2.3) devient au voisinage du point considéré :

$$\frac{d\psi}{dz} = i\psi[(\mu_N - \mu_k)\varphi' + (\lambda_N - \lambda_k)]. \tag{2.4}$$

En intégrant (2.4), on obtient :

$$\psi(z) = ce^{i[(\mu_N - \mu_k)\varphi(z) + (\lambda_N - \lambda_k)z]}, \quad c \neq 0.$$

Comme ψ est, au voisinage du point considéré le quotient $\frac{Q_k}{Q_N}(z, \varphi(z))$, on peut supposer que les deux polynômes Q_k et Q_N sont copremiers. Après un changement de variable de la forme $z' = (\lambda_N - \lambda_k)z + (\mu_N - \mu_k)w$, $w' = (\mu_N - \mu_k)z - (\lambda_N - \lambda_k)w$, nous arrivons à considérer le système d'équations :

$$\begin{aligned} &P(z', w') = 0 \\ &Q_k(z', w') - cQ_N(z', w')e^{iz'} = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, P n'est pas de la forme $z' =$ constante, et, comme il est irréductible, on devrait avoir $\frac{\partial P}{\partial w'} \neq 0$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 1.2 qui nous assure que la variété définie par (2.5) doit être contenue dans un ensemble de lignes de la forme $z' =$ constante, et par conséquent discrète. Ceci nous montre que $Q_N R_k - Q_k R_N$ n'est pas divisible par P. Par conséquent, le théorème 2 est démontré. □

Remarque 6. – Ce théorème nous montre que si une exponentielle-polynôme est divisible par un polynôme irréductible, ou bien tous les coefficients polynomiaux sont divisibles, ou bien le polynôme diviseur est un polynôme affine de la forme $\alpha z + \beta w + \gamma$, où les couples (α, β) sont liés aux fréquences de l'exponentielle polynôme.

Nous avons aussi le corollaire suivant du théorème 2 :

PROPOSITION 2.2. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux exponentielle-polynômes à fréquences dans* $(i\mathbf{N})^2$, *telles que la variété* $\{G_1 = G_2 = 0\}$ *soit discrète ; soit* $\mathfrak{F}$ *une collection finie de polynômes non nuls de* $C[\zeta]$. *Pour tout couple de constantes positives* (ϵ, C), *il existe deux couples* (ϵ_1, C_1) *et* (ϵ_2, C_2) *de constantes positives tels que,* $\forall \epsilon_3 \leqslant \epsilon_1$, $\forall C_3 \geqslant C_1$, *si* $\mathcal{C}$ *est une composante connexe de l'ensemble* $S(G_1, G_2, \epsilon_3, C_3)$ *et* ζ_0 *un point de* $\mathcal{C}$, *deux cas peuvent se produire :*

– *ou bien* $\mathcal{C}$ *est incluse dans la boule* $B(\zeta_0, \epsilon e^{-Cp(\zeta_0)})$;

– *ou bien il existe un point* ζ_1 *de* $\mathcal{C} \cap B(\zeta_0, \epsilon e^{-Cp(\zeta_0)})$ *tel que :* $\forall P \in \mathfrak{F}$, $|P(\zeta_1)| \geqslant \epsilon_2 e^{-C_2 p(\zeta_0)}$.

Preuve de la proposition 2.2. – On peut se ramener au cas où tous les éléments de la famille $\mathfrak{F}$ sont irréductibles. Esquissons la démonstration dans le cas où $\mathfrak{F}$ contient deux polynômes irréductibles distincts, P_1 et P_2.

