

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

XAVIER GUYON

BERNARD PRUM

**Différents types de variations-produit pour une
semi-martingale représentable à deux paramètres**

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 295-317

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_295_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIFFERENTS TYPES DE VARIATIONS-PRODUIT POUR UNE SEMI-MARTINGALE REPRÉSENTABLE A DEUX PARAMÈTRES

par X. GUYON et B. PRUM

1. INTRODUCTION

Les processus que nous considérons dans ce travail sont à valeurs réelles, et indexés par l'ensemble de temps à deux paramètres \mathbf{R}_+^2 (en fait, pour éviter les difficultés à l'infini, nous nous restreindrons très vite à un rectangle borné : $[0, 1]^2$ pour fixer les idées).

Notre but dans ce travail consiste à étendre aux processus à deux paramètres les résultats bien connus pour les semi-martingales X à un paramètre, suivant lesquels les sommes

$$\sum_i E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] , \quad \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent (dans L^1 , si des conditions d'intégrabilité convenables sont imposées à X) vers les processus croissants $\langle X \rangle$ et $[X]$ associés à la semi-martingale X , lorsque le pas de la subdivision (t_i) tend vers 0. Si X est à trajectoires continues, on sait de plus que ces deux processus croissants sont égaux, et ne dépendent que de la partie martingale locale de X . Pour les processus à deux paramètres, on peut former trois types différents de sommes de ce genre : des sommes "linéaires", "superficielles" et "mixtes", admettant chacune une forme conditionnelle et inconditionnelle. Nous définissons ci-dessous une classe de semi-martingales, qui nous paraît raisonnablement générale pour les besoins courants, celle des *semi-martingales représentables* (s.m.r.). Si X est une s.m.r., nous savons établir la convergence dans L^1 de toutes ces sommes, avec l'identification de leurs limites, et nous savons établir l'égalité des

limites des sommes conditionnelles et inconditionnelles pour les sommes des deux premiers types (pour le type mixte, il faut une condition supplémentaire sur X). Cette égalité est indispensable pour les applications à la statistique, car seules les sommes inconditionnelles sont accessibles à l'expérience.

Notations générales.

Les éléments de \mathbf{R}_+^2 sont désignés systématiquement par des lettres grasses, la notation standard étant $\mathbf{z} = (s, t)$. La relation $\mathbf{z} \leq \mathbf{z}'$ signifie $s \leq s', t \leq t'$, tandis que $\mathbf{z} < \mathbf{z}'$ signifie $s < s'$ et $t < t'$, et $\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}'$ signifie $s < s'$ et $t > t'$. Le rectangle $]\mathbf{z}, \mathbf{z}']$ est l'ensemble des \mathbf{u} tels que $\mathbf{z} < \mathbf{u} \leq \mathbf{z}'$. Nous posons $\mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{1} = (1, 1)$, $\mathbf{R}_z =]\mathbf{0}, \mathbf{z}]$.

Tous les processus que nous considérons sont nuls sur les axes. Si $\Delta =]\mathbf{z}, \mathbf{z}']$ est un rectangle, et X un processus, nous posons $X(\Delta) = X_{s't'} - X_{s't} - X_{st'} + X_{st}$.

La mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbf{R}_+^2$ est notée $Z(A)$ ou $\int_A dz$ (ou toute autre lettre grasse). La mesure de Lebesgue sur \mathbf{R} est notée m .

Nous considérons un processus de Wiener (W_z) , défini sur un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) , à trajectoires continues. On désigne par \mathcal{F}_z la tribu engendrée par les variables aléatoires W_u , $\mathbf{u} \leq \mathbf{z}$, et par tous les ensembles de mesure nulle de \mathcal{F} ; on sait que cette famille est continue à droite.

Les diverses notions de martingales (martingales faibles, i -martingales, martingales, martingales fortes) sont toutes relatives à cette filtration. Pour les définitions et les théorèmes classiques concernant ces processus, on consultera [1], [2], [3], [5].

Semi-martingales représentables.

Commençons par les *martingales faibles* représentables. Soit X une martingale faible (nulle sur les axes). La condition minimale

de régularité que l'on puisse imposer à X consiste à exiger que pour s fixé, $(X_{st})_t$ soit une semi-martingale en t , et de même pour t fixé. On montre alors dans [3], sous des conditions faibles, que X admet une décomposition unique de la forme

$$X = M + N^1 + N^2 \tag{1}$$

sur $[0, 1]^2$, où M est une martingale, et N^i est une i -martingale propre. Pour $i = 1$, par exemple, cela signifie que $(N_{st}^1)_s$ est une martingale pour tout t , tandis que $(N_{st}^1)_t$ est, pour tout s , un processus à variation finie prévisible. La notion de martingale faible représentable s'obtient en imposant encore quelques conditions aux processus M, N^1, N^2 .

1) M est une martingale de carré intégrable. On sait alors que M admet une représentation

$$M_z = \int_{R_z} \theta_u dW_u + \int_{R_z \times R_z} \psi_{uv} dW_u dW_v \tag{2}$$

(en abrégé, $M = \theta \cdot W + \psi \cdot WW$). Ici θ et ψ appartiennent à deux espaces de Hilbert que nous noterons \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 :

\mathcal{H}_1 est le sous-espace fermé de $L^2(\Omega \times [0, 1]^2, P \times Z)$ formé des fonctions $\theta(\omega, u)$ qui sont adaptées (i.e. $\theta(\cdot, u)$ est \mathcal{F}_u -mesurable pour tout u fixé).

\mathcal{H}_2 est le sous-espace fermé de

$$L^2(\Omega \times [0, 1]^2 \times [0, 1]^2, P \times Z \times Z)$$

formé des fonctions $\psi(\omega, u, v)$ telles que, pour tout (u, v) fixé, $\psi(\cdot, u, v)$ soit $\mathcal{F}_{u \vee v}$ -mesurable, et que de plus, $\psi(\omega, u, v) = 0$ si l'on n'a pas $u \wedge v$.

Pour les détails, voir [2], [3], où l'on montre aussi que M est une martingale forte si et seulement si le terme $\psi \cdot WW$ est nul.

2) *i-martingales*. Considérons par exemple la 1-martingale propre (N_{st}^1) .

Il est naturel de supposer, non seulement que le processus $(N_{st}^1)_t$ est à variation finie, mais encore qu'il est absolument continu par rapport à la mesure dt . On montre alors dans [3], sous des conditions d'intégrabilité assez faibles, que N^1 admet une représentation sous forme d'une "intégrale stochastique double mixte". En fait, dans le cas particulier qui nous occupe, cette représentation peut s'écrire

$$N_{sr}^1 = \int_{R_{sr}} \left(\int_0^t \beta_1(v, \mathbf{x}) dv \right) dW_{\mathbf{x}} \tag{3}$$

où $\beta_1(\omega, v, \mathbf{z})$ est une fonction sur $\Omega \times [0, 1] \times [0, 1]^2$, mesurable, nulle si $v \leq t$ (la seconde coordonnée de \mathbf{z}), telle que si $v > t$ $\beta_1(\cdot, v, \mathbf{z})$ soit \mathfrak{F}_{sv} -mesurable (s est la première coordonnée de \mathbf{z}), et telle enfin que

$$E \left[\int_{[0,1] \times [0,1]^2} \beta_1^2(\cdot, v, \mathbf{z}) dv d\mathbf{z} \right] < \infty.$$

Ces fonctions forment un sous-espace fermé \mathfrak{K}_1 de l'espace L^2 associé à la mesure $dPdv d\mathbf{z}$ sur $\Omega \times [0, 1] \times [0, 1]^2$. De la même manière, nous supposons que N^2 admet une représentation

$$N_{sr}^2 = \int_{R_{sr}} \left(\int_0^s \beta_2(u, \mathbf{x}) du \right) dW_{\mathbf{x}} \tag{3'}$$

où β_2 parcourt l'espace de Hilbert \mathfrak{K}_2 analogue.

3) *Terme à variation finie.* Enfin, nous superposerons à la martingale faible qui vient d'être considérée un terme à variation finie de la forme

$$\Sigma_{\mathbf{z}} = \int_{R_{\mathbf{z}}} \varphi_{\mathbf{x}} d\mathbf{x} \tag{4}$$

où $\varphi(\omega, \mathbf{z})$ est une fonction mesurable, adaptée à $(\mathfrak{F}_{\mathbf{z}})$, telle que $E \left[\int_{R_1} \varphi_{\mathbf{x}}^2 d\mathbf{x} \right] < \infty$. Ces fonctions sont les éléments d'un sous espace fermé \mathfrak{