ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCOS SEBASTIANI

Sur la dualité locale

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 1 (1980), p. 65-90

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_1_65_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 1 (1980), 65-90

SUR LA DUALITÉ LOCALE

par Marcos SEBASTIANI

Dans cet article on donne une construction explicite et élémentaire de l'homomorphisme de dualité pour des applications analytiques locales de type fini $f:(X,0)\longrightarrow(Y,0)$ et on obtient un théorème de dualité pour X et Y normaux. La situation est illustrée par des exemples et des applications.

Je suis très reconnaissant à M. R. Thom de m'avoir posé la question qui m'a conduit à développer ce travail.

La réalisation de ce travail a été possible grâce aux séjours dont l'auteur a pu profiter à l'IHES de Bures-sur-Yvette et à l'UER de Mathématiques de l'Université de Lille I. Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma reconnaissance à M.N.H. Kuiper et à M. Daniel Lehmann pour m'avoir donné les moyens de réaliser ces séjours.

Soit $F:(X,0)\longrightarrow(Y,0)$ une application analytique locale, où X et Y sont des ensembles analytiques *normaux* de dimension n au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^N$. On suppose F de type fini ; c'est-à-dire, $F^{-1}(0)=\{0\}$.

Soient $A=\mathcal{O}_{X,0}$ et $B=\mathcal{O}_{Y,0}$ les respectifs anneaux locaux et soient K et L les corps de fractions de A et B respectivement. Par composition avec F on peut supposer $B\subset A$ et $L\subset K$. On a que K/L est une extension algébrique de degré fini μ égal au degré local de F en 0 (1.9).

Dans certains cas $\mu=\dim_{\mathbf{C}} A/\mathfrak{M}A$, où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de B (1.11). Dans le cas général, ce n'est pas vrai, comme le montre l'exemple (1.12).

Si X et Y sont non-singuliers et $J \in A$ est le jacobien de F, le théorème classique de dualité locale affirme que :

a) $Tr_{K/L}(a/J) \in B$ pour tout $a \in A$

b) Le A-module $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ est libre de rang un engendré par $a \longrightarrow Tr_{K/L}(a/J)$.

Dans le cas général on définit un idéal $\mathscr{F}$ (début du § 3). Si X et Y sont non-singuliers, $\mathscr{F}$ est l'idéal engendré par J. Le résultat principal (3.6) est que $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ est canoniquement isomorphe, comme A-module, au A-module :

$$(A : \mathscr{F}) = \{\alpha \in K : \alpha\mathscr{F} \subset A\}.$$

(Comparer, sous d'autres hypothèses, avec [4] (4.6)).

La démonstration est directe et n'utilise que des résultats basiques d'ensembles analytiques et l'approximation de fonctions analytiques par des polynômes.

On déduit de ce résultat que si $\mathscr{F}$ est principal le théorème de dualité locale reste valable en prenant pour J un générateur de $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}$ n'est pas principal on obtient une forme faible de ce théorème (voir (3.5)). L'idéal $\mathscr{F}$ est principal si A est un anneau de factorisation unique ou si B est régulier et A un anneau de Macauley (3.8). (Voir [4] en rapport au deuxième cas).

En général, $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ n'est pas un A-module libre de rang un, comme le montre l'exemple (3.9).

Soit maintenant $G : (\mathbf{C}^N, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^N, 0)$ une application analytique locale de type fini. Dans le cas particulier où G est la projection canonique de passage au quotient par l'action d'un groupe fini π d'automorphismes analytiques, on a la propriété suivante :

"Soit $Z \subset \mathbf{C}^N$ un sous-ensemble analytique de dimension n en 0. Soit S une composante de dimension n de $G^{-1}(Z)$ et soit T la réunion des autres composantes de dimension n de $G^{-1}(Z)$. Alors, si T n'est pas vide, $\dim_0(S \cap T) = n - 1$."

En effet, moyennant une équivalence analytique, on peut supposer π linéaire et, puisque l'espace quotient est non-singulier, π est engendré par des pseudo-reflexions. Si T n'est pas vide, il existe une pseudo-reflexion $\tau \in \pi$ telle que $\tau S \neq S$. Alors $\tau S \subset T$ et $\dim_0 \tau S \cap S = n - 1$, puisque l'ensemble des points fixes de τ est un hyperplan.

Comme application du théorème de dualité généralisé on montre que cette propriété reste vraie, dans une certaine mesure, pour une application G quelconque (4.2).

On remarque qu'il n'est pas vrai que l'intersection de deux composantes quelconques de dimension n de $G^{-1}(Z)$ soit de dimension $n-1$, comme le montre l'exemple (4.3).

Le théorème de dualité locale (3.5) et la proposition (3.8a) admettent des analogues algébriques pour des extensions d'anneaux noethériens intégralement clos (5.1).

1. Applications analytiques de type fini.

Soient U, V des voisinages ouverts de 0 dans $\mathbf{C}^N$. Soient $X \subset U$ et $Y \subset V$ des ensembles analytiques contenant 0 et dont les germes en 0 sont irréductibles et de la même dimension $n \geqslant 1$.

Soit $G : U \longrightarrow V$ une application analytique telle que $G(0) = 0$ et $G(X) \subset Y$. Soit $F = G|X : X \longrightarrow Y$.

(1.1) DEFINITION. – *On dit que* F *est de type fini en* 0 *si* 0 *est un point isolé dans l'ensemble* $F^{-1}(0)$.

Nous supposerons dans ce qui suit que F est de type fini en 0. On peut alors choisir U et V pour que

(1.2) $$F^{-1}(0) = \{0\}.$$

(On s'intéresse à l'étude locale de F au voisinage de 0). En choisissant U, V convenablement on peut supposer que F est propre. En particulier, $F^{-1}(w)$ est fini pour tout $w \in Y$.

Soient $S(X), S(Y)$ les ensembles des points singuliers de X, Y et $X_0 = X - S(X)$, $Y_0 = Y - S(Y)$. On peut supposer que X_0, Y_0 sont des variétés analytiques de dimension n et que Y_0 est connexe. On sait qu'une seule composante connexe de X_0 contient 0 dans son adhérence. Chaque composante en 0 de $S(X)$ et de $S(Y)$ est de dimension au plus $n-1$. Comme F est propre, $F(S(X))$ est un sous-ensemble analytique de Y dont chaque composante en 0 est de dimension au plus $n-1$. Soient

$$Y' = Y_0 - F(S(X)) \quad \text{et} \quad X' = F^{-1}(Y') \subset X_0 .$$

Alors X' et Y' sont des variétés analytiques non-vides de dimension n, $X - X'$ et $Y - Y'$ sont des ensembles analytiques de dimension $\leqslant n-1$ et $F : X' \longrightarrow Y'$ est analytique et propre. En plus, Y' est connexe. Soit Z une composante connexe de X' telle que $0 \notin \overline{Z}$. Alors $F|Z : Z \longrightarrow Y'$ est propre. Donc, $F(Z)$ est fermé dans Y'. Comme $F^{-1}(w)$ est fini pour tout $w \in Y'$, $F(Z)$ est ouvert dans Y'. Alors $F(Z) = Y'$. Comme $0 \in \overline{Y'}$ ceci contredit $0 \notin \overline{Z}$, à cause de (1.2). Donc, X' est aussi connexe. Comme $F : X' \longrightarrow Y'$ est une application continue et propre entre des variétés connexes orientées de la même dimension, le degré en est bien défini.

(1.3) Definition. – *Le degré* μ *de* $F : X' \longrightarrow Y'$ *est appelé le degré local de* F *en* 0. *Il est noté* $\mu = \deg_0 F$.

Il est clair que μ ne dépend que du germe de F en 0.

Soit $z \in X'$ un point où le rang de dF est maximum. Comme $F^{-1}(w)$ est fini pour tout $w \in Y$, le théorème des fonctions implicites nous dit que rang $dF(z) = n$.

Soit $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_{\mathbf{C}^N,0}$ l'idéal du germe de X en 0. Soit $f_1, \ldots, f_k$ un système de fonctions analytiques sur U qui représentent une base de $\mathfrak{P}$ (en prenant éventuellement U plus petit ; dans ce qui suit cette phrase sera souvent sous-entendue). Soit $C \subset X$ le sous-ensemble analytique défini par :

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial z_1, \ldots\ldots\ldots, \partial f_1/\partial z_N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial f_k/\partial z_1, \ldots\ldots\ldots, \partial f_k/\partial z_N \\ \partial G_1/\partial z_1, \ldots\ldots\ldots, \partial G_1/\partial z_N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial G_N/\partial z_1, \ldots\ldots\ldots, \partial G_N/\partial z_N \end{pmatrix} < N$$

où $G = (G_1, \ldots, G_N)$. Alors $C \cap X'$ est l'ensemble des points critiques de $F : X' \longrightarrow Y'$ ([2] Corollaire IV.D.5). D'après ce qu'on vient de voir la dimension de C en 0 est au plus $n-1$.