Comme le spectre de G_1 et G_2 est discret, on peut supposer que P_1 ne divise pas G_1 ; d'après le théorème 2, il existe un couple (ϵ_1', C_1') tel que les composantes connexes de l'ensemble $S(G_1, P, \epsilon_1', C_1')$ satisfassent les conditions (a') et (b') du théorème 1 avec $\frac{\epsilon}{4}$ et C. On choisit $\epsilon_1 \leqslant \frac{\epsilon_1'}{2}$, $C_1 \geqslant C_1'$. Si la première condition n'est pas satisfaite, ou bien $|G_1(\zeta_0)| + |P_1(\zeta_0)| \geqslant \epsilon_1' e^{-C_1' p(\zeta_0)}$, auquel cas on a $|P_1(\zeta_0)| \geqslant \frac{\epsilon_1'}{2} e^{-C_1' p(\zeta_0)}$, ou bien, pour des raisons de connexité, il existe $\zeta' \in B\left(\zeta_0, \frac{\epsilon}{4} e^{-Cp(\zeta_0)}\right) \cap \mathcal{C}$, tel que $|P_1(\zeta')| \geqslant \frac{\epsilon_1'}{2} e^{-C_1' p(\zeta')}$, condition que l'on peut encore écrire $|P_1(\zeta')| \geqslant \epsilon_1'' e^{-C_1' p(\zeta_0)}$.

Le polynôme P_1 reste correctement minoré dans une boule de centre ζ_0 ou ζ' (suivant le cas où l'on se trouve) et de rayon $\epsilon' e^{-C' p(\zeta_0)}$, avec $\epsilon' \leqslant \frac{\epsilon}{4}$, $C' \geqslant C$, à l'intérieur de laquelle on peut à nouveau appliquer le même raisonnement en faisant cette fois intervenir le polynôme P_2.

Section 3.

Avant de démontrer le théorème 3, donnons un critère de discrétion de spectre :

PROPOSITION 3.1. – *Soient* G_1 *et* G_2 *deux exponentielle-polynômes de deux variables distinguées l'une en la variable* z, *l'autre en la variable* w*; alors le spectre* $V = \{G_1 = G_2 = 0\}$ *est discret.*

Preuve de la proposition 3.1. – Prenons G_1 et G_2 de la forme (1.1). Rappelons que, pour une équation algébrique de la forme $a_0 X^N + a_1 X^{N-1} + \ldots + a_N = 0$, toutes les racines satisfont l'inégalité : $|X| \leqslant \text{Max} \left[N \left| \frac{a_j}{a_0} \right| \right]^{1/j}$.

Par conséquent, il existe deux constantes positives C et K telles que :

$$\zeta \in V \Longrightarrow |A_0 A_m B_0 B_n(\zeta)| \, e^{\|\mathrm{Im}\,\zeta\|} \leqslant C(1 + \|\zeta\|)^K . \tag{3.1}$$

Quand le facteur polynômial intervenant dans (3.1) est en module supérieur ou égal à 1, on a :

$$\|\mathrm{Im}\,\zeta\| \leqslant C_1 + K \,\mathrm{Log}(1 + \|\zeta\|) . \tag{3.2}$$

D'autre part, l'inégalité (3.2) restant conservée lorsque l'on fait un changement de variable réel, l'ensemble où le polynôme $A_0 A_m B_0 B_n$ est inférieur ou égal, en module, à 1, est inclus dans l'ensemble :

$$|z| \leqslant C_2(1 + |w|^{K_2}) , \tag{3.3}$$

(le changement de variable ayant été fait).

Considérons la transformation Φ de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$ donnée par :

$$\Phi(z , w) = (z , z^2 + w^{2\ell}) = (z', w') , \tag{3.4}$$

où ℓ est un entier naturel strictement supérieur à K_2.

Voyons d'abord comment la transformation Φ agit sur l'ensemble défini par (3.3) ; nous avons :

$$|w'| \geqslant |w|^{2\ell} - |z|^2 \geqslant |w|^{2\ell} - C_2'(1 + |w|^{2K_2}) \geqslant |w|^{2K_2} - C_3',$$

où C_3' est une constante positive.

