ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALANO ANCONA

Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 71-90

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_71_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979), 71-90.

UNE PROPRIÉTÉ DE LA COMPACTIFICATION DE MARTIN D'UN DOMAINE EUCLIDIEN

par Alano ANCONA

Introduction.

Soient Ω un domaine greenien de $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ et $\hat{\Omega}$ le compactifié de Martin de Ω relativement au faisceau des fonctions harmoniques ordinaires (*). On note $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$ la frontière de Martin de Ω et Δ_1 l'ensemble des points minimaux de Δ. Dans la première partie de ce travail, on se propose d'établir le critère géométrique suivant de convergence vers un point de Δ_1 :

(P_1) Supposons que Ω contienne une boule ouverte $B(x_0,r)\,(r>0)$ et soit z_0 un point de $\partial B(x_0,r) \cap \partial\Omega$: alors le point $x_0 + t(z_0 - x_0)$ tend dans $\hat{\Omega}$ vers un point de Δ_1 lorsque $t \in [0,1[$ tend vers 1.

On peut d'ailleurs étendre ce résultat aux suites de $B(x_0,r)$ tendant non tangentiellement (dans la boule) vers z_0, et préciser le comportement sur $\partial\Omega$ de la minimale ainsi obtenue.

On obtient ainsi une solution positive, dans un cas particulier, à un problème de G. Choquet pour un domaine contenant un cône ouvert de révolution. Dans [1] on a construit, pour $\varphi \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, un domaine plan Ω_φ contenant l'« angle » $\left\{te^{i\theta} ; 0 < t < 2, |\theta| < \frac{\varphi}{2}\right\}$, et tel que l'adhérence dans

(*) On peut étendre l'essentiel des résultats de ce travail au cas des opérateurs elliptiques d'ordre 2, à coefficients hölderiens ([12]).

$\hat{\Omega}_\varphi$ du segment réel $]0,1]$ englobe une infinité de points de $\Delta - \Delta_1$. On peut d'ailleurs en modifiant convenablement la construction obtenir un tel domaine pour tout $\varphi \in]0,\pi[$ (voir la remarque 5 plus bas).

La propriété (P_1) donne un critère simple de convergence vers un point de Δ_1, n'exigeant aucune régularité sur $\partial\Omega$ au voisinage de z_0, contrairement aux critères déjà connus : domaines à courbure bornée de De La Vallée Poussin ([9], [8]) domaines lipschitziens étudiés par R. A. Hunt et R. L. Wheeden ([5], [6]) (on trouvera d'autres exemples, plus particuliers, dans [1], [2], [3], [7]). De plus, la propriété (P_1) permet par exemple d'obtenir une nouvelle condition simple pour que l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω soit naturellement homéomorphe à $\hat{\Omega}$: il suffit que Ω soit borné et réunion d'une famille de boules ouvertes de même rayon r_0(**) et que si Ω contient deux boules ouvertes B_1 et B_2 de rayon r_0 et opposées par rapport à un point z de $\partial\Omega$, Ω contient un cône ouvert de sommet z et de révolution par rapport à un axe normal au diamètre commun de B_1 et B_2. Cette classe de domaine n'est pas comparable (pour l'inclusion) à la classe des domaines lipschitziens bornés.

La méthode suivie suggère et permet d'établir dans le cas plan une autre propriété :

(P_2) Soient $\varphi, \psi > 0$, avec $\varphi + 2\psi \leqslant 2\pi$, $\varphi \geqslant \psi$; si on a :

$$\left\{te^{i\theta}\,;\ 0<t<2,\ |\theta|<\frac{\varphi}{2}\right\} \subset \Omega \subset \left\{te^{i\theta}\,;\ t>0,\ |\theta|\leqslant\frac{\varphi}{2}+\psi\right\}$$

alors la trace sur $]0,1]$ du filtre des voisinages de 0, converge dans $\hat{\Omega}$ vers un point minimal de Δ.

Ce résultat était également suggéré par les exemples déjà mentionnés de [1].

Dans la dernière partie de ce travail on apporte une solution négative à une conjecture de Martin ; il n'est pas vrai en général que dans $\hat{\Omega}$ on a $\Delta = \bar{\Delta}_1$; cette propriété est mise en défaut dans le cas du domaine plan

$$\left(\mathbf{C}\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\left[n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}\right]\right).$$

On peut construire des contre-exemples analogues dans $\mathbf{R}^3$.

(**) Si Ω possède seulement ces deux propriétés, il n'y a qu'une ou deux minimales normalisées distinctes associées à un point frontière (voir le 8-*b*).

Les méthodes utilisées ici prolongent celles de [1] : établissement de majorations d'un type introduit par Carleson ([4], [5]), puis obtention à partir de là d'« inégalités de Harnack jusqu'au bord » qui permettent de déterminer la frontière de Martin de Ω.

1. Un critère de convergence vers un point minimal.

Dans toute la suite Ω désignera un domaine de Green de $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$, G sa fonction de Green ; on notera $B(x,r)$ la boule ouverte (euclidienne) de centre x et de rayon r, $e_1 = (1,0,0\ldots)$, $e_2 = (0,1,0\ldots)$ les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$; on pose enfin $\|x\| = \sqrt{\Sigma x_i^2}$ pour $x = (x_1,x_2\ldots) \in \mathbf{R}^n$ et $d(x,y) = \|x-y\|$.

On commence par établir l'estimation suivante, analogue à une estimation de L. Carleson pour les mesures harmoniques dans un domaine lipschitzien (voir [3], [4] et [1]).

LEMME 1. — *On suppose que* Ω *contient le demi-espace* $x_1 > 0$, *on désigne par* D_+ *la demi-droite* $\{te_1\,;\, t>0\}$, *et on pose* $A_t = te_1$. *Il existe une constante* $c_1 > 0$ *ne dépendant que de* n, *telle que*

$$\forall Q \in D_+, \qquad \forall t > 0, \qquad \forall P \in \Omega \cap \partial B(0,t) \qquad G(P,Q) \leqslant c_1 G(A_t,Q).$$

On utilise la symétrie $x \longmapsto \tilde{x}$ par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$; si Q est dans le demi-espace $x_1 > 0$, on a :

$$(1) \qquad \forall P \in \Omega^- = \Omega \cap \{x\,;\,x_1<0\} \qquad G(P,Q) \leqslant G(\tilde{P},Q).$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer le principe du maximum à la fonction surharmonique sur Ω^-, $P \longmapsto G(\tilde{P},Q) - G(P,Q)$, qui possède une limite positive en chaque point de $\partial\Omega^- \cap \Omega$ et qui est minorée par l'opposé d'un potentiel sur Ω.

On considère ensuite d'autres symétries ; pour simplifier les notations identifions le plan engendré par e_1 et e_2 au plan complexe, (e_1,e_2) se transformant en $(1,i)$, et notons $x = (x_1+ix_2,x_3,\ldots,x_n)$ tout point $x \in \mathbf{R}^n$.

D'après les inégalités de Harnack, si u est harmonique positive sur le domaine $\left\{(z,x_3,\ldots)\,;\, 0<\mathrm{Arg}^t(z)<\dfrac{\pi}{2}\right\}$ on a, avec une constante $c \geqslant 1$:

$$(2) \qquad u(te^{i\varphi},x_3\ldots) \leqslant cu(te^{i\varphi'},x_3\ldots)$$

pour tout $t > 0, (x_3, \ldots) \in \mathbf{R}^{n-2}$, φ, $\varphi' \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$. Il faut remarquer qu'une homothétie ramène à $t = 1$.

Soit s la symétrie par rapport à l'hyperplan

$$\mathrm{H} = \left\{(z, x_3 \ldots) ; \operatorname{Arg}^t(z) = \frac{3\pi}{8}\right\}.$$

D'après (1) et (2), on a pour $\mathrm{P} = (z, x_3 \ldots)$:

$$(3) \qquad \forall \mathrm{Q} \in \mathrm{D}_+, \qquad \operatorname{Arg}^t(z) = \frac{5\pi}{8} : \quad \mathrm{G}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \leqslant c\mathrm{G}(s(\mathrm{P}),\mathrm{Q}).$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction $\mathrm{P} \longmapsto c\mathrm{G}(s(\mathrm{P}),\mathrm{Q}) - \mathrm{G}(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ dans $\Omega \cap \left\{(z, x_3, \ldots), \frac{3\pi}{8} \leqslant \operatorname{Arg}^t(z) \leqslant \frac{5\pi}{8}\right\}$ on obtient

$$\operatorname{Sup}\left\{\mathrm{G}_\mathrm{Q}(te^{i\varphi}, x_3 \ldots) ; \frac{3\pi}{8} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{8}\right\} \leqslant c \operatorname{Sup}\left\{\mathrm{G}_\mathrm{Q}(te^{i\varphi}, x_3 \ldots) ; \frac{\pi}{8} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{8}\right\}.$$

On voit alors en faisant tourner l'hyperplan autour de l'axe D_+, que si $\mathscr{C}$ désigne le cône d'axe D_+ et de demi-angle au sommet $\frac{3\pi}{8}$ on a :

$$\begin{gathered} \mathrm{Q} \in \mathrm{D}_+, \qquad t > 0, \\ \Rightarrow \sup\{\mathrm{G}_\mathrm{Q}(\mathrm{P}) ; \|\mathrm{P}\| = t\} \leqslant c \sup\{\mathrm{G}_\mathrm{Q}(\mathrm{P}) ; \|\mathrm{P}\| = t, \mathrm{P} \in \mathscr{C}\}. \end{gathered}$$

Une nouvelle utilisation des inégalités de Harnack et une homothétie donnent alors :

$$(4) \quad t > 0, \qquad \mathrm{P} \in \Omega \cap \partial\mathrm{B}(0,t), \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{Q}\| \leqslant \frac{t}{2} \qquad \text{ou} \qquad \|\mathrm{Q}\| \geqslant 2t :$$
$$\mathrm{G}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \leqslant c'c\mathrm{G}(\mathrm{A}_t,\mathrm{Q}).$$

Considérons enfin le cas où $\frac{t}{2} < \|\mathrm{Q}\| < 2t$, $\|\mathrm{P}\| = t$; on peut supposer $\|\mathrm{Q}\| \neq t$ et majorer, d'après les inégalités de Harnack, G_Q par $c''\mathrm{G}_\mathrm{Q}(\mathrm{A}_t)$ sur la sphère $\partial\mathrm{B}\left(\mathrm{Q}, \frac{|t - \|\mathrm{Q}\||}{2}\right)$, ce qui avec le principe du maximum établit l'inégalité (4) dans ce dernier cas.

Pour un domaine contenant une boule, on déduit du lemme 1 les majorations suivantes :

COROLLAIRE 2. — *On suppose que* Ω *contient la boule ouverte* $B(x,r)(r>0)$, *et que* $y \in \partial B(x,r)$. *Désignons par* Σ *le diamètre* $]y, y+2(x-y)[$ *et pour* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, *posons* $P_\alpha = y + \alpha(x-y)$. *On a alors, avec une constante* $c_2 > 0$ *ne dépendant que de* n :

$$\forall \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \qquad \forall Q \in \Sigma, \qquad P \in \Omega \cap \partial B(y,\alpha r), \qquad G(P,Q) \leqslant c_2 G(P_\alpha,Q).$$

En raisonnant comme à la fin de la démonstration précédente, on obtient facilement l'estimation lorsque $Q \in [P_{\alpha/2}, P_{2\alpha}]$; considérons donc les $Q \notin [P_{\alpha/2}, P_{2\alpha}]$.

Avec une homothétie, on se ramène à $r = \frac{1}{2}$; la transformation de Kelvin associée à l'inversion de pôle $y + 2(x-y)$ et de puissance 1, suivie d'une isométrie ramène à un domaine Ω contenant le demi-espace $x_1 > 0$, et à établir pour ce domaine l'estimation suivante (avec les notations du lemme 1)

$$\forall Q \in D_+, \qquad Q \notin \left]\frac{\alpha e_1}{4-\alpha}, \frac{\alpha e_1}{1-\alpha}\right[, \qquad \forall P \in \partial B(\alpha) \cap \Omega :$$
$$G(P,Q) \leqslant c G\left(\frac{\alpha e_1}{2-\alpha}, Q\right)$$

où $B(\alpha)$ désigne la boule de diamètre $\left[\frac{-\alpha e_1}{2+\alpha}, \frac{\alpha e_1}{2-\alpha}\right]$.

Si $\|Q\| \leqslant \frac{\alpha}{4-\alpha}$ G_Q est majorée sur $\Omega - B\left(0, \frac{\alpha}{3-\alpha}\right)$ par $c_1 G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{3-\alpha}\right)$, d'après le lemme 1 et le principe du maximum ; avec les inégalités de Harnack on a aussi :

$$G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{3-\alpha}\right) \leqslant c G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{2-\alpha}\right),$$

ce qui prouve l'estimation pour $\|Q\| \leqslant \frac{\alpha}{4-\alpha}$; on raisonne de même pour $\|Q\| \geqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Corollaire 3. — *On conserve les hypothèses et les notations du corollaire* 2. *Il existe une constante* $c_3 > 0$ *telle que :*

$$(5)\quad \forall\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right],\qquad \forall P \in B(x,r) \cap B\left(y,\frac{\alpha r}{2}\right),\qquad \forall Q \in \Omega \cap \partial B(y,\alpha r) :$$
$$G(P,Q) \leqslant c_3 G(P,P_\alpha).$$

Désignons par P_1 le point où la demi-droite xP coupe la sphère $\partial B(x,r)$ et posons $x'_\alpha = P_1 + \frac{\alpha}{2}(x-P_1)$, $x''_\alpha = P_1 + \frac{\alpha}{4}(y-x)$.

Supposons d'abord $\|PP_1\| \leqslant \frac{\alpha r}{8}$ et appliquons le corollaire 2 pour la boule $B\left(x'_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$ et le point frontière P_1 (au lieu de y), on obtient :

$$(6)\quad G(P,Q) \leqslant c_1 G(P,x''_\alpha),\qquad \text{pour}\qquad Q \in \partial B\left(P_1,\frac{\alpha r}{4}\right) \cap \Omega.$$

Le principe du maximum montre que l'inégalité a encore lieu pour $Q \in \partial B(y,\alpha r)$; appliquant ensuite les inégalités de Harnack à la fonction $z \longmapsto G(P,z)$, harmonique sur $B\left(x,\left(1-\frac{\alpha}{8}\right)r\right)$, on obtient $G(P,x''_\alpha) \leqslant cG(P,P_\alpha)$. D'où le corollaire pour $\|PP_1\| \leqslant \frac{1}{8}\alpha r$.

Si $\|PP_1\| > \frac{\alpha r}{8}$, soit P' le point de PP_1 tel que $P_1P' = \frac{\alpha r}{8}$; les inégalités de Harnack (pour les fonctions $z \longmapsto G(z,Q)$) montrent que :

$$\frac{1}{c'}G(P',Q) \leqslant G(P,Q) \leqslant c'G(P',Q) \qquad Q \in \partial B(y,\alpha r) \cap \Omega$$

d'où l'inégalité (5) en utilisant $G(P',Q) \leqslant cc_1 G(P',P_\alpha)$.

On déduit maintenant des corollaires 2 et 3 une inégalité de type « Harnack à la frontière » permettant de comparer les potentiels G_P sur le diamètre Σ.

Théoreme 1. — *Conservons les hypothèses et les notations des énoncés précédents et notons* B_α *l'intersection de* $B(x,r)$ *et* $B(y,\alpha r)$, *et* Σ_α *le segment*

$$[y + \alpha(x-y),\quad y + 2(y-x)[.$$

Il existe une constante $c_4 > 0$, ne dépendant que de n, telle que :

$$\text{(7)} \qquad \forall\alpha \in \left]0, \frac{1}{20}\right], \qquad \forall P, P' \in B_\alpha, \qquad Q \in \Sigma_{10\alpha} :$$
$$\frac{G(P,Q)}{G(P,P_{2\alpha})} \leqslant c_4 \frac{G(P',Q)}{G(P',P_{2\alpha})}.$$

Avec une homothétie et une translation on se ramène à $\alpha r = \frac{1}{2}$ et $y = 0$;
D'après le corollaire 3, pour $P \in B_\alpha$, $Q \in \partial B(y,2\alpha r)$:

$$G(P,Q) \leqslant c_3 G(P,P_{2\alpha})$$

et par conséquent,

$$\text{(8)} \qquad G(P,Q) \leqslant c_3 . G(P,P_{2\alpha})\mu(Q), \qquad \forall Q \in \Omega - \bar{B}(y,2\alpha r)$$

où μ désigne la mesure harmonique de $\partial B(y,2\alpha r)$ dans

$$\Omega - \bar{B}(y,2\alpha r) = \Omega - \bar{B}(y,1).$$

Fixons alors $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, à support dans la couronne $\frac{3}{4} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{5}{4}$, égale à 1 sur la sphère $\|x\| = 1$. On sait que la mesure harmonique μ_Q dans $\tilde{\Omega}$ est donnée par la formule $\mu_Q = \Delta\tilde{G}_Q + \delta_Q$ où $\tilde{G}_Q$ est la fonction de Green de $\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{B}(y,1)$, prolongée par zéro hors de $\tilde{\Omega}$. D'où :

$$\mu(Q) \leqslant \mu_Q(\Phi) = \int \tilde{G}(P,Q)\Delta\Phi(P)dP \qquad \text{si} \qquad \|Q\| \geqslant \frac{5}{4}.$$

Posant $\|f\|_1 = \int |f(P)|\, dP$, il vient :

$$\text{(9)} \qquad \mu(Q) \leqslant \|\Delta\Phi\|_1 . \max\left\{\tilde{G}(Q,P) ; \quad \|P - y\| \leqslant \frac{5}{4}\right\}.$$

Appliquons alors le corollaire 2 à $\tilde{\Omega}$, la boule de diamètre $\Sigma_{2\alpha}$ et le point $P_{2\alpha}$:

$$\max \quad \left\{\tilde{G}(Q,P), \quad \|P - y\| = \frac{5}{4}\right\} \leqslant \max\left\{\tilde{G}(Q,P) ; \|P - P_{2\alpha}\| \leqslant 3\right\}$$
$$\leqslant c_3\, \tilde{G}(Q,P_{8\alpha}), \ \forall Q \in \Sigma_{8\alpha}.$$

D'où en revenant à (8) et (9), et en remarquant que Φ ne dépend que de n :

$$\text{(10)} \qquad \forall P \in B_\alpha, \qquad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha}, \qquad \frac{G(P,Q)}{G(P,P_{2\alpha})} \leqslant c\, \tilde{G}(Q,P_{8\alpha}).$$

Or l'inégalité opposée a également lieu (avec une autre constante) :

En effet, les inégalités de Harnack donnent une constante $c' > 0$ telle que :

$$\forall P \in B_\alpha, \qquad \forall Q \in B(P_{8\alpha},1), \qquad \frac{G(P,Q)}{G(P,P_{2\alpha})} \geqslant c'.$$

D'autre part, en majorant $\tilde{G}$ par la fonction de Green de $\mathbf{R}^n - \bar{B}(y,1)$, on voit que :

$$\forall Q \in \partial B(P_{8\alpha},1), \qquad \tilde{G}(P_{8\alpha},Q) \leqslant c''.$$

D'où, avec le principe du maximum

$$(11) \qquad \forall P \in B_\alpha, \qquad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha} \qquad \frac{G(P,Q)}{G(P,P_{2\alpha})} \geqslant \frac{c'}{c''}\tilde{G}(P_{8\alpha},Q).$$

La conjonction des inégalités (10) et (11) achève d'établir le théorème.

On peut alors établir la propriété (P_1) de l'introduction ; plus précisément :

THÉOREME 2. — *Si Ω contient la boule $B(x,r)$ et si $y \in \partial B(x,r) \cap \partial\Omega$, le point $P_t = y + t(x-y)$ tend, lorsque t tend vers $0 (t>0)$ vers un point ζ_0 de Δ_1 dans $\hat{\Omega}$. Plus généralement pour toute suite $\{P_k ; k \geqslant 1\}$ de $B(x,r)$ tendant non-tangentiellement vers y, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = \zeta_0$ dans $\hat{\Omega}$.*

De plus si $\{P_k\} \subset B(x,r)$ tend vers y dans $\mathbf{R}^n$, et vers un point ζ_1 dans $\hat{\Omega}$, on a $K_{\zeta_1} \geqslant cK_{\zeta_0}$ pour une constante $c > 0$, et K_{ζ_1} est bornée au voisinage de tout point z de $\partial\Omega$ distinct de y, et tend même vers 0 au point z si z est régulier pour Ω.

On désigne dans cet énoncé et dans la suite par $K_\zeta(P) = K(\zeta,P)$ le noyau de Martin sur $\hat{\Omega} \times \Omega$, normalisé au point x. La démonstration du théorème 2 s'appuie essentiellement sur le théorème 1 ; on utilisera aussi le lemme élémentaire suivant :

LEMME 4. — *Sous les hypothèses du corollaire 2, il existe une constante $c > 0$, telle que pour toute fonction u harmonique positive sur Ω, on a, en posant $D_\alpha = B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$:*

$$\forall \alpha \in \left]0, \frac{1}{10}\right], \qquad R_u^{D_\alpha}(P_{2\alpha}) \geqslant cu(P_{2\alpha}) \text{ (*)}.$$

(*) $R_u^{D_\alpha}$ désigne la réduite de u sur D_α dans Ω.

D'après les inégalités de Harnack $u(P) \geqslant c\, u(P_{2\alpha})$ sur $B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$; d'où si φ_α désigne le potentiel capacitaire de D_α dans $B(P_{2\alpha}, 2\alpha r)$: $u \geqslant c u(P_{2\alpha})\varphi_\alpha$. Une homothétie de rapport $\frac{1}{\alpha r}$ montre que $\varphi_\alpha(P_{2\alpha})$ est indépendant de α. D'où le lemme.

Démonstration du théorème 2 :

I. Désignons par Σ le segment $]y, x]$, et montrons que dans $\hat{\Omega}, \hat{\Sigma} \cap \Delta$ est réduit à un point minimal. D'après le théorème 1, on a si $\alpha \in \left]0, \frac{1}{20}\right]$:

$$\forall P \in B_\alpha, \qquad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha} \qquad \frac{1}{c}\frac{G(P_\alpha,Q)}{G(P_\alpha,P_{2\alpha})} \leqslant \frac{G(P,Q)}{G(P,P_{2\alpha})} \leqslant c\,\frac{G(P_\alpha,Q)}{G(P_\alpha,P_{2\alpha})}.$$

En faisant, en particulier $Q = x$ (point de normalisation) :

$$(12) \qquad \forall P \in B_\alpha, \qquad \frac{1}{c}K_{P_\alpha}(P_{2\alpha}) \leqslant K_P(P_{2\alpha}) \leqslant cK_{P_\alpha}(P_{2\alpha})$$

inégalité qui s'étend à tout P dans l'adhérence $\hat{B}_\alpha$ de B_α dans $\hat{\Omega}$.

II. Si u est une fonction harmonique > 0 sur $\Omega - B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$ et $\alpha \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$, on déduit des inégalités de Harnack :

$$(13) \qquad u(Q) \geqslant cK_{P_\alpha}(Q)\left(\frac{u(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})}\right), \qquad Q \in \partial B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

Prenant $u = K_\zeta$, $\zeta \in \hat{B}_\alpha$ adhérence de B_α dans $\hat{\Omega}$, on aura donc (en tenant compte de (12))

$$(14) \qquad K_\zeta(Q) \geqslant c'K_{P_\alpha}(Q), \qquad Q \in \Omega - B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

On en déduit que si $\zeta \in \bigcap_{\alpha>0} \hat{B}_\alpha$ et si ζ_0 est un point de $\hat{\Sigma} \cap \Delta$: $K_\zeta \geqslant c'K_{\zeta_0}$ sur Ω. En particulier si ζ_0' est un autre point de $\hat{\Sigma} \cap \Delta$, on a :

$$\frac{1}{c'}K_{\zeta_0} \leqslant K_{\zeta_0'} \leqslant c'K_{\zeta_0} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

III. Observons que si on pose $D_\alpha = B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$, on a :

$$R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha}(Q) \geqslant c' K_{P_\alpha}(Q) \left(\frac{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})}\right), \qquad Q \in \partial B\left(P_\alpha, \frac{3\alpha r}{4}\right)$$

d'après le lemme 4 (*) et les inégalités de Harnack ; l'inégalité s'étend évidemment à tous les $Q \in \Omega - B\left(P_\alpha, \frac{3\alpha r}{4}\right)$ et par conséquent, en utilisant (12)

$$\text{(15)} \qquad \forall Q \in \Omega, \qquad \liminf_{\alpha \to 0} R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha}(Q) \geqslant c'_1 K_{\zeta_0}(Q).$$

IV. Montrons alors que K_{ζ_0} est minimale (ce qui prouvera que $\hat{\Sigma} \cap \Delta$ est réduit à un point) ; si u est une fonction harmonique > 0 sur Ω majorée par K_{ζ_0} et si $\lambda = \sup\{t>0 ; tu \leqslant K_{\zeta_0}\}$, posons $v = \lambda u$; on a :

$$R_v^{D_\alpha}(Q) \leqslant c'_2 K_{P_\alpha}(Q) \left(\frac{v(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})}\right) \leqslant c'_3 K_{P_\alpha}(Q) \left(\frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}\right)$$

pour tout $Q \in \Omega$ (on utilise encore les inégalités de Harnack et le principe du maximum). Or :

$$R_v^{D_\alpha} + R_{K_{\zeta_0}-v}^{D_\alpha} = R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha} \quad \text{(additivité de la réduite)}$$

et

$$R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha} \leqslant c'_3 K_{P_\alpha} \left(\frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}\right) + (K_{\zeta_0} - v) \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

D'après (15), on a donc en posant $\gamma = \liminf_{\alpha \to 0} \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}$:

$$c'_1 K_{\zeta_0} \leqslant (K_{\zeta_0} - v) + c'_3 \gamma K_{\zeta_0} \qquad \text{et} \qquad v \leqslant (1 - c'_1 + c'_3 \gamma) K_{\zeta_0},$$

ce qui prouve $\gamma \geqslant \frac{c'_1}{c'_3} > 0$.

Utilisons alors l'inégalité (13) ci-dessus :

$$v(Q) \geqslant c K_{P_\alpha}(Q) \left(\frac{v(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})}\right) \geqslant c K_{P_\alpha}(Q) \left(\frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}\right), \qquad Q \in \Omega - \bar{B}\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$$

d'où à la limite : $v(Q) \geqslant c \frac{c'_1}{c'_3} K_{\zeta_0}(Q)$, $\forall Q \in \Omega$.

(*) Ce lemme devient inutile si on remarque que l'inégalité a lieu sur ∂D_α.

Ainsi toute fonction harmonique $u > 0$ sur Ω, majorée par K_{ζ_0} majore une homothétique de K_{ζ_0} ; cela suffit, d'après le lemme de décomposition de Riesz, (*) pour voir que K_{ζ_0} est minimale.

V. On a donc établi la première assertion du théorème 2; l'inégalité $K_{\zeta_1} \geqslant cK_{\zeta_0}$ pour $\zeta_1 \in \Delta$ et limite d'une suite de points de $B(x,r)$ tendant dans $\mathbf{R}^n$ vers y, est également établie; le corollaire 3 montre que

$$K_{\zeta_1}(Q) \leqslant c_2 K_{\zeta_1}(P_\alpha)\mu_\alpha(Q) \qquad \text{sur} \qquad \Omega - B(y,2\alpha r)$$

où μ_α est la mesure harmonique de $\partial B(y,2\alpha r) \cap \Omega$ dans $\Omega - \bar{B}(y,2\alpha r)$; il s'ensuit que K_{ζ_1} reste bornée au voisinage de tout $z \in \partial\Omega$ distinct de y, et tend vers 0 au point z, si z est de plus régulier.

Quant à la propriété sur les suites $\{P_k\}$ tendant « non tangentiellement » vers y dans $B(x,r)$, elle découle très facilement des inégalités de Harnack : soient P_{α_k} la projection de P_k sur $\Sigma =]y, x]$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\limsup \frac{\|P_k - P_{\alpha k}\|}{\|y - P_k\|} \leqslant 1 - 2\varepsilon .$$

On a pour k assez grand :

$$\frac{1}{c} G(P_{\alpha_k},Q) \leqslant G(P_k,Q) \leqslant c\, G(P_{\alpha_k},Q), \qquad Q \notin T_k$$

où T_k désigne le cône de révolution de sommet y, d'axe $[y,P_{2\alpha_k}]$, et rayon de base $4d(P_k,\Sigma)$ (c dépend de $\varepsilon > 0$); d'où si $\lim P_k = \zeta_1 \in \Delta, K_{\zeta_1} \leqslant c^2 K_{\zeta_0}$ et finalement $K_{\zeta_1} = K_{\zeta_0}$.

Remarque 5. – Indiquons, pour terminer cette partie, comment on peut modifier une construction de [1] pour obtenir un domaine plan contenant un angle $\left\{z \in \mathbf{C}^* ; |\mathrm{Arg}^t(z)| < \frac{\varphi}{2}\right\}$, avec $0 < \varphi < \pi$, et tel que la fermeture dans $\hat{\Omega}$ du segment $]0, 1]$ contienne une infinité de points de Δ $\left(\text{pour } \varphi < \frac{2\pi}{3} \text{ la construction de [1] suffit}\right)$.

(*) Plus simplement, $K_{\zeta_0} - v \equiv 0$ puisque cette fonction ne peut majorer $\varepsilon K_{\zeta_0}, \forall \varepsilon > 0$.

Posons : $U_0 = \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; |\mathrm{Arg}^t(z)| < \frac{\varphi}{2} \right\}$ et fixons une suite $\{\rho_k\}_{k \geqslant 0}$ de réels tels que $0 < \rho_{k+1} < \frac{1}{4}\rho_k$. On pose

$$U_1 = \left[\bigcup_{k \geqslant 0} \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+1} < |z| < \rho_{2k}, \frac{\varphi}{2} < \mathrm{Arg}^t z < \frac{3\pi}{2} \right\} \right] \cup \left[\bigcup_{k} \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+2} \leqslant |z| \leqslant \rho_{2k+1}, \frac{\varphi}{2} < \mathrm{Arg}^t z < \frac{\pi}{2} \right\} \right]$$

et symétriquement :

$$U_2 = \left[\bigcup_{k} \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+2} < |z| < \rho_{2k+1}, \frac{-3\pi}{2} < \mathrm{Arg}^t z < -\frac{\varphi}{2} \right\} \right] \cup \left[\bigcup \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+1} \leqslant |z| \leqslant \rho_{2k}, \frac{-\pi}{2} < \mathrm{Arg}^t z < -\frac{\varphi}{2} \right\} \right].$$

On prend pour Ω la réunion de U_0, U_1 et U_2 et des « trous »

$$T_k = \left\{ \rho_{2k+1} < |z| < 2\rho_{2k+1} ; \mathrm{Arg}^t z = \frac{\varphi}{2} \right\}$$

et
$$T'_k = \left\{ \rho_{2k} < |z| < 2\rho_{2k} ; \mathrm{Arg}^t z = -\frac{\varphi}{2} \right\}.$$

On montre alors en reprenant les raisonnements de [1] que si $\{\rho_k\}$ est assez rapidement décroissante, on aura deux minimales associées à 0, u et v telles que $u(\mathrm{P})$ tend vers 0 quand P tend vers 0 en restant dans U_1 et $v(\mathrm{P})$ possède le comportement analogue dans U_2 ; de plus lorsque ζ parcourt la trace sur Δ de la fermeture dans $\hat{\Omega}$ de $]0,1]$ K_ζ décrit le segment $[u,v]$.

2. Application à l'étude globale de $\hat{\Omega}$.

On dira que le domaine Ω de $\mathbf{R}^n$ est admissible s'il existe $r > 0$ tel que :

1) Ω est réunion d'une famille de boules ouvertes de rayon r.

2) Pour chaque couple (B_1, B_2) de boules ouvertes de rayon r contenues dans Ω et extérieurement tangentes en $y \in \partial B_1 \cap \partial B_2$, il existe $\vec{u} \neq 0$ orthogonal au diamètre commun de B_1 et B_2 et $\delta \in]0,1[$ tel que Ω contient le cône de révolution

$$\mathscr{C} = \{ z \in \mathbf{R}^n ; 0 < \|z-y\| < \delta, \langle z-y, \vec{u} \rangle \leqslant (1-\delta)\|z-y\| \|u\| \}.$$

Comme exemples de domaines admissibles, citons d'abord les domaines à courbure bornée de De La Vallée Poussin ; notons aussi l'exemple suivant qui montre qu'un domaine admissible n'est pas nécessairement lipschitzien : soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$, positive, et telle que $f(0) = f'(0) = 0$; le domaine de révolution Ω de complémentaire

$$\complement\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^n \,;\, x_1 \geqslant 0,\ \sqrt{\sum_2^n x_i^2} \leqslant f(x_1)\right\}$$

est localement admissible (*).

THÉOREME 3. — *Si Ω est borné et admissible dans $\mathbf{R}^n$, l'application identique de Ω se prolonge en une homéomorphie ψ de $\bar{\Omega}$ sur $\hat{\Omega}$; si 0 est un point de Ω, et si K désigne le noyau de Martin de Ω normalisé en 0, pour chaque point P de $\partial\Omega$, $K_{\psi(P)}$ est l'unique fonction harmonique > 0 sur Ω, égale à 1 en 0, bornée qu voisinage de tout $P' \in \partial\Omega$ distinct de P et tendant vers zéro en P' si de plus P' est régulier pour Ω.*

Remarque 6. — Le théorème s'étend sans difficulté à un domaine Ω borné et qui est localement, ou bien admissible ou bien lipschitzien : il suffit d'utiliser pour les points de $\bar{\Omega}$ tels que Ω est lipschitzien au voisinage, les résultats de Hunt et Wheeden ([5], [6]) (voir aussi les techniques de [1]).

Démonstration. — *a*) Soit $P \in \partial\Omega$; considérons deux boules ouvertes $B_1 = B(M_1,r)$ $B_2 = B(M_2,r)$ contenues dans Ω, avec $P \in \partial B_1$ (r est un rayon pour lequel Ω est admissible). D'après le théorème 2, chaque rayon $[P,M_i]$ définit une minimale K_{ζ_i} $(\zeta \in \Delta_1, i=1,2)$; si $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, il existe un segment commun $]P, M]$ aux deux boules, et d'après le théorème 2, une suite de points $P_k \in]P, M]$ avec $\lim d(P,P_k') = 0$ tend à la fois vers ζ_1 et vers ζ_2 dans $\hat{\Omega}$; d'où $\zeta_1 = \zeta_2$.

Si $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, on utilise le cône de révolution de la définition de l'admissibilité, et on voit avec les inégalités de Harnack (comme à la fin de la démonstration du théorème 2) qu'une suite P_k de points de l'axe du cône avec $\lim d(P,P_k) = 0$ tend à la fois vers ζ_1 et vers ζ_2 dans $\hat{\Omega}$.

Les différentes boules ouvertes B de rayon r contenues dans Ω et telles que $P \in \partial B$ définissent donc un même point $\psi(P) \in \Delta_1$; d'après le

(*) Pour un domaine de ce type, le théorème 3 est très voisin d'un résultat de H. Kesten concernant les domaines de révolution ([10]).

théorème 2 $K_{\psi(P)}$ tend vers 0 en tout point régulier P' de $\partial\Omega$ et est bornée au voisinage de $P' \in \partial\Omega$, $P' \neq P$ en général. Pour $P \in \Omega$ on posera $\psi(P) = P$; il est clair que ψ est injective.

b) Soient $P \in \partial\Omega$, $\{P_k\}$ une suite de points de $\bar{\Omega}$ avec $\lim P_k = P$ dans $\mathbf{R}^n$, et u une valeur d'adhérence de la suite $K_{\psi(P_k)}$; à chaque P_k on peut associer une boule $B(M_k,r)$ contenue dans Ω avec $P_k \in \bar{B}(M_k,r)$; il est clair que $\lim d(M_k,P_k) = r$, et après extraction d'une sous suite on peut supposer que M_k possède une limite M. Fixons enfin $\alpha \in \left]0, \frac{1}{20}\right[$ et posons

$$Q_k = P_k + \alpha\overrightarrow{P_kM_k},\ P_\alpha = P + \alpha\overrightarrow{PM}.$$

D'après l'inégalité (14), on a pour k assez grand :

$$K_{\psi(P_k)} \geqslant cK_{Q_k} \qquad \text{sur} \qquad \Omega - B\left(Q_k, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

D'où en faisant tendre k vers l'infini, puis α vers 0 :

$$(16) \qquad u \geqslant cK_{\psi(P)} \qquad \text{sur} \qquad \Omega.$$

D'autre part, d'après le corollaire 3

$$K_{\psi(P_k)} \leqslant cK_{\psi(P_k)}(Q_k)\mu_k(Q), \qquad Q \in \Omega - \bar{B}(P_k,\alpha r)$$

où μ_k est la mesure harmonique de $\partial B(P_k,\alpha r)$ dans $\Omega - B(P_k,\alpha r)$; à la limite, μ désignant la mesure harmonique de $\partial B(P,2\alpha r)$ dans $\Omega - B(P,2\alpha r)$

$$u \leqslant cu(P_\alpha)\cdot\mu \qquad \text{sur} \qquad \Omega - \bar{B}(P,2\alpha r),$$

ce qui prouve que toute valeur d'adhérence u de la suite $K_{\psi(P_k)}$ est associée au point P : u est bornée au voisinage de $P' \in \partial\Omega$, $P' \neq P$, et tend vers 0 en P' régulier, $P' \neq P$.

c) D'après la théorie de Martin, toute minimale $K_\zeta(\zeta \in \Delta_1)$ est limite d'une suite $K_{\psi(P_k)}$, $P_k \in \Omega$; toute minimale est donc, d'après (16), de la forme $K_{\psi(P)}$, $P \in \partial\Omega$.

d) Soient $P \in \partial\Omega, u$ harmonique > 0 associée à P ; on a la représentation intégrale de Martin :

$$u = \int_{\Delta_1} K_\zeta \, d\mu(\zeta).$$

Pour tout $P' \in \partial\Omega, P' \neq P$, et B boule de centre P' et rayon $\frac{1}{2} d(P',P)$, $\hat{R}_u^B$ est un potentiel sur Ω et

$$\hat{R}_u^B = \int R_{K_\zeta}^B \, d\mu(\zeta).$$

$\hat{R}_{K_\zeta}^B$ est donc un potentiel pour μ-presque tout ζ et

$$\mu\{\psi(P''), P'' \in B \cap \bar{\Omega}\} = 0.$$

Il s'ensuit, en faisant varier B que μ est à support ponctuel $\psi(P)$ et u est proportionnelle à $K_{\psi(P)}$.

On en déduit alors que ψ est une homéomorphie de $\bar{\Omega}$ sur $\hat{\Omega}$.c.q.f.d.

Remarque 7. — A partir des théorèmes 2 et 3, on peut obtenir avec les méthodes de [1] le théorème de Fatou sur l'existence de limites angulaires pour le quotient de deux fonctions harmoniques positives sur Ω, pour Ω admissible (ou seulement localement « admissible ou lipschitzien »).

Remarque 8. — *a)* On voit facilement avec les méthodes précédentes que si $y \in \partial\Omega$ (Ω domaine de Green) est tel que tout point de Ω assez voisin de y appartient à une boule incluse dans Ω et de rayon r fixe, et tel que la condition 2) de la définition des domaines admissibles soit vérifiée en y, alors toutes les suites $(P_k) \subset \Omega$ avec $\lim_{k\to\infty} d(y,P_k) = 0$ convergent dans $\hat{\Omega}$ vers une même minimale.

b) Si on suppose Ω de Green et que seule la condition 1) de l'admissibilité est vérifiée, on montrera aisément en reprenant la démonstration du théorème 3, qu'à chaque point P de $\partial\Omega$ est associé une ou deux minimales. De plus, toute suite $(P_k)_{k\geq 1} \subset \Omega$ convergente dans $\hat{\Omega}$, et telle que $\lim_{k\to\infty} d(P,P_k) = 0$, converge dans $\hat{\Omega}$ vers une combinaison linéaire de ces minimales. Si Ω est de plus bornée, toute minimale est ainsi associée à un point de $\partial\Omega$.

Par exemple, si F est une partie fermée arbitraire d'une hypersurface de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$, (et F non polaire pour $n = 2$, la remarque s'applique à $\Omega = \mathbf{R}^n - F$ (*).

(*) M. Benedicks a établi ce résultat pour le cas d'un hyperplan [11].

3. Un critère dans le cas plan.

Les méthodes de la première partie, et les exemples construits dans [1], conduisent au théorème suivant :

THÉOREME 4. — *Soient* φ *et* ψ *deux nombres positifs avec* $\varphi + 2\psi \leqslant 2\pi$, *et soit* Ω *un domaine greenien de* $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ *contenant l'« angle »*

$$\left\{z\,;\, 0 < |z| < 1\,;\, |\mathrm{Arg}^t(z)| < \frac{\varphi}{2}\right\}$$

et contenu dans l'angle $\left\{z \in \mathbf{C}\,;\, |\mathrm{Arg}^t(z)| < \frac{\varphi}{2} + \psi\right\}$. *Si* $\varphi \geqslant \psi$, *il n'y a qu'un point de* Δ *adhérent dans* $\hat{\Omega}$ *au segment* $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ *et ce point est minimal.*

Remarquons que le théorème tombe en défaut pour $\varphi < \psi$ ([1]). En utilisant la transformation $T(z) = z^\mu$ $\mu = \dfrac{2\pi}{\varphi + 2\psi}$ dans le plan fendu $\mathbf{C} - \mathbf{R}^-$, on est ramené au cas où $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}, \psi = \dfrac{2\pi}{3}$. Une inversion de pôle 1 et puissance 1 ramène au cas où de plus Ω contient tout l'angle $\left\{z \in \mathbf{C}^*\,;\, |\mathrm{Arg}^t(z)| < \frac{\pi}{3}\right\}$; on supposera donc dans toute la suite que Ω est de cette forme, et on a alors le lemme suivant analogue au lemme 1 :

LEMME 9. — *Sous les hypothèses ci-dessus et désignant par* G *la fonction de Green de* Ω *il existe une constante* $c > 0$ *telle que :*

$$\forall t > 0, \quad \forall P \in \Omega \cap \partial B(0,t), \quad \forall Q \in \mathbf{R}^+, \quad G(P,Q) \leqslant cG(t,Q).$$

Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1, en remplaçant l'emploi de la symétrie par rapport à l'axe imaginaire par celui des symétries par rapport aux droites $\mathrm{Arg}^t(z) = \pm \dfrac{\pi}{3}$.

En adaptant la démonstration du théorème 2, on obtient l'estimation analogue à (7) :

$$\forall P, P' \in]0, t], \quad \forall Q \in [2t, +\infty[, \quad \frac{G(P,Q)}{G(P,2t)} \leqslant c' \frac{G(P',Q)}{G(P',2t)}.$$

On démontre ensuite le théorème 4 en reprenant les arguments de la démonstration du théorème 2; on voit d'ailleurs que la minimale ainsi obtenue est associée à 0 au sens qu'elle tend vers zéro en tout point frontière régulier de Ω distinct de 0, et reste bornée au voisinage de tout $P \in \partial\Omega$, $P \neq 0$.

4. Un contre exemple à la conjecture de Martin.

On va voir qu'en prenant dans le plan $\mathbf{C}$ le domaine

$$\Omega = \mathbf{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left[n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right]$$

l'adhérence de Δ_1 dans $\hat{\Omega}$ est distincte de Δ.

Dans toute la suite on désignera par G la fonction de Green de Ω, par K le noyau de Martin de Ω normalisé en 0, et on posera $S = \bigcup_{\mathbf{Z}} \left[n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right]$. On utilisera le lemme suivant.

LEMME 10. — *Toute fonction harmonique sur Ω tendant vers zéro en tout point de S, et uniformément minorée sur Ω est positive. En particulier, si cette fonction est bornée elle est nulle.*

Soit μ_n la mesure harmonique de $\partial B(0,n)$ dans $B(0,n) - S$; d'après le principe du maximum, il suffira de voir que μ_n tend simplement vers zéro ; or $\mu_n = 1 - \nu_n$ où ν_n est la mesure harmonique de $S \cap B(0,n)$ dans $B(0,n) \setminus S$; il est clair que $\{\nu_n\}$ converge en croissant vers la réduite R_1^S, et $R_1^S \equiv 1$ puisque sur $\mathbf{C}$ toute fonction surharmonique positive est constante.

On peut décrire les fonctions harmoniques positives sur Ω associées au point à l'infini.

PROPOSITION 11. — *Il existe exactement deux minimales* (*) *h^+ et h^- sur Ω tendant vers 0 en tout point de S ; l'une est bornée sur le demi-plan inférieur, l'autre sur le demi-plan supérieur et $h^-(x) = h^-(\bar{x})\ (x \in \Omega)$. Enfin, toute fonction f harmonique > 0 sur Ω et nulle sur S est combinaison linéaire de h^+ et h^-.*

(*) Normalisées en 0.

a) Soient $z = it, t \geqslant 1$, *et* $p \in \mathbf{Z}$.

On a $G_z(p) = G(0,p+z)$ par un argument de symétrie. D'après le lemme 1, on a donc :

$$G_z(p) = G_0(p+z) \leqslant cG_0(z).$$

La fonction K_z est donc majorée par une constante positive sur $\mathbf{Z}$; les inégalités de Harnack pour les cercles de diamètres $[n,n+1]$ $(n \in \mathbf{Z})$ montrent alors que K_z est uniformément majorée sur $\mathbf{R} \cap \Omega$, et donc aussi sur tout le demi-plan inférieur. Il s'ensuit que toute valeur d'adhérence de K_{it} pour t tendant vers $+\infty$, est bornée dans le demi-plan inférieur.

b) Remarquons qu'une inversion de pôle 0 transforme le domaine, en un domaine complémentaire d'un fermé inclus dans $\mathbf{R}$; le théorème 2 montre donc que pour t tendant vers $+\infty$, K_{it} tend vers une minimale h^+ bornée sur le demi-plan inférieur ; posant $h^-(z) = h^+(\bar{z})$, h^- et h^+ sont des minimales distinctes, puisqu'elles ne peuvent être bornées sur Ω.

Enfin d'après la remarque 8*b*) (puisque l'inverse de Ω vérifie la propriété 1 de l'admissibilité) toute fonction harmonique associée au point à l'infini (c'est-à-dire nulle sur S) est combinaison de h^+ et h^-.

Notons $\mathscr{F}$ la base de filtre $\{\Omega \setminus \bar{B}(0,n)\}_{n \geqslant 1}$; comme les éléments de $\mathscr{F}$ sont connexes, l'ensemble F des points de Δ adhérents à $\mathscr{F}$ est connexe ; F est contenu dans l'ensemble des fonctions associées au point à l'infini, et contient h^+ et h^- : F est donc exactement le segment $[h^-,h^+]$.

Observons que $\lim\limits_{|n| \to \infty} K_n = \frac{1}{2}(h^+ + h^-)$, par raison de symétrie. Si ζ est un point de Δ limite d'une suite $\{x_k\}$ convergeant dans $\mathbf{C}$ vers un point de $\left[n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}\right]$ on a d'après les inégalités de Harnack une constante $c > 0$ telle que :

$$\frac{1}{c}\frac{K_n}{K_n(\alpha_n)} \leqslant \frac{K_\zeta}{K_\zeta(\alpha_n)} \leqslant c\frac{K_n}{K_n(\alpha_n)} \qquad \text{sur} \qquad \partial B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$$

avec $\alpha_n = n + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}$.

Cette inégalité a donc lieu également sur $\Omega \setminus B\left(n+\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$. En l'écrivant au point 0 (pour $|n| \geqslant 2$), on voit que $\frac{1}{c} K_n(\alpha_n) \leqslant K_\zeta(\alpha_n) \leqslant c K_n(\alpha_n)$ et finalement

$$\frac{1}{c^2} K_n \leqslant K_\zeta \leqslant c^2 K_n \qquad \text{sur} \qquad \Omega \setminus B\left(n+\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right).$$

Il s'ensuit que toute fonction harmonique adhérente à ces fonctions K_ζ (pour $|n| \to \infty$) est de la forme $\lambda h^+ + \mu h^-$, avec

$$\lambda + \mu = 1, \qquad \text{et} \qquad \lambda h^+ + \mu h^- \geqslant \frac{1}{2c^2}(h^+ + h^-).$$

On doit donc avoir $\lambda \geqslant \frac{1}{2c^2}$, $\mu \geqslant \frac{1}{2c^2}$: on n'obtient donc pas tout le segment $[h^+, h^-]$, c'est-à-dire que $\bar{\Delta}_1$ ne contient pas tout l'ensemble F, ce qui prouve que $\bar{\Delta}_1 \neq \Delta$.

Remarques. — 1) On obtiendra un exemple analogue dans $\mathbf{R}^3$ en prenant $\Omega = \mathbf{R}^3 - S$ où S est la réunion des carrés

$$\left[n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}\right] \times \left[m+\frac{1}{4}, m+\frac{3}{4}\right] \times \{0\}, (n,m) \in \mathbf{Z}^2.$$

Seul le dernier argument du lemme 10 est à modifier : R_1^S est surharmonique, invariante par le groupe des translations associé à $\mathbf{Z}^2 \times \{0\}$: la mesure associée $\mu = \Delta R_1^S$ l'est aussi ; mais il est immédiat que le potentiel newtonien $\frac{1}{r} * \mu$ d'une telle mesure μ est partout infini si $\mu \not\equiv 0$.

2) On obtiendra un domaine borné avec $\bar{\Delta}_1 \neq \Delta$ en prenant la trace sur la boule unité de l'image de Ω par l'inversion $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ancona, Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien, *Annales de l'Institut Fourier*, 28, 4 (1978), 169-213.

[2] M. Brelot, Remarques sur la variation des fonctions harmoniques et les masses associées. Application, *Annales de l'Institut Fourier*, II (1950), 101-111.

[3] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Annales de l'Université de Grenoble*, 23 (1950).

[4] L. Carleson, On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables, *Ark. Math.*, 4 (1962).
[5] R. A. Hunt and R. L. Wheeden, On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Amer, Math. Soc.*, 132, n° 2 (1968), 307-322.
[6] R. A. Hunt and R. L. Wheeden, Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147 (1970), 507-527.
[7] H. Kesten, Positive harmonic functions with zero boundary values, à paraître.
[8] R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941), 137-172.
[9] C. De La Vallée Poussin, Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine limité par des surfaces à courbure bornée, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 2, vol. 2 (1933), 167-192.
[10] H. Kesten, Positive harmonic functions with zero boundary values, *Proc. Symp. Pure maths*, vol XXXV, 1 (1979), 349-352.
[11] M. Benedicks, Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains of $\mathbf{R}^n$, Report n° 5, Inst. Mittag-Leffler, 1978.
[12] A. Ancona, Principe de Harnack à la frontière et problèmes de frontière de Martin, Colloque Franco-Danois de Théorie du Potentiel 1979, Springer, à paraître.

Manuscrit reçu le 30 janvier 1979
révisé le 26 février 1979.

Alano Ancona,
E.N.S.E.T.
61, Avenue du Président Wilson
94230 Cachan.