

DANIEL LEHMANN

**Résidus des connexions à singularités et
classes caractéristiques**

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 1 (1981), p. 83-98

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_83_0

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉSIDUS DES CONNEXIONS A SINGULARITÉS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

par Daniel LEHMANN

1. Introduction.

Donnons nous :

- une variété différentiable V ,
- un entier $k \geq 1$,
- une triangulation différentiable K de V ,
- une partie fermée S de V telle que

$$S \cap sk^{2k-1} K = \emptyset$$

($sk^i K$ désignant le i -squelette de K),

- un groupe de Lie G ,
- un G -fibré principal différentiable $E \rightarrow V$,
- une connexion ω sur la restriction $E|_{V-S}$ du fibré E à l'ouvert $V-S$ (une telle connexion sera encore appelée "connexion à singularités" sur E , d'ensemble singulier S).

Puisque l'inclusion naturelle $sk^{2k-1} K \subset V$ induit un isomorphisme $H^i(V, \mathbb{R}) \rightarrow H^i(sk^{2k-1} K, \mathbb{R})$ pour $i \leq 2k-2$, la théorie de Chern-Weil ordinaire appliquée à $E|_U, \omega|_U$, où U désigne un voisinage tubulaire de $sk^{2k-1} K$ dans $V-S$, montre que les classes caractéristiques réelles de E peuvent se calculer à partir de la connexion à singularités ω en dimension $i \leq 2k-2$. Nous allons montrer *qu'il en est encore ainsi pour $i = 2k$* : ce sera l'objet de ce que nous appellerons le "théorème des résidus" pour la connexion à singularités ω . Ce théorème des résidus présente l'intérêt de coiffer simultanément 2 aspects, a priori assez distincts, de la théorie des classes caractéristiques :

– supposant $S = \emptyset$, on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil permettant de calculer les classes caractéristiques réelles à l'aide de la courbure d'une connexion.

– si la restriction $E|_{sk^{2k-1}K}$ de E au $2k-1$ squelette est triviale, il existe une section différentiable σ de $E|_U$, où U désigne un voisinage tubulaire de $sk^{2k-1}K$ dans V ; prenant alors pour S l'ensemble $V - U$, et pour ω la connexion plate à singularités définie par la trivialisaton σ (caractérisée par $\sigma^*\omega = 0$), le théorème des résidus fournit, si G est compact connexe, un cocycle $\mu_\sigma \in Z^{2k}(K, \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R})$ qui est l'image par $\pi_{2k-1}(G) \rightarrow \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R}$ du cocycle obstruteur à la possibilité de prolonger σ à $sk^{2k}K$. [Si $\pi_{2k-1}(G)$ est sans torsion, la nullité de cette obstruction est suffisante pour que σ soit prolongeable à $sk^{2k}K$].

Par exemple, si V est orientable compacte et de dimension 2, si $G = \text{SO}(2)$, et si $k = 1$, les 2 cas particuliers précédents correspondent au théorème de Gauss-Bonnet et au théorème de Hopf exprimant la classe d'Euler du fibré comme égale respectivement à la courbure totale d'une connexion métrique ou à l'indice d'une section à singularités isolées. La formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés apparaît aussi comme un cas particulier du théorème des résidus.

Si l'on suppose maintenant que le fibré E lui-même n'est défini qu'au dessus de $U = V - S$, et pas seulement la connexion ω , on peut encore définir les résidus, au moins si $\pi_{2k-1}(\text{BG}) = 0$; on verra qu'ils sont alors étroitement liés aux S -caractères de Chern-Simons [8].

2. Rappels et notations.

Pour toute variété différentiable W , on notera $A_{\text{DR}}^*(W)$ son algèbre de de Rham.

Notons \mathcal{G} l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, G , $I^k(G)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes P de degré k sur \mathcal{G} (ou applications k -linéaires symétriques $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$) qui sont invariants par la représentation adjointe de G sur \mathcal{G} .