On a donc si (z, w) vérifie (3.3) :

$$|z'| \leqslant C_3(1 + |w'|). \tag{3.5}$$

Voyons enfin comment Φ agit sur l'ensemble défini par (3.2) ; un calcul immédiat nous montre que si ζ vérifie (3.2) : $\operatorname{Re} w' \geqslant \frac{1}{2}$ $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Re} w)^{2\ell}) - C_4$ où C_4 est une constante réelle.

On a donc le même type d'estimation que (3.5), après une modification éventuelle de la constante C_3.

Comme l'application Φ est propre de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$, l'image par Φ de V est une variété analytique. Supposons que V contienne une composante irréductible de dimension pure égale à 1, W ; son image $\Phi(W)$ reste encore de la même dimension, d'après le théorème de Remmert [7], et est donc algébrique d'après le théorème de Rudin [9]. D'après la forme même de Φ, W est elle-même une variété algébrique. Nous appliquons alors le lemme 1.2 qui nous montre que W doit être en même temps de la forme $z =$ constante et $w =$ constante, ce qui est absurde. □

PROPOSITION 3.2. – *Soient* $(A_k)_{k=0}^m$, $(B_k)_{k=0}^n$ *deux familles de polynômes de* $\mathbf{C}[\zeta]$ *avec* $A_0 B_0 \not\equiv 0$; *il existe un entier* N *et une famille finie* $(\Phi_k)_{k=0}^N$ *de polynômes de* $\mathbf{C}[\zeta]$, *avec* $\Phi_0 \not\equiv 0$, *tels que : pour tout ouvert* ω *de* $\mathbf{C}^2$, *pour tout couple* (ρ, θ) *d'éléments de* $H(\omega)$ *satisfaisant au système :*

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} A_k \rho^{m-k} &\equiv 0 \\ \sum_{k=0}^{n} B_k \theta^{n-k} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \textit{dans } \omega, \tag{3.5}$$

la fonction : $J(\zeta) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial z} - i\rho & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial w} & \dfrac{\partial \theta}{\partial w} - i\theta \end{pmatrix}$ *satisfait dans* ω

l'équation :

$$\sum_{k=0}^{N} \Phi_k \, J^{N-k} \equiv 0 . \tag{3.6}$$

Preuve de la proposition 3.2. – Par dérivation des équations (3.5), on trouve que les dérivées partielles de ρ et de θ par rapport à z et w sont des éléments algébriques sur l'extension de $\mathbf{C}$ définie comme le corps des fractions de

$$\mathbf{C}\left[A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_n, \frac{\partial A_0}{\partial z}, \frac{\partial A_0}{\partial w}, \ldots, \frac{\partial B_n}{\partial z}, \frac{\partial B_n}{\partial w}\right] ;$$

il en est de même pour l'élément J. L'existence des polynômes $(\Phi_k)_{k=0}^{k=N}$ résulte alors de la théorie de l'élimination [10]. □

Preuve du théorème 3. – On peut supposer que les polynômes $\widetilde{G}_1$ et $\widetilde{G}_2$ définis comme dans la démonstration du lemme 1.2 sont irréductibles dans $\mathbf{C}(\zeta)[T]$, et tous deux différents de T ; on peut introduire les discriminants Δ_1 et Δ_2 des polynômes $\widetilde{G}_1$ et $\widetilde{G}_2$, considérés comme polynômes en la variable T ; Δ_1 et Δ_2 sont deux éléments de $\mathbf{C}[\zeta]$ non identiquement nuls.

Considérons la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = \{A_0, B_0, \Delta_1, \Delta_2, \Phi_0, \ldots, \Phi_N\},$$

où l'on ne conserve que les polynômes Φ_k associés par la proposition 3.2 aux suites $(A_k)_{k=0}^{k=m}$ et $(B_k)_{k=0}^{k=n}$ et non identiquement nuls.

