ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY WALLET

# Holonomie et cycle évanouissant

*Annales de l'institut Fourier*, tome 31, nº 4 (1981), p. 181-186

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_4_181_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**31**, 4 (1981), 181-186.

# HOLONOMIE ET CYCLE ÉVANOUISSANT

**par Guy WALLET**

## 1. Présentation du résultat principal.

Dans la série de problèmes ouverts en théorie des feuilletages rassemblés dans [4], on trouve la question suivante posée par C. Lamoureux : peut-on donner une démonstration directe du fait qu'un feuilletage de codimension un muni d'un cycle évanouissant sur une variété compacte possède de l'holonomie ? Dans le cas $C^p$ avec $p \geqslant 2$, ceci résulte du théorème 6 de [3]. L'exposé qui suit apporte une réponse affirmative à cette question, en fournissant une démonstration simple, valable dans le cas $C^p$ avec $p \geqslant 1$. Cette démonstration est basée sur l'utilisation d'un critère d'holonomie dû à H. Imanishi [1], critère qui a permis de simplifier une première démonstration employant l'Analyse Nonstandard. On trouvera la trace de cette première démonstration dans la démonstration nonstandard donnée ici du critère d'Imanishi.

Soit M une variété compacte munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension un de classe $C^p$ avec $p \geqslant 1$. On suppose que $(M, \mathscr{F})$ possède un cycle évanouissant, c'est-à-dire qu'il existe une famille continue de courbes $f_t : S^1 \to M$ pour $t \in [0,1]$ telle que :

(i) pour tout $t \in [0,1]$, $f_t(S^1)$ est contenue dans une feuille $F_t$ ;

(ii) pour tout $t \in ]0,1]$, $f_t$ est homotope à zéro dans $F_t$ ;

(iii) $f_0$ n'est pas homotope à zéro dans $F_0$.

Une feuille F de $\mathscr{F}$ est une feuille limite d'holonomie lorsque, étant donné un point quelconque de F, tout voisinage de ce point rencontre une feuille à holonomie non triviale.

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes, la feuille* $F_0$ *est une feuille limite d'holonomie.*

## 2. Démonstration du théorème.

On peut supposer que $\mathscr{F}$ est transversalement orienté. Soit $\Phi : M \times \mathbf{R} \to M$ un flot transverse à $\mathscr{F}$. En chaque point $x \in M$, le flot $\Phi$ définit une courbe transverse à $\mathscr{F} : t \to \Phi(x,t)$. A tout chemin $\alpha : [0,1] \to M$ contenu dans une feuille de $\mathscr{F}$, on associe des éléments du pseudo-groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$ qui sont des applications $h_\alpha : \Phi(\alpha(0),I) \to \Phi(\alpha(1),\mathbf{R})$ où I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant 0 et dépendant de $h_\alpha$. On peut alors énoncer le critère d'existence d'holonomie de H. Imanishi (théorème 3.1 de [1]).

Critère d'Imanishi. — *S'il existe un élément de pseudo-groupe d'holonomie* $h_\alpha : \Phi(\alpha(0),[0,a[) \to \Phi(\alpha(1),\mathbf{R})$ *n'admettant pas de prolongement continu à* $\Phi(\alpha(0),[0,a])$, *alors la feuille qui passe par le point* $\Phi(\alpha(0),a)$ *est une feuille limite d'holonomie.*

Soit $f : S^1 \times I \to M$ définissant le cycle évanouissant et $z_0$ un point base de $S^1$. Supposons qu'il existe un ouvert distingué U contenant $x_0 = f_0(z_0)$ et tel que toute feuille rencontrant U soit à holonomie triviale. Quitte à diminuer U, on peut supposer qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une projection $\pi : U \to ]-\varepsilon, +\varepsilon[$ définissant la restriction de $\mathscr{F}$ à U tels que :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[, \qquad \pi(\Phi(x_0, t)) = t.$$

V désignant le saturé de U par $\mathscr{F}$, on considère l'espace suivant (où $F(y)$ désigne la feuille passant par $y \in M$) :

$$\tilde{V} = \{(y,t) \in V \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[ / \Phi(x_0,t) \in F(y)\}.$$