Pour tout G-fibré principal différentiable $p : E \rightarrow V$ et toute connexion ω sur V , on notera : $\lambda_\omega : I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k}(V)$ l'application de Chern-Weil, à valeurs dans les $2k$ -formes fermées, et $T_\omega : I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k-1}(E)$ l'application "de transgression" (cf. [2]) qui vérifie :

$$(i) \quad \boxed{dT_\omega(P) = p^* \lambda_\omega(P)}$$

Si $\omega_0, \dots, \omega_r$ désigne une famille de $r+1$ connexions sur E , on notera :

$$\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r} : I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k-r}(V)$$

l'application linéaire définie en [1] telle que

$$(ii) \quad \boxed{d \cdot \Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \Delta_{\omega_0, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_r}}$$

En particulier, pour $r=0$, $\Delta_\omega = \lambda_\omega$ et

$$(iii) \quad \boxed{d \cdot \Delta_{\omega, \omega'} = \lambda_{\omega'} - \lambda_\omega}$$

Rappelons comment sont définies les applications T_ω et $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}$: pour tout polynôme $P \in I^k(G)$, on définit une 1-forme $\hat{\omega}$ (resp. $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega_0, \dots, \omega_r)$) sur $E \times [0, 1]$ (resp. sur $E \times \Delta^r$) à coefficients dans \mathcal{G} en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega}|_{E \times \{t\}} = t\omega \quad (t \in [0, 1]) \\ \hat{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 \end{array} \right.$$

$$[\text{resp. : } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}|_{E \times (t_0, \dots, t_r)} = \sum_{i=0}^r t_i \omega_i \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq t_i \leq 1 \\ \sum_{i=0}^r t_i = 1 \end{array} \right) \\ \tilde{\omega}|_{\{z\} \times \Delta^r} = 0 \quad (z \in E)]. \end{array} \right.$$

On pose alors :

$$T_\omega(P) = \int_0^1 P(\hat{\Omega}) \quad \text{où} \quad \hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}$$

et où $\int_0^1 : A_{DR}^{2k}(E \times [0, 1]) \rightarrow A_{DR}^{2k-1}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" $[0, 1]$ [resp. $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}(P) = \int_{\Delta^r} \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ où

$\int_{\Delta^r} : A_{\text{DR}}^{2k}(E \times \Delta^r) \longrightarrow A_{\text{DR}}^{2k-r}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" Δ^r .

La formule (i) est en fait purement algébrique, et s'applique en particulier à l'algèbre de Weil $W(G) = \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*)$: elle s'écrit $dT_{\omega_0}(P) = P \in I^k(G) = [S^k(\mathcal{G}^*)]^G$ où ω_0 désigne l'unique connexion sur $W(G)$.

Si l'on considère le G -fibré principal de base un point ($G \rightarrow \text{point}$), muni de son unique forme de connexion θ_G (qui n'est autre que la forme de Maurer-Cartan de G), on a au contraire $dT_{\theta_G}(P) = 0$, car la connexion θ_G est plate. [La $(2k-1)$ -forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ sur G est en fait biinvariante]. On dira alors que P est *normalisé* (et l'on notera $P \in I_{\mathbb{Z}}^k(G)$) si la forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ a ses périodes entières.

Pour la triangulation différentiable K de V , on notera : $\mathcal{J} : A_{\text{DR}}^*(V) \longrightarrow C^*(K, \mathbb{R})$ l'intégration des formes différentielles : $\langle \mathcal{J}(\alpha), c \rangle = \int_c \alpha$. Rappelons que \mathcal{J} induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres graduées $[\mathcal{J}] : H_{\text{DR}}^*(V) \xrightarrow{\cong} H^*(K, \mathbb{R})$ (de Rham).

3. Résidus des connexions avec singularités.

Donnons nous $(V, k, K, S$ et $G)$ comme dans l'introduction, $p : E \rightarrow V$ un G -fibré principal différentiable, et ω une connexion à singularités sur E d'ensemble singulier S .

[En disant que K est une triangulation différentiable de V , nous sous-entendons en particulier que chaque i -simplexe $c : \Delta^i \rightarrow V$ est un difféomorphisme sur son image $c(\Delta^i)$, c'est-à-dire admet une extension \tilde{c} à un voisinage ouvert w_c du i -simplexe type Δ^i dans l'espace affine de dimension i qu'il engendre, qui est un difféomorphisme — au sens ordinaire — de w_c sur une sous-variété $\tilde{c}(w_c)$ de V].

Soit $c : \Delta^{2k} \rightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V . [Une telle section existe, puisque $c(\Delta^{2k})$ est contractile !]. A tout polynôme $P \in I^k(G)$, associons le nombre

$$\boxed{\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)}$$

(appelé *résidu* de (ω, P) par rapport à c), où ω_s désigne la connexion plate sur $E|_{\tilde{w}_c}$ associée à la trivialisaton définie par s , et caractérisée par la relation $s^*(\omega_s) = 0$, la $(2k-1)$ -forme $\Delta_{\omega_s, \omega}(P)$ n'étant évidemment définie que sur l'intersection $\tilde{w}_c \cap V - S$ des domaines de définition de ω_s et ω ; on remarquera, puisque $S \cap sK^{2k-1}K = \emptyset$, que ∂c a son support dans $\tilde{w}_c \cap V - S$.