On se donne ϵ et C, constantes positives, et l'on considère une composante connexe $\mathcal{C}$ de l'ensemble $S(G_1, G_2, \epsilon_3, C_3)$, avec $\epsilon_3 \leqslant \epsilon_1$, $C_3 \geqslant C_1$, où ϵ_1 et C_1 sont associés à (ϵ, C) par la proposition 2.2 (le choix de ϵ_3 et de C_3, pour l'instant arbitraire, sera raffiné par la suite) ; ζ_0 désigne un point de $\mathcal{C}$ et l'on suppose que l'on est dans le deuxième cas de la proposition 2.2.

Considérons donc le point ζ_1 ; il existe deux constantes λ et μ, ne dépendant que de (ϵ_2, C_2) (associé également à (ϵ, C) par la proposition 2.2) et des éléments de $\mathcal{F}$, telles que :

$$d(\zeta, \zeta_1) < \lambda e^{-\mu p(\zeta_0)} \Longrightarrow \forall F \in \mathcal{F},\ |F(\zeta)| \geqslant \frac{\epsilon_2}{2} e^{-C_2 p(\zeta_0)} .$$

Désignons par ω la boule de centre ζ_1 et de rayon $\lambda e^{-\mu p(\zeta_0)}$; comme les discriminants Δ_1 et Δ_2 sont des éléments de $\mathcal{F}$, on peut factoriser G_1 et G_2 dans ω de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} G_1(\zeta) &= A_0(e^{iz}-\rho_1)\dots(e^{iz}-\rho_m) \\ G_2(\zeta) &= B_0(e^{iw}-\theta_1)\dots(e^{iw}-\theta_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

où les fonctions ρ_i et θ_j satisfont d'une part (3.5) dans ω, et d'autre part des inégalités de la forme :

$$|\rho(\zeta)| + |\theta(\zeta)| \leqslant K_1 e^{K_2 p(\zeta_0)}, \quad \zeta \in \omega, \tag{3.8}$$

car A_0 et B_0 sont aussi minorés dans ω ; les constantes K_1 et K_2 ne dépendent que de ϵ_2, C_2 et des estimations des coefficients A_k et B_k.

Si ζ est dans $\omega \cap S(G_1, G_2, \epsilon_3, C_3)$, il existe un couple (ρ_i, θ_j) tel que l'on ait :

$$|\rho_i(\zeta)e^{-iz} - 1| + |\theta_j(\zeta)e^{-iw} - 1| < \epsilon_3' e^{-C_3' p(\zeta_0)} \tag{3.9}$$

où $\epsilon_3' = \left(\frac{2\epsilon_3}{\epsilon_2}\right)^{1/M}$, $C_3' = \frac{1}{M}(C_3 - C_2)$, $M = \mathrm{Max}(m, n)$.

L'existence d'un couple (ρ_i, θ_j) pour chaque ζ résulte de l'expression de G_1 et G_2 dans (3.7) et des estimations inférieures de A_0 et B_0 dans ω ; ce couple peut être choisi indépendamment de ζ dès que ϵ_3' et C_3' sont l'un assez petit, l'autre assez grand, ce qui est réalisé pour un choix correct de ϵ_3 et C_3 ; en effet, les différentes racines des équations (3.5) sont à des distances mutuelles minorées, grâce aux estimations (3.8) et aux minorations de Δ_1 et Δ_2 valables dans ω. On notera (ρ_1, θ_1) le couple ainsi associé à ω.

En suivant l'idée de la proposition 2.1, on calcule le jacobien des deux fonctions $\rho_1 e^{-iz} - 1$, $\theta_1 e^{-iw} - 1$; ce jacobien est précisément :

$$e^{-i(z+w)} \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial z} - i\rho_1 & \dfrac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial w} & \dfrac{\partial \theta_1}{\partial w} - i\theta_1 \end{pmatrix} = e^{-i(z+w)} J(\zeta). \tag{3.10}$$

La démonstration de la proposition 2.1 nous montre que si $J(\zeta_1)$ est minoré par $\epsilon_2' e^{-C_2' p(\zeta_0)}$, où ϵ_2', C_2' ne dépendent que de ϵ_2, C_2, et des éléments de $\mathfrak{F}$, on peut choisir ϵ_3 et C_3 de manière à ce que la composante connexe $\mathcal{C}$ soit un ensemble relativement compact dans ω. Si nous savons que J n'est pas identiquement nul dans ω, quitte à diviser (3.6) par une puissance convenable de J, on peut supposer que Φ_N n'est pas identiquement nul; comme Φ_N est un élément de $\mathfrak{F}$, nous avons donc une estimation du type voulu pour J.