Étant donnè $\xi = (y,t) \in \tilde{V}$, soit $\alpha$ un chemin dans $F(y)$ joignant $\Phi(x_0,t)$ à $y$. D'après le critère d'Imanishi, il existe un élément $h_\alpha$ du pseudo-groupe d'holonomie associé à $\alpha$ et défini sur $\Phi(x_0,]-\varepsilon,+\varepsilon[)$. Puisque les feuilles rencontrant $\Phi(x_0,]-\varepsilon,+\varepsilon[)$ sont sans holonomie, $h_\alpha(x_0)$ ne dépend pas du chemin $\alpha$ choisi. D'où une application continue $\Psi : \tilde{V} \to F_0$ qui à $\xi = (y,t)$ fait correspondre $h_\alpha(x_0)$.

Soit $\eta > 0$ tel que $f_t(z_0) \in U$ pour tout $t \in [0,\eta[$. On peut alors définir $\tilde{f} : S^1 \times [0,\eta[ \to \tilde{V}$ par l'expression :

$$\tilde{f}(z,t) = (f(z,t), \pi(f(z_0,t))).$$

De plus, pour chaque $t \in ]0,\eta[$, la courbe $\tilde{f}_t$ de $\tilde{V}$ est homotope à zéro. Soit $g = \Psi \circ \tilde{f} : S^1 \times [0,\eta[ \to F_0$. La courbe $g_0$ de $F_0$ est clairement homotope à zéro mais par construction $g_0$ est égal à $f_0$, d'où une contradiction.

### 3. Une démonstration nonstandard du critère d'Imanishi.

Le cadre dans lequel on se place ici est celui de la théorie des ensembles internes, théorie qui constitue une présentation particulièrement agréable de l'Analyse Nonstandard due à E. Nelson [2]. Cette théorie s'obtient en rajoutant d'une part le symbole st (st pour standard) à la théorie des ensembles (d'où une distinction entre les objets standard et ceux qui ne le sont pas), d'autre part trois nouveaux axiomes. Ces derniers garantissent en particulier :

(i) L'existence de divers « infinis » par rapport aux objets standard, par exemple les fameux infiniment petits ou grands.

(ii) que toute proposition vraie pour les objets standard est vraie en général.

Nous reprenons maintenant les notations introduites au début du paragraphe 2, en précisant que $M$, $\mathscr{F}$ et $\Phi$ sont standards.

UN CRITÈRE NONSTANDARD D'EXISTENCE D'HOLONOMIE. — *Soit $x$ un point standard de $M$, $y$ un point de la feuille $F_x$ de $x$, $\varepsilon > 0$ un nombre réel infiniment petit, $e > 0$ un nombre réel non infiniment petit et $h$ un élément du pseudo-groupe d'holonomie de source $\Phi(x,[0,\varepsilon])$ et d'image $\Phi(y,[0,e])$. De plus, on fait l'une des deux hypothèses suivantes :*

$(H_1)$ $F_x \cap \Phi(y,]0,e[)$ *est vide*

$(H_2)$ *il existe $\tau$ tel que $\Phi(y,\tau)$ appartienne à $F_x$ avec $0 < \tau < e$, $\tau$ non infiniment petit et non infiniment grand, $e - \tau$ non infiniment petit.*

*Alors $F_x$ est une feuille limite d'holonomie.*

*Démonstration de ce critère.* — Puisque $M$ est compacte, $y$ est infiniment proche d'un point standard noté $\mathrm{st}(y)$. Quitte à diminuer un peu $e$ et à prolonger $h$ jusqu'à $\Phi(\mathrm{st}(y),\mathbf{R})$, on peut supposer que $\mathrm{st}(y)$ appartient à $\Phi(y,\mathbf{R})$. Sous l'hypothèse $(H_1)$, l'ensemble des plaques de $F_x$ dans un voisinage distingué standard $U$ de $y$ est standard ; sa « borne supérieure » au sens du paramétrage de $\Phi(y,\mathbf{R})$ est donc standard, et coïncide avec la plaque de $y$ si $U$ est assez petit. On peut donc supposer $y$

standard. On peut alors choisir un élément standard du pseudo-groupe d'holonomie $k : \Phi(x,[0,\varepsilon]) \to \Phi(y,[0,\varepsilon'])$ avec $\varepsilon'$ infiniment petit. $k \circ h^{-1}$ est une application de $\Phi(y,[0,e])$ sur $\Phi(y,[0,\varepsilon'])$ et le « plus grand » point fixe de $k \circ h^{-1}$ appartient à une feuille à holonomie non triviale.