LEMME 1. — *La définition ci-dessus du résidu, ne dépend pas du choix de la section s .*

Notons en effet s_0 et s_1 deux sections de E définies au-dessus d'un même voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V .

D'après la formule (ii) du § 2, on a, sur $\tilde{w}_c \cap V - S$:

$$\Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = -\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) + \text{cobord}$$

et par conséquent,

$$\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P).$$

Soit $\tilde{\omega}$ la connexion sur $E|_{\tilde{w}_c} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{w}_c \times [0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{\omega}|_{\tilde{w}_c \times \{t\}} = t\omega_{s_1} + (1-t)\omega_{s_0} \\ \tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \end{cases}$$

Par construction de $\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}$, $\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = \int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ sur \tilde{w}_c et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) &= \int_{\partial c \times [0, 1]} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = \int_{\partial(c \times [0, 1])} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) \\ &\quad + \int_c \lambda_{\omega_{s_0}}(P) - \int_c \lambda_{\omega_{s_1}}(P). \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ est fermée, $\int_{\partial(c \times [0, 1])} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = 0$. Puisque ω_{s_0} et ω_{s_1} sont des connexions plates, $\lambda_{\omega_{s_0}}(P) = \lambda_{\omega_{s_1}}(P) = 0$; et finalement $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = 0$, d'où le lemme.

4. Théorie de Chern-Weil pour les connexions à singularités.

Avec les notations du § 3, on associe, à tout G -fibré principal différentiable $E \rightarrow V$, à toute connexion ω à singularités sur E d'ensemble singulier S inclus dans $V - sk^{2k-1}K$, et à tout polynôme $P \in I^k(G)$, une $2k$ -cochaîne simpliciale $\text{Rés}(\omega, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{R})$ en posant, pour tout $2k$ -simplexe c de K :

$$\langle \text{Rés}(\omega, P), c \rangle = \text{Rés}_c(\omega, P).$$

Notons $\text{Rés}(\omega) : I^k(G) \rightarrow C^{2k}(K, \mathbf{R})$ l'application linéaire $P \rightarrow \text{Rés}(\omega, P)$.

THEOREME 1 (théorème des résidus). —

(i) L'application $\text{Rés}(\omega)$ prend ses valeurs dans l'espace $Z^{2k}(K, \mathbf{R})$ des cocycles de $C^{2k}(K, \mathbf{R})$.

(ii) Notant $[\text{Rés}(\omega)] : I^k(G) \rightarrow H^{2k}(K, \mathbf{R})$, l'application induite par $\text{Rés}(\omega)$ en cohomologie, $[\mathcal{J}]^{-1} \circ [\text{Rés}(\omega)]$ est égale à l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil

$\lambda : I^k(G) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2k}(V)$, et est donc en particulier indépendante des choix de K, S et ω .

(iii) Si $\bar{\omega}$ est une connexion sans singularité sur $E(S = \emptyset)$, $\text{Rés}(\bar{\omega}) = \mathcal{J} \circ \lambda_{\bar{\omega}}$.

Soit g un $(2k+1)$ -simplexe de K et notons s une section de E au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_g de $g(\Delta^{2k+1})$ dans V . On a alors :

$$\langle d \text{Rés}(\omega, P), g \rangle = \langle \text{Rés}(\omega, P), \partial g \rangle = \int_{\partial \partial g} \Delta_{\omega_s, \omega}(P) = 0,$$

d'où la partie (i) du théorème.

Puisque l'homomorphisme caractéristique $\lambda : I^k(G) \rightarrow H_{\text{DR}}^{2k}(V, \mathbf{R})$ est induit, à partir de n'importe quelle connexion $\bar{\omega}$ sans singularité sur E , par l'homomorphisme $\lambda_{\bar{\omega}} : I^k(G) \rightarrow Z A_{\text{DR}}^{2k}(V)$, la partie (ii) du théorème résultera immédiatement, ainsi que la partie (iii), du

LEMME 2. — Pour tout connexion $\bar{\omega}$ sans singularité,

$$d \circ \mathcal{J} \circ \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}} = (\mathcal{J} \circ \lambda_{\bar{\omega}}) - \text{Rés}(\omega)$$

(en particulier, $\mathcal{J} \circ \lambda_{\bar{\omega}} = \text{Rés}(\bar{\omega})$).

