Annales de l'institut Fourier

Jean Dieudonné
Laurent Schwartz

# La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$

*Annales de l'institut Fourier*, tome 1 (1949), p. 61-101
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__61_0>

# LA DUALITÉ DANS LES ESPACES $(\mathcal{F})$ ET $(\mathcal{LF})$

**par Jean DIEUDONNÉ et Laurent SCHWARTZ** (Nancy).

1. **Introduction** [1]. — Etant donné un espace vectoriel topologique E on sait qu'on est amené à définir sur son *dual* E′ (espace des formes linéaires continues dans E) plusieurs topologies distinctes (en général), correspondant à la convergence uniforme des formes linéaires sur E dans des familles de parties de E plus ou moins vastes ; les deux plus importantes sont la topologie *faible* (topologie de la convergence simple) et la topologie *forte* (topologie de la convergence uniforme dans tout ensemble *borné* de E). Les propriétés de la topologie faible ont un caractère élémentaire et quasi algébrique [5] : mais en dehors du cas où E est un espace *normé* (cf. [2] et [5]), l'étude des relations entre la topologie forte et la topologie faible sur E′ est encore très peu développée. Nous nous proposons, dans ce travail, de faire cette étude pour les espaces $(\mathcal{F})$ et une catégorie d'espaces plus généraux, que nous appelons espaces $(\mathcal{LF})$, et qui peuvent être considérés comme « limites inductives » de suites d'espaces $(\mathcal{F})$, en un certain sens ; ces espaces jouent un grand rôle dans la théorie des *distributions*, développée récemment par l'un de nous [13], où la théorie de la dualité est un outil essentiel. Il est remarquable qu'un grand nombre de propriétés classiques de la théorie des espaces normés s'étendent aux espaces $(\mathcal{F})$ et aux espaces $(\mathcal{LF})$ bien que (notamment pour ces derniers) la méthode qui sert à démontrer ces propriétés pour les espaces normés se révèle inapplicable telle quelle (en particulier en raison du fait que le théorème de Baire ne s'applique plus dans ces espaces).

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

2. **Préliminaires.** — Nous suivons la terminologie et les notations générales des *Éléments* de N. Bourbaki ([3] et [4]). Pour la définition et les propriétés élémentaires des espaces localement convexes, nous renvoyons à [5] ([2]). Ajoutons seulement quelques compléments relatifs à la notion d'ensemble *borné*, qui joue un rôle très important dans tout ce qui suit. Rappelons que, dans un espace vectoriel topologique E, un ensemble A est dit *borné* si pour tout voisinage U de O, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda U$. Tout homothétique d'un ensemble borné est borné; si $B_1$ et $B_2$ sont bornés, il en est de même de $B_1 \cup B_2$ et de $B_1 + B_2$; l'adhérence d'un ensemble borné est bornée; l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble borné A (plus petit ensemble convexe fermé contenant A) est bornée. L'image d'un ensemble borné par une application linéaire continue est bornée. Tout ensemble *précompact* est borné. Enfin, si $(x_n)$ est une *suite de Cauchy* dans E, l'ensemble des $x_n$ est *borné*; en effet, pour tout voisinage convexe symétrique V de O, il existe un entier $m$ tel que $x_m - x_n \in V$ pour tout $n \geqslant m$; comme l'ensemble des $x_p$ d'indice $p < m$ est fini, donc borné, il existe $\lambda > 0$ tel que cet ensemble soit contenu dans $\lambda V$, donc l'ensemble des $x_n$ est contenu dans $(\lambda + 1)V$.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à considérer des espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, la théorie se déroulant de façon tout à fait analogue pour les espaces localement convexes sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Si E et F sont deux espaces localement convexes séparés, nous désignerons par $\mathfrak{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F; c'est un espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$). Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E; pour que la topologie de la *convergence uniforme dans les ensembles de* $\mathfrak{S}$ soit *compatible* avec la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{L}(E, F)$ (c'est-à-dire pour que $u + v$ et $\lambda u$ soient continues), on constate aisément qu'il faut et qu'il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $u \in \mathfrak{L}(E, F)$, $u(A)$ soit *borné* dans F. Cette condition est toujours remplie si les ensembles de la famille $\mathfrak{S}$ sont *bornés* dans E; nous supposerons toujours désormais qu'il en est ainsi. On peut toujours supposer en outre que toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, que toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$, et enfin que tout homothétique d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$; dans ces conditions, un système fondamental de voisinages de O dans

([2]) Signalons que nous entendons par espace *localement convexe* un espace vectoriel topologique, *séparé ou non*, tel qu'il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'ensembles convexes.

$\mathcal{L}(E, F)$ pour la topologie considérée s'obtient en considérant, pour chaque $A \in \mathfrak{S}$ et chaque semi-norme $q$ définissant la topologie de F, l'ensemble des $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $q(u(x)) \leqslant 1$ pour tout $x \in A$. Cette topologie est localement convexe et définie par les semi-normes $\sup_{x \in A} q(u(x))$ ; elle est séparée si tout point de E appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}$ au moins ; nous supposerons aussi cette condition réalisée. Parmi toutes les topologies de cette nature sur $\mathcal{L}(E, F)$, la *moins fine* est celle de la convergence *simple,* correspondant au cas où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties *finies* de E.

Le *dual* d'un espace localement convexe séparé E est l'espace $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$ des formes linéaires *continues* sur E; c'est un sous-espace vectoriel du *dual algébrique* $E^*$ de E (espace de *toutes* les formes linéaires sur E). Pour tout ensemble $A \subset E$, on appelle *ensemble polaire* de A dans $E'$ l'ensemble $A^0$ des $x' \in E'$ tels que $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in A$ ; lorsque A parcourt un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties bornées de E (ayant les propriétés indiquées ci-dessus), les ensembles $A^0$ forment un système fondamental de *voisinages de* O pour la topologie (sur $E'$) de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. En particulier, les ensembles polaires $M^0$ des parties finies de E forment un système fondamental de voisinages de O pour la topologie (sur $E'$) de la convergence simple dans E, qu'on appelle *topologie faible* sur $E'$, et qu'on note $\sigma(E', E)$. On notera que pour toute partie A de E, $A^0$ est un ensemble *convexe, cerclé* et *fermé* pour $\sigma(E', E)$ ; en outre, si $(A_\alpha)$ est une famille de parties de E, et si $\Gamma_\alpha A_\alpha$ désigne le *plus petit ensemble convexe et cerclé contenant tous les* $A_\alpha$, on a $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha\right)^0 = \bigcap_\alpha (A_\alpha^0)$. Lorsque V est un sous-espace vectoriel de E, $V^0$ n'est autre que le sous-espace de $E'$ *orthogonal* à V, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues qui s'annulent dans V. On notera que si C est un ensemble convexe cerclé dans E, le plus petit ensemble convexe cerclé contenant V et C est leur somme $C + V$, donc $(C + V)^0 = C^0 \cap V^0$. Enfin, si U est un *voisinage de* O dans E, il résulte du th. de Tychonoff que $U^0$ est *compact* pour $\sigma(E', E)$.

Si on munit $E'$ de la topologie faible $\sigma(E', E)$, toute forme linéaire continue sur $E'$ s'écrit d'une seule manière $x' \to \langle x, x' \rangle$ pour un $x \in E$, et réciproquement; autrement dit, E est le *dual* de $E'$ (bien entendu, cela n'est plus nécessairement vrai lorsqu'on prend sur $E'$ une topologie plus fine que $\sigma(E', E)$). On peut donc définir sur E la *topologie faible* $\sigma(E, E')$ et les ensembles polaires d'ensembles de E'. La topologie donnée $\mathfrak{T}$ sur E est plus fine que $\sigma(E, E')$, mais tout ensemble *convexe fermé* pour $\mathfrak{T}$ est *faiblement fermé*, et tout ensemble *faiblement borné* dans E est *borné* pour $\mathfrak{T}$ ([12], p. 524, th. 7). En outre :

Proposition 1. — *Pour toute partie non vide* A *de* E, *l'ensemble bipolaire* $A^{00} = (A^0)^0$ *est identique au plus petit ensemble* B *convexe cerclé et fermé pour* $\sigma(E, E')$, *qui contient* A.

En effet, on a évidemment $B \subset A^{00}$; d'autre part, si $x_0 \notin B$, il existe, d'après le th. de Hahn-Banach, une forme linéaire réelle $g$ sur E, continue pour $\sigma(E, E')$ et telle que $g(x_0) > 1$, et $g(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in B$. Comme B est cerclé, on a aussi $g(e^{i\theta}x) \leqslant 1$ pour tout $x \in B$ et tout nombre réel $\theta$; mais $g$ est la partie réelle d'une forme linéaire continue $x' \in E'$ définie par $\langle x, x' \rangle = g(x) - ig(ix)$, donc $g(e^{i\theta}x)$ est la partie réelle de $\langle e^{i\theta}x, x' \rangle = e^{i\theta}\langle x, x' \rangle$ ; on a par suite $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, ce qui montre que $x' \in A^0$, mais $|\langle x_0, x' \rangle| > 1$, donc $x_0 \notin A^{00}$, d'où $B = A^{00}$.

Corollaire. — *Soit* $(A_\alpha)$ *une famille d'ensembles convexes, cerclés et fermés pour* $\sigma(E, E')$. *L'ensemble polaire* $\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^0$ *est l'adhérence* (pour $\sigma(E', E)$) *de* $\Gamma_\alpha A_\alpha^0$.

En effet, on a $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha^0\right)^0 = \bigcap_\alpha A_\alpha^{00} = \bigcap_\alpha A_\alpha$ en vertu de l'hypothèse, et le corollaire résulte de ce que $\Gamma_\alpha A_\alpha^0$ est convexe et cerclé, donc $\left(\Gamma_\alpha A_\alpha^0\right)^{00}$ est son adhérence.

Les résultats précédents peuvent être présentés de façon plus symétrique, en considérant deux espaces vectoriels (non topologiques) E, E' tels que chacun d'eux puisse être identifié à un sous-espace vectoriel du dual (algébrique) de l'autre (conditions $(D_I)$ et $(D_{II})$ de [5]) ; on définit alors sur E et E' les topologies $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$ ; pour ces topologies, chacun des espaces E, E' est dual de l'autre, et la prop. 1 et son corollaire sont encore valables. En outre, le th. suivant de Mackey ([12], p. 523, th. 4 et [11], p. 198, th. VII-4) caractérise toutes les topologies $\mathfrak{T}$ sur E pour lesquelles E' est le *dual* de E : une telle topologie est la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles d'une famille $\mathfrak{K}$ de parties *compactes* (pour $\sigma(E', E)$)

*convexes* et *cerclées* de E′, et dont la réunion est E′. Parmi ces topologies, il en est une *plus fine* que toutes les autres, correspondant au cas où $\mathfrak{K}$ est l'ensemble de *toutes* les parties faiblement compactes, convexes et cerclées de E′ ; nous la désignerons par $\tau(E, E')$ : lorsqu'on considère E comme sous-espace de $E'^*$ (autrement dit, comme constitué par des formes linéaires sur E′), on peut encore dire que $\tau(E, E')$ est la topologie de la *convergence uniforme dans les parties convexes et faiblement compactes de* E′. Les topologies $\mathfrak{T}$ considérées peuvent encore être définies comme étant *plus fines* que $\sigma(E, E')$ et *moins fines* que $\tau(E, E')$ [1].

3. **Espaces ($\mathcal{F}$) et espaces ($\mathcal{LF}$).** — Un espace ($\mathcal{F}$) peut être défini comme un espace *localement convexe, métrisable et complet* [3]. La topologie d'un espace localement convexe *métrisable* peut être définie par une suite $(p_n)$ de semi-normes, suite qu'on peut toujours supposer *croissante*. Si E est un espace ($\mathcal{F}$), V un sous-espace vectoriel fermé de E, V et E/V sont des espaces ($\mathcal{F}$). Tout produit d'une famille *dénombrable* d'espaces ($\mathcal{F}$) est un espace ($\mathcal{F}$). Le *complété* d'un espace *localement convexe et métrisable* est un espace ($\mathcal{F}$).

Citons quelques exemples importants d'espaces ($\mathcal{F}$) *non normables* :

1° L'espace $\mathfrak{D}_k$ des fonctions *indéfiniment dérivables* dans un intervalle compact K de la droite numérique R, la topologie étant définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ t \in K}} |x^{(k)}(t)|$.

2° L'espace des *fonctions entières*, la topologie étant celle de la *convergence compacte* ; cette topologie peut en effet être définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup\limits_{|z| \leqslant n} |x(z)|$.

3° On montre facilement que l'exemple précédent est un cas particulier d'une classe d'espaces ($\mathcal{F}$) étudiée récemment par M. Köthe sous le nom de « gestufte Raüme » ([8], [10]). Considérons une suite double $(b_{mn})$ de nombres positifs telle que : *a*) pour chaque *m*, la suite $(b_{mn})$ soit croissante et tende vers $+\infty$ ; *b*) pour chaque *m*, on ait $\lim\limits_{n \to \infty}.\sup b_{m+1,n}/b_{mn} = +\infty$. On définit alors l'espace E

(3) Nous nous écartons un peu ici de la terminologie de Banach [2] et de l'école polonaise, qui appellent plus généralement « espace ($\mathcal{F}$) » un espace vectoriel topologique métrisable et complet, mais *non nécessairement localement convexe* ; ils appellent « espace ($B_0$) » ce que nous appelons « espaces ($\mathcal{F}$) ». Les « espaces ($\mathcal{F}$) » au sens de Banach, qui ne sont pas localement convexes, présentent d'ailleurs des caractères pathologiques qui les rendent à peu près inutilisables en Analyse fonctionnelle.

comme l'espace des suites $u=(u_n)$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n| < +\infty$ pour tout $m$, et on le munit de la topologie définie par les semi-normes $p_m(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n|$ ; il est facile de voir que c'est un espace $(\mathcal{F})$ non normable. L'exemple précédent correspond au cas où $b_{mn} = m^n$. On obtiendrait d'autres espaces $(\mathcal{F})$ en remplaçant dans la définition précédente la condition $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n| < +\infty$ par $\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n|^p < +\infty$, et en prenant pour semi-normes $q_m(u) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}|u_n|^p\right)^{1/p}$ ($p$ nombre $> 1$).

4° Soit G un espace *localement compact dénombrable à l'infini*, c'est-à-dire réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts $G_n$, qu'on peut supposer former une suite croissante telle que $\overline{G}_n$ soit contenu dans l'intérieur de $G_{n+1}$ ; toute partie compacte de G est alors contenue dans un $G_n$. Soit E l'espace des fonctions complexes continues dans G ; muni de la topologie de la *convergence uniforme dans les parties compactes de* G, c'est un espace $(\mathcal{F})$, dont la topologie peut être définie par les semi-normes $p_n(x) = \sup_{t \in G_n} |x(t)|$.