(1.4) $\dim C_j = n - 1$ pour toute composante irréductible C_j de C en 0 telle que $C_j \cap X'$ soit non-vide.

En effet, $C \cap X'$ est donné localement par l'annulation du jacobien de F. On a aussi que $D = F(C)$ est un sous-ensemble analytique de Y de dimension au plus $n-1$. D'autre part, on peut supposer $F(X) = Y$. Alors,

$$(1.5) \qquad F|(X' - F^{-1}(D)) : X' - F^{-1}(D) \longrightarrow Y' - D$$

est un revêtement (non-ramifié) d'ordre $\mu \geqslant 1$.

C'est-à-dire, en dehors de sous-ensembles analytiques propres F est un revêtement non ramifié entre des variétés analytiques connexes.

Dans tout ce qui suit on supposera X, Y *irréductibles en tout point.*

Dans ces conditions, pour chaque $z \in X$ et $w = F(z)$, l'application locale $F : (X, z) \longrightarrow (Y, w)$ est dans les mêmes conditions que $F : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$. Comme le complémentaire d'un sous-ensemble analytique propre est partout dense, on a :

(1.6) Pour tout $w \in Y$, $\sum_{j=1}^{k} \deg_{z_j} F = \mu$ où $F^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. En particulier $k \leqslant \mu$.

Comme corollaire on obtient :

(1.7) F est ouverte.

Observons que (1.6) n'est pas vrai si Y n'est pas irréductible en tout point. En effet, soit $Y \subset \mathbf{C}^4$ l'ensemble analytique défini par :

$$z_3^2 + z_1 z_2 z_3 + z_2^3 = 0 \quad \text{et} \quad z_4 = 0.$$

Y est irréductible en 0. Soit $X \subset \mathbf{C}^4$ l'ensemble défini par :

$$z_1 z_2 + 2(z_2 z_4 + z_3) = 0 \quad \text{et} \quad z_1^2 - 4(z_2 + z_4^2) = 0.$$

Soit $F : X \longrightarrow Y$ définie par : $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, 0)$. X est non-singulier et F est de type fini en 0.

Soit $T \subset X$ l'ensemble des deux droites : $z_1 = \pm z_4$, $z_2 = z_3 = 0$. Alors, $F|(X - T) : X - T \longrightarrow Y - S(Y)$ est un difféomorphisme analytique. Les deux droites qui forment T s'appliquent sur $S(Y)$. Donc, $F^{-1}(w)$ se réduit à un point si $w \in Y - S(Y)$ ou si $w = 0$, et contient deux points dans le cas contraire. Alors, $\mu = 1$ et, pourtant, il y a des points avec deux préimages (proches à 0).

On supposera dorénavant que 0 *est un point normal de* Y. *On peut alors supposer* Y *normal* ([3] 45.28).

Soit f une fonction analytique dans U. Par une construction standard associée au revêtement (1.5) on définit un polynôme

$$P_f(w, T) = T^\mu + a_1(w) T^{\mu-1} + \dots + a_\mu(w)$$

dont les racines, pour chaque $w \in Y' - D$, sont :

$$f(z_1), \dots, f(z_\mu) \quad \text{où} \quad F^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_\mu\}.$$

Les a_j sont des fonctions analytiques dans Y, à cause de la normalité. En particulier, $P_f(F(z), f(z)) \equiv 0$ dans X.

Soient $A = \mathcal{O}_{X,0}$ et $B = \mathcal{O}_{Y,0}$ les anneaux locaux et soient K, L leurs respectifs corps de fractions. Par composition avec F on obtient des inclusions $B \subset A$ et $L \subset K$. Ce qui précède montre que chaque élément de A satisfait une équation de degré μ sur L et que chaque élément de A est entier sur B. Donc, $[K:L] \leqslant \mu$ et :

(1.8) B est intégralement clos et A est contenu dans la clôture intégrale de B dans K. En particulier, A est un B-module de type fini.

Supposons que $[K:L] < \mu$. Soit $\{w_k\}$ une suite de points de $Y' - D$ telle que $\lim w_k = 0$. Par le théorème de Baire, il existe $g : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ linéaire telle que g prend des valeurs toutes différentes sur les μ points de $F^{-1}(w_k)$ pour tout $k = 1, 2, \dots$ Par (1.8) le polynôme minimal sur L du germe $\underset{\sim}{g}$ de g en 0 a tous ses coefficients dans B. Alors, ce polynôme ne peut pas avoir degré inférieur à μ, ce qui est une contradiction. Donc,

$$[K:L] = \mu. \tag{1.9}$$

D'autre part, observons que :

(1.10) $\underset{\sim}{P}_f(T) = T^\mu + \underset{\sim}{a}_1 T^{\mu-1} + \dots + \underset{\sim}{a}_\mu$ est le polynôme caractéristique de $\underset{\sim}{f}$ sur L (Si g est une fonction, on note $\underset{\sim}{g}$ son germe en 0).

En effet, si $P_f(w, T) = Q_1(w, T) . Q_2(w, T)$ et Q_1, Q_2 sont premiers entre eux considérés comme polynômes à coefficients dans B, alors Q_1 et Q_2 n'auraient pas de racine commune en dehors d'un sous-ensemble analytique propre. Mais si, par exemple, $Q_1(w, f) = 0$, alors tous les $f(z_1), \ldots, f(z_\mu)$ (où $F^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_\mu\}$) sont des racines de $Q_1(w, T) = 0$. Alors $Q_2(w, T) = 0$ (et, donc, aussi $P_f(w, T) = 0$) aurait des racines différentes de $f(z_1), \ldots, f(z_\mu)$, ce qui est absurde, à moins que son degré soit nul.

(1.11) PROPOSITION. – *Supposons que le germe de* X *en* 0 *soit une intersection complète et que* 0 *soit non-singulier dans* Y. *Alors* $\mu = \dim_{\mathbf{C}} A/\mathfrak{M}A$ *où* $\mathfrak{M}$ *est l'idéal maximal de* B.

Démonstration. – En effet, dans ce cas A est un anneau de Macauley et B est un anneau régulier. Alors ([1] Théorème 25.16) A est un B-module libre de rang μ.

(1.12) L'hypothèse que X soit une intersection complète est importante pour la validité de (1.11). Par exemple, considérons les équations :

$$(2z_3 - z_1)^2 - z_2^3 = 0 \tag{1}$$

$$z_2 z_4 + (2z_3 - z_1)z_3 = 0. \tag{2}$$

Elles définissent un ensemble analytique Z dans $\mathbf{C}^4$. Il est évident que Z n'est pas contenu dans $z_2 = 0$ au voisinage de 0. En plus, comme (1) est irréductible en 0 et (2) n'est pas multiple de (1), chaque composante de Z en 0 est de dimension 2. Soit X une composante de Z en 0 qui ne soit pas contenue dans $z_2 = 0$. De (1) et (2) on déduit $z_2^2 z_4^2 = z_2^3 z_3^2$. Donc, tout point de X satisfait :

$$z_2 z_3^2 - z_4^2 = 0. \tag{3}$$

On en déduit que les classes $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ de z_1, z_2 dans $A = \mathcal{O}_{X,0}$ constituent un système de paramètres de A.

De (1) et (2) on déduit

$$2\overline{z}_1\overline{z}_3 - \overline{z}_1^2 + \overline{z}_2^3 + 2\overline{z}_2\overline{z}_4 = 0.$$

C'est-à-dire,

$$(2\overline{z}_3 - \overline{z}_1)\overline{z}_1 = -(\overline{z}_2^2 + 2\overline{z}_4)\overline{z}_2$$

dans A. Pour prouver que A n'est pas un anneau de Macauley il suffit de prouver que $\overline{z}_2$ ne divise pas $2\overline{z}_3 - \overline{z}_1$ dans A. Supposons que $2\overline{z}_3 - \overline{z}_1 = \alpha\overline{z}_2$ avec $\alpha \in A$. Alors, par (1) : $\overline{z}_2 = \alpha^2$ puisque A est intègre. Donc, $\alpha \in \mathcal{M}$, idéal maximal de A. En particulier, $\overline{z}_2 \in \mathcal{M}^2$ Par (2) : $\overline{z}_4 = -\alpha\overline{z}_3$. Donc, $\overline{z}_4 \in \mathcal{M}^2$. Comme $2\overline{z}_3 - \overline{z}_1 = \alpha z_2 \in \mathcal{M}^2$ on aurait que $\overline{z}_3$ engendre $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{M}^2$ sur $\mathbf{C} = A/\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{M}$ serait principal, par le lemme de Nakayama, ce qui est absurde puisque $\dim A = 2$. Alors A n'est pas de Macauley.