En effet, pour tout $2k$ -simplexe c de K et tout polynôme $P \in I^k(G)$, on a : $\langle (d \circ \mathcal{J} \circ \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}})(P), c \rangle = \int_{\partial c} \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P)$.

Soit s une section différentiable de E au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V . D'après la formule (ii) du §.2, on a, sur $\tilde{w}_c \cap V - S$: $\Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) = -\Delta_{\omega_s, \omega}(P) + \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}} + \text{cobord}$ et, par conséquent, $\int_{\partial c} \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) - \text{Rés}_c(\omega, P)$.

Puisque ω_s et $\bar{\omega}$ sont définies au-dessus de tout \tilde{w}_c , qui contient $c(\Delta^{2k})$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) &= \int_c d\Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{\tilde{w}_c}}(P) = \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) - \int_c \lambda_{\omega_s}(P) \\ &= \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) = \langle (\mathcal{J} \circ \lambda_{\bar{\omega}})(P), c \rangle \end{aligned}$$

[puisque ω_s est plate, $\lambda_{\omega_s}(P) = 0$].

Le lemme en résulte. Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Théorie de l'obstruction.

Supposons $E_{|_{sk^{2k-1}K}}$ trivial. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de $sk^{2k-1}K$ dans V , $S = V - U$, σ une section différentiable de $E|_U$ définissant la connexion ω_σ sur $E|_U$ telle que $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$. Soit c un $2k$ -simplexe de K et $P \in I^k(G)$.

THEOREME 2. — (i) $\text{Rés}(\omega_\sigma) = 0$, si $\sigma_{|_{sk^{2k-1}K}}$ admet un prolongement différentiable $\tilde{\sigma}$ sur un voisinage de $sk^{2k}K$ dans V .

(ii) $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) \in \mathbf{Z}$, si P est normalisé ($\text{Rés}(\omega_\sigma, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{Z})$).

Si $\sigma_{|_{sk^{2k-1}K}}$ se prolonge en une section $\tilde{\sigma}$ sur $sk^{2k}K$, on peut supposer que $\tilde{\sigma}$ est la restriction d'une section différentiable définie sur un voisinage de $sk^{2k}K$ dans V . Pour calculer $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_\sigma}(P)$, on peut alors prendre pour s la section σ elle-même. Puisque $\Delta_{\omega_\sigma, \omega_\sigma}(P) = 0$, on en déduit $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = 0$ si σ se prolonge à $sk^{2k}K$ d'où la partie (i) du théorème.

Posons $s = \sigma \cdot g$ où $g : \tilde{w}_c \cap V - S \rightarrow G$ est une application différentiable. On a alors : $\sigma^*(\omega_s) = g^*(\theta_G)$ sur $\tilde{w}_c \cap V - S$, où θ_G désigne la forme de Maurer-Cartan de G .

On en déduit : $\Delta_{\omega_\sigma, \omega_s}(P) = \int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ où $\tilde{\omega}$ désigne la connexion sur $E|_{\tilde{w}_c \cap V-s} \times [0, 1]$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{\omega}|_{w_c \cap (V-s) \times \{t\}} = t\omega_s + (1-t)\omega_\sigma \\ \tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma^*[t\omega_s + (1-t)\omega_\sigma] = t\sigma^*(\omega_s) = tg^*(\theta_G)$

on en déduit $\int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = g^*T_{\theta_G}(P)$ et, par conséquent $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_\sigma, \omega_s}(P) = \int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P)$ est un nombre entier si P est normalisé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Notons $Q^{2k}(G) = I^k(G) / \bigoplus_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq 1}} I^r(G) \cdot I^s(G)$ le groupe abélien des indécomposables et $Q_Z^{2k}(G)$ l'image de $I_Z^k(G)$ dans $Q^{2k}(G)$ par passage aux quotients. Le groupe $\text{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), \mathbb{Z})$ sera noté $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ et appelé $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe de pseudo homotopie de G. [Si G est réductif et connexe, on sait ([4] [5]) que $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ est isomorphe au groupe $\pi_{2k-1}(G)$ modulo torsion, c'est-à-dire à la partie libre du $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de G].

Il est clair que l'application $[\mu_{\omega_\sigma}] : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}(K, \mathbb{R})$ passe aux quotients modulo les décomposables. D'après la partie (ii) du théorème 2, $\mu_{\omega_\sigma}(P) \in C^{2k}(K, \mathbb{Z})$ si P est normalisé. On en déduit donc un élément $[\mu_\sigma] \in \text{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), H^{2k}(K, \mathbb{Z})) \cong H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ qui définit entièrement l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$.