A partir des espaces $(\mathcal{F})$, nous allons maintenant définir les espaces $(\mathcal{LF})$ qui s'en déduisent par un processus qu'on peut considérer comme une « limite inductive ». Soit E un espace vectoriel et $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite infinie *strictement croissante* de sous-espaces vectoriels de E, telle que E soit *réunion* des $E_n$. Supposons chacun des $E_n$ muni d'une topologie $\mathcal{T}_n$, pour laquelle $E_n$ est un *espace* $(\mathcal{F})$ ; enfin nous supposerons ces topologies *compatibles* au sens suivant : *la topologie induite sur* $E_n$ *par* $\mathcal{T}_{n+1}$ *est identique à* $\mathcal{T}_n$. Il en résulte que $E_n$ est un sous-espace *fermé* de $E_{n+1}$, puisqu'il est complet pour $\mathcal{T}_n$ par hypothèse.

Considérons alors toutes les topologies $\mathcal{T}$ d'espace localement convexe sur E, qui induisent sur chacun des $E_n$ une topologie *moins fine que* $\mathcal{T}_n$ ; nous allons voir que parmi ces topologies, il en existe une $\mathcal{T}_\omega$ *plus fine que toutes les autres*. En effet, une topologie $\mathcal{T}$ doit être telle que, pour tout voisinage convexe cerclé V de O (pour $\mathcal{T}$), $V \cap E_n$ soit un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_n$. Soit $\mathfrak{W}$ l'ensemble de *tous* les ensembles convexes cerclés V dans E, qui ont cette propriété ; il est clair que le sous-espace vectoriel de E engendré par un tel ensemble V contient tous les sous-espaces $E_n$, et par suite est identique à E. Il en résulte que $\mathfrak{W}$ est un système fondamental de voisinages de O pour une topologie $\mathcal{T}_\omega$ d'espace localement convexe sur E, qui est évidemment la plus fine de toutes les topologies $\mathcal{T}$. Un espace localement convexe E défini de la sorte sera appelé un *espace* $(\mathcal{LF})$, et nous dirons que $(E_n)$ est une *suite de définition* de cet espace.

*Exemples.* — 1° Soit G un espace *localement compact dénombrable à l'infini,* réunion d'ensembles compacts $G_n$, qu'on peut supposer former une suite croissante, telle que $\overline{G}_n$ soit contenu dans l'intérieur de $G_{n+1}$. Soit E l'espace des fonctions complexes continues dans G et *à support compact* (c'est-à-dire telles qu'il existe un ensemble compact — dépendant de la fonction considérée — en dehors duquel la fonction est nulle); et soit $E_n$ le sous-espace de E formé des fonctions nulles dans le complémentaire de $G_n$. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie de la convergence uniforme dans $G_n$, on voit sans peine que les sous-espaces $E_n$ sont des espaces de Banach dont les topologies sont compatibles ; ils définissent donc sur E une topologie d'espace $(\mathcal{LF})$.

2° Soit $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions *indéfiniment dérivables* dans **R** et *à support compact* ; soit $\mathcal{D}_n$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonctions nulles pour $|x| \geqslant n$. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie définie sur $\mathcal{D}_n$ par les semi-normes $p_m(u) = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant m \\ t \in \mathbf{R}}} |u^{(k)}(t)|$, on vérifie aisément que $\mathcal{D}_n$ est un espace $(\mathcal{F})$ non normable, et que les topologies $\mathcal{T}_n$ sont compatibles.

3° Soit $(F_n)$ une suite quelconque d'espaces $(\mathcal{F})$, et soit F l'espace produit (sans topologie) des espaces vectoriels $F_n$. Soit E le sous-espace de F *somme directe* des $F_n$, c'est-à-dire formé des points $(x_n)$, où $x_n = O$ sauf pour un nombre fini d'indices ; E est réunion des sous-espaces $E_n$, où $E_n$ est formé des points $(x_m)$ tels que $x_m = O$ pour $m > n$. Si on prend pour $\mathcal{T}_n$ la topologie *produit* des topologies des $F_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $E_n$ est un espace $(\mathcal{F})$, et on constate aussitôt que les topologies $\mathcal{T}_n$ sont compatibles. Quand nous parlerons de l'espace *somme directe* d'une suite $(F_n)$ d'espaces $(\mathcal{F})$ il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit de l'espace $(\mathcal{LF})$ ainsi défini.

Soit E un espace $(\mathcal{LF})$ défini par une suite $(E_n)$ de sous-espaces munis de topologies $\mathcal{T}_n$ d'espaces $(\mathcal{F})$ compatibles. Soit $(F_n)$ une deuxième suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E, ayant pour réunion E, et muni chacun d'une topologie $\mathcal{T}'_n$, pour laquelle $F_n$ est un espace ($\mathcal{F}$), ces topologies étant supposées compatibles. Nous dirons que la suite $(F_n)$ est *équivalente* à la suite $(E_n)$ si, pour tout entier $n$, il existe d'une part un entier $p$ tel que $F_n \subset E_p$ et que $\mathcal{T}'_n$ soit la topologie induite sur $F_n$ par $\mathcal{T}_p$, et d'autre part un indice $q$ tel que $E_n \subset F_q$ et que $\mathcal{T}_n$ soit la topologie induite sur $E_n$ par $\mathcal{T}'_q$. Dans ces conditions, nous allons voir que la topologie $\mathcal{T}'_\omega$ définie sur E par la suite $(F_n)$ est *identique à* $\mathcal{T}_\omega$ ; en effet, pour tout voisinage V de O dans la topologie $\mathcal{T}_\omega$, $V \cap F_n = (V \cap E_p) \cap F_n$ est un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}'_n$ ; donc V est par définition un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}'_\omega$, ce qui prouve que $\mathcal{T}_\omega$ est moins fine que $\mathcal{T}'_\omega$ ; on montre de même que $\mathcal{T}'_\omega$ est moins fine que $\mathcal{T}_\omega$, et par suite les deux topologies sont bien identiques. En particulier, si $(n_k)$ est une suite strictement croissante d'entiers, la suite $(E_{n_k})$ extraite de la suite $(E_n)$ est équivalente à $(E_n)$.

Proposition 2. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{LF}$), $(E_n)$ *une suite de définition de* E ; *l'espace* E *est séparé, et la topologie induite sur* $E_n$ *par* $\mathcal{T}_\omega$ *est identique à* $\mathcal{T}_n$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — *Soient* F *un espace localement convexe séparé,* G *un sous-espace vectoriel fermé de* F, V *un ensemble ouvert convexe dans* G, $x$ *un point de* F *n'appartenant pas à* V. *Il existe un ensemble ouvert convexe* U *dans* F, *tel que* $U \cap G = V$ *et que* $x \notin U$.

On peut supposer pour simplifier que l'origine O appartient à V. Le complémentaire de V dans G est fermé dans G, donc dans F ; il existe donc un voisinage ouvert convexe W de O dans F, tel que $W \cap G \subset V$ ; montrons que si W est assez petit, *l'enveloppe convexe* U de V et de W répond à la question. En effet, U est l'ensemble des points $\lambda y + (1 - \lambda)z$, où $y \in V$, $z \in W$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ; si $z \notin G$, le seul point du segment joignant $y$ à $z$ qui soit dans G est le point $y$ ; au contraire, si $z \in G$, on a $z \in G \cap W \subset V$, donc tous les points de ce segment sont dans V, ce qui prouve bien que $U \cap G = V$. Pour tout $y \in V$, soit $S_y$ l'enveloppe convexe de $y$ et de W. L'ensemble $S_y$ est réunion du point $y$ et de tous les homothétiques de W par rapport à $y$, avec un rapport d'homothétie $\mu$ tel que $0 < \mu \leqslant 1$ ; le complémentaire de $y$ dans $S_y$ est donc *ouvert* dans F. Or, U est réunion des $S_y$ lorsque $y$ parcourt V ; tout point de U n'appartenant pas à V est donc intérieur à U. D'autre part, si $y \in V$, il existe $\lambda > 1$ tel que $u = \lambda y \in V$, par suite $y$ appartient à $S_u$ et est distinct de $u$, ce qui montre encore que $y$ est intérieur à U, et par suite que U est *ouvert* dans F. Enfin, si $x \in G$ n'appartient pas à V, on a $x \notin U$ ; d'autre part, si $x \notin G$, il existe W assez petit pour que $x \notin W + G$, puisque l'espace quotient F/G est séparé ; a fortiori, on a $x \notin U$, ce qui achève la démonstration du lemme.

On notera que si V est cerclé dans G, on peut supposer U cerclé dans F ; il suffit en effet de remplacer l'ensemble U construit ci-dessus par l'intersection de tous les ensembles $e^{i\theta}U$.

Cela étant, pour démontrer la prop. 2, il suffit de prouver que pour tout voisinage ouvert convexe et cerclé $V_n$ de O dans $E_n$, il existe un voisinage ouvert convexe et cerclé V de O dans E tel que $V \cap E_n = V_n$. D'après le lemme, on peut définir par récurrence sur $p$ un voisinage ouvert convexe cerclé $V_{n+p}$ de O dans $E_{n+p}$ de sorte que $V_{n+p+1} \cap E_{n+p} = V_{n+p}$ pour tout $p \geqslant 0$ ; la réunion V des $V_{n+p}$ (pour $p \geqslant 0$) répond à la question.

Corollaire. — *Les sous-espaces* $E_n$ *sont fermés dans* E.

En effet, comme ils sont *complets* pour la topologie induite sur eux par la topologie de E, ils sont fermés dans E.

## 4. Ensembles bornés dans les espaces $(\mathcal{F})$ et les espaces $(\mathcal{LF})$.

Montrons en premier lieu qu'un espace $(\mathcal{F})$ satisfait à la *première condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182), autrement dit :

Proposition 3. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$, $(A_n)$ *une suite d'ensembles bornés dans* E. *Il existe une suite* $(\lambda_n)$ *de nombres* $> 0$ *telle que la réunion des ensembles* $\lambda_n A_n$ *soit bornée.*

La proposition est un cas particulier d'un théorème de Mackey ([11], p. 187, th. V-11) ; la démonstration en est immédiate : si $(p_n)$ est une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E, et si $\alpha_{mn} = \sup_{x \in A_m} p_n(x)$, il suffit de prendre $\lambda_n = 1/\alpha_{nn}$ pour répondre à la question.

Par contre, la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182) n'est vérifiée par un espace $(\mathcal{F})$ que si cet espace est *normable* (donc un espace de Banach). En effet, elle signifie qu'il existe une suite $(B_n)$ d'ensembles bornés dans l'espace E considéré, telle que tout ensemble borné dans E soit contenu dans un $B_n$ ; or, cette condition entraîne en particulier que E est réunion de $\overline{B}_n$, donc, en vertu du th. de Baire, un des ensembles $\overline{B}_n$ au moins contient un point intérieur, ce qui signifie qu'il existe dans E un voisinage de O borné, donc [9] que E est normable (cf. [11], p. 192).

Proposition 4. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{LF}$), ($E_n$) *une suite de définition de* E. *Pour qu'un ensemble* $A \subset E$ *soit borné, il faut et il suffit qu'il existe un entier* $n$ *tel que* $A \subset E_n$ *et que* A *soit borné dans* $E_n$.

La condition est évidemment suffisante ; pour voir qu'elle est nécessaire, il suffit de prouver que si un ensemble N n'est contenu dans aucun des $E_n$, il ne peut être borné. Il existe alors une suite croissante d'entiers $n_k$ et une suite de points $x_{n_k}$ de N telle que $x_{n_k} \notin E_{n_k}$ et $x_{n_k} \in E_{n_{k+1}}$ ; on peut évidemment se borner au cas où $n_k = k$. En vertu du lemme, on peut définir une suite ($V_k$) tel que $V_k$ soit un voisinage convexe et cerclé de O dans $E_k$ que l'on ait $V_{k+1} \cap E_k = V_k$, et que $\frac{1}{k} x_k \notin V_{k+1}$. La réunion V des $V_k$ est alors un voisinage de O dans E, tel que $\frac{1}{k} x_k \notin V$ quel que soit $k$ ; il en résulte que $N \not\subset k.V$ quel que soit l'entier $k$, ce qui prouve que N n'est pas borné.

Corollaire 1. — *Dans un espace* ($\mathcal{LF}$), *toute suite de Cauchy est convergente.*

En effet, si ($x_n$) est une suite de Cauchy dans un espace ($\mathcal{LF}$) E, on a vu (n° 2) que l'ensemble des $x_n$ est borné ; il existe donc un entier $q$ tel que $x_n \in E_q$ pour tout $n$ ; la suite ($x_n$) étant une suite de Cauchy dans l'espace complet $E_q$, est convergente.

On notera que si $\Phi$ est un *filtre de Cauchy* sur E, ayant une base *dénombrable* ($A_n$) (qu'on peut supposer décroissante), il existe un des $A_n$ contenu dans un espace $E_q$, et que par suite $\Phi$ *converge*. En effet, dans le cas contraire, il existerait pour tout $n$, un $x_n \in A_n$ tel que $x_n \notin E_n$ ; la suite ($x_n$) serait une suite de Cauchy, contrairement à ce qui précède.

Nous démontrerons plus loin (cor. du th. 6) un résultat plus précis, savoir qu'un *filtre de Cauchy* quelconque sur un espace ($\mathcal{LF}$) est convergent, autrement dit qu'un tel espace est *complet*. Du corollaire précédent, on déduit déjà que :

Corollaire 2. — *Un espace* ($\mathcal{LF}$) *n'est pas métrisable.*

En effet, si un espace ($\mathcal{LF}$) était métrisable, il serait complet d'après le cor. 1 ; or une suite de définition ($E_n$) d'un tel espace est formée de sous-espaces vectoriels fermés (cor. de la prop. 2) donc *rares* dans E, et d'après le th. de Baire, un espace métrique complet ne peut être réunion dénombrable d'ensembles rares.

La *première condition de dénombrabilité* de Mackey n'est *jamais* vérifiée dans un espace $(\mathcal{LF})$ : en effet, si $x_n \notin E_n$ et $x_n \in E_{n+1}$ la suite $(\lambda_n x_n)$ n'est bornée pour *aucun* choix des $\lambda_n > 0$, en vertu de la prop. 4, puisqu'elle ne peut appartenir à aucun des $E_q$.

En ce qui concerne la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey, si E est un espace $(\mathcal{LF})$ dans lequel elle est vérifiée, et $(E_n)$ une suite de définition de E, il est clair que la même condition de dénombrabilité doit être vérifiée dans chacun des $E_n$ ; mais nous avons vu ci-dessus que cela entraîne que les $E_n$ sont des *espaces de Banach*. Inversement, s'il existe une suite de définition $(E_n)$ de E formée d'espaces de Banach, E satisfait à la seconde condition de dénombrabilité de Mackey : on peut en effet définir une suite croissante d'ensembles bornés $A_n \subset E_n$ telle que $A_n$ contienne la boule de rayon $n$ et de centre l'origine dans chacun des $E_k$ d'indice $k \leqslant n$. Il est clair en vertu de la prop. 4, que tout ensemble borné dans E est contenu dans un ensemble $A_n$.

## 5. Fonctions linéaires continues dans les espaces $(\mathcal{F})$ et les espaces $(\mathcal{LF})$.

Proposition 5. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{LF})$, $(E_n)$ *une suite de définition de* E. *Pour qu'une application linéaire $u$ de* E *dans un espace localement convexe* F *soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chacun des* $E_n$ *soit continue.*

En effet, si cette condition est vérifiée, et si U est un voisinage convexe de O dans F, $\overset{-1}{u}(U) \cap E_n$ est un voisinage convexe de O pour tout $n$, donc $\overset{-1}{u}(U)$ est un voisinage de O dans E d'après la définition de la topologie de E ; d'où la proposition.

Proposition 6. — *Soient* E *un espace localement convexe métrisable ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe. Pour qu'une application linéaire $u$ de* E *dans* F *soit continue, il faut et il suffit que pour tout ensemble* A *borné dans* E, $u(A)$ *soit borné dans* F.

En vertu des prop. 4 et 5, tout revient à démontrer le théorème lorsque E est un *espace localement convexe métrisable* ; il résulte dans ce cas de théorèmes de Mackey ([12], p. 527, th. 8 et 10) ; pour être complet, donnons rapidement la démonstration. Soit $(p_n)$ une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E. Si $u$ n'était pas continue, il existerait une semi-norme $q$ continue dans F, et une suite $(x_n)$ de points de E telle que $p_n(x_n) \leqslant 1$

et $q(u(x_n)) \geqslant n$. Comme la suite $(p_n)$ est croissante, on a $\sup\limits_n p_k(x_n) \leqslant \sup\left(1, \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k} p_k(x_i)\right) < +\infty$, autrement dit la suite $(x_n)$ serait bornée, mais non la suite $(u(x_n))$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous allons maintenant généraliser aux espaces $(\mathcal{LF})$ un théorème bien connu de Banach sur les espaces $(\mathcal{F})$ ([2], p. 40, th. 4) :

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{LF})$. *Toute application linéaire continue u de* E *sur* F *est un homomorphisme.*

Soit $(E_n)$ une suite de définition de E, $(F_n)$ une suite de définition de F. Pour tout couple d'indices $m$, $n$, nous poserons $G_{mn} = E_m \cap \overset{-1}{u}(F_n)$ ; c'est un sous-espace vectoriel fermé de $E_m$.

Donnons à $n$ une valeur fixe ; comme $u(G_{mn}) = u(E_m) \cap F_n$, et que $u(E) = F$, $F_n$ est la réunion des $u(G_{mn})$ ($m$ variable) ; comme $F_n$ est un espace $(\mathcal{F})$, il résulte du th. de Baire qu'un au moins des sous-espaces $u(G_{mn})$ est *non maigre* dans $F_n$ ; mais alors, un th. de Banach ([2], p. 38, th. 3) montre que pour cet indice $m$, on a nécessairement $u(G_{mn}) = F_n$. En outre, $u$ est un homomorphisme de $G_{mn}$ sur $F_n$ ([2], p. 40, th. 4). Soit alors V un voisinage de O quelconque dans E ; comme $V \cap G_{mn}$ est un voisinage de O dans $G_{mn}$ (prop. 2), $u(V \cap G_{mn})$ est un voisinage de O dans $F_n$, et a fortiori il en est de même de $u(V) \cap F_n$ ; mais par définition, cela prouve que $u(V)$ est un voisinage de O dans F, d'où le théorème.

6. **Espaces de fonctions linéaires continues dans un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$.** — Étant donné deux espaces localement convexes séparés E, F, nous considérerons, sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F, les trois topologies suivantes : la topologie $\mathcal{T}_s$ de la convergence *simple,* la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties *compactes* de E, et la topologie $\mathcal{T}_b$ de la convergence uniforme dans les parties *bornées* de E (cf. n° 2).

On notera qu'un ensemble H *borné pour la topologie* $\mathcal{T}_b$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ peut être caractérisé de la façon suivante : pour tout ensemble borné $B \subset E$, la réunion des ensembles $u(B)$, où $u$ parcourt H, est *bornée* dans F. En effet, cette condition signifie que pour tout voisinage V de O dans F, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $u(B) \subset \lambda V$ pour tout $u \in H$ ; mais si T est le voisinage de O (dans la topologie $\mathcal{T}_b$) formée des $u$ tels que $u(\mathrm{B}) \subset \mathrm{V}$, la relation précédente équivaut à $\mathrm{H} \subset \lambda\mathrm{T}$, ce qui établit notre assertion.

PROPOSITION 7. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque. Si* F *est complet, l'espace* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est complet pour la topologie* $\mathcal{T}_b$.

En effet, soit $\Phi$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ pour la topologie $\mathcal{T}_b$, et soit A une partie bornée quelconque de E ; pour toute semi-norme continue $q$ sur F et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $\mathrm{M} \in \Phi$ tel que $q\big(u(x) - v(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout couple d'éléments $u$, $v$ de M. Comme F est complet, le filtre $\Phi$ converge simplement vers une application linéaire $u_0$ de E dans F, et on a $q\big(u_0(x) - u(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ et tout $u \in \mathrm{M}$. Or, comme $u$ est continue, $u(\mathrm{A})$ est borné dans F, donc $q\big(u(x)\big) \leqslant k$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ ; par suite $q\big(u_0(x)\big) \leqslant k + \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ ; ceci démontre que $u_0(\mathrm{A})$ est *borné* dans F, et par suite (prop. 6) que $u_0$ est *continue* dans E, autrement dit appartient à $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ ; il est clair alors que $u_0$ est limite du filtre $\Phi$ pour la topologie $\mathcal{T}_b$.

THÉORÈME 2. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque*, H *une partie de* $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est équicontinu dans* E ;

b) H *est borné pour la topologie* $\mathcal{T}_b$ ;

c) H *est borné pour la topologie* $\mathcal{T}_s$.

*En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, les topologies induites sur* H *par* $\mathcal{T}_s$ *et* $\mathcal{T}_c$ *sont identiques, et elles sont identiques à la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense de* E.

En premier lieu, montrons que a) entraîne b) et b) entraîne c) lorsque E est un espace localement convexe *quelconque*. La seconde proposition est immédiate ; quant à la première, si H est équicontinu, pour toute semi-norme $q$ continue dans F, il existe un voisinage V de O dans E et un nombre $a > 0$ tels que $q\big(u(x)\big) \leqslant a$ quels que soient $x \in \mathrm{V}$ et $u \in \mathrm{H}$. Si A est un ensemble borné quelconque dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{V}$, donc $q\big(u(x)\big) \leqslant \frac{1}{\lambda} a$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, ce qui démontre que H est borné pour la topologie $\mathcal{T}_b$.

Reste à montrer que c) entraîne a) lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$. Considérons d'abord le cas où E est un espace

$(\mathcal{F})$. Par hypothèse, pour toute semi-norme $q$ continue dans F, la fonction $f(x) = \sup_{u \in H} q(u(x))$ est *finie* dans E ; comme $q(u(x))$ est continue dans E, $f$ est *semi-continue inférieurement* ; il résulte du th. de Baire qu'il existe un point $x_0 \in E$ et un voisinage V de O dans E tels que $f(x)$ soit bornée supérieurement dans $x_0 + V$ ; comme $f$ est enveloppe supérieure de fonctions convexes, c'est une fonction convexe, donc, pour $y \in V$, on a $f(y) \leqslant f(x_0) + f(x_0 + y)$, ce qui prouve que $f$ est bornée supérieurement dans V, donc que H est équicontinue au point O, et par suite dans E.

Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, définissons encore la fonction $f$ comme ci-dessus, et soit W l'ensemble des points de E où $f(x) \leqslant 1$. Si $(E_n)$ est une suite de définition de E, il résulte de ce qui précède que $W \cap E_n$ est un voisinage convexe de O dans $E_n$ ; donc W est par définition un voisinage de O dans E, ce qui montre encore que dans ce cas c) entraîne a).

La dernière partie du théorème est simplement l'énoncé de propriétés classiques des ensembles équicontinus ([4], chap. x, p. 34, prop. 14 et p. 29, prop. 3).

La notion d'ensemble *borné* dans l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est donc la même pour les trois topologies $\mathcal{T}_s$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{T}_b$, et on peut donc parler d'ensemble borné dans cet espace sans spécifier pour laquelle de ces trois topologies.

On dira qu'un filtre sur $\mathcal{L}(E, F)$ est *borné* s'il existe un ensemble borné appartenant à ce filtre.

Corollaire. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé. Soit* $\Phi$ *un filtre borné sur* $\mathcal{L}(E, F)$. *Si* $\Phi$ *converge simplement dans* E *vers une fonction* $u_0$, $u_0$ *est une application linéaire continue de* E *dans* F, *et* $\Phi$ *converge uniformément vers* $u_0$ *dans toute partie compacte de* E. *En outre, si* F *est complet, pour que* $\Phi$ *converge simplement dans* E, *il suffit que* $\Phi$ *converge simplement dans une partie partout dense de* E.

La première partie est un cas particulier d'une propriété générale des ensembles équicontinus ([4], chap. x, p. 30, prop. 7) ; d'autre part, l'hypothèse de la seconde partie du corollaire entraîne que $\Phi(x)$ est un filtre de Cauchy dans F, donc un filtre convergent, pour tout $x \in E$ ([4], chap. x, p. 29, prop. 3).

Le corollaire précédent s'appliquera surtout au cas d'une *suite* $(u_n)$ d'applications linéaires continues de E dans F ; car si une telle suite converge simplement dans E, elle est évidemment bornée pour la topologie $\mathfrak{T}_s$.

7. **Dual fort d'un espace $(\mathcal{F})$ ou d'un espace $(\mathcal{LF})$.** — Étant donné un espace localement convexe séparé E et son dual E′, la topologie *forte* sur E′ sera par définition la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles *bornés* de E : un système fondamental de voisinages de O pour cette topologie est donc formé par les ensembles *polaires* $B^0$ des ensembles *bornés* B de E.

*Exemples.* — 1° Soit $(E_n)$ une suite d'espaces de Banach ; on vérifie facilement que le dual fort du *produit* des espaces $E_n$ est la *somme directe* des duals forts $E'_n$, et que le dual fort de la *somme directe* des $E_n$ est le *produit* des $E'_n$.

2° Le dual E′ d'un « gestufter Raum » E (n° 3) défini par une suite double $(b_{mn})$ est, comme on le voit sans peine, l'ensemble des suites $v=(v_n)$ de nombres complexes telles que, pour *un* indice $m$ au moins, il existe $M>0$ tel que $|v_n|\leqslant Mb_{mn}$ pour tout $n$ ; un tel espace est appelé par M. Köthe le « Stufenraum » défini par la suite double $(b_{mn})$ [10].

3° Le dual de l'espace $(\mathcal{LF})$ des fonctions continues à support compact définies dans un espace localement compact G dénombrable à l'infini n'est autre que l'espace des *mesures de Radon* sur G ; le dual de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivables dans **R** et à support compact est l'espace $\mathcal{D}'$ des *distributions* sur **R** [13].

Lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, le dual fort E′ de E est *complet*, en vertu de la prop. 7. Si E est un espace $(\mathcal{F})$, le dual fort E′ ne peut être *métrisable* que si E est un *espace de Banach* (auquel cas on sait qu'il en est de même de E′) ; en effet, s'il existe un système fondamental dénombrable de voisinage $V_n$ de O dans E′, les ensembles polaires $V_n^0$ dans E sont des ensembles bornés tels que tout ensemble borné dans E soit contenu dans un $V_n^0$ ; en d'autres termes, E satisfait à la seconde condition de dénombrabilité de Mackey, et nous avons vu (n° 4) que cela n'est possible que lorsque E est normable.

Le même raisonnement montre que, lorsque E est un espace $(\mathcal{LF})$, le dual fort E′ ne peut être *métrisable* que lorsqu'il existe une suite de définition $(E_n)$ de E formée d'*espaces de Banach* (cf. n° 4) ; dans ce cas le dual fort E′ est un *espace* $(\mathcal{F})$.

Pour tout $x\in E$ et tout $x'\in E'$, rappelons que $\langle x, x'\rangle = x'(x)$.

Chacune des applications partielles $x \to \langle x, x' \rangle$, $x' \to \langle x, x' \rangle$ est continue dans E et E′ respectivement; mais l'application bilinéaire $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ de $E \times E'$ dans $\mathbf{C}$ n'est continue (E′ étant muni de la topologie *forte*) que lorsque E est *normable*. En effet, si cette application est continue, il existe un voisinage V de O dans E et un ensemble borné B dans E tels que les relations $x \in V$, $x' \in B^0$, entraînent $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$; autrement dit, on a $V \subset B^{00}$, et comme $B^{00}$ est borné (prop. 1), V est borné, donc [9], E est normable. Nous étudierons au n° 14 la propriété qui se substitue à la continuité de $\langle x, x' \rangle$ dans $E \times E'$ lorsque E n'est pas normable.

Théorème 3. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$) *ou un espace* ($\mathcal{LF}$), H *une partie du dual* E′ *de* E. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe un voisinage* U *de* O *dans* E *tel que* $H \subset U^0$ ;

b) H *est fortement borné ;*

c) H *est faiblement borné ;*

d) H *est faiblement relativement compact* (4).

En effet, la proposition a) signifie que H est équicontinu dans E; elle entraîne donc b), c) et d) pour un espace localement convexe E quelconque. D'après le th. 2, a), b) et c) sont équivalentes lorsque E est un espace ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{LF}$); enfin, il est clair que d) entraîne c) pour un espace localement convexe E quelconque, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Si* E *est un espace* ($\mathcal{F}$) *ou un espace* ($\mathcal{LF}$), *la topologie de* E *est identique à la topologie* $\tau(E, E')$.

Ce résultat, qui est dû à Mackey pour les espaces ($\mathcal{F}$) ([12], p. 527, th. 10) provient du fait que si U est un voisinage convexe cerclé et fermé de O dans E, on a $U^{00} = U$ (prop. 1), et que toute partie faiblement compacte de E′ est contenue dans un ensemble $U^0$ d'après le th. 3.

Il ne sera peut-être pas inutile de résumer, pour la suite de ce travail, les relations entre voisinages et ensembles bornés dans un espace localement convexe séparé E et dans son dual *fort* E′ :

1° si U est un *voisinage* de O dans E, $U^0$ est *borné* et *faiblement compact* dans E′ ;

2° si B est un ensemble *borné* dans E, $B^0$ est un *voisinage de* O dans E′ ;

(4) Pour les espaces ($\mathcal{F}$), le th. 3 a été essentiellement démontré par Sirvint (cf. [12], p. 534, th. 19).

3° si V est un *voisinage* de O dans E′, $V^0$ est un ensemble *borné* dans E ;

4° lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$, si C est un ensemble *borné* dans E′, $C^0$ est un *voisinage de* O dans E.

Le dual fort E′ d'un espace $(\mathcal{F})$ E satisfait à la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* ([11], p. 182) ; autrement dit :

Proposition 8. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$. *Il existe dans le dual* E′ *une suite* $(C_n)$ *d'ensembles bornés telle que tout ensemble borné dans* E′ *soit contenu dans un des* $C_n$.

En effet, soit $(U_n)$ un système fondamental dénombrable de voisinages de O dans E ; pour tout voisinage U de O dans E, il existe un indice $n$ tel que $U_n \subset U$, d'où $U^0 \subset U_n^0$ ; d'après le th. 3, les ensembles $C_n = U_n^0$ répondent à la question.

On voit d'ailleurs de la même façon qu'inversement, si E est un espace localement convexe séparé qui vérifie la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey, son dual fort E′ est *métrisable*.

Corollaire. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ ; *tout filtre* $\Phi$ *sur* E′ *qui admet une base dénombrable et est un filtre de Cauchy pour la topologie faible, est un filtre borné.*

En effet, soit $(A_n)$ une base décroissante de $\Phi$. Si aucun des $A_n$ n'était borné, il existerait, pour tout $n$, un $x'_n \in A_n$ tel que $x'_n \notin C_n$ ; d'après la prop. 8, l'ensemble des $x'_n$ n'est donc pas borné ; mais le choix des $x'_n$ montre que la suite $(x'_n)$ est une suite de Cauchy pour la topologie faible, qui est bornée dans E′ (n° 2) ; nous aboutissons ainsi à une contradiction.

On notera que, *sur un espace* $(\mathcal{F})$, un filtre faiblement convergent et ayant une base dénombrable n'est pas nécessairement borné, comme le montre l'exemple du filtre des voisinages de O.

8. **Bidual. Espaces réflexifs et semi-réflexifs.** — Étant donné un espace localement convexe séparé E, le *bidual* (fort) E″ de E est le *dual fort* du dual *fort* E′ de E. Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $x' \rightarrow \langle x, x' \rangle$ sur E′ est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E)$, et a fortiori pour la topologie forte ; c'est donc un élément de E″ que nous noterons $\tilde{x}$, de sorte qu'on a identiquement $\langle x, x' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle$. L'application $x \rightarrow \tilde{x}$ est une *application linéaire biunivoque* de E dans E″, dite *canonique*. Si on identifie E à un sous-espace de E″ par cette application, la topologie induite sur E par la topologie *forte* de E″ est toujours *plus fine* que la topologie de E. En effet, soit U un

voisinage convexe, cerclé et fermé de O dans E ; l'ensemble polaire $U^0$ est *borné* dans $E'$ pour la topologie forte, car pour tout ensemble borné B dans E, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda U$, d'où $U^0 \subset \lambda B^0$, et on sait que les $B^0$ forment un système fondamental de voisinages de O dans $E'$. Désignons par $U^{00}$ l'ensemble polaire de $U^0$ *dans* $E''$ ; $U^{00} \cap E$ n'est autre que l'ensemble polaire de $U^0$ *dans* E, donc U (prop. 1) ; en d'autres termes, U est la trace sur E d'un voisinage fort de O dans $E''$ ce qui établit notre assertion. Mais en général, la topologie induite sur E par celle de $E''$ est *strictement plus fine* que celle de E, parce qu'il existera dans $E'$ des ensembles fortement bornés qui ne seront pas contenus dans un ensemble de la forme $U^0$. Toutefois, ce raisonnement et le th. 3 montrent aussitôt que :

PROPOSITION 9. — *Si* E *est un espace* $\mathfrak{F}$ *ou un espace* $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, *l'application canonique* $x \to \tilde{x}$ *de* E *dans son bidual* $E''$ *est un isomorphisme.*

Lorsqu'on considère un espace localement convexe séparé E comme plongé dans son bidual $E''$, la topologie faible $\sigma(E'', E')$ induit évidemment sur E la topologie faible $\sigma(E, E')$ ; en outre, E est *partout dense* dans $E''$ pour la topologie faible $\sigma(E'', E')$ ; de façon plus précise, le raisonnement fait ci-dessus prouve (compte tenu de la prop. 1) que les *adhérences faibles* dans $E''$ des *voisinages forts* de O dans E sont *des voisinages forts* de O dans $E''$. Si E est un espace $(\mathfrak{F})$ ou un espace $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, on obtient ainsi un *système fondamental de voisinages forts* de O dans $E''$ ; cela prouve en particulier que le bidual $E''$ d'un espace $(\mathfrak{F})$ est *métrisable*.

On notera que si B est un ensemble *borné, convexe et cerclé* dans E, son adhérence *faible* dans $E''$ est identique à l'ensemble polaire $B^{00}$ (dans $E''$) du voisinage $B^0$ de O dans $E'$ (prop. 1) ; c'est donc un ensemble *fortement borné* et *faiblement compact* dans $E''$. Mais, même lorsque E est un espace $(\mathfrak{F})$ (non normable) ou un espace $(\mathfrak{L}\mathfrak{F})$, on ignore si *tout* ensemble fortement borné dans $E''$ est *contenu* dans un ensemble $B^{00}$ ; nous dirons qu'un espace E est *distingué* s'il a cette propriété.

Nous dirons qu'un espace localement convexe séparé E est *réflexif* si l'application canonique $x \to \tilde{x}$ est un *isomorphisme* de E *sur* $E''$. Tout espace réflexif est *distingué*.

Nous dirons que E est *semi-réflexif* si $x \to \tilde{x}$ applique E sur $E''$, mais n'est pas nécessairement un isomorphisme [5]. Dire que E est

[5] Nous verrons plus loin (note [7]) des exemples très simples d'espaces semi-réflexifs et non réflexifs.

un espace semi-réflexif signifie encore que dans E′ *tout ensemble convexe fortement fermé est faiblement fermé.*

Pour que l'espace E soit *semi-réflexif*, il faut et il suffit, d'après le th. de Mackey-Arens (cf. n° 2) que *tout ensemble faiblement fermé et borné dans* E *soit faiblement compact* (ce résultat a été obtenu indépendamment par G. Köthe). En effet, cette condition entraîne que tout ensemble *convexe* fermé et borné dans E est faiblement compact, et par suite que la topologie forte sur E′ est identique à $\tau(E', E)$, d'où résulte que $E'' = E$ d'après le th. de Mackey-Arens. Réciproquement, le même raisonnement montre que si $\tau(E', E)$ est identique à la topologie forte sur E′, tout ensemble convexe, cerclé, fermé et borné dans E est contenu dans un ensemble faiblement compact, donc est faiblement compact ; comme tout ensemble faiblement fermé et borné est contenu dans un ensemble convexe, cerclé, fermé et borné, il est faiblement compact. Ce résultat, joint à la prop. 9, montre donc que :

Théorème 4. — *Si* E *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *pour que* E *soit réflexif, il faut et il suffit que tout ensemble faiblement fermé et borné dans* E *soit faiblement compact.*

En d'autres termes, un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$ qui est semi-réflexif, est réflexif.

Un cas important où la condition du th. 4 est vérifiée se présente lorsque l'espace E vérifie la condition plus restrictive suivante : *tout ensemble fortement fermé et borné est fortement compact.* Il est bien connu qu'un espace de Banach ne peut satisfaire à cette condition que s'il est de dimension finie ; mais il n'en est pas de même des espaces $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$. Nous dirons qu'un espace $(\mathcal{F})$ $\big($resp. $(\mathcal{LF})\big)$ satisfaisant à cette condition est un *espace* $(\mathcal{M})$ $\big($resp. $(\mathcal{LM})\big)$. Par exemple, il est classique que l'espace des *fonctions entières* (n° 3) est un espace $(\mathcal{M})$. De même, dans l'espace $\mathcal{D}_K$ (n° 2), si H est un ensemble borné, il résulte du th. des accroissements finis que H est *équicontinu,* et il en est de même de l'ensemble $H^{(k)}$ des dérivées $k$-èmes des fonctions de H, quel que soit l'entier $k > 0$. Le th. d'Ascoli $\big($[2], chap. x, § 4, th. 1$\big)$ montre alors que si $\Phi$ est un ultrafiltre sur H, la fonction $f$ converge uniformément dans K vers une limite ainsi que toutes ses dérivées, suivant l'ultrafiltre $\Phi$, autrement dit, H est relativement compact pour la topologie forte, donc $\mathcal{D}_K$ est un espace $(\mathcal{M})$. Quant aux espaces $(\mathcal{LM})$, il résulte immédiatement des prop. 2 et 4 qu'on peut les caractériser comme des espaces $(\mathcal{LF})$ ayant une suite de définition $(E_n)$ formée d'espaces $(\mathcal{M})$. En particulier, l'espace $\mathcal{D}$ (n° 3) est un espace $(\mathcal{LM})$.

Proposition 10. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{M})$ *ou un espace* $(\mathcal{LM})$. *Dans le dual* E′ *tout ensemble borné et fortement fermé est fortement compact.*

En effet, un tel ensemble H est équicontinu (th. 3) et la topologie faible sur H est identique à la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties compactes de E ; mais en vertu de l'hypothèse, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{T}_b$ sont identiques sur E′, donc sur H les topologies faible et forte coïncident ; si H est convexe, H est faiblement fermé, donc (th. 3) faiblement compact, et par suite fortement compact ; sinon l'enveloppe convexe fortement fermée de H est bornée, donc fortement compacte, et par suite il en est de même de H.

Nous venons de voir dans la prop. 10 que sur un ensemble H borné dans E′ les topologies forte et faible coïncident ; il en est de même sur un ensemble B borné dans E : en effet, en se limitant au cas où B est convexe et fermé, B est compact à la fois pour la topologie forte et pour la topologie faible, donc ces topologies induisent la même topologie sur B ([4], chap. I, § 10, th. 1).

On en conclut que, dans E ou dans E′, une *suite faiblement convergente* est aussi *fortement convergente* (vers la même limite), l'ensemble de ses éléments étant borné. Il en résulte que si $\Phi$ est un filtre à base *dénombrable* sur E ou E′, qui est *faiblement convergent*, il est aussi *fortement convergent* ; sinon ([4], chap. I, § 5, prop. 10), il existerait un filtre élémentaire plus fin que $\Phi$, faiblement convergent mais non fortement convergent, contrairement à ce qu'on vient de voir.

**9. Dual fort d'un sous-espace. Dual fort d'un espace quotient.** — Soit E un espace localement convexe séparé, V un sous-espace vectoriel fermé de E. On sait ([5], p. 116) qu'il existe une application linéaire biunivoque (dite *canonique*) du dual V′ de V sur l'espace quotient $E'/V^0$ du dual E′ de E par le sous-espace $V^0$ orthogonal à V ; en outre, si on munit V′ de la topologie faible $\sigma(V', V)$, et $E'/V^0$ de la topologie quotient par $V^0$ de la topologie $\sigma(E', E)$, cette application canonique est un *isomorphisme*.

Considérons maintenant sur $E'/V^0$ la topologie quotient par $V^0$ de la topologie *forte* de E′ ; on a un système fondamental de voisinages de O pour cette topologie en prenant les images canoniques (par l'homomorphisme canonique $\varphi$ de $E'$ sur $E'/V^0$) des ensembles $B^0+V^0$, où B parcourt l'ensemble des parties *bornées,* fermées, convexes et cerclées de E. Mais, comme $E'/V^0$ est séparé, les voisinages *fermés* de O dans cet espace forment un système fondamental de voisinages de O ; pour un tel voisinage U, $\overset{-1}{\varphi}(U)$ contient donc l'adhérence *forte* d'un ensemble de la forme $B^0+V^0$ ; autrement dit, les images canoniques par $\varphi$ des adhérences fortes des ensembles convexes $B^0+V^0$ dans $E'$ forment un système fondamental de voisinages de O dans $E'/V^0$. Supposons maintenant que E soit *semi-réflexif,* donc que dans $E'$ les adhérences forte et faible d'un ensemble convexe soient identiques ; alors l'adhérence forte de $B^0+V^0$ dans $E'$ est identique à $(B \cap V)^0$ (cor. de la prop. 1). Mais $B \cap V$ parcourt l'ensemble des parties bornées, fermées, convexes et cerclées de V ; donc nous avons démontré la première partie de la proposition suivante :

Proposition 11. — *Soit* E *un espace semi-réflexif,* V *un sous-espace fermé de* E. *Quand on munit* $V'$ *de la topologie forte, et* $E'/V^0$ *de la topologie quotient par* $V^0$ *de la topologie forte de* $E'$, *l'application canonique de* $V'$ *sur* $E'/V^0$ *est un isomorphisme ; en outre* V *est semi-réflexif.*

La seconde partie est immédiate, car la topologie faible $\sigma(V, V')$ est identique à la topologie induite sur V par $\sigma(E, E')$ ([5], p. 116), et comme tout ensemble borné dans E est faiblement relativement compact, il en est de même de tout ensemble borné dans V.

Corollaire. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *réflexif,* V *un sous-espace fermé de* E. V *est un espace* $(\mathcal{F})$ *réflexif, et son dual fort est isomorphe à* $E'/V^0$, *muni de la topologie quotient par* $V^0$ *de la topologie forte de* $E'$.

Le même corollaire s'applique à un espace $(\mathcal{LF})$ E et à un sous-espace fermé V de E, *pourvu qu'on sache que* V *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{LF})$, résultat que nous ne savons démontrer ni infirmer dans le cas général. En tout cas, si $(E_n)$ est une suite de définition de E, et si E est réflexif, chacun des $E_n$ est réflexif et $E_n'$ est isomorphe (fortement) à $E'/E_n^0$ ; d'ailleurs il résulte aussitôt du th. 4 et de la prop. 4 que réciproquement, lorsque chacun des espaces $E_n$ est réflexif, E est lui-même réflexif.

Reprenons un espace localement convexe séparé E quelconque, et un sous-espace fermé V de E. On sait qu'il existe une application linéaire biunivoque (dite *canonique*) du dual de l'espace quotient E/V sur le sous-espace $V^0$ de $E'$ orthogonal à $V$ ; en outre si on munit $(E/V)'$ de la topologie faible, et $V^0$ de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E', E)$, cette application canonique est un *isomorphisme* ([5], p. 117, th. 8). Si on considère maintenant sur $(E/V)'$ la topologie forte, on aura un système fondamental de voisinages de O pour cette topologie en considérant les images réciproques, par l'application canonique, des parties $(C+V)^0 = C^0 \cap V^0$ de $V^0$, où C parcourt l'ensemble des parties de E dont l'image canonique dans E/V est *bornée*. Il est clair que si C est borné *dans* E, son image canonique dans E/V est bornée, mais rien ne permet d'affirmer a priori que pour tout ensemble borné K *dans* E/V, il existe un ensemble borné dans E dont l'image canonique dans E/V contienne K. On peut donc seulement dire que l'application canonique de $(E/V)'$ sur $V^0$ est *fortement continue*, mais, lorsque E n'est pas un espace normable rien ne permet de dire que cette application soit un isomorphisme fort.

10. **La topologie $\mathcal{T}_c$ sur le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ ou d'un espace $(\mathcal{LF})$.** Sur le dual $E'$ d'un espace localement convexe séparé E, la topologie $\mathcal{T}_c$ de la convergence uniforme dans les parties compactes de E est en général distincte de la topologie faible et de la topologie forte ; elle ne peut être identique à la topologie faible que si tout ensemble compact dans E est de dimension *finie*, et elle ne peut être identique à la topologie forte que si tout ensemble borné dans E est contenu dans l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact ; lorsque E est *complet*, cela entraîne que tout ensemble *borné* dans E est (*fortement*) *relativement compact*. En particulier, si E est un espace $(\mathcal{F})$, $\mathcal{T}_c$ ne peut être identique à la topologie faible que si E est de *dimension finie* (car dans un espace $(\mathcal{F})$ de dimension infinie, il existe une suite fortement convergente vers O et engendrant un sous-espace de dimension infinie) ; et $\mathcal{T}_c$ ne peut être identique à la topologie forte que si E est un espace $(\mathcal{M})$ (n° 8). De là, on déduit aussitôt que si E est un espace $(\mathcal{LF})$, $(E_n)$ une suite de définition de E, la topologie $\mathcal{T}_c$ sur $E'$ ne peut être identique à la topologie faible que si les $E_n$ sont de dimension finie, et elle ne peut être identique à la topologie forte que si les $E_n$ sont des espaces $(\mathcal{M})$, c'est-à-dire si E est un espace $(\mathcal{LM})$.

PROPOSITION 12. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Le dual* $E'$, *muni de la topologie* $\mathcal{T}_c$, *est complet.*

En effet, soit $\Phi$ un filtre de Cauchy sur $E'$ pour la structure uniforme déduite de $\mathcal{T}_c$; il converge simplement (dans E) vers une forme linéaire $u_0$ sur E, et comme $\Phi$ converge uniformément dans toute partie compacte de E, $u_0$ est continue dans toute partie compacte de E. La prop. 12 est donc équivalente à la suivante :

PROPOSITION 13. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Toute forme linéaire* $u_0$ *sur* E, *continue dans toute partie compacte de* E, *est continue dans* E.

Supposons d'abord que E soit un espace $(\mathcal{F})$; si $u_0$ n'était pas continue dans E, il existerait (puisque E est métrisable) une suite $(x_n)$ de points de E tendant vers O et telle que $u_0(x_n) = 1$ pour tout $n$; $u_0$ ne serait donc pas continue dans l'ensemble compact formé des $x_n$ et de O. Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, et $(E_n)$ une suite de définition de E, le raisonnement précédent montre que $u_0$ est continue dans chacun des $E_n$, donc dans E (prop. 5).

COROLLAIRE. — *L'espace* $E'$, *muni de la topologie* $\tau(E', E)$, *est complet*.

En effet, si $\Phi$ est un filtre de Cauchy sur $E'$ pour la topologie $\tau(E', E)$, il converge simplement vers une forme linéaire $u_0$ sur E, qui est continue dans toute partie convexe et faiblement compacte de E, et a fortiori dans toute partie fortement compacte K de E (l'enveloppe fermée convexe de K étant fortement compacte) ; donc $u_0 \in E'$, ce qui démontre le corollaire.

PROPOSITION 14. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Le dual de* $E'$ *muni de la topologie* $\mathcal{T}_c$, *est identique à* E.

Cette proposition est vraie, plus généralement, pour tout espace E où *l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact*, car alors la topologie $\mathcal{T}_c$ sur $E'$ est *moins fine* que $\tau(E', E)$, donc, en vertu du th. de Mackey-Arens (cf. n° 2), le dual de $E'$ muni de $\mathcal{T}_c$ est identique à E. La condition précédente est remplie lorsque E est *complet*, puisque l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est toujours un ensemble précompact ; en particulier elle est remplie pour un espace $(\mathcal{F})$. Elle est aussi remplie pour un espace $(\mathcal{LF})$, car si $(E_n)$ est une suite de définition d'un tel espace E, tout ensemble compact dans E est contenu dans un $E_n$ (prop. 4) [6].

[6] Voici par contre un exemple où cette condition n'est pas vérifiée. Soit F un espace de Hilbert séparable, $(e_n)$ une base orthonormale de F, E le sous-espace de F engendré par les $e_n$ (espace des combinaisons linéaires finies des $e_n$, qui est partout dense dans F); le dual $E'$ de E est identique à F. Nous allons voir que, dans E, tout ensemble *convexe*

COROLLAIRE. — *L'espace* E', *muni de la topologie* $\mathcal{T}_c$, *est semi-réflexif* (7).

Nous allons maintenant généraliser aux espaces ($\mathcal{F}$) un théorème connu de la théorie des espaces de Banach ([2], p. 119-121) :

THÉORÈME 5. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$). *La topologie* $\mathcal{T}_c$ *sur* E' *est la plus fine des topologies* $\mathcal{T}$ *sur* E' *qui, sur toute partie bornée de* E', *induisent la même topologie que la topologie faible.*

Le th. 2 prouve que les topologies induites par $\mathcal{T}_c$ et par la topologie faible sur une partie bornée quelconque de E' sont identiques. Soit inversement $\mathcal{T}$ une topologie ayant cette propriété ; nous allons prouver que si W est un ensemble ouvert pour $\mathcal{T}$ et contenant O, W est un voisinage de O pour $\mathcal{T}_c$, ce qui démontrera le théorème. Soit $(U_n)$ une suite décroissante de voisinages convexes, cerclés et fermés de O dans E, formant un système fondamental de voisinages. Le théorème sera une conséquence du lemme suivant :

LEMME. — *Pour tout entier* $n \geqslant 0$, *il existe un ensemble fini* $B_n \subset U_n$ *tel que, si on pose* $A_n = \bigcup_{p=0}^{n-1} B_p$, *l'ensemble* $U_n^0 \cap A_n^0$ *soit contenu dans* W.

Supposons ce lemme démontré ; la réunion A des $A_n$ et de O est évidemment un ensemble compact dans E ; on a $A^0 \subset A_n^0$ pour

et *faiblement compact* K est nécessairement de dimension *finie*. En effet, supposons K de dimension infinie : il existe alors une suite croissante $(n_k)$ d'entiers, et une suite $(a_k)$ de points de K telle que la composante de $a_k$ sur $e_{n_k}$ soit $\neq 0$ et que pour tout $h < k$, les composantes de $a_h$ sur les $e_n$ d'indice $n \geqslant n_k$ soient toutes nulles. Définissons alors par récurrence une suite $(t_k)$ de nombres réels $> 0$ tels que $\sum_{k=1}^{\infty} t_k < +\infty$, et que, dans $t_{k+1}a_{k+1}$, le coefficient de chacun des $e_{n_h}$ d'indice $h \leqslant k$ soit, en valeur absolue, au plus égal au coefficient du même $e_{n_h}$ dans $\sum_{i=1}^{k} t_i a_i$, multiplié par $1/4^k$. Comme K est borné, la série $\sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k$ est convergente dans F vers un élément $a$, qui a une composante $\neq 0$ sur chacun des $e_{n_k}$ en raison du choix des $t_k$ ; si $t = \sum_{k=1}^{\infty} t_k$, $a/t$ est limite forte dans F d'une suite d'éléments appartenant à l'ensemble convexe K ; il est donc aussi limite faible de cette suite, et comme K est supposé faiblement compact, $a/t$ devrait appartenir à K, ce qui est impossible par construction. Par contre, il existe dans E des ensembles fortement compacts (et à plus forte raison faiblement compacts) et de dimension infinie, par exemple l'ensemble formé de O et des $e_n/n$. On notera qu'il résulte de ce qui précède que, sur E', la topologie $\tau(E', E)$ est *identique à la topologie faible* $\sigma(E', E)$ et par suite que E' n'est pas complet pour cette topologie.

(7) Si E n'est pas un espace ($\mathcal{M}$) ou un espace ($\mathcal{LM}$), on voit donc que E', muni de la topologie $\mathcal{T}_c$, est un espace *semi-réflexif*, mais *non réflexif*.

tout $n$, donc $A^0 \cap U_n^0 \subset W$ pour tout $n$, et comme la réunion des $U_n^0$ est l'espace E' tout entier, on a $A^0 \subset W$, et $A^0$ est un voisinage de O pour $\mathcal{T}_c$.

Pour démontrer le lemme, raisonnons par récurrence sur $n$ : supposons les ensembles $B_p$ définis pour $p < n$ de sorte que $U_n^0 \cap A_n^0 \subset W$, et considérons l'ensemble $K_n$, intersection de $U_{n+1}^0$ et du complémentaire de W. La topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $U_{n+1}^0$ étant identique par hypothèse à la topologie induite par la topologie faible, $K_n$ est faiblement fermé dans $U_{n+1}^0$, et comme $U_{n+1}^0$ est faiblement compact, il en est de même de $K_n$. Supposons qu'il n'existe aucun ensemble fini $B_n \subset U_n$ ayant la propriété voulue ; alors, pour tout ensemble fini $B \subset U_n$, $(A_n \cup B)^0 \cap U_{n+1}^0$ ne serait pas contenu dans W, donc $A_n^0 \cap B^0 \cap K_n$ ne serait pas vide. Mais, lorsque B parcourt l'ensemble des parties finies de $U_n$, les ensembles $A_n^0 \cap B^0 \cap K_n$ forment évidemment une base de filtre sur l'ensemble faiblement compact $K_n$ ; comme ils sont faiblement fermés, ils auraient donc un point commun $x'_0$, qui appartiendrait donc à $A_n^0 \cap U_n^0 \cap K_n$, puisque $U_n$ est la réunion de ses parties finies B ; mais par hypothèse $A_n^0 \cap U_n^0 \cap K_n$ est vide, et nous arrivons à une contradiction, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Pour qu'un sous-espace vectoriel* H *de* E' *soit faiblement fermé, il suffit que son intersection avec tout ensemble borné et faiblement fermé dans* E' *soit faiblement compacte.*

En effet, l'intersection de H avec tout ensemble borné M dans E' est alors fermé pour la topologie induite sur M par la topologie faible, car c'est la trace sur M de $H \cap \overline{M}$ ($\overline{M}$ adhérence faible de M) qui est faiblement fermé par hypothèse ; le th. 5 montre par suite que H est fermé pour la topologie $\mathcal{T}_c$, donc intersection d'une famille d'hyperplans fermés pour $\mathcal{T}_c$ ; mais d'après la prop. 14, tout hyperplan fermé pour $\mathcal{T}_c$ est faiblement fermé, donc H est faiblement fermé.

Théorème 6. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$ ; *toute forme linéaire* $u$ *sur* E', *dont la restriction à toute partie bornée de* E' *est faiblement continue, est faiblement continue dans* E' (autrement dit, est de la forme $x' \to \langle x, x' \rangle$ avec $x \in E$).

Nous démontrerons le théorème en plusieurs étapes.

*a*) Supposons d'abord que E soit un espace $(\mathcal{F})$, et soit $H = \overset{-1}{u}(0)$ ; l'hypothèse entraîne que l'intersection de H avec toute partie bornée et faiblement fermée de E' est faiblement fermée ;

d'après le cor. du th. 5, H est faiblement fermé, donc $u$ est faiblement continue.

*b*) Supposons désormais que E soit un espace $(\mathcal{LF})$, et soit $(E_n)$ une suite de définition de E. Montrons en premier lieu qu'il existe un indice $n$ tel que $u(x') = 0$ dans $E_n^0$. En effet, dans le cas contraire, en remplaçant au besoin $(E_n)$ par une suite extraite, il existerait une suite $(x'_n)$ de points de E', telle que $x'_n \in E_n^0$ et $x'_n \notin E_{n+1}^0$, et que $u(x'_n) = 1$ pour tout $n$. Mais tout $x \in E$ appartient à un $E_n$, donc $\langle x, x'_n \rangle = 0$ à partir d'un certain rang : cela signifie que la suite $(x'_n)$ converge faiblement vers O, donc est bornée dans E'. Mais si B est l'ensemble borné formé de O et des $x'_n$, $u$ est par hypothèse faiblement continue dans B, et nous arrivons donc à une contradiction, ce qui établit notre assertion.

*c*) Soit $\theta$ l'application canonique du dual $E'_n$ de $E_n$ sur l'espace quotient $E'/E_n^0$ ; on sait (n° 9) que $\theta$ est un isomorphisme faible, mais peut-être pas un isomorphisme fort. Étudions les ensembles *bornés* dans $E'_n$ ; comme $E_n$ est un espace $(\mathcal{F})$, on peut se borner à considérer les ensembles polaires $W^0$ *dans* $E'_n$ des voisinages convexes, cerclés et fermés W de O dans $E_n$. Or, un tel voisinage est de la forme $V \cap E_n$, où V est un voisinage convexe, cerclé est fermé de O dans E. Si $\varphi$ est l'homomorphisme canonique de E' sur $E'/E_n^0$, il résulte aussitôt des définitions que $W^0$ n'est autre que l'ensemble $\overset{-1}{\theta}\big(\varphi((V \cap E_n)^0)\big)$, $(V \cap E_n)^0$ étant l'ensemble polaire de $V \cap E_n$ *dans* E'. Or, $V^0$ est faiblement compact, donc $V^0 + E_n^0$ est faiblement fermé dans E' $\big([4]$, chap. III, § 3, exerc. 15$\big)$ ; il en résulte (cor. de la prop. 1) que $(V \cap E_n)^0 = V^0 + E^0$. On voit donc que tout ensemble borné dans $E'_n$ est contenu dans un ensemble de la forme $\overset{-1}{\theta}\big(\varphi(V^0 + E_n^0)\big)$.

*d*) Comme on a $u(x') = 0$ dans $E_n^0$, $u$ définit, par passage au quotient, une forme linéaire $\bar{u}$ sur $E'/E_n^0$ telle que $u = \bar{u} \circ \varphi$, donc aussi une forme linéaire $v = \bar{u} \circ \theta$ sur $E'_n$. Il suffit de prouver que $v$ est *faiblement continue* dans $E'_n$, et pour cela, d'après *a*), que l'intersection de $L = \overset{-1}{v}(0)$ et de toute partie bornée et faiblement fermée de $E'_n$ est faiblement fermée. Or, si $H = \overset{-1}{u}(0)$, on a $E_n^0 \subset H$, donc $H \cap (V^0 + E_n^0) = (H \cap V^0) + E_n^0$ ; d'après l'hypothèse, $H \cap V^0$ est faiblement compact, donc $\big([4]$, chap. III, § 3, exerc. 15$\big)$ $(H \cap V^0) + E_n^0$ est faiblement fermé ; comme

$$L \cap \overset{-1}{\theta}\big(\varphi(V^0 + E_n^0)\big) = \overset{-1}{\theta}\Big(\varphi\big(H \cap (V^0 + E_n^0)\big)\Big)$$

et que $\theta$ est un isomorphisme faible, le théorème est complètement démontré, compte tenu de $c$).

Corollaire. — *Tout espace* $(\mathcal{LF})$ *est complet* [8].

Soit $\Phi$ un filtre de Cauchy sur un espace $(\mathcal{LF})$ E ; la topologie forte sur E est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E′ (prop. 9), donc $\Phi$ converge simplement (dans le dual algébrique $E'^*$ de E′) vers une forme linéaire $u$ sur E′, qui est faiblement continue dans toute partie bornée de E′, puisqu'elle est limite uniforme dans toute partie bornée de E′ de formes linéaires faiblement continues dans cette partie. Le th. 6 montre que $u$ est faiblement continue dans E′, donc de la forme $x' \to \langle x, x' \rangle$ où $x \in E$ ; par suite $\Phi$ converge fortement vers $x$.

Proposition 15. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, V *un sous-espace fermé de* E. *L'application canonique du dual* V′ *de* V *sur l'espace quotient* $E'/V^0$ *est un isomorphisme quand on munit* V′ *de la topologie* $\mathcal{T}_c$ *et* $E'/V^0$ *de la topologie quotient de* $\mathcal{T}_c$ *par* $V^0$ (cf. [6]).

La démonstration est analogue à celle de la prop. 11 : si $\varphi$ est l'homomorphisme canonique de E′ sur $E'/V^0$, un système fondamental de voisinages de 0 dans $E'/V^0$ pour la topologie quotient de $\mathcal{T}_c$ par $V^0$ est formé des images par $\varphi$ des adhérences, *pour la topologie* $\mathcal{T}_c$, des ensembles $K^0 + V^0$, où K parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de E. Mais d'après la prop. 14, l'adhérence de $K^0 + V^0$ pour $\mathcal{T}_c$ est identique à l'adhérence *faible* de cet ensemble, donc à $(K \cap V)^0$ (cor. de la prop. 1) ; or $K \cap V$ parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de V quand K parcourt l'ensemble des parties compactes, convexes et cerclées de E, d'où la proposition.

Cette démonstration s'applique d'ailleurs à tout espace E où l'enveloppe fermée convexe d'un ensemble compact est un ensemble compact, puisque la prop. 14 est valable pour un tel espace.

## 11. Suites faiblement convergentes dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$.

Commençons par généraliser aux espaces $(\mathcal{F})$ un théorème de Banach ([2], p. 124, th. 4) :

Proposition 16. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *dans lequel il existe un*

[8] M. Köthe nous a communiqué une démonstration directe plus simple de cette proposition.

*ensemble dénombrable partout dense (pour la topologie forte) ; il existe alors dans le dual* E′ *un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie faible.*

En effet, considérons un système fondamental dénombrable $(U_n)$ de voisinages de O, qu'on peut supposer convexes et cerclés. Soit $(a_n)$ une suite de points partout dense dans E; pour tout entier $m$, l'ensemble des points $(\langle a_k, x'\rangle)_{1\leqslant k\leqslant m}$, où $x'$ parcourt $U_n^0$, est une partie $F_{mn}$ de l'espace de dimension finie $\mathbf{C}^m$; il existe donc une partie dénombrable $B_{mn}$ de $U_n^0$ tel que l'image par l'application $x'\to(\langle a_k, x'\rangle)_{1\leqslant k\leqslant m}$ de $B_{mn}$ soit partout dense dans $F_{mn}$. Soit $B_n$ la réunion (dénombrable) des $B_{mn}$; par définition, pour tout $\varepsilon>0$, tout $x'\in U_n^0$ et tout entier $m$, il existe $b'\in B_n$ tel que $|\langle a_k, x'-b'\rangle|\leqslant\varepsilon$ pour $1\leqslant k\leqslant m$; d'autre part, si $(c_h)_{1\leqslant h\leqslant p}$ est une suite finie quelconque de points de E, il existe $p$ indices $k_h$ tels que $c_h - a_{k_h}\in\varepsilon U_n$, donc $|\langle c_h, z'\rangle-\langle a_{k_h}, z'\rangle|\leqslant\varepsilon$ pour tout $z'\in U_n^0$; il existe donc $b'\in B_n$ tel que $|\langle c_h, x'-b'\rangle|\leqslant 3\varepsilon$ pour $1\leqslant h\leqslant p$, ce qui montre que $B_n$ est faiblement partout dense dans $U_n^0$. Comme E′ est la réunion des $U_n^0$, la réunion (dénombrable) B des $B_n$ est faiblement partout dense dans E′, ce qui démontre la proposition.

Nous allons nous appuyer sur cette proposition pour généraliser deux résultats démontrés par Šmulian [14] et Eberlein [7] pour les espaces de Banach.

PROPOSITION 17. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *et soit* $(x_n)$ *une suite de points de* E *telle que toute suite extraite de* $(x_n)$ *admette une valeur d'adhérence faible dans* E. *Alors il existe une suite extraite de* $(x_n)$ *qui est faiblement convergente vers un point de* E.

Si V est le sous-espace vectoriel fermé engendré par les $x_n$, tout revient à démontrer la proposition dans le sous-espace V, puisque la topologie $\sigma(V, V')$ est induite sur V par $\sigma(E, E')$.

D'autre part, l'hypothèse entraîne que l'ensemble B des $x_n$ est *borné*; sans quoi, il existerait $x'\in E'$ et une suite $(x_{n_k})$ extraite de $(x_n)$ telle que $|\langle x_{n_k}\ x'\rangle|\geqslant k$, et la suite $(x_{n_k})$ n'admettrait donc pas de valeur d'adhérence faible. Compte tenu de la prop. 4, on voit donc qu'on est ramené à démontrer la proposition lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ dans lequel existe un ensemble dénombrable fortement partout dense. On peut alors répéter presque sans modification le raisonnement de Šmulian [14], que nous allons rappeler pour être complet. D'après la prop. 16, il existe dans E′ une suite $(a'_n)$ faiblement partout dense. Or, par hypothèse, pour tout $x'\in E'$, on peut extraire de $(x_n)$ une suite partielle $(x_{n_k})$ telle que $\langle x_{n_k}, x'\rangle$ ait une limite. Par le procédé diagonal, on peut donc extraire de $(x_n)$ une suite $(y_n)$ telle que, pour *tout* indice $p$, $\langle y_n, a'_p\rangle$ ait une limite. Par hypothèse, la suite $(y_n)$ a une valeur d'adhérence faible $y$ ; montrons que cette valeur d'adhérence est la *seule* ; en effet, si $z$ est une autre valeur d'adhérence faible de $(y_n)$ la limite de $\langle y_n, a'_p\rangle$ devant être à la fois égale à $\langle y, a'_p\rangle$ et à $\langle z, a'_p\rangle$, on a $\langle y-z, a'_p\rangle = 0$ pour tout $p$, et comme $(a'_p)$ est une suite faiblement partout dense dans E′, $y = z$. Il en résulte que $y$ est *limite faible* de la suite $(y_n)$, car dans le cas contraire, il y aurait un voisinage V de $y$ tel qu'il existe une suite infinie $(y_{n_k})$ extraite de $(y_n)$ et formée de points n'appartenant pas à V ; cette suite aurait par hypothèse une valeur d'adhérence faible $z \neq y$, qui serait aussi valeur d'adhérence faible de $(y_n)$, ce qui est absurde[9].

PROPOSITION 18. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Pour qu'une partie* A *de* E *soit relativement faiblement compacte dans* E, *il suffit que toute suite de points de* A *admette une valeur d'adhérence faible dans* E.

En premier lieu, on voit comme dans la prop. 17 que cette condition entraîne que A est *borné* dans E, donc (prop. 4) on peut se limiter au cas où E est un espace $(\mathcal{F})$. Remarquons que dans le bidual E″ de E, l'ensemble $A^{00}$ est compact pour la topologie faible $\sigma(E'', E')$, puisque $A^0$ est un voisinage de O dans E′ ; comme $A \subset A^{00}$, il suffit de prouver que l'adhérence faible de A *dans* E″ est *contenue dans* E. Or, soit $x'' \in E''$ un point faiblement adhérent à A ; en vertu du th. 6, il suffit de prouver que, pour tout voisinage convexe et cerclé U de O dans E, $x''$ est une forme linéaire *faiblement continue dans* $U^0$. Nous allons raisonner par l'absurde, en calquant la démonstration sur celle d'Eberlein [7]. Si la proposition n'était pas vraie il existerait un nombre $\alpha > 0$ tel que, dans tout voisinage faible de O dans $U^0$, il existe un point $x'$ pour

(9) Il n'est peut-être pas inutile d'observer que la proposition analogue à la prop. 17 pour le *dual* E′ d'un espace $(\mathcal{F})$ est inexacte si E n'est pas réflexif. Prenons en effet pour E l'espace de toutes les suites bornées $x = (x_n)$ de nombres complexes, muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$, qui en fait un espace de Banach. Soit $e'_n$ la forme linéaire continue définie dans E par la condition $\langle x, e'_n\rangle = x_n$ ($n$-ème forme coordonnée). Dans le dual E′, la suite $(e'_n)$ est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence faible, toute boule fermée étant faiblement compacte dans E′. Mais *aucune suite* $(e'_{n_k})$ *extraite de* $(e'_n)$ *n'admet de limite faible :* il existe toujours en effet un élément $x = (x_n)$ de E tel que $x_{n_k}$ soit égal à 0 pour une infinité de valeurs de $k$ et à 1 pour une infinité de valeurs de $k$.

lequel $|\langle x'', x'\rangle| \geqslant \alpha$ ; on en déduit aisément qu'on pourrait alors déterminer par récurrence une suite $(x_n)$ de points de A et une suite $(x'_n)$ de points de $U^0$ tels que $|\langle x'', x'_n\rangle| \geqslant \alpha$ pour tout $n$, $|\langle x_m, x'_n\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour $m \leqslant n$ et $|\langle x'' - x_n, x'_m\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour $n \geqslant m + 1$ : il suffit de prendre $x_1$ arbitraire dans A, et de déterminer les $x_n$ et $x'_n$ dans l'ordre $x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n$, etc. D'après la prop. 17, en extrayant au besoin une suite partielle de $(x_n)$, on peut supposer que la suite $(x_n)$ *converge faiblement* vers un point $x \in$ E. Désignons par C l'ensemble convexe engendré par la suite $(x_n)$ ; cet ensemble rencontre le voisinage $x + \frac{\alpha}{4}U$ de $x$, car dans le cas contraire, il existerait un hyperplan réel fermé H séparant $x + \frac{\alpha}{4}$ U et C, en vertu du th. de Hahn-Banach, et on en conclut aisément que $x$ ne pourrait être limite faible de la suite $(x_n)$. Il existe donc une combinaison linéaire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ telle que $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et $x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in \frac{\alpha}{4}$ U ; on en déduit $\left|\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,\ x'\right\rangle\right| \leqslant \frac{\alpha}{4}$ pour tout $x' \in U^0$ ; en particulier $\left|\langle x, x'_{n+1}\rangle - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x'_{n+1}\rangle\right| \leqslant \frac{\alpha}{4}$, d'où, en raison du choix des $x'_n$, $|\langle x, x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ ; on a d'autre part, en passant à la limite $|\langle x'' - x, x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{\alpha}{4}$, d'où $|\langle x'', x'_{n+1}\rangle| \leqslant \frac{3\alpha}{4}$, contrairement à la définition de $x'_n$, ce qui achève la démonstration.

12. **Continuité forte et continuité faible.** — Soient E, F deux espaces localement convexes séparés ; on sait que toute application linéaire continue $u$ de E dans F est aussi faiblement continue ([5], p. 122, th. 15).

Pour toute application linéaire continue $u$ d'un espace localement convexe séparé E dans un espace localement convexe séparé F, nous désignerons par $u'$ la *transposée* de $u$, c'est-à-dire l'application linéaire faiblement continue de F′ dans E′ satisfaisant à l'identité

$$(1) \qquad \langle u(x),\ y'\rangle = \langle x,\ u'(y')\rangle$$

où $x \in$ E et $y' \in$ F'. Cette identité montre donc que, pour tout ensemble borné B dans E, on a $u'\Big(\big(u(B)\big)^0\Big) \subset B^0$ ; $u(B)$ étant borné dans F, on en déduit que $u'$ est *fortement continue* dans F' $\big([1]$, p. 790, th. 1$\big)$.

Proposition 19. — *Soient* E, F, E', F' *quatre espaces vectoriels tels que* E *et* F (resp. E' *et* F') *puissent être identifiés à des sous-espaces vectoriels des duals algébriques de* E' *et* F' (resp. E *et* F) (cf. n° 2). *Alors, toute application linéaire u de* E *dans* F, *continue pour les topologies* $\sigma(E, E')$ *et* $\sigma(F, F')$, *est aussi continue pour les topologies* $\tau(E, E')$ *et* $\tau(F, F')$.

En effet, $u'$ étant faiblement continue dans F', transforme tout ensemble K convexe et faiblement compact dans F' en un ensemble convexe et faiblement compact dans E' ; d'après (1), on a $u\Big(\big(u'(K)\big)^0\Big) \subset K^0$, donc $u$ est continue pour $\tau(E, E')$ et $\tau(F, F')$.

Corollaire. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé quelconque. Si une application linéaire u de* E *dans* F *est faiblement continue, elle est fortement continue.*

On notera que ce résultat est aussi valable lorsque E est un espace *localement convexe métrisable* et non complet, car alors la topologie $\tau(E, E')$ sur E est encore identique à la topologie définie par la métrique sur E $\big([12]$, p. 527, th. 10$\big)$.

Proposition 20. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé. Si une application linéaire v de* F' *dans* E' *est faiblement continue, elle est fortement continue.*

En effet, $v$ est alors la transposée d'une application linéaire faiblement continue $u$ de E dans F ; la proposition résulte donc de la prop. 19 et de la remarque qui la précède.

On notera que lorsque E et F ne sont pas réflexifs, il peut exister des applications linéaires de F' dans E' qui sont fortement continues, mais non faiblement continues (pour les topologies $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F', F)$, bien entendu).

Si E et F sont deux espaces localement convexes séparés, on sait $\big([5]$, p. 122, th. 15$\big)$ que tout homomorphisme $u$ de E dans F est aussi un homomorphisme faible.

Proposition 21. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$, *et soit* F *un espace* $(\mathcal{F})$. *Tout homomorphisme faible u de* E *dans* F *est aussi un homomorphisme fort.*

Considérons d'abord le cas où $u$ est un *isomorphisme faible* de E dans F. Alors $u$ est fortement continue (prop. 19) ; tout revient à montrer que l'application $v$ de $u(E)$ sur E, réciproque de $u$, est fortement continue. Or $u(E)$, sous-espace vectoriel d'un espace $(\mathcal{F})$, est métrisable ; comme par hypothèse $v$ est faiblement continue dans $u(E)$, $v$ est aussi fortement continue (voir la remarque qui suit le cor. de la prop. 19).

Si maintenant $u$ est un homomorphisme faible de E dans F, et si $H = \overset{-1}{u}(O)$, on peut écrire $u = w \circ \varphi$, où $\varphi$ est l'homomorphisme canonique (fort et faible) de E sur E/H, et $w$ un isomorphisme faible de E/H dans F ; d'autre part, $u$ est fortement continue (prop. 19), donc $w$ est fortement continue ; le raisonnement précédent s'applique donc et prouve que $w$ est un isomorphisme fort, et par suite que $u$ est un homomorphisme fort.

On notera que la démonstration prouve en réalité que si E est un espace localement convexe séparé *quelconque*, F un espace $(\mathcal{F})$ et $u$ un *homomorphisme faible fortement continu* de E dans F, alors $u$ est un *homomorphisme fort* de E dans F.

La théorie de la dualité faible [5], jointe à la prop. 21 et à la caractérisation des homomorphismes d'un espace $(\mathcal{F})$ dans un espace $(\mathcal{F})$ ([2], p. 40, th. 4), donne le théorème suivant :

Théorème 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, $u$ *une application linéaire continue de* E *dans* F. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) $u$ *est un homomorphisme fort de* E *dans* F ;

b) $u$ *est un homomorphisme faible de* E *dans* F ;

c) $u(E)$ *est fermé dans* F ;

d) $u'$ *est un homomorphisme faible de* $F'$ *dans* $E'$ ;

e) $u'(F')$ *est faiblement fermé dans* $E'$.

En effet, b) et e) sont équivalentes, ainsi que c) et d) ([5], p. 120, th. 14) ; a) et b) sont équivalentes d'après la prop. 21, et a) et c) d'après le th. de Banach précité.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, $u$ *une application linéaire continue de* E *dans* F. *Pour que* $u$ *soit un isomorphisme (fort ou faible) de* E *dans* F, *il faut et il suffit que* $u'(F') = E'$ ; $u'$ *est alors un homomorphisme faible de* $F'$ *sur* $E'$. *Si en outre* $u'$ *est biunivoque,* $u$ *est un isomorphisme de* E *sur* F, $u'$ *un isomorphisme (fort et faible) de* $F'$ *sur* $E'$.

Lorsque E et F sont des espaces $(\mathcal{F})$ non normables, et $u$ un homomorphisme de E dans F, nous ignorons si son transposé $u'$ est un homomorphisme *fort* de F′ dans E′ : cela tient à ce que nous ne savons pas déterminer en général la topologie forte du dual d'un sous-espace ou d'un espace quotient d'un espace $(\mathcal{F})$ non normable. Mais on a le résultat suivant :

PROPOSITION 22. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, *u une application linéaire continue de* E *dans* F. *Si u′ est un isomorphisme fort de* F′ *dans* E′, *u est un homomorphisme de* E *sur* F.

D'après le th. 7 et la théorie de la dualité faible $\big($[5], p. 121, cor. du th. 14$\big)$ tout revient à prouver que $u'$ est un isomorphisme *faible* de F′ dans E′, ou encore (th. 7) que $u'(F')$ est *faiblement fermé* dans E′. Appliquons le corollaire du th. 5 qui caractérise les sous-espaces faiblement fermés dans E′ : soit B un ensemble borné et faiblement fermé dans E′. Comme $u'$ est un isomorphisme fort de F′ dans E′ et est faiblement continu, $\overset{-1}{u'}(B)$ est *borné* dans F′ et faiblement fermé, donc (th. 3) faiblement compact ; $u'$ étant faiblement continu, $B = u'\big(\overset{-1}{u'}(B)\big)$ est faiblement compact, ce qui démontre la proposition.

## 13. Ensembles équicontinus dans $\mathcal{L}(F', E')$.

PROPOSITION 23. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes séparés. Soit* H *une partie de l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *des applications linéaires continues de* E *dans* F, *bornée pour la topologie* $\mathcal{C}_b$. *Alors l'ensemble* M *des transposées u′ des applications* $u \in H$ *est fortement équicontinu dans* F′.

Il faut prouver qu'étant donné un voisinage fort U de O dans E′, il existe un voisinage fort V de O dans F′ tel que les relations $y' \in V$, $u \in H$ entraînent $u'(y') \in U$. On peut toujours supposer que $U = B^0$, où B est un ensemble borné dans E ; la relation $u'(y') \in B^0$ signifie alors que $|\langle x, u'(y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$, c'est-à-dire $|\langle u(x), y'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $x \in B$. Or l'ensemble H étant borné par hypothèse dans $\mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble C, réunion des $u(B)$ lorsque B parcourt H, est borné dans F (n° 6) ; il suffit donc de prendre $V = C^0$ pour répondre à la question.

PROPOSITION 24. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{LF})$, F *un espace localement convexe séparé. Soit* M *une partie de* $\mathcal{L}(F', E')$ *formée d'applications linéaires faiblement continues de* F′ *dans* E′. *Si* M *est* *borné pour la topologie* $\mathfrak{T}_s$ *de la convergence simple,* M *est fortement équicontinu* (et par suite borné pour la topologie $\mathfrak{T}_b$),

En effet, soit H l'ensemble des transposées des applications $u' \in M$ ; M étant l'ensemble des transposées des applications $u \in H$, il suffit de montrer que H est une partie *bornée* de $\mathfrak{L}(E, F)$, ou encore (th. 2) que pour tout $x \in E$, l'ensemble des $u(x)$, où $u$ parcourt H, est borné dans F. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $y' \in F'$, l'ensemble des $\langle u(x), y'\rangle$ est borné dans C lorsque $u$ parcourt H ; mais comme on a $\langle u(x), y'\rangle = \langle x, u'(y')\rangle$, cela résulte de l'hypothèse sur M.

14. **Fonctions bilinéaires continues dans $E' \times F'$.** — Le th. de Baire entraîne la conséquence bien connue suivante ([4], chap. IX, § 5, exerc. 22) : si E, F, G, sont trois espaces $(\mathcal{F})$, $u$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G telle que, pour tout $x \in E$, $y \to u(x, y)$ soit continue dans F, et que, pour tout $y \in F$, $x \to u(x, y)$ soit continue dans E, alors $u$ est *continue* dans $E \times F$. Nous allons démontrer un théorème analogue pour les fonctions bilinéaires définies dans $E' \times F'$ :

Théorème 8. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$, G *un espace* $(\mathcal{F})$ *ou un espace* $(\mathcal{LF})$. *Soit $u$ une application bilinéaire de* $E' \times F'$ *dans* $G'$, *telle que, pour tout* $x' \in E'$, $y' \to u(x', y')$ *soit faiblement continue dans* $F'$, *et que, pour tout* $y' \in F'$, $x' \to u(x', y')$ *soit faiblement continue dans* $E'$. *Dans ces conditions, $u$ est une application bilinéaire fortement continue de* $E' \times F'$ *dans* $G'$.

Il faut prouver qu'étant donné un ensemble borné C dans G, il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que les relations $x' \in A^0$ et $y' \in B^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, ou, ce qui revient au même, $|\langle z, u(x', y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$. D'après l'hypothèse, pour tout $z \in G$ et tout $x' \in E'$, $y' \to \langle z, u(x', y')\rangle$ est une forme linéaire faiblement continue sur $F'$, donc de la forme $y' \to \langle v_z(x'), y'\rangle$, où $v_z(x') \in E$. L'application $x' \to v_z(x')$ de $E'$ dans F est linéaire ; en outre, elle est *faiblement continue* (pour $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F, F')$) ; en effet, si $y'_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont $n$ points quelconques de $F'$, chacune des formes linéaires $x' \to \langle z, u(x', y'_k)\rangle = \langle v_z(x'), y'_k\rangle$ est faiblement continue dans $E'$, donc il existe un nombre fini de points $x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de E tels que les relations $|\langle x_j, x'\rangle| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ entraînent $|\langle v_z(x'), y'_k\rangle| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Nous allons montrer maintenant que lorsque $z$ parcourt C, l'ensemble des applications linéaires $v_z$ est *fortement équicontinu* dans E'. En effet, soit W un voisinage convexe cerclé et fermé dans F : $W^0$ est borné dans F'; pour tout $x' \subset E'$, $y' \rightarrow u(x', y')$ est faiblement continue dans F', donc transforme l'ensemble borné $W^0$ de F' en un ensemble borné dans G'; en vertu de la prop. 24, l'ensemble des applications faiblement continues $x' \rightarrow u(x', y')$ de E' dans G', où $y'$ parcourt $W^0$, est *fortement équicontinu*; cela signifie qu'il existe un ensemble borné $M \subset E$ tel que les relations $x' \in M^0$, $y' \in W^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$. Or, cela signifie encore : les relations $z \in C$, $x' \in M^0$ entraînent $|\langle v_z(x'), y'\rangle| \leqslant 1$ pour tout $y' \in W^0$, c'est-à-dire $v_z(x') \in W$, ce qui prouve notre assertion.

Cela étant, il faut prouver qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que pour tout $z \in C$, $v_z(A^0) \subset B^{00}$; autrement dit, qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ tel que la réunion des $v_z(A^0)$ soit *bornée* dans F. Or, soit $(U_n)$ un système fondamental de voisinages convexes, cerclés et fermés de O dans F ; par hypothèse les ensembles $V_n = \bigcap_{z \in C} \overset{-1}{v_z}(U_n)$ sont des voisinages forts de O dans E', convexes, cerclés et faiblement fermés ; les ensembles $V_n^0$ sont donc bornés dans E. Or, comme E satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (prop. 3), il existe une suite de nombres $\lambda_n > 0$ tels que la réunion A des ensembles $\lambda_n V_n^0$ soit *bornée* dans E. On en déduit que $A^0 \subset \frac{1}{\lambda_n} V_n$ pour tout $n$, d'où $v_z(A^0) \subset \frac{1}{\lambda_n} U_n$ pour tout $n$ et tout $z \in C$ ; mais comme $(U_n)$ est un système fondamental de voisinages de O dans F, cela prouve bien que la réunion des $v_z(A^0)$ lorsque $z \in C$, est un ensemble *borné* dans F.

Il est à noter que le th. 8 n'est plus valable lorsqu'on suppose que l'un des espaces E, F est un espace $(\mathcal{LF})$, l'autre étant un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$. Prenons en effet pour E un espace $(\mathcal{LF})$ ayant une suite de définition $(E_n)$ formée d'espaces de Banach réflexifs (par exemple une somme directe (n° 3) d'espaces de Banach réflexifs) ; alors son dual E' est un espace $(\mathcal{F})$ (n° 7) ; prenons $F = E'$ d'où $F' = E$ ; pour forme bilinéaire $u$, prenons la forme bilinéaire canonique $(x, x') \rightarrow \langle x, x'\rangle$ ; elle est évidemment faiblement continue par rapport à chacune des deux variables, mais n'est pas fortement continue par rapport à l'ensemble des deux variables (n° 7), ce qui démontre notre assertion.

Nous ignorons si le th. 8 reste valable lorsque les applications partielles $x' \rightarrow u(x', y')$ et $y' \rightarrow u(x', y')$ sont supposées *fortement* *continues* (même lorsque $u$ est une *forme* bilinéaire). On a toutefois la géneraislation partielle suivante :

THÉORÈME 9. — *Soient* E *un espace* $(\mathcal{F})$, F *un espace* $(\mathcal{F})$ *distingué* (n° 8). *Soit* G *un espace localement convexe séparé quelconque, et soit* $u$ *une application bilinéaire de* $E' \times F'$ *dans* $G'$. *On suppose* $E'$ *et* $F'$ *munis de la topologie forte,* $G'$ *de la topologie de la convergence uniforme dans un ensemble* $\mathfrak{S}$ *de parties bornées de* G (n° 2). *On suppose en outre que :*

a) *pour tout* $x' \in E'$, $y' \to u(x', y')$ *est continue dans* $F'$ ;

b) *lorsque* $y'$ *parcourt une partie bornée quelconque de* $F'$, *les applications* $x' \to u(x', y')$ *forment un ensemble équicontinu.*

*Dans ces conditions,* $u$ *est une application continue de* $E' \times F'$ *dans* $G'$.

Il faut prouver qu'étant donné un ensemble borné quelconque C appartenant à $\mathfrak{S}$, il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset E$ tels que les relations $x' \in A^0$, $y' \in B^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, ou encore $|\langle z, u(x', y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$. D'après la condition a), pour tout $x' \in E'$ et tout $z \in F$, $y' \to \langle z, u(x', y')\rangle$ est une forme linéaire fortement continue sur $F'$, donc il existe un élément $v_z(x') \in F''$ tel que $\langle z, u(x', y')\rangle = \langle y', v_z(x')\rangle$. Nous allons montrer que lorsque $z$ parcourt C, les applications $v_z$ de $E'$ dans $F''$ forment un *ensemble équicontinu*. En effet, soit W un voisinage convexe et cerclé de O dans F ; $W^0$ est borné dans $F'$ ; d'après b), il existe donc un ensemble borné M dans E tel que les relations $x' \in M^0$, $y' \in W^0$ entraînent $u(x', y') \in C^0$, c'est-à-dire $|\langle z, u(x', y')\rangle| \leqslant 1$ pour tout $z \in C$, ou encore $|\langle y', v_z(x')\rangle| \leqslant 1$ ; cela signifie que la relation $x' \in M^0$ entraîne $v_z(x') \in W^{00}$ pour tout $z \in C$, et prouve donc notre assertion, puisque les $W^{00}$ forment un système fondamental de voisinages de O dans $F''$ (n° 8).

Cela étant, il faut prouver qu'il existe un ensemble borné $A \subset E$ et un ensemble borné $B \subset F$ tels que, pour *tout* $z \in C$, on ait $v_z(A^0) \subset B^{00}$ (ensemble polaire de $B^0$ *dans* $F''$). Soit $(U_n)$ un système fondamental de voisinages de O dans $F''$, convexes, cerclés et fermés ; les $v_z$ formant un ensemble équicontinu pour $z \in C$, les ensembles $V_n = \bigcap_{z \in C} \overset{-1}{v_z}(U_n)$ sont des voisinages forts de O dans $E'$, convexes, cerclés et fortement fermés. Il existe donc pour tout $n$ un ensemble borné $A_n$ dans E tel que $A_n^0 \subset V_n$ ; comme E satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (prop. 3), il existe une suite de nombres $\lambda_n > 0$ tels que la réunion A des ensembles

$\lambda_n A_n$ soit *bornée* dans E ; on en déduit que $A^0 \subset \frac{1}{\lambda_n} V_n$ dans E′, d'où $v_z(A^0) \subset \frac{1}{\lambda_n} U_n$ pour tout $n$ et tout $z \in C$ ; comme $(U_n)$ est un système fondamental de voisinages de O dans F″, cela signifie que la réunion des ensembles $v_z(A^0)$ (pour $z \in C$) est bornée dans F″. Mais comme F est supposé *distingué,* il existe un ensemble borné $B \subset F$ tel que $v_z(A^0) \subset B^{00}$ pour tout $z \in C$, ce qui achève la démonstration.

Les applications bilinéaires satisfaisant à la condition a) interviennent souvent dans les applications [13]. De façon générale si E, F, G sont trois espaces localement convexes séparés, on dit qu'une application bilinéaire $u$ de $E \times F$ dans G est *séparément continue* si : a) lorsque $y$ parcourt une partie bornée quelconque de F, les applications $x \to u(x, y)$ forment un ensemble *équicontinu ;* b) lorsque $x$ parcourt une partie bornée quelconque de E, les applications $y \to u(x, y)$ forment un ensemble *équicontinu.* Le th. 9 montre en particulier que, dans les conditions de l'énoncé, si $u$ est *séparément continue*, elle est *continue.* Mais il existe des applications bilinéaires qui sont *séparément continues* et *non continues ;* un exemple est donné par la *forme bilinéaire canonique* $(x, x') \to \langle x, x' \rangle$ sur $E \times E'$ lorsque E est un espace $(\mathcal{F})$ ou un espace $(\mathcal{LF})$ (n° 7) : en effet, si B est un ensemble borné dans E, $B^0$ est un voisinage de O dans E′, et on a $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour $x \in B$ et $x' \in B^0$ ; et de même, si C est un ensemble borné dans E′, $C^0$ est un voisinage de O dans E (th. 3), et on a encore $|\langle x, x' \rangle| \leqslant 1$ pour $x \in C^0$ et $x' \in C$.

15. **Problèmes non résolus.** — Pour terminer, récapitulons un certain nombre de questions qui se posent dans la théorie des espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, et auxquelles nous ne savons pas répondre.

1. Soit E un espace $(\mathcal{LF})$, $(E_n)$ une suite de définition de E. Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \cap E_n$ soit fermé pour tout $n$, H est-il fermé ? La réponse est affirmative quand H est un hyperplan (prop. 5).

2. Si E est un espace $(\mathcal{LF})$, H un sous-espace vectoriel fermé de E, H est-il un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$ ? (La difficulté qui se présente ici, ainsi que dans la première question, est que dans un espace $(\mathcal{F})$, la somme de deux sous-espaces vectoriels fermés peut être non fermée.)

3. Un espace quotient d'un espace $(\mathcal{LF})$ par un sous-espace vectoriel fermé est-il un espace $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{LF})$ ?

4. Soit E un espace ($\mathfrak{F}$) ou un espace ($\mathfrak{LF}$), H un sous-espace fermé de E ; tout ensemble borné dans E/H est-il l'image canonique d'un ensemble borné dans E ?

5. Soit E un espace ($\mathfrak{F}$) ou un espace ($\mathfrak{LF}$), H un sous-espace fermé de E ; si E n'est pas réflexif, l'application canonique de H′ sur $E/H^0$ est-elle un isomorphisme fort ?

6. Soit E un espace ($\mathfrak{F}$) ou un espace ($\mathfrak{LF}$), $u$ une forme linéaire sur le dual E′ de E, telle que l'image par $u$ de tout ensemble borné dans E′ soit borné dans C ; la forme $u$ est-elle fortement continue ?

7. Le bidual E d'un espace ($\mathfrak{F}$) ou d'un espace ($\mathfrak{LF}$) est-il fortement complet ? Si la réponse à la question 6 était affirmative, il en serait de même pour la question 7 (l'inverse n'est peut-être pas vrai).

8. Un espace ($\mathfrak{F}$) ou ($\mathfrak{LF}$) est-il toujours *distingué*, autrement dit (n° 8), tout ensemble borné dans le bidual E″ de E est-il contenu dans l'adhérence faible d'un ensemble borné dans E ?

9. Le th. 5 est-il encore valable pour les espaces ($\mathfrak{LF}$) ?

10. La prop. 21 et le th. 7 s'étendent-ils aux espaces ($\mathfrak{LF}$) ?

11. Le th. 8 est-il encore valable pour une application bilinéaire $u$ de $E'\times F'$ dans le dual G′ d'un espace ($\mathfrak{F}$) ou ($\mathfrak{LF}$), supposée telle que les applications linéaires $y' \to u(x', y')$ et $x' \to u(x', y')$ soient fortement continues ?

12. Dans le dual d'un espace ($\mathfrak{F}$) E, une suite $(x'_n)$ fortement convergente vers O est bornée ; mais il n'existe pas toujours d'ensemble U *ouvert* dans E tel que les formes linéaires $x'_n(x)$ convergent *uniformément vers* o *dans* U ([10], p. 327). Il serait intéressant de trouver des conditions suffisantes simples sur E pour que cette propriété soit vraie ; elle l'est dans la plupart des espaces ($\mathfrak{F}$) qu'on rencontre dans les applications [13].

13. Il existe une analogie assez frappante entre les espaces ($\mathfrak{LF}$) et les duals d'espaces ($\mathfrak{F}$). Soit E un espace ($\mathfrak{F}$), et soit $(U_n)$ un système fondamental dénombrable de voisinages de O dans E, qu'on peut supposer décroissant. Dans le dual E′, soit $E'_n$ le sous-espace engendré par l'ensemble polaire $U_n^0$ ; E′ est réunion de la suite croissante de sous-espaces vectoriels $E'_n$, dont chacun peut être considéré comme un dual d'espace normé (savoir le dual de l'espace séparé $E_n$ associé à E muni de la topologie définie par le système de voisinages de O formé des ensembles $\lambda U_n$, pour un $n$ fixe). Le th. 2 montre que tout ensemble borné dans E′ est contenu dans un

$E'_n$ et borné dans cet espace, résultat correspondant à la prop. 4 pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Cette analogie toutefois est loin d'être parfaite : en général, le sous-espace $E'_n$ *n'est pas fermé* dans $E'_{n+1}$ (quand on munit ces deux espaces de leurs topologies fortes de duals d'espaces normés), et la topologie forte de $E'$ *n'induit pas nécessairement* sur $E'_n$ la topologie forte du dual de l'espace normé $E_n$ ([10], p. 327), contrairement à ce qui se passe pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Inversement, le dual d'un espace $(\mathcal{F})$ vérifie toujours la *seconde condition de dénombrabilité* de Mackey (n° 7), tandis qu'il n'en est pas de même pour un espace $(\mathcal{LF})$ quelconque (n° 4). De même, nous avons vu que le th. 8, valable pour les duals d'espaces $(\mathcal{F})$, ne l'est pas pour les espaces $(\mathcal{LF})$. Il y aurait lieu d'examiner s'il n'est pas possible de faire rentrer à la fois les espaces $(\mathcal{LF})$ et les duals d'espaces $(\mathcal{F})$ dans une même théorie générale, qui expliquerait ces divergences.

14. Il est assez naturel de songer à généraliser la théorie des espaces $(\mathcal{LF})$ en considérant, au lieu d'une *suite croissante* $(E_n)$ de sous-espaces d'un espace vectoriel E, un *ensemble filtrant croissant* $(E_\alpha)$ de sous-espaces de E, de puissance quelconque : on suppose naturellement que E est réunion des $E_\alpha$, et que chaque $E_\alpha$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}_\alpha$ pour laquelle $E_\alpha$ est un espace $(\mathcal{F})$, les topologies $\mathcal{T}_\alpha$ étant *compatibles* en ce sens que, si $E_\alpha \subset E_\beta$, $\mathcal{T}_\alpha$ est induite sur $E_\alpha$ par $\mathcal{T}_\beta$. On peut encore alors définir sur E une topologie $\mathcal{T}_\omega$ par la condition d'être la plus fine de celles qui induisent sur chacun des $E_\alpha$ une topologie moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$. Mais nous allons voir sur un exemple que les espaces vectoriels topologiques qu'on obtient ainsi ne se comportent plus toujours comme les espaces $(\mathcal{LF})$.

Soit G l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classe, muni de la topologie usuelle dans laquelle un système fondamental de voisinages d'un point $t$ est formé des intervalles semi-ouverts ayant ce point pour extrémité ; on sait que G, muni de cette topologie, est *localement compact*, et que tout ensemble compact dans G est contenu dans un intervalle $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ $(\alpha \in G)$, intervalle que nous désignerons par $I_\alpha$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues dans G et à support compact, et soit $E_\alpha$ le sous-espace de E formé des fonctions nulles dans le complémentaire de $I_\alpha$ ; nous prendrons pour $\mathcal{T}_\alpha$ la topologie de la convergence uniforme dans $I_\alpha$, de sorte que les espaces $E_\alpha$ sont des espaces de Banach dont les topologies sont compatibles ; en d'autres termes, l'espace E est ainsi muni d'une topologie $\mathcal{T}_\omega$ qui généralise celle de l'exemple 1° d'espace $(\mathcal{LF})$ donné au n° 3. Nous allons montrer ici que cette topologie n'est autre que la topologie de la *convergence uniforme* $\mathcal{T}_u$ dans G, et que par suite E, muni de cette topologie, est un *espace de Banach.*

En effet, il est clair que la topologie $\mathcal{T}_u$ induit sur chacun des $E_\alpha$ la topologie $\mathcal{T}_\alpha$ ; tout revient à prouver que $\mathcal{T}_\omega$ ne peut être *strictement plus fine* que $\mathcal{T}_u$. Or, s'il en était ainsi, il existerait un voisinage convexe cerclé V de O (pour $\mathcal{T}_\omega$) et une suite croissante $(\alpha_n)$ de points de G telle que, pour toute fonction $f \in V$, on ait $|f(\alpha_n)| \leqslant \frac{1}{n}$, comme on le voit aussitôt par récurrence sur $n$. Mais la suite $(\alpha_n)$ a une limite $\beta$ dans G, donc on devrait avoir $f(\beta) = 0$ pour toute fonction $f \in V$ ; mais alors pour tout $\gamma > \beta$, l'intersection de V et de $E_\gamma$ ne serait pas un voisinage de O pour la topologie $\mathcal{T}_\gamma$, contrairement à l'hypothèse.

Ce résultat entraîne en particulier que la prop. 4 n'est pas valable dans E : l'ensemble des $f \in E$ telles que $|f(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in G$, est borné mais non contenu dans un $E_\alpha$. Il y aurait donc lieu d'examiner quelles sont les propriétés des espaces $(\mathcal{LF})$ qui se généralisent lorsqu'on remplace la suite croissante $(E_n)$ par un ensemble filtrant croissant quelconque.

(Manuscrit reçu en août 1949.)

## BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Arens, Duality in linear spaces, *Duke Math. Journ.*, t. 14 (1947), p. 787-794.

[2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Warszawa, 1932.

[3] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique,* livre II : Algèbre (*Act. Scient. et Ind.*, n$^{os}$ 934, 1032 et 1044, Paris (Hermann), 1943-48).

[4] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique,* livre III : Topologie générale (*Act. Scient. et Ind.*, n$^{os}$ 858, 916, 1029, 1045 et 1084, Paris (Hermann), 1940-49).

[5] J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, *Annales de l'École Normale Supérieure,* t. 59 (1942), p. 107-139.

[6] J. Dieudonné, Natural homomorphisms in Banach spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society,* t. 56 (1950).

[7] W. F. Eberlein, Weak compactness in Banach spaces, I, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* t. 33 (1947), p. 51-53.

[8] V. GANAPATHY IYER, On the space of integral functions, I, *Journal of the Indian Mathematical Society*, t. 12 (1948), p. 13-30.

[9] A. KOLMOGOROFF, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Mathematica*, t. 5 (1935), p. 29-33.

[10] G. KÖTHE, Die Stufenraüme, eine einfache Klasse linearer vollkommener Raüme, *Mathematische Zeitschrift*, t. 51 (1948), p. 317-345.

[11] G. W. MACKEY, On infinite-dimensional linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 57 (1945), p. 155-207.

[12] G. W. MACKEY, On convex topological linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 60 (1946), p. 520-537.

[13] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann, 1950.

[14] V. ŠMULIAN, Über lineare topologische Raüme, *Mat. Sbornik*, N. S., t. 7 (1941), p. 425-448.

*Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* — MM. Mazur et Orlicz nous ont communiqué qu'ils ont déjà obtenu les propr. 9 et 20 et le th. 4 de notre travail, pour le cas des *espaces* $(\mathcal{F})$ ; leurs résultats doivent être publiés prochainement dans les *Studia Mathematica*. Mentionnons aussi dans la bibliographie, les travaux de M. Katětov sur la dualité et les ensembles polaires (*Bull. Int. Acad. Tchèque*, t. 53 (1943), n° 46, et *Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Carol.*, 1948, n° 181)