On en déduit ([1] Théorème 25.16) que A n'est pas un module libre sur $B = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^2,0}$ (A contient B à travers la projection $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2))$. Si on avait $\mu = \dim_{\mathbf{C}} A/\mathfrak{M}A$, par le lemme de Nakayama, A serait engendré par μ éléments comme B-module. Mais alors ces μ éléments seraient indépendants, ce qui entraînerait A libre comme B-module.

2. Le lemme auxiliaire.

Soit $F : X \longrightarrow Y$ une application analytique entre les ensembles analytiques X, Y. Soit $a \in X$, $b = F(a) \in Y$. Soit $G : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ une application analytique locale.

(2.1) DEFINITION. – *On dit que* G *est un modèle local de* F *en* a *s'il existe des voisinages* U_0, V_0 *de* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et* U_a, V_b *de* a *et* b *dans* X *et* Y *respectivement et des isomorphismes* $\alpha : U_a \longrightarrow U_0$ $\beta : V_b \longrightarrow V_0$ *de telle façon que* $\alpha(a) = 0, \beta(b) = 0$, $G(U_0) \subset V_0$, $F(U_a) \subset V_b$ *et que le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} U_a & \xrightarrow{F} & V_b \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ U_0 & \xrightarrow[G]{} & V_0 \end{array}$$

soit commutatif.

(2.2) LEMME. – *Supposons que* X *et* Y *soient des variétés analytiques connexes de la même dimension* n. *Soit* $a \in X$, $b \in Y$ *et* $F : X \longrightarrow Y$ *une application analytique avec* $F(a) = b$ *et de type fini en* a.

Soient S, T des sous-variétés analytiques de dimension $n-1$ de X, Y respectivement telles que $a \in S$ et $b \in T$. Supposons :

i) $F(S) \subset T$ et $F : S \longrightarrow T$ est injective, ii) F est régulière en tout point de $X - S$. Alors F admet comme modèle local en a l'application

$G : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$, $G(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^q, z_2, \ldots, z_n)$, $q = \deg_a F$.

Démonstration. – De $\dim S = \dim T$ et de (i) on déduit que $F|S : S \longrightarrow T$ est un isomorphisme local en a. Soit $w_1, \ldots, w_n$ un système de coordonnées de Y en b tel que T est donné, au voisinage de b par l'équation $w_1 = 0$. Alors on peut compléter $z_2 = w_2 \circ F$, $z_3 = w_3 \circ F, \ldots$ à un système de coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ de X en a tel que $z_1 = 0$ est l'équation locale de S en a. Dans ces systèmes de coordonnées les équations locales de F sont : $w_1 = f(z_1, \ldots, z_n)$, $w_2 = z_2, \ldots, w_n = z_n$. Observons que $f(0, z_2, \ldots, z_n) \equiv 0$. Alors $f = z_1^q g$ où $q \geqslant 1$ et g est analytique au voisinage de 0 et n'est pas divisible par z_1. D'après la condition (ii), $\partial f/\partial z_1 \neq 0$ si $z_1 \neq 0$, au voisinage de 0. Observons que :

$$\partial f/\partial z_1 = q z_1^{q-1} g + z_1^q \partial g/\partial z_1 = z_1^{q-1}(qg + z_1 \partial g/\partial z_1).$$

Supposons que $g(0) = 0$. Alors l'ensemble des zéros de $qg + z_1 \partial g/\partial z_1$ au voisinage de 0 est non-vide et contenu dans l'hyperplan $z_1 = 0$. Donc, cet ensemble coïncide avec $z_1 = 0$ au voisinage de 0, ce qui est absurde parce que z_1 ne divise pas g. Ceci nous dit que $g(0) \neq 0$. On change de coordonnées au voisinage de a :

$$\zeta_1 = z_1 \sqrt[q]{g}, \quad \zeta_2 = z_2, \ldots, \zeta_n = z_n$$

et les équations de F deviennent :

$$w_1 = \zeta_1^q, \quad w_2 = \zeta_2, \ldots, w_n = \zeta_n.$$

Il est évident que $q = \deg_a F$.

(2.3) LEMME AUXILIAIRE. – *Soient* X, Y *des ensembles analytiques normaux de la même dimension* n *en chaque point. Supposons que* $0 \in X$, $0 \in Y$ *et soit* $F : X \longrightarrow Y$ *une application analytique avec* $F(0) = 0$ *et de type fini en* 0. *Alors il existe des voisinages* U, V *de* 0 *dans* X, Y *respectivement et un ensemble analytique* Z *dans* V *tels que :*

i) $F(U) \subset V$;

ii) $\dim Z \leqslant n - 2$;

iii) F *admet en tout point de* $U - F^{-1}(Z)$ *une application du type :* $(z_1, \ldots, z_n) \longrightarrow ((z_1)^q, z_2, \ldots, z_n)$ *comme modèle local.*

Démonstration. – D'après la normalité on a pour les ensembles singuliers : $\dim S(X) \leqslant n-2$ et $\dim S(Y) \leqslant n-2$.

On a vu qu'au voisinage de 0 il existe des ensembles analytiques $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ de dimension $\leqslant n-1$ tels que

$$F|(X - X_1) : X - X_1 \longrightarrow Y - Y_1$$

est un revêtement d'ordre μ entre des variétés analytiques. Dans chaque point de $X - X_1$, F admet l'identité comme modèle local.

Soit T une composante de dimension $n-1$ de Y_1. Soit S une composante de dimension $n-1$ de $F^{-1}(T)$. Alors, par (1.5) appliqué à $F : (S, 0) \longrightarrow (T, 0)$, il existe un sous-ensemble analytique T_S de T tel que $\dim T_S \leqslant n-2$ et que

$$F : S - F^{-1}(T_S) \longrightarrow T - T_S$$

est un revêtement entre des variétés analytiques. On peut supposer aussi que T_S contient l'intersection de T avec les autres composantes de Y_1, l'image par F de l'intersection de S avec les autres composantes de X_1 et l'image par F de la réunion des composantes de dimension $\leqslant n-2$ de $F^{-1}(T)$. Alors F admet, au voisinage de chaque point de $S - (F^{-1}(T_S \cup S(Y)) \cup S(X))$ une application du type voulu comme modèle local, d'après (2.2).

Pour compléter la démonstration on prend Z égal à la réunion de tous les ensembles T_S, plus $S(Y)$, plus $F(S(X))$, plus la réunion des composantes de Y_1 de dimension $\leqslant n-2$.

3. La dualité locale.

Dans ce paragraphe on donnera une construction du morphisme de dualité $f_! f^! : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y$. Nous reprenons la situation du début du § 1. Nous supposerons, en plus, dans tout ce paragraphe que :

(3.1) i) $\dim S(X) \leqslant n-2$ et ii) Y est normal.

Soient X′ et Y′ les ensembles introduits au § 1. Par les hypothèses (3.1) on a : $\dim (X - X') \leqslant n-2$ et $\dim (Y - Y') \leqslant n-2$.

Le jacobien de $F|X' : X' \longrightarrow Y'$ définit un diviseur $\mathcal{S}$ dans la variété analytique X'. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{X,0} = A$ l'idéal des germes de fonctions analytiques f dans X au voisinage de 0 telles que le diviseur de $f|X'$ soit (au voisinage de 0) un multiple de $\mathcal{S}$. Comme au § 1 on considère $B = \mathcal{O}_{Y,0}$ comme sous-anneau de A.

(3.2) PROPOSITION. – *Il existe* $\underset{\sim}{h} \in B$ *et* $\underset{\sim}{J} \in \mathcal{F}$ *tels que :*

a) *L'intersection de l'ensemble des zéros de* $h|Y'$ *avec l'ensemble des valeurs critiques de* $F|X'$ *est contenue, au voisinage de* 0, *dans un sous-ensemble analytique de* Y *de dimension* $\leqslant n-2$.

b) *Soit* X'_h *le sous-ensemble ouvert de* X' *défini par* $h \circ F \neq 0$. *Alors, au voisinage de* 0, *le diviseur de* $J|X'_h$ *coïncide avec la restriction de* $\mathcal{S}$ *à* X'_h.

Dans ces conditions, si X est lui aussi normal, alors $\mathcal{F}_M$ est principal dans A_M avec générateur $\underset{\sim}{J}$, où M est le sous-ensemble multiplicatif de B engendré par $\underset{\sim}{h}$. En plus, si A est un anneau de factorisation unique, alors il existe $\underset{\sim}{\overline{J}} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{S}$ est le diviseur de $\overline{J}|X'$, au voisinage de 0 ; et $\mathcal{F}$ est principal engendré par $\underset{\sim}{\overline{J}}$.

Démonstration. – Soit C le sous-ensemble de X introduit au § 1. Comme dans (1.4) on a que $C \cap X'$ est le support de $\mathcal{S}$. Soit :

$$D = F(C) \tag{3.3}$$

le lieu discriminant de F. Soit $E = F^{-1}(D)$. Alors E est un sous-ensemble analytique propre de X qui contient C. Soient $E_1, \dots, E_k$ les composantes de E en 0 qui ne sont pas contenues dans $X - X'$. D'après (1.4) toute composante de C en 0 qui ne soit pas contenue dans $X - X'$ est une des E_j. On peut donc supposer que $E_1, \dots, E_s$ $(s \leqslant k)$ est l'ensemble des composantes de C qui ne sont pas contenues dans $X - X'$.

On voit facilement que $\dim E_j = n-1$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

Choisissons pour chaque $j = 1, \dots, k$ un point $z_j \in E_j \cap X'$ qui soit point non-singulier de E. On peut les choisir de telle façon que l'ensemble $\{z_1, \dots, z_k\}$ soit saturé par F (c'est-à-dire, $F^{-1}(F(z_j)) \subset \{z_1, \dots, z_k\}$ pour tout j). Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les espaces tangents à X' dans $z_1, \dots, z_k$ et à Y' dans $F(z_1), \dots, F(z_k)$ se projectent tous bijectivement sur l'espace des n premières coordonnées. Cela implique que si $(z^1, \ldots, z^N)$ sont les coordonnées dans $\mathbf{C}^N$ alors $(z^1, \ldots, z^n)$ forment un système de coordonnées de X' au voisinage de chaque z_j et de Y' au voisinage de chaque $F(z_j)$. Dans ces conditions, on définit J comme étant la restriction à X du jacobien :

$$\frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(z^1, \ldots, z^n)}$$

où $G_1, \ldots, G_N$ sont les composantes de G.

Observons que J est le jacobien de F au voisinage de chaque point $z_1, \ldots, z_k$. En particulier, $J \neq 0$.

Vérifions que $\underset{\sim}{J} \in \mathscr{F}$. Soit $\mathscr{D}$ le diviseur de $J | X'$. Si $\mathscr{S}$ ne divise pas $\mathscr{D}$ alors $\mathscr{S} | (X' - S(E))$ ne divise pas $\mathscr{D} | (X' - S(E))$, puisque $\dim S(E) \leqslant n - 2$. Mais le support de $\mathscr{S} | (X' - S(E))$ est la réunion des $E'_j = E_j - S(E)$ $(j = 1, \ldots, s)$, qui sont des variétés connexes disjointes. Comme $z_j \in E'_j$, le coefficient de E'_j dans l'expression (additive) de $\mathscr{S}$ est le même que dans celle de $\mathscr{D}$, ce qui implique que $\mathscr{S} | (X' - S(E))$ divise $\mathscr{D} | (X' - S(E))$.

Le même raisonnement prouve que J ne s'annule pas sur $E_{s+1}, \ldots, E_k$ (puisque le jacobien de F en $z_{s+1}, \ldots, z_k$ n'est pas nul) et que si $\underset{\sim}{g} \in \mathscr{F}$ alors $E'_1, \ldots, E'_k$ ne sont pas de pôle de $(g/J) | (X' - S(E))$.

Soit f une fonction analytique sur X nulle sur $X - X'$ et nulle aussi sur toutes les composantes du sous-ensemble $J = 0$ de X différentes de $E_1, \ldots, E_s$ et telle que $f(z_1) \neq 0, \ldots, f(z_k) \neq 0$. (Rappelons que, d'après la définition de J, au voisinage de chaque z_j la fonction J ne s'annule que sur E_j). Soit $\underset{\sim}{h} = N_{K/L}(\underset{\sim}{f})$ où K et L sont les corps de fractions de A et $\underset{\sim}{B}$ respectivement (voir § 1). Alors, $\underset{\sim}{h} \in B$ et d'après (1.10) on a :

$$h(w) = \prod_{j=1}^{r} f(u_j)^{s_j}$$

si $F^{-1}(w) = \{u_1, \ldots, u_r\}$ et $\deg_{u_j} F = s_j$. On en déduit que $h \circ F$ s'annule sur tout point z tel que :

$$z \in X' - (E_1 \cup \ldots \cup E_s) \text{ et } J(z) = 0.$$

En plus, $h(F(z_1)) \neq 0, \ldots, h(F(z_k)) \neq 0$ puisque $\{z_1, \ldots, z_k\}$

est saturé par F. Alors h ne s'annule sur aucune composante de D de dimension $n-1$. Ceci démontre (a).

Par la définition de h, le support du diviseur de $J\,|\,X'_h$ est : $X'_h \cap (E_1 \cup \ldots . \cup E_s)$; cet ensemble est aussi le support de $\mathcal{S}\,|\,X'_h$. Donc, dans l'ouvert $X'_h - S(E)$ la restriction de $\mathcal{S}$ et du diviseur de J ont le même support : l'ensemble $X'_h \cap (E'_1 \cup \ldots \cup E'_s)$. Mais E'_j a le même coefficient dans le diviseur de J que dans $\mathcal{S}$, puisque $z_j \in E'_j$. Donc, le diviseur de $J\,|\,(X'_h - S(E))$ coïncide avec $\mathcal{S}\,|\,(X'_h - S(E))$. Comme $\dim S(E) \leqslant n-2$, on obtient (b).

Supposons maintenant que X est normal. Soit $\underset{\sim}{g} \in \mathcal{F}$. Alors g/J est analytique sur X'_h, d'après (3.2b). On en déduit que $h^m g/J$ est analytique sur X' pour m assez grand, au voisinage de 0. Comme X est normal on obtient que $g' = h^m g/J$ est analytique au voisinage de 0 ([3] 45.22iv). Alors, puisque $\underset{\sim}{g} = (\underset{\sim}{g}'/\underset{\sim}{h}^m)\underset{\sim}{J}$ on a prouvé (3.2c).

Supposons maintenant que A est un anneau de factorisation unique. L'idéal de chaque E_j dans A est alors principal : soit $\underset{\sim}{g}_j$ un générateur de cet idéal. Ecrivons : $\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{u}_j (\underset{\sim}{g}_j)^{m_j}$ pour $j = 1, \ldots, k$, où $m_j \geqslant 0$ et $\underset{\sim}{u}_j$ n'appartient pas à l'idéal de E_j. Soit

$$\overline{\underset{\sim}{J}} = (\underset{\sim}{g}_1)^{m_1} \ \ldots \ (\underset{\sim}{g}_s)^{m_s}.$$

Comme J est équivalent au jacobien de $F : X' \longrightarrow Y'$ au voisinage de chaque z_j, on a que le coefficient de $E_j \cap X'$ ($j = 1, \ldots, s$) dans l'expression additive de $\mathcal{S}$ est le même que dans celle du diviseur de $\overline{J}\,|\,X'$. Comme tous les deux ont support $E_1 \cup \ldots \cup E_s$, on obtient la première assertion de (3.2d). La deuxième se prouve comme (3.2c).

(3.4) *On supposera dorénavant, en plus des hypothèses du début de ce paragraphe, que* X *est normal.*

La proposition 3.2 avec le théorème suivant constituent le Théorème de dualité locale.

(3.5) THEOREME. – *Soit* $\underset{\sim}{h} \in B$ ($\underset{\sim}{h} \neq 0$) *tel que* $\mathcal{F}_M$ *soit un idéal principal dans* A_M, *où* M *est l'ensemble multiplicatif engendré par* $\underset{\sim}{h}$ *(voir (3.2). Soit* $\underset{\sim}{J} \in \mathcal{F}$ *un générateur de* $\mathcal{F}_M$. *Alors,*

a) $\mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f}/\underset{\sim}{J}) \in B_M$ *pour tout* $\underset{\sim}{f} \in A_M$

b) $\mathrm{Hom}_{B_M}(A_M, B_M)$ *est un* A_M*-module libre de rang un ayant comme générateur :*

$$\underset{\sim}{f} \longrightarrow \mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f}/\underset{\sim}{J}), \underset{\sim}{f} \in A_M .$$

Soit $A^* = \{\alpha \in K : \mathrm{Tr}_{K/L}(\alpha \underset{\sim}{f}) \in B \text{ pour tout } \underset{\sim}{f} \in A\}$.

Alors $A \subset A^* \subset K$ et A^* est un A-module. Puisque K/L est séparable, $A^* = \mathrm{Hom}_B(A, B)$ comme A-modules, canoniquement. Ceci étant, le Théorème 3.5 se déduit de la suivante :

(3.6) PROPOSITION. – $A^* = \{\alpha \in K : \alpha \mathscr{F} \subset A\}$.

Démonstration de (3.5) à partir de (3.6). – On définit $(A_M)^*$ de façon analogue à A^* et on vérifie que $(A^*)_M = (A_M)^*$ (1.8). On déduit de cela et de (3.6) que :

$$(A_M)^* = (A^*)_M = \{\alpha \in K : \alpha \mathscr{F}_M \subset A_M\}$$

puisque l'idéal $\mathscr{F}$ a une base finie. Il en résulte que $(A_M)^*$ est un A_M-module libre de rang un engendré par $1/\underset{\sim}{J}$. Il suffit alors d'appliquer l'isomorphisme canonique de A_M-modules :

$$(A_M)^* = \mathrm{Hom}_{B_M}(A_M, B_M).$$

(3.7) COROLLAIRE. – *Si* $\mathscr{F}$ *est principal, alors* A *est isomorphe à* $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ *comme* A*-module.*

(3.8) PROPOSITION. – *Dans chacun des deux cas suivants* $\mathscr{F}$ *est principal :*

a) A *est un anneau de factorisation unique ou*

b) Y *est non-singulier et* X *est une intersection complète.*

Démonstration. – Le cas (a) découle de (3.2).

Pour prouver (b) considérons les équations de X :

$$f_1 = 0, \ldots, f_{N-n} = 0,$$

où $\underset{\sim}{f}_1, \ldots, \underset{\sim}{f}_{N-n}$ engendrent l'idéal de X en $0 \in \mathbf{C}^N$. Si $z \in X'$ alors z est non-singulier dans X. Il en résulte qu'il existe un système local $(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ de coordonnées en z dans $\mathbf{C}^N$ tel que $\zeta_{n+1} = f_1, \ldots, \zeta_N = f_{N-n}$. Alors $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ est un système local de coordonnées en z dans X'. Comme Y est non-singulier, on peut supposer $Y = \mathbf{C}^n$. Soit $F = (w_1, \ldots, w_n)$. Alors, le jacobien de $F|X' : X' \longrightarrow \mathbf{C}^n$ au voisinage de z est :

$$\frac{\partial(w_1, \ldots, w_n)}{\partial(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)} = \frac{\partial(w_1, \ldots, w_n, f_1, \ldots, f_{N-n})}{\partial(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)}.$$

Soit :
$$J = \frac{\partial(w_1, \ldots, w_n, f_1, \ldots, f_{N-n})}{\partial(z_1, \ldots, z_N)}.$$

Alors, J est, au voisinage de z dans X', le jacobien de F. Comme ceci est valable pour tout $z \in X'$ on déduit que $\underset{\sim}{J}$ engendre $\mathscr{F}$.

(3.9) *Exemple.* – Soit $X \in \mathbf{C}^4$ défini par : $z_1 z_3 + z_2 z_4 = 0$. Alors X est une hypersurface ayant une singularité isolée à l'origine. En particulier, X est normal ([3] 45.16-3v).

Soit $Y \subset \mathbf{C}^5$ défini par :

$$w_1 w_2 - w_3^2 = 0 \quad w_1 w_4 + w_3 w_5 = 0 \quad w_3 w_4 + w_2 w_5 = 0.$$

Soit $F : (X, 0) \longrightarrow (Y, 0)$ définie par :

$$w_1 = z_1^2 \quad w_2 = z_2^2 \quad w_3 = z_1 z_2 \quad w_4 = z_3 \quad w_5 = z_4.$$

Alors F est de type fini et surjective. Il en résulte que Y est irréductible en chaque point et que $\dim Y = 3$. On vérifie que Y est le quotient de X par l'involution :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longrightarrow (-z_1, -z_2, z_3, z_4).$$

Alors, tout élément de B est invariant par cette involution. Réciproquement, soit $\underset{\sim}{f} \in A$ invariant. Si $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est une série de Taylor qui représente $\underset{\sim}{f}$, on voit que :

$$(3.10) \qquad f(-z_1, -z_2, z_3, z_4) = f(z_1, z_2, z_3, z_4) + g(z_1, \ldots, z_4)(z_1 z_3 + z_2 z_4)$$

$$(3.11) \qquad f(z_1, z_2, z_3, z_4) = u z_1 + v z_2 + w$$

où u, v et w sont des séries invariantes par l'involution de plus haut. En remplaçant (3.11) dans (3.10) on obtient que $u z_1 + v z_2$ est nulle sur X. Alors, on peut aussi représenter $\underset{\sim}{f}$ par w. Mais il est évident que w s'écrit comme fonction de w_1, w_2, w_3, w_4, w_5. Alors, $\underset{\sim}{f} \in B$.

Du fait que B est le sous-anneau des invariants de A et que A est intégralement clos, il résulte que B est intégralement clos. Alors, Y est normal au voisinage de 0.

Nous allons prouver que $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ *n'est pas isomorphe à* A *comme* A*-module.* Pour cela, il suffit de prouver que A^* n'est pas engendré par un seul élément. Supposons, par l'absurde, que $A^* = A\alpha$. Comme $1 \in A^*$, $\alpha = 1/\underset{\sim}{f}$ avec $\underset{\sim}{f} \in A$.

Soit $f(0) \neq 0$. Alors $A^* = A$. Observons que $z_3/z_2 \in A^*$. En effet, d'après ce qu'on a vu plus haut, $1, z_1, z_2$ engendrent A comme B-module. Il faut donc seulement vérifier que :

$$\mathrm{Tr}_{K/L}(z_3/z_2) \in B, \ \mathrm{Tr}_{K/L}((z_3/z_2)z_1) \in B, \ \mathrm{Tr}_{K/L}((z_3/z_2)z_2) \in B.$$

Mais K/L est de degré deux et son groupe de Galois est engendré par : $(z_1, z_2, z_3, z_4) \longrightarrow (-z_1, -z_2, z_3, z_4)$. Alors :

$$\mathrm{Tr}_{K/L}(z_3/z_2) = 0, \ \mathrm{Tr}_{K/L}((z_3/z_2)z_1) = -2z_4 \ \text{ et } \ \mathrm{Tr}_{K/L}(z_3) = 2z_3.$$

Si $A^* = A$, alors $z_3/z_2 \in A$, ce qui est impossible, comme on le voit immédiatement.

Soit $f(0) = 0$. Comme $1/\underset{\sim}{f} \in A^*$ on a :

$$\mathrm{Tr}_{K/L}(1/\underset{\sim}{f}) = 1/\underset{\sim}{f} + \overline{1/\underset{\sim}{f}} = \mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f})/\mathrm{N}_{K/L}(\underset{\sim}{f}) \in B.$$

De l'équation :

$$\underset{\sim}{f}^2 - \mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f})\underset{\sim}{f} + \mathrm{N}_{K/L}(\underset{\sim}{f}) = 0$$

il résulte que $\mathrm{N}_{K/L}(\underset{\sim}{f})$ divise $\underset{\sim}{f}^2$. C'est-à-dire, $\overline{\underset{\sim}{f}}$ divise $\underset{\sim}{f}$. Comme $1/\underset{\sim}{f} \in A^*$ on a (en écrivant $\underset{\sim}{f} = u\overline{\underset{\sim}{f}}$) :

$$1/(u\overline{\underset{\sim}{f}}) + 1/\overline{\underset{\sim}{f}} \in B, \ z_1/(u\overline{\underset{\sim}{f}}) - z_1/\overline{\underset{\sim}{f}} \in B, \ z_2/(u\overline{\underset{\sim}{f}}) - z_2/\overline{\underset{\sim}{f}} \in B.$$

De la première on tire que $u + 1$ n'est pas inversible, puisque $\underset{\sim}{f}$ ne l'est pas. Alors, $u - 1$ est inversible. De la deuxième et la troisième on déduit alors que f divise z_1 et z_2 dans A. Il est facile de voir que cela est impossible.

Le lieu discriminant D de F est $w_1 = w_2 = w_3 = 0$. Soit $h = w_4$. Alors h ne s'annule pas sur D. Mais si on localise par rapport à l'ensemble multiplicatif M engendré par $\underset{\sim}{h}$, on vérifie que A^*_M est engendré par $1/\underset{\sim}{z}_2$ comme A_M-module.

Nous allons maintenant démontrer (3.6). Pour faire cela, on prouvera d'abord plusieurs lemmes.

(3.12) LEMME. – *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{C}^N$, E *un sous-ensemble analytique normal et connexe de* U *et* S *un sous-ensemble analytique propre de* E. *Soit* φ_n *une suite de fonctions analytiques sur* E *qui converge uniformément sur chaque compact de* $E - S$ *vers une fonction méromorphe* φ. *Alors* φ *se prolonge en une fonction analytique sur* E.

Démonstration. – Comme $E - (S \cup S(E))$ est une variété, φ est analytique sur $E - (S \cup S(E))$. Si $a \in S$ est non-singulier dans S et dans E et si $\dim_a S < n - 1$, φ est analytique au voisinage de a par la normalité de E. Si $\dim_a S = n - 1$ et a est non-singulier dans E et dans S, on prouve par application de la formule de Cauchy que les φ_n sont uniforméments bornées au voisinage de a. Donc, φ est bornée au voisinage de a et, alors, φ est analytique au voisinage de a par la normalité de E. On a ainsi prouvé que φ est analytique en dehors d'un sous-ensemble analytique de E de codimension $\geqslant 2$. A nouveau par la normalité, φ est analytique.

(3.13) LEMME. – *La proposition 3.6 est vraie dans le cas particulier où* $X = \mathbf{C}^n$, $Y = \mathbf{C}^n$ et $F(z_1, \ldots, z_n) = (z_1^\mu, z_2, \ldots, z_n)$.

Démonstration. – C'est un calcul direct en observant que, dans ce cas, $\mathscr{F}$ est principal engendré par $z_1^{\mu-1}$.

Soit $z \in X$. Si on considère $F : (X, z) \longrightarrow (Y, w)$ $(w = F(z))$, on peut définir $A_z, B_w, K_z, L_w, \mathscr{F}_z, A_z^*$, etc. comme on a défini $A, B, K, L, \mathscr{F}, A^*$, etc.

Dans ce qui suit, si g est une fonction dans X, alors $\underset{\sim}{g}$ dénote son germe en 0 et $(\underset{\sim}{g})_z$ son germe en z.

(3.15) LEMME. – *Soit* g *une fonction méromorphe sur* X. *Supposons que* $\underset{\sim}{g} \in A^*$. *Alors,* $(\underset{\sim}{g})_z \in A_z^*$ *pour tout* $z \in X$ *au voisinage de* 0.

Démonstration. – Soit $w = F(z)$. Soit

$$F^{-1}(w) = \{z_1 = z, z_2, \ldots, z_k\}.$$

Nous allons prouver que toute fonction analytique φ au voisinage de z_1 dans X est limite uniforme, dans un voisinage de z_1, d'une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions analytiques sur X telle que φ_n converge uniformément vers 0 sur un voisinage de chaque point $z_2, \ldots, z_k$.

Admettons cela pour le moment et observons que, en se réduisant à des voisinages assez petits de 0, toute fonction méromorphe sur Y qui soit analytique en 0 et analytique en dehors de l'image T de l'ensemble des pôles de g, est analytique sur Y.

D'après (1.10), $\mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{g}\underset{\sim}{\varphi}_n)$ est le germe en 0 de la fonction :

$$\psi_n(u) = \sum_{v \in F^{-1}(u)} (\deg_v F)\, g(v)\, \varphi_n(v)\,, \quad u \in Y - T\,.$$

Alors, puisque $\underset{\sim}{g} \in A^*$, ψ_n est analytique sur $Y - T$ et en 0. Donc, ψ_n est analytique sur Y.

Dans un voisinage de w, ψ_n converge uniformément sur tout compact du complémentaire de T (puisque F est propre) vers une fonction qui représente $\mathrm{Tr}_{K_{z_1}/L_{z_1}}(\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{\varphi})_{z_1}$, d'après le choix de la suite $\{\varphi_n\}$. Alors, $\mathrm{Tr}_{K_{z_1}/L_{z_1}}(\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{\varphi})_{z_1} \in B_w$ par (3.12), ce qui implique $(\underset{\sim}{g})_{z_1} \in A^*_{z_1}$.

Il reste à prouver l'assertion de plus haut. Par un changement linéaire de coordonnées on peut supposer que les premières coordonnées $a_1, \ldots, a_k$ des points $z_1, \ldots, z_k$ sont toutes différentes. Soient D_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, des disques de centres a_j dans $\mathbf{C}$ d'adhérences disjointes deux à deux. Alors $\bigcup_{j=1}^{k} D_j$ est un domaine polynomialement convexe de $\mathbf{C}$. Considérons :

$$W = \left\{(z_1, \ldots, z_N) : z_1 \in \bigcup_{j=1}^{k} D_j\right\} = \left(\bigcup_{j=1}^{k} D_j\right) \times \mathbf{C}^{N-1}\,.$$

Alors, W est polynomialement convexe dans $\mathbf{C}^N$.

On peut supposer que le voisinage U de 0 duquel X est un sous-ensemble analytique, est un polydisque de $\mathbf{C}^N$. Alors U est polynomialement convexe. Donc, $U' = U \cap W$ l'est aussi. Notons que : $U' = U_1 \cup \ldots \cup U_k$ où $U_j = (D_j \times \mathbf{C}^{N-1}) \cap U$ et que les U_j sont disjoints deux à deux.

Soit α une fonction analytique au voisinage de z_1 dans $\mathbf{C}^N$ qui étend φ. Soit K_1 un polydisque compact de centre z_1 contenu dans ce voisinage et dans U_1. Il est évident que α peut être approchée uniformément sur K_1 par des fonctions analytiques sur U_1. Toute fonction analytique sur U_1 s'étend à une fonction analytique sur U' nulle sur $U_2, \dots, U_k$. Comme U' est polynomialement convexe, cette fonction peut être approchée uniformément par un polynôme de $\mathbf{C}^N$ sur le compact $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k$, où $K_j \subset U_j$ est un polydisque compact de centre z_j $(j = 2, \dots, k)$. Tout polynôme de $\mathbf{C}^N$ est une fonction analytique sur U dont la restriction à X est analytique sur X. Ceci complète la démonstration.

Démonstration de (3.6). – Soit $T \supset F(X - X')$ un sous-ensemble analytique de Y tel que $\dim T \leqslant n - 2$ et que F admette une application du type : $(z_1, \dots, z_n) \longrightarrow (z_1^q, z_2, \dots, z_n)$ comme modèle local en tout point de $X'' = X - F^{-1}(T)$ (lemme 2.3). Notons que $X'' \subset X'$ et que $\dim (X - X'') \leqslant n - 2$. On reprend l'ensemble analytique $C \subset X$ introduit au § 1. Soient $C_1, \dots, C_r$ les composantes de C qui ne sont pas contenues dans $X - X'$. On a vu (1.4) que $\dim C_j = n - 1$. D'après ce qu'on a vu au § 1, $C \cap X'$ est l'ensemble des zéros du jacobien de $F : X' \longrightarrow Y'$. Par la propriété du modèle local, il en résulte que $C \cap X''$ est non-singulier.

Soit α méromorphe telle que $\underset{\sim}{\alpha}\mathscr{F} \subset A$. En travaillant dans des voisinages assez petits de 0, on peut supposer que si f est analytique sur X et αf est analytique en 0, alors αf est analytique sur X. Soit $u \in C_j \cap X''$. Puisque $C \cap X''$ est non-singulier, $u \notin C_k$ si $k \neq j$. On a vu au cours de la démonstration de (3.2) qu'il existe une fonction analytique h sur X telle que h est équivalente au jacobien de F au voisinage de u. Soit g analytique sur X telle que g soit nulle sur $\bigcup_{k \neq j} C_k$ mais $g(u) \neq 0$. Alors $\underset{\sim}{h}\underset{\sim}{g}^m \in \mathscr{F}$ pour m assez grand. Donc, $\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{h}\underset{\sim}{g}^m \in A$. Alors, $(\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{h}\underset{\sim}{g}^m)_z \in A^z$ pour tout $z \in X$. En particulier, pour $z = u$. Alors, d'après (3.13), $\underset{\sim}{\alpha}_u \in A_u^*$.

Le même raisonnement prouve que $\underset{\sim}{\alpha}_u \in A_u = A_u^*$ si $u \notin C$. Donc, $\underset{\sim}{\alpha}_z \in A_z^*$ pour tout $z \in X''$.

Soit f analytique sur X. Soit $w \in Y - T$ et soit

$$F^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_k\}.$$

Alors, d'après (1.10), $\mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{\alpha})$ est représenté par une fonction dont le germe en w représente : $\sum_j \mathrm{Tr}_{K_{z_j}/L_w}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{\alpha})_{z_j}$. Comme $\underset{\sim}{\alpha}_{z_j} \in A_{z_j}^*$ nous avons que : $\mathrm{Tr}_{K_{z_j}/L_w}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{\alpha})_{z_j} \in B_w$. Donc, $\mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f}\alpha)$ est représenté par une fonction analytique sur $Y - T$. Puisque Y est normal, $\mathrm{Tr}_{K/L}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{\alpha}) \in B$. Ceci implique que $\underset{\sim}{\alpha} \in A^*$.

Supposons maintenant que $\underset{\sim}{\alpha} \in A^*$. Alors, par le lemme 3.15, $\underset{\sim}{\alpha}_z \in A_z^*$ pour tout $z \in X''$. D'après le lemme 3.13, il en résulte que $\underset{\sim}{\alpha}_z \mathscr{F}_z \subset A_z$ pour tout $z \in X''$. Soit f analytique sur X telle que $f \in \mathscr{F}$. Alors, d'après les définitions de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_z$ on a que $\underset{\sim}{f}_z \in \mathscr{F}_z$ pour tout $z \in X''$. Cela implique $\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{f}_z \in A_z$ pour tout $z \in X''$. Alors αf est analytique sur X''. Donc, puisque X est normal, $\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{f} \in A$. On en déduit que $\underset{\sim}{\alpha}\mathscr{F} \subset A$.

4. Applications.

Dans la proposition qui suit on se place dans la situation du début du § 1 et on suppose que X et Y sont normaux.

(4.1) PROPOSITION. – *Supposons $\mathscr{F}$ principal, engendré par J. Alors, $J \notin \mathfrak{M}A$, où $\mathfrak{M}$ est l'idéal maximal de B.*

Démonstration. – Supposons $J \in \mathfrak{M}A$. Alors,

$$J = \sum_i \alpha_i \beta_i\,,\quad \alpha_i \in A\,,\quad \beta_i \in \mathfrak{M}.$$

Donc,

$$\mu = \mathrm{Tr}_{K/L}(1) = \mathrm{Tr}_{K/L}(J/J) = \mathrm{Tr}_{K/L}(\Sigma \alpha_i \beta_i/J) = \Sigma \beta_i \mathrm{Tr}_{K/L}(\alpha_i/J)\,.$$

Mais, d'après le théorème 3.5, $\mathrm{Tr}_{K/L}(\alpha_i/J) \in B$ pour tout i. Alors, $\mu \in \mathfrak{M}$, ce qui est absurde.

(4.2) THEOREME. – *Soit $G : (\mathbf{C}^N, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^N, 0)$ une application analytique locale de type fini. Soit Y un sous-ensemble analytique normal d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^N$. On suppose $0 \in Y$ et $\dim_0 Y = n$. On suppose, en plus, que Y n'est pas contenu, au voisinage de 0, dans le lieu discriminant de G. Soit $Z = G^{-1}(Y)$ et soit X une composante irréductible de dimension n de Z en 0. Soit T la réunion des autres composantes de Z de dimension n en 0. Alors, si l'anneau local de X en 0 est un anneau de factorisation unique et si T n'est pas vide on a : $\dim_0(T \cap X) = n - 1$.*

Démonstration. – Soit V un voisinage ouvert de 0 tel que Y soit un ensemble analytique de V et soit $U = G^{-1}(V)$. Soit $F = G|X$, $F : X \longrightarrow Y$. Alors F est de type fini et on est dans la situation du début du § 1. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{V,0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{U,0} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des inclusions induites par composition avec G et F et les flèches verticales ont pour noyaux $\mathscr{P}$ (idéal de Y dans B) et $\mathfrak{P}$ (idéal de X dans A) respectivement.

Puisque $\mathcal{O}_{U,0}$ est un $\mathcal{O}_{V,0}$-module libre ([1] theor. 25.16), tout B-homomorphisme $A \rightarrow B$ se relève à un $\mathcal{O}_{V,0}$-homomorphisme $\mathcal{O}_{U,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,0}$. Etudions quels sont les $\mathcal{O}_{V,0}$ homomorphismes $\mathcal{O}_{U,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,0}$ qui passent au quotient et induisent un B-homomorphisme $A \longrightarrow B$. Tout $\mathcal{O}_{V,0}$ homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_{U,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,0}$ est de la forme : $\underset{\sim}{g} \longrightarrow \mathrm{Tr}_{E_U/E_V}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{g}/\underset{\sim}{J})$, $\underset{\sim}{g} \in \mathcal{O}_{U,0}$ pour un $\underset{\sim}{f} \in \mathcal{O}_{U,0}$ convenable, où $\underset{\sim}{J}$ est le jacobien de G et E_U, E_V sont les corps de fractions de $\mathcal{O}_{U,0}$ et $\mathcal{O}_{V,0}$ respectivement (3.5). Pour que φ passe au quotient il faut et il suffit que :

$$\mathrm{Tr}_{E_U/E_V}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{g}/\underset{\sim}{J}) \in \mathscr{P} \text{ pour tout } \underset{\sim}{g} \in \mathfrak{P}.$$

Soit X_1 une composante de T. Comme $\dim G(X_1) = \dim X_1 = n$, $G(X_1)$ n'est pas contenu dans $D \cap Y$ (D = lieu discriminant de G). Alors, $X_1 - (X \cup G^{-1}(D)) \neq \emptyset$. Soit : $z \in X_1 - (X \cup G^{-1}(D))$. Supposons $f(z) \neq 0$. Soit g analytique sur U, nulle sur X et sur tous les points de $G^{-1}(G(z))$ *sauf* z. Alors $\underset{\sim}{g} \in \mathfrak{P}$ mais $\mathrm{Tr}_{E_U/E_V}(\underset{\sim}{f}\underset{\sim}{g}/\underset{\sim}{J}) \notin \mathscr{P}$ puisque c'est le germe d'une fonction non nulle en $F(z) \in Y$ ($J \neq 0$ en tout point de $F^{-1}(F(z))$).

Donc, pour que φ passe au quotient il faut que f s'annule sur $X_1 - (X \cup G^{-1}(D))$, ce qui implique que f s'annule sur X_1. On montre que, réciproquement, si f s'annule sur T alors φ passe au quotient de façon analogue.

Soit $\mathscr{A}$ l'idéal de T en $\mathcal{O}_{U,0}$. Alors, on a prouvé que φ passe au quotient si et seulement si $\underset{\sim}{f} \in \mathscr{A}$. D'après ce qu'on a vu plus haut, il en résulte un épimorphisme : $\mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(A, B)$

compatible avec $\mathcal{O}_{U,0}$, $\longrightarrow$ A pour les respectives structures de module. Le noyau de cet homomorphisme est $\mathcal{A} \cap \mathfrak{P}$. Donc, $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathfrak{P} \cong \mathrm{Hom}_B(A, B)$ comme A-module. D'après les hypothèses et par (3.7) et (3.8), $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ est isomorphe à A comme A-module. Alors, $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathfrak{P} \subset A$ est un idéal principal. Comme $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathfrak{P}$ est l'idéal en A de $T \cap X$ et que $T \cap X \neq \emptyset$ (puisqu'il contient 0) et que $T \cap X \neq X$, on a : $\dim_0(T \cap X) = n - 1$.

(4.3) *Remarque et exemple.* – Dans ce qui précède on a montré que chaque composante de $T \cap X$ est de dimension $n - 1$. Pourtant, cela ne veut pas dire que l'intersection de chaque composante de T avec X soit de dimension $n - 1$, comme le montre l'exemple suivant.

Considérons $G : (\mathbf{C}^6, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^6, 0)$ donnée par :

$$w_1 = (z_1 - z_5)(z_3 - z_6) \quad w_2 = z_2 \quad w_3 = z_1 z_5 + z_3 + z_6$$
$$w_4 = z_4 \quad w_5 = z_1 + z_5 \quad w_6 = z_3^2 + z_6^2 \, .$$

Elle est de type fini en 0. Soit Y défini par :

$$w_1 + w_2 w_4 = 0 \quad w_1 - w_3 w_5 = 0 \quad w_3^2 - w_6 = 0 \, .$$

Si on considére la projection $Y \longrightarrow \mathbf{C}^3$:

$$(w_1, \ldots, w_6) \longrightarrow (w_2, w_3, w_4)$$

et si on tient compte que 0 est un point singulier isolé de Y, on voit que Y est irréductible de dimension 3 en 0.

$G^{-1}(Y)$ contient les ensembles de dimension 3 suivants :

X_1 défini par : $z_1 z_3 + z_2 z_4 = 0 \quad z_5 = 0 \quad z_6 = 0$

X_2 défini par : $z_5 z_6 + z_2 z_4 = 0 \quad z_1 = 0 \quad z_3 = 0$.

Pourtant, $X_1 \cap X_2$ est de dimension 1.

5. Etude algébrique.

Si K est une extension algébrique séparable et finie du corps commutatif L, on sait que $\mathrm{Hom}_L(K, L)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la trace $K \longrightarrow L$. Ceci n'est pas vrai, en général, quand L et K sont des anneaux. Nous allons étudier ici ce problème pour des extensions d'anneaux commutatifs, noethériens, intégralement clos.

Soit B un anneau commutatif, noethérien, sans diviseurs de 0 et intégralement clos. Soit L le corps de fractions de B et soit K une extension algébrique, séparable et finie de L. Soit A la clôture intégrale de B dans K. Alors A possède les mêmes propriétés que B et il est un B-module de type fini.

Soit $A^* = \{x \in K : \mathrm{Tr}(xa) \in B$ pour tout $a \in A\}$ où Tr est la trace de K sur L ; A^* est un sous-A-module de K.

Si M est un sous-ensemble multiplicatif $(0 \notin M)$ de B on définit :

$$(A_M)^* = \{x \in K : \mathrm{Tr}(xa) \in B_M \text{ pour tout } a \in A_M\}$$

et on a: $(A_M)^* = A_M^* = \{x/y : x \in A^*, y \in M\}$.

En effet, il est évident que $A_M^* \subset (A_M)^*$. Soit $x \in (A_M)^*$. Soient $a_1, \ldots, a_k$ des générateurs de A comme B-module. Alors, il existe $m_j \in M$ tel que $m_j \mathrm{Tr}(xa_j) \in B$. Donc, $(m_1 \ldots m_k)\, x \in A^*$.

(5.1) THEOREME. – *Soient* $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ *des idéaux premiers minimaux de* B. *Alors, il existe* $h \in B - \bigcup_j \mathfrak{P}_j$ *tel que* A_M^* *est un* A_M-*module libre de rang* 1, *où* M *est l'ensemble multiplicatif engendré par h.*

Si A est un anneau de factorisation unique, alors A^* *est un* A-*module libre de rang* 1.

(5.2) COROLLAIRE. – *Dans les hypothèses du théorème précédent,* $\mathrm{Hom}_{B_M}(A_M, B_M)$ *est un* A_M-*module libre de rang* 1. *Si* A *est anneau de factorisation unique,* $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ *est un* A-*module libre de rang* 1.

Démonstration. – En effet, $\mathrm{Hom}_{B_M}(A_M, B_M) = (A_M)^*$ canoniquement.

Démonstration du théorème. – Soit $\theta \in A$ un élément primitif de K/L et soit $D \in B$ le discriminant du polynôme minimal de θ sur L.

(5.3) Soit $x \in A$, $x \neq 0$, tel que $x^{-1} \in A^*$. Alors, $N(x)$ divise D dans B (où N est la norme de K/L).

En effet, dans le B-module libre $B[\theta]$ on a la forme bilinéaire : $(a, b) \longrightarrow \mathrm{Tr}(ab/x)$ à valeurs dans B. Donc, le discriminant de la forme trace est le produit du discriminant de celle-là par le déterminant de $a \longrightarrow ax$, qui est la norme de x.

Nous supposerons dorénavant que l'ensemble $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ contient tous les idéaux premiers minimaux qui contiennent D.

Soit $S = B - \bigcup_j \mathfrak{P}_j$. Alors $B_S \subset A_S$ sont des anneaux de Dedekind avec un nombre fini d'idéaux premiers ; donc, des anneaux à idéaux principaux. A_S est la clôture intégrale de B_S dans K. Soient $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_s$ les idéaux premiers de A dont l'intersection avec B est l'un des $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$. Comme A est noethérien, il existe $h \in S$ tel que les $\mathscr{P}'_j = (\mathscr{P}_j)_M$ sont principaux dans $A' = A_M$, où M est l'ensemble multiplicatif engendré par h. Soit $\alpha_j \in \mathscr{P}_j$ qui engendre $\mathscr{P}'_j$ $(j = 1, \ldots, s)$. Si A est un anneau de factorisation unique, chaque $\mathscr{P}$ est principal. Dans ce cas, on prend $h = 1$ et α_j générateur de $\mathscr{P}_j$.

(5.4) Si $x \in A'^*$ alors $x = y\alpha_1^{-q_1} \ldots \alpha_s^{-q_s}$ avec $y \in A'$ et $q_j \geqslant 0$.

En effet, soient $q_1 \geqslant 0, \ldots, q_s \geqslant 0$ tels que $y = x\alpha_1^{q_1} \ldots \alpha_s^{q_s}$ soit de la forme $y = c/d$, $c, d \in A'$, $d \notin \bigcup_j \mathscr{P}'_j$. Alors, $y \in A'_{\mathscr{P}}$ pour tout idéal $\mathscr{P}$ minimal de A' de la forme $\mathscr{P} = \mathscr{P}'_j$. Soit $\mathscr{P}$ un idéal minimal de A' tel que $\mathscr{P} \neq \mathscr{P}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Soit $\mathfrak{P} = \mathscr{P} \cap B'$ (où $B' = B_M$). Soit $T = B' - \mathfrak{P}$. Alors $B'_T \subset A'_T$ sont des anneaux à idéaux principaux. Comme $x \in A'^*$ on a $y \in A'^*_T$. Soit $y = e/f$ avec $e, f \in A'_T$ premiers entre eux. Soit $u \in A'_T$ tel que $u = 0 \bmod f$ et $u = 1 \bmod e$. Posons, pour tout $a \in A'_T$:

$$\mathrm{Tr}(a/f) = \mathrm{Tr}(ua/f) + \mathrm{Tr}((1-u)a/f).$$

On voit que $\mathrm{Tr}(a/f) \in B'_T$ pour tout $a \in A'_T$. Comme D est inversible dans B'_T, on a par (5.3) que f est invertible dans A'_T. Donc, $y \in A' \subset A'_{\mathscr{P}}$. Alors $y \in A'_{\mathscr{P}}$ pour tout idéal premier minimal $\mathscr{P}$ de A'. Donc, $y \in A'$.

(5.5) Soit $x \in A'^*$ de la forme $x = y\alpha_j^{-q}$ avec $q \geqslant 0$, $y \in A'$, $y \notin \mathscr{P}'_j$. Alors $\alpha_j^{-q} \in A'^*$.

En effet, soit $a \in A'$. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier minimal de B'. Soit $T = B' - \mathfrak{P}$. Alors $B'_T \subset A'_T$ sont des anneaux à idéaux principaux. Soit $u = 1 \bmod \alpha_j^q$ et $u = 0 \bmod y$ dans A'_T. Alors, de $\mathrm{Tr}(a\alpha_j^{-q}) = \mathrm{Tr}((1-u)a\alpha_j^{-q}) + \mathrm{Tr}(ua\alpha_j^{-q})$ il s'ensuit que $\mathrm{Tr}(a\alpha_j^{-q}) \in B'_T = B'_{\mathfrak{P}}$, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{P}$. Donc, $\mathrm{Tr}(a\alpha_j^{-q}) \in B'$. Alors, $\alpha_j^{-q} \in A'^*$.

(5.6) Pour chaque $j = 1, \ldots, s$ soit r_j le plus grand entier $r \geqslant 0$ tel que $\alpha_j^{-r} \in A'^*$, qui existe par (5.3). Alors $J^{-1} \in A'^*$ où :

$$J = \alpha_1^{r_1} \ldots \alpha_s^{r_s}.$$

Pour le prouver, on prouve par récurrence en k que

$$\beta_k^{-1} = \alpha_1^{-r_1} \ldots \alpha_k^{-r_k} \in A'^*.$$

Si $k = 1$, c'est par définition. Pour passer de k à $k+1$ considérons un idéal premier minimal arbitraire $\mathfrak{P}$ de B' et soit $T = B' - \mathfrak{P}$. Comme plus haut, il existe $u \in A'_T$ tel que :

$$u = 0 \bmod \beta_k \quad \text{et} \quad u = 1 \bmod (\alpha_{k+1})^{r_{k+1}}.$$

Soit $a \in A'$. Alors, de

$$\mathrm{Tr}(a\beta_{k+1}^{-1}) = \mathrm{Tr}(ua\beta_{k+1}^{-1}) + \mathrm{Tr}((1-u)a\beta_{k+1}^{-1})$$

il résulte que $\mathrm{Tr}(a\beta_{k+1}^{-1}) \in B_T = B_{\mathfrak{P}}$. Comme ceci est vrai pour tout $\mathfrak{P}$, on a $\mathrm{Tr}(a\beta_{k+1}^{-1}) \in B$. Alors, $\beta_{k+1}^{-1} \in A'^*$.

Maintenant, pour prouver le théorème, on va prouver que $A'^* = A'.J^{-1}$. L'inclusion $A'.J^{-1} \subset A'^*$ découle de (5.6). Soit $x \in A'^*$. D'après (5.4) $x = y\alpha_1^{-q_1} \ldots \alpha_s^{-q_s}$ avec $y \in A'$ et $q_j \geqslant 0$. On peut supposer aussi que $y \notin \mathscr{P}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Comme $y\alpha_j^{-q_j} \in A'^*$, on a $\alpha_j^{-q_j} \in A'^*$ par (5.5). Donc, $q_j \leqslant r_j$. Alors, $x \in A'.J^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. NAGATA, Local rings, Interscience, 1962.

[2] GUNNING, ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall, 1965.

[3] S. Abhyankar, Local analytic geometry, Academic Press.

[4] G. Scheja, U. Storch, Uber Spurfunktionen bei vollständigen Durchsnitten, *J. Reine und Angew. Math.*, 278/279 (1975), 174-189.

Manuscrit reçu le 5 juillet 1978
révisé le 27 juillet 1979.

Marcos Sebastiani,
Instituto de Matematica da UFRGS
Rua Sarmento Leite 425
90.000 – Porto Alegre, RS (Brasil).