Il reste donc à démontrer que J n'est pas identiquement nul dans ω. Supposons que ce ne soit pas le cas. Fixons un point ζ'_1 de ω tel que $\rho_1(\zeta'_1)\ \theta_1(\zeta'_1) \neq 0$ (ceci est possible car on ne peut avoir $\rho_1 \equiv 0$ ou $\theta_1 \equiv 0$ dans ω). Le jacobien du couple $(\rho_1 e^{-iz} - \rho_1(\zeta'_1)\, e^{-iz'_1},\ \theta_1 e^{-iw} - \theta_1(\zeta'_1)\, e^{-iw'_1})$ est le même que celui donné par l'expression (3.10). En posant $\rho = e^{iz'_1} \dfrac{\rho_1}{\rho_1(\zeta'_1)} = \alpha \rho_1$ et $\theta = e^{iw'_1} \dfrac{\theta_1}{\theta_1(\zeta'_1)} = \beta\theta_1$, on constate que les fonctions ρ et θ sont solutions dans ω de :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m} A_k(\zeta)\, \alpha^{m-k}\, \rho^{m-k} \equiv 0 \\ &\sum_{k=0}^{n} B_k(\zeta)\, \beta^{n-k}\, \theta^{n-k} \equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Cela signifie que, si l'on regarde le système des exponentielle-polynômes distinguées obtenues en substituant e^{iz} à ρ, e^{iw} à θ dans (3.11), le spectre de ce système contient le point ζ'_1 comme point non isolé parce que les équations $e^{iz} - \rho = e^{iw} - \theta = 0$ définissent la variété des zéros communs de ce système au voisinage du point ζ'_1 èt que le jacobien de ce dernier couple $(e^{iz} - \rho,\ e^{iw} - \theta)$ se trouve dans l'idéal engendré, dans $H(\omega)$, par les deux éléments du couple ; or ceci contredit la discrétion du spectre, qui est assurée par la proposition 3.1.

Ceci achève la preuve du théorème 3. □

Preuve du théorème 1. – Grâce au lemme 1.1, comme nous l'avons déjà mentionné, nous pouvons trouver, en prenant les facteurs communs des coefficients des exponentielle-polynômes écrites dans 1.1, deux polynômes Δ_1 et Δ_2 de $\mathbf{C}[\zeta]$, deux exponentielle-polynômes G_1 et G_2 distinguées, l'une en z, l'autre en w, telles que $\Delta_1 G_1$ et $\Delta_2 G_2$ soient dans l'idéal de $\mathfrak{L}$ engendré par F_1 et F_2.

Par conséquent, il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que :

$$|\Delta_1 G_2| + |\Delta_2 G_2| \leqslant K_1 e^{K_2 p} (|F_1| + |F_2|). \qquad (3.12)$$

Etant donnés ϵ et C fixés par l'énoncé du théorème, on considère les couples $(\epsilon_1, C_1), (\epsilon_2, C_2)$ associés par la proposition (2.2) au couple (F_1, F_2) et à la famille $\mathcal{F} = \{\Delta_1, \Delta_2\}$. Etant donnés ϵ_3 et C_3 choisis pour l'instant tels que $\epsilon_3 \leqslant \epsilon_1$, $C_3 \geqslant C_1$ (ce choix sera raffiné par la suite), nous pouvons, si $\mathcal{C}$ est une composante de l'ensemble $S(F_1, F_2, \epsilon_3, C_3)$ et ζ_0 un point de cette composante, nous ramener au cas où $\mathcal{C}$ contient, dans $B(\zeta_0, \epsilon e^{-Cp(\zeta_0)})$, un point ζ_1 tel que :

$$|\Delta_1(\zeta_1)| \geqslant \epsilon_2 e^{-C_2 p(\zeta_0)}, \quad |\Delta_2(\zeta_1)| \geqslant \epsilon_2 e^{-C_2 p(\zeta_0)}. \qquad (3.13)$$