En particulier, si $E|_{\text{Isk}^{2k-1}K}$ est trivial, l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$ est entièrement caractérisé par un élément $[\mu_\sigma] \in H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ dont la nullité est une condition nécessaire pour que $E|_{\text{Isk}^{2k}K}$ soit trivial.

COROLLAIRE. — Soit $c : \Delta^{2k} \longrightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K, s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage w de $c(\Delta^{2k})$ dans V, et s' une section différentiable de E définie seulement au-dessus d'un voisinage u de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans V.

On a alors : $\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s'}, \omega}(P) + \text{Rés}_c(\omega_{s'}, P)$.

En outre, $\text{Rés}_c(\omega_{s'}, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}}(P)$ est un nombre entier, si P est normalisé.

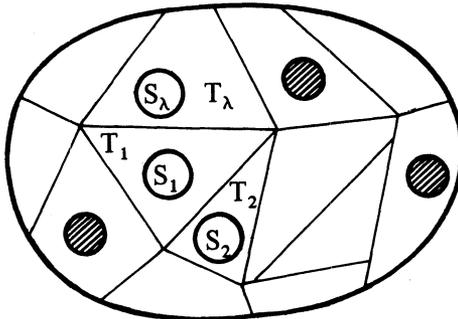
En effet, au voisinage de c ($\partial\Delta^{2k}$), on a, d'après la formule (ii) du §.2 : $\Delta_{\omega_s, \omega} - \Delta_{\omega_{s'}, \omega} = \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}} + \text{cobord}$, d'où

$$\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s'}, \omega}(P) + \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}}(P).$$

La seconde partie du corollaire résulte immédiatement du théorème 2, appliqué à $E|_{w_\sigma}$ avec $\sigma = s'$.

6. Exemple $G = \text{SO}(2)$, $\dim V = 2$, $k = 1$.

Supposons V compacte et orientée, soit $E \rightarrow V$ un $\text{SO}(2)$ -fibré principal différentiable, $K = (T_1, \dots, T, \dots, T_F)$ une triangulation de V par des triangles T_λ , S_λ une partie fermée de l'intérieur de T_λ (éventuellement $S_\lambda = \emptyset$), $S = \bigcup_{1 < \lambda < F} S_\lambda$ et ω une connexion sur $E|_{V-S}$.



Soit s_λ une section de E au-dessus d'un voisinage ouvert w_λ de T_λ dans V ne rencontrant pas S_μ pour $\mu \neq \lambda$, et soit $\omega_\lambda = s_\lambda^* \omega$ sur $w_\lambda - S_\lambda$. [Si $F \rightarrow V$ désigne le fibré vectoriel de rang 2 associé à E , il existe une base orthonormée (A_λ, B_λ) du module des sections de $E|_{w_\lambda}$, $s_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ et la dérivée covariante associée à ω est définie, pour tout champ de vecteurs Z sur $w_\lambda - S_\lambda$, par les relations

$$\begin{cases} \nabla_Z B_\lambda = + \omega_\lambda(Z) A_\lambda \\ \nabla_Z A_\lambda = - \omega_\lambda(Z) B_\lambda \end{cases}.$$

$$\text{Posons : } R_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda.$$

Le théorème des résidus s'écrit alors :

THEOREME 3. — $\sum_{\lambda=1}^F R_\lambda(\omega) = \langle \chi(E), [V] \rangle$, où $\chi(E)$ désigne la classe d'Euler de \tilde{E} .

Notons en effet X l'application :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{X} \frac{1}{2\pi} x.$$

Il est connu (cf. [4] par exemple) que $X \in I_2^1(\text{SO}(2))$ et que la classe caractéristique correspondante est la classe d'Euler. Le théorème 1 du §.4 permet alors de conclure.

Remarque. — Pour démontrer le théorème 3, il suffit que le fibré vectoriel orienté $F \rightarrow V$ soit défini au-dessus de tout V ; mais il n'est pas nécessaire que la métrique riemannienne sur F soit définie en les points m_λ (autrement dit, il n'est pas nécessaire que la $\text{SO}(2)$ -réduction E du $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -fibré principal $\tilde{E} \rightarrow V$ associé à F soit définie en les points m_λ). Cette remarque est utilisée dans le cas particulier 3 ci-dessous.

Cas particuliers.

1) $S = \emptyset$. La connexion ω est alors définie sur tout V , et $d\omega_\lambda = \Omega|_{w_\lambda}$, où Ω désigne la 2-forme de courbure. Puisque ω_λ est définie dans tout T_λ , on peut appliquer la formule de Stokes : $\int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \iint_{T_\lambda} \Omega$. On a alors $\sum_{\lambda=1}^F \iint_{T_\lambda} \Omega = \iint_V \Omega$, et le théorème des résidus devient le *théorème de Gauss-Bonnet* :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

2) Soit A une section différentiable du fibré vectoriel $F \rightarrow V$ à singularités m_1, \dots, m_r isolées. Soit $U = V - \{m_1, \dots, m_r\}$ et B la section de F au-dessus de U telle que $(A(m), B(m))$ soit un repère orthonormé direct de la fibre F_m de F en chaque point $m \in U$. Soit $\sigma = (A, B)$ la section de $E|_U$ définie par A et B

[si ∇ désigne la dérivation covariante associée à la connexion ω_σ sur $E|_U$ définie par $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$, il revient au même de dire : $\forall Z, \nabla_Z A = 0, \nabla_Z B = 0$].

Soit K une triangulation de V telle que $sk^1 K \cap \{m_1, \dots, m_r\} = \emptyset$. Supposons en outre, quitte à subdiviser davantage la triangulation, que chaque triangle T_λ de K contienne au plus 1 point singulier m_λ en son intérieur [si T_λ ne contient pas de point singulier en son intérieur, on notera m_λ n'importe quel point intérieur à T_λ]. Soit $s_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ une section différentiable locale de $E|_{w_\lambda}$ (où w_λ désigne un voisinage de T_λ ne rencontrant $\{m_1, \dots, m_r\}$ qu'en m_λ) et $\theta_\lambda : w_\lambda - \{m_\lambda\} \rightarrow SO(2)$ l'application différentiable telle que :

$$\begin{cases} A = \cos \theta_\lambda \cdot A_\lambda + \sin \theta_\lambda \cdot B_\lambda \\ B = -\sin \theta_\lambda \cdot A_\lambda + \cos \theta_\lambda \cdot B_\lambda \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \nabla_Z B_\lambda = d\theta_\lambda(Z) \cdot A_\lambda \\ \nabla_Z A_\lambda = -d\theta_\lambda(Z) \cdot B_\lambda \end{cases}$$

soit : $\omega_\lambda = d\theta_\lambda$. On en déduit par conséquent que le résidu

$$R_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} d\theta_\lambda$$

est égal à l'indice $I(A, m_\lambda) = I(B, m_\lambda)$ de la section A (ou de la section B) par rapport au point m_λ . Le théorème des résidus devient donc ici le *théorème de Hopf* (cf., par exemple, [3])

$$\boxed{\sum_{\lambda=1}^F I(A, m_\lambda) = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

3) Soit $f : V \rightarrow W$ une application différentiable de degré d entre surfaces compactes orientées. Supposons qu'il existe un ensemble fini de points $S = \{m_1, \dots, m_\lambda, \dots, m_r\}$ de V tel que f soit de rang 2 sur $V - S$ (et de rang 0 sur S), et supposons qu'en chaque point m_λ , f ait un indice de ramification égal à l'entier n_λ . Nous allons voir que la *formule de Riemann-Hurwitz* pour les revêtements ramifiés

$$\boxed{d \cdot \chi_W = \chi_V + \sum_{\lambda} (n_\lambda - 1)}$$

apparaît aussi comme une application du théorème des résidus (χ_V et χ_W désignant respectivement l'invariant d'Euler Poincaré de V et de W).

Nous allons en effet prendre pour F le fibré image réciproque $f^{-1}T(W) \rightarrow V$, et le munir de la connexion métrique à singularités ∇ définie de la façon suivante : soit ∇^0 une connexion sur $T(V)$ respectant une métrique riemannienne g_0 ; l'application linéaire tangente à f définit un isomorphisme de fibrés vectoriels $T(V)|_U \xrightarrow{f'} f^{-1}T(W)|_U = F|_U$ où $U = V - S$; on définit alors ∇ comme la connexion à singularités sur F , d'ensemble singulier S , égale à $f'(\nabla^0)$ [la métrique riemannienne sur F n'est elle-même définie qu'au-dessus de U , mais peu importe pour le théorème des résidus, ainsi que nous l'avons déjà remarqué]. Soient alors (A_λ, B_λ) une base orthonormée du module des champs de vecteurs sur un voisinage U_λ de m_λ dans V , et ω_λ la 1-forme sur U telle que $\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \cdot A_\lambda$ (on suppose évidemment que $m_\mu \notin U_\lambda$ dès que $\mu \neq \lambda$). Notons (A'_λ, B'_λ) les sections de $F|_{U - \{m_\lambda\}}$ obtenues par l'isomorphisme f' :

$$\begin{aligned} f'(A_\lambda) &= A'_\lambda & \text{sur } U_\lambda - \{m_\lambda\}, \\ f'(B_\lambda) &= B'_\lambda & \text{''} \end{aligned}$$

D'après le corollaire du théorème 2,

$$\text{Rés}_{m_\lambda}(\nabla) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda + I(A'_\lambda, m_\lambda)$$

(où m_λ est intérieur au triangle T_λ d'une triangulation K de V dont le 1-squelette ne rencontre pas S , et dont chaque triangle contient au plus 1 point singulier).

Mais $I(A'_\lambda, m_\lambda) = n_\lambda - 1$, $\frac{1}{2\pi} \sum_\lambda \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \chi_V$ d'après le théorème de Gauss-Bonnet et

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \text{Rés}_m(\nabla) &= \langle \chi(f^{-1}T(W)), [V] \rangle = \langle f^* \chi(T(W)), [V] \rangle \\ &= \langle \chi(T(W)), f_* [V] \rangle = d \cdot \langle \chi(T(W)), [W] \rangle = d \cdot \chi_W, \end{aligned}$$

d'où la formule de Riemann-Hurwitz.

(Le cas où $F \rightarrow V$ est le fibré tangent a été étudié plus en détails dans [6]).

7. Résidus des fibrés à singularités et caractères différentiels de Chern-Simons.

Dans tout ce §, on se donne (V, k, K, S, G) comme dans l'introduction, mais on suppose maintenant que le G -fibré principal $E \xrightarrow{p} U$ que l'on se donne en plus n'est défini qu'au-dessus du voisinage $U = V - S$ de $sk^{2k-1}K$ dans V . [On dira encore que E est un "fibré à singularités" sur V , d'ensemble singulier S]. Soit ω une connexion sur E .

On sait, en général, que les groupes d'homotopie du classifiant BG de G n'ont que de la torsion en dimension impaire. On fera ici l'hypothèse supplémentaire :

$$\boxed{\pi_{2k-1}(BG) = 0}.$$

Soit $P \in I^k(G)$ et $u \in H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ tels que $w(P) = r(u)$ dans le diagramme $I^k(G) \xrightarrow{w} H^{2k}(BG, \mathbf{R}) \xleftarrow{r} H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ (où w désigne l'homomorphisme de Chern-Weil universel, et r le changement de coefficients $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$).

Le polynôme P est alors obligatoirement *normalisé* ($P \in I_{\mathbf{Z}}^k(G)$). On notera $S_{P,u}(\omega) : Z_{2k-1}(U) \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le S -caractère correspondant (cf. [8]).

Soit $c : \Delta^{2k} \rightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K , et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U . [Prenant pour $w_{\partial c}$ un voisinage tubulaire de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U , une telle section existe toujours, puisque nous avons supposé $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ et que la restriction du fibré E à $w_{\partial c}$ est donc triviale]. A l'aide de cette section, on peut encore définir le nombre $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$.

Bien que le lemme 1 ne se généralise pas, et que par conséquent le nombre ci-dessus dépend en général de la classe d'homotopie de la section s , nous allons voir que sa classe modulo \mathbf{Z} n'en dépend pas.

Plus précisément, on a le

THEOREME 4. — (i) *Le nombre $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de la section s .*

(ii) La classe modulo \mathbf{Z} du nombre ci-dessus (notée $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)}$) ne dépend pas du choix de s ,

(iii) $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)} = \langle S_{P,u}(\omega), \partial c \rangle$ (∂c est un cycle de U),

(iv) Le fibré $E|_{sk^{2k-1}K}$ admet une extension \tilde{E} à un voisinage tubulaire \tilde{U} de $sk^{2k}K$ dans V .

On a alors $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)} =$ classe modulo \mathbf{Z} de $\text{Rés}_c(\tilde{\omega}, P)$ (où $\tilde{\omega}$ désigne la restriction de ω à $U \cap \tilde{U}$).

Soient s_0 et s_1 deux sections différentiables de E au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U . Il existe une unique fonction différentiable $g : w_{\partial c} \rightarrow G$ telle que $s_1 = s_0 \cdot g$ et on a alors :

$$s_0^*(\omega_{s_0}) = 0$$

$$s_0^*(\omega_{s_1}) = g^*(\theta_G)$$

$$s_0^*(t\omega_{s_1} + (1-t)\omega_{s_0}) = g^*(t\theta_G)$$

et

$$\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = g^*(T_{\theta_G}(P)).$$

Puisque, d'après la formule (ii) du §.2,

$$d\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}, \omega}(P) = \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) + \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P),$$

$$\text{on en déduit : } \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = \int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P).$$

Si s_0 et s_1 sont homotopes, la fonction $g : w_{\partial c} \rightarrow G$ est homotope à une application constante et $g_*(\partial c)$ est un bord, d'où la partie (i) du théorème. Dans le cas général $\int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P)$ est un entier, puisque P est normalisé, d'où la partie (ii).

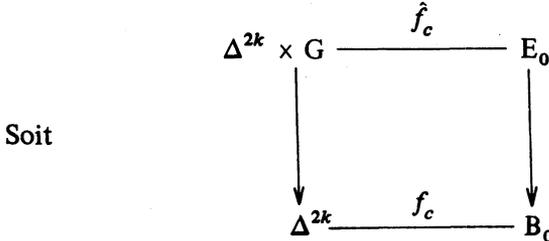
Notons $(E_0 \rightarrow B, \omega_0)$ un G -fibré différentiable E_0 dont la base est G -classifiante pour la dimension de U , muni d'une connexion ω_0 universelle pour les connexions sur les fibrés de base $\dim U$: une telle connexion universelle existe d'après Narasimhan et Ramanan (cf. [7]).

Soit $f : U \rightarrow B_0$ une application classifiante pour la connexion (projection d'un morphisme $\hat{f} : E \rightarrow E_0$ tel que $\omega = \hat{f}^*(\omega_0)$).

On a alors, par naturalité : $\langle S_{P,u}(\omega), \partial c \rangle = \langle S_{P,u}(\omega_0), f_*(\partial c) \rangle$.

Puisque $(f \circ c|_{\partial\Delta^{2k}}) \sim 0$, il existe $f_c : \Delta^{2k} \rightarrow B_0$ tel que $(f \circ c|_{\partial\Delta^{2k}}) \sim (f_c \circ \iota)$ (où ι désigne l'inclusion $\partial\Delta^{2k} \hookrightarrow \Delta^{2k}$):

on en déduit $f_*(\partial c) = \partial f_c$, et, par définition des S caractères (cf. [8]), $\langle S_{p,u}(\omega_0), \partial f_c \rangle = \int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P)$ modulo \mathbb{Z} .



un homomorphisme de G-fibrés principaux différentiables au-dessus de f_c , et s_0 une section différentiable arbitraire du fibré trivial $\Delta^{2k} \times G \rightarrow \Delta^{2k}$.

On a alors : $d\Delta_{\omega_{s_0}, \hat{f}_c^*(\omega_0)}(P) = \lambda_{\hat{f}_c^*(\omega_0)}(P)$ et, par conséquent, $\int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P) = \int_{\partial f_c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P)$, d'où la partie (iii) du théorème. La partie (iv) est évidente, une fois remarqué que l'hypothèse $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ implique l'existence d'une extension \tilde{f} de $f|_{sK^{2k-1}}$ à sK^{2k} : il suffit alors d'appliquer le théorème 1 à $(\tilde{E}, \tilde{\omega})$ pour conclure.

Remarque. — Cette extension \tilde{f} n'est pas unique, en général, même à homotopie près.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOTT, Characteristic classes and foliations, (mimeographed notes by L. Conlon, (1972).
- [2] S. CHERN et J. SIMONS, Characteristic forms and transgression I, *mimeographed notes, Stonybrook Univ.*, (1972).
- [3] W. GREUB, S. HALPERIN et R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomology, tome I (Ac. Press. 1973).
- [4] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomoly, tome II.

- [5] J.L. KOSZUL, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, (1949).
- [6] D. LEHMANN, Résidus des connexions métriques à singularités isolées sur les surfaces, à paraître dans *l'Enseignement Mathématique*, Genève.
- [7] NARASIMHAN et RAMANAN, Existence of universal connections II, *Amer. J. of Maths*, 85 (1963).
- [8] J. SIMONS, Characteristic forms and transgression II : characters associated to a connection, *mimeographed notes, Stonybrook Univ.*, (1972).

Manuscrit reçu le 31 mars 1980
révisé le 17 septembre 1980.

Daniel LEHMANN,
ERA 590 du C.N.R.S.
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Techniques
de Lille I
59655 – Villeneuve d'Ascq Cedex.