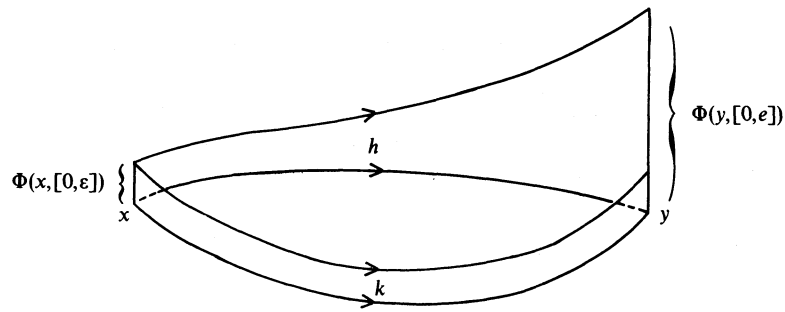


FIG. 1.

Dans le cas de l'hypothèse $(H_2)$, on choisit des réels standard $v$ et $w$ tels que $0 < v < \tau < w < e$ avec $e - w$ non infiniment petit. Alors, l'ensemble standard $\{t \in [v,w]/\Phi(\mathrm{st}y,t) \in F_x\}$ est non vide et contient donc un standard $s$. Posant $\Phi(\mathrm{st}(y),s) = z$ on peut alors trouver un élément standard du pseudo-groupe d'holonomie $k : \Phi(x,[0,\varepsilon]) \to \Phi(z,[0,\varepsilon'])$ et on conclut comme auparavant.

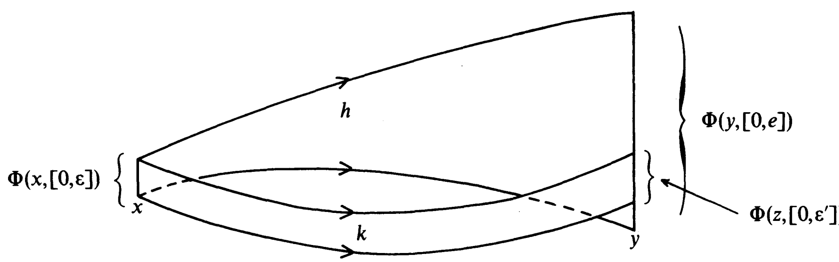


FIG. 2.

Pour démontrer le critère d'Imanishi énoncé au paragraphe 2, on peut supposer $h_\alpha$ standard et $\alpha$ différentiable. Suivant Imanishi, on définit $\Theta : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{M}$ par $\Theta(s,t) = \Phi(\alpha(s),t)$. $\Theta^*(\mathscr{F})$ est alors un feuilletage de $[0,1] \times \mathbf{R}$ dont les feuilles sont des graphes.

Pour chaque point $t$ de $\mathbf{R}$, on note $s \to l_t(s)$ la fonction dont le graphe est la feuille passant par $(0,t)$. Puisque $h_\alpha$ n'est pas prolongeable à

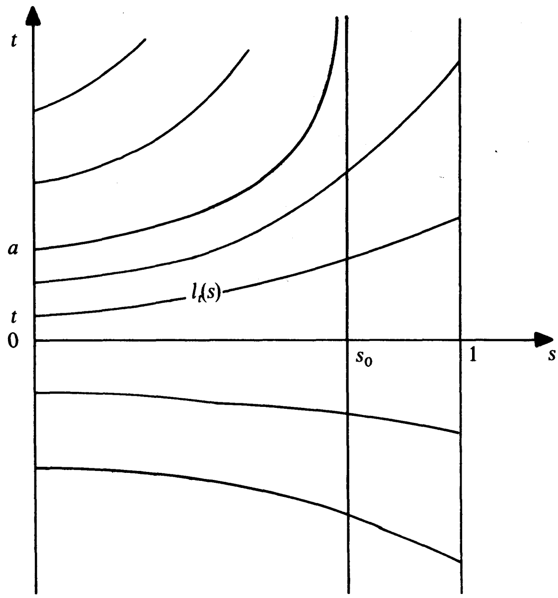


FIG. 3.

$[0,a]$, il existe $s_0$ dans $]0,1]$ tel que $l_a(s)$ admette la verticale $s = s_0$ comme asymptote. De plus, pour chaque $t$ appartenant à $[0,a[$, $\lim_{s \to s_0^-} (l_a - l_t)(s) = +\infty$. On choisit un infiniment petit positif $\varepsilon$ et $s'_0 < s_0$ tel que $(l_a - l_{a-\varepsilon})(s) \geqslant 1$ pour $s \geqslant s'_0$. On considère pour chaque

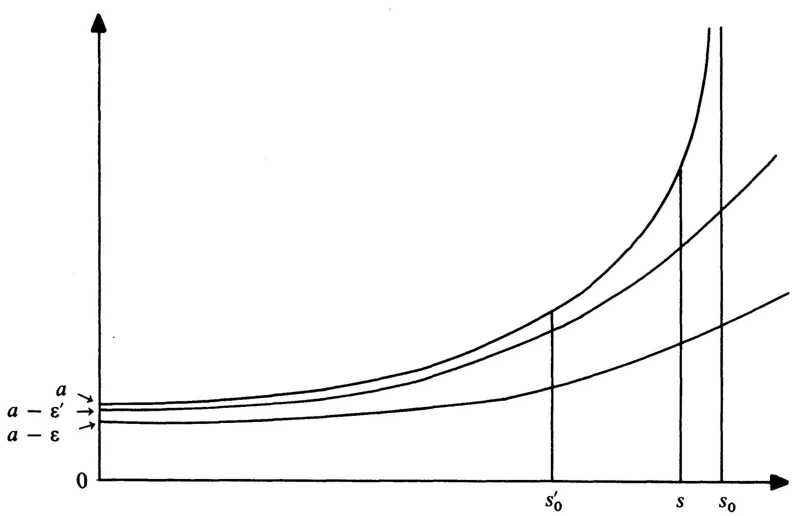


FIG. 4.

$s \in [s'_0, s_0[$ l'élément du pseudo-groupe d'holonomie $h_s$ :

$$\Phi(\alpha(0),[a-\varepsilon,a]) \to \Phi(\alpha(s),[l_{a-\varepsilon}(s),l_a(s)]).$$

Soit $x = \Phi(\alpha(0),a)$ et $F_x$ la feuille de $\mathcal{F}$ passant par $x$. Si $F_x$ ne repasse pas dans $\Phi(\alpha(0),[a-\varepsilon,a[)$, on est dans le cas de l'hypothèse $(H_1)$ pour n'importe quel $h_s$. Sinon il existe $\varepsilon'$ infiniment petit positif inférieur à $\varepsilon$ tel que $\Phi(\alpha(0),a-\varepsilon')$ appartienne à $F_x$ et que $l_{a-\varepsilon}(s'_0)$ soit infiniment proche de $l_a(s'_0)$. Alors il existe $s$ dans $]s'_0,s_0[$ tel que $(l_a - l_{a-\varepsilon'})(s)$ soit égal à $\frac{1}{2}$ et on est dans le cas de l'hypothèse $(H_2)$ pour $h_s$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Imanishi, On the Theorem of Denjoy-Sacksteder for Codimension One Foliations without Holonomy, *J. Math. Kyoto Univ.*, 14-3 (1974), 607-634.

[2] E. Nelson, Internal Set Theory : a New Approach to Nonstandard Analysis, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 83, n° 6 (novembre 1977).

[3] R. Sacksteder, Foliations and Pseudo-groups, *Amer. J. Math.*, 87 (1965), 79-102.

[4] P. A. Schweitzer, Some Problems in Foliation Theory and Related Areas. Differential Topology, Foliations and Gelfand-Fuks Cohomology, Proceedings, Rio de Janeiro 1976, *Lecture Notes in Mathematics*, 652.

Manuscrit reçu le 16 décembre 1980.

Guy Wallet,
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 – Poitiers.