On conserve les inégalités (3.13) $\left(\text{avec } \frac{\epsilon_2}{2} \text{ à la place de } \epsilon_2\right)$ à l'intérieur d'une boule de centre ζ_1 et de rayon $\epsilon'_2 e^{-C'_2 p(\zeta_0)}$ (ϵ'_2, C'_2 ne dépendent que de ϵ_2, C_2, et des polynômes Δ_1 et Δ_2). Il résulte de (3.12) que sur la portion de $\mathcal{C}$ incluse dans cette boule, on a : $|G_1(\zeta)| + |G_2(\zeta)| \leqslant \epsilon_4 e^{-C_4 p(\zeta)}$ où ϵ_4, C_4 sont calculables à partir de $\epsilon_2, C_2, \epsilon_3, C_3, K_1, K_2$ grâce à (3.12). D'après le théorème 3, le couple (G_1, G_2) est f.s.d.; en choisissant ϵ_3 et C_3 de manière à ce que : $\epsilon_4 \leqslant \eta(\epsilon'_2, C'_2)$; $C_4 \geqslant K(\epsilon'_2, C'_2)$ (où η et K sont associés à ϵ'_2, C'_2 par la définition de « f.s.d. »), nous voyons que $\mathcal{C}$ ne peut sortir de la boule de centre ζ_1 et de rayon $\epsilon'_2 e^{-C'_2 p(\zeta_0)}$, ce qui montre que, même dans ce cas, la conclusion du théorème est satisfaite. Ceci achève la démonstration du théorème 1. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.A. BERENSTEIN et B.A. TAYLOR, Interpolation problems in $\mathbf{C}^n$ with applications to Harmonic Analysis, *Journal d'Analyse Mathématique,* 38 (1980), 188-254.

[2] J. DELSARTE, Théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables, *Ann. of Math.,* 12 (1960), 121-178.

[3] O.V. GRUDZINSKI, Einigele elementare ungleichungen für exponential polynome, *Math. Ann.,* 221 (1976), 9-34.

[4] D.I. GUREVICH, Counter-examples to a problem of L. Schwartz, *Func. Anal. Appl.*, 9 (1975), 116-120.

[5] D.I. GUREVICH, Closed ideals with exponential-polynomial generators in rings of entire functions of two variables, *Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR,* ser Math., (1974), 459-472, 510; *Math. Reviews,* 52, # 785 (en russe).

[6] D.I. GUREVICH, Closed ideals with the zero dimensional root set in certain rings of holomorphic functions, *Journal of Soviet Math.*, 9 (1978), 172-182.

[7] R.C. GUNNING, H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables,* Prentice Hall, Englewood cliffs, N.J., 1965.

[8] D.W. MASSER, On polynomial and exponential polynomials in several complex variables, *Inventiones Math.*, 63 (1981), 81-95.

[9] W. RUDIN, A geometric criterion for algebraic varieties, *Journal of Mathematics and Mechanics,* 17 (1978), 671-683.

[10] Van der WAERDEN, *Modern Algebra,* vol. II, Ungar Publishing Co., 1950.

[11] M. WALDSCHMIDT, Transcendance et exponentielles en plusieurs variables, *Inventiones Math.*, 63 (1981), 97-127.

[12] A. YGER, Thèse de doctorat d'Etat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1982.

Manuscrit reçu le 12 mars 1982.

B.A. TAYLOR,
University of Michigan
Ann Arbor
MI 48109 (U.S.A.).

C.A. BERENSTEIN,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.

A. YGER,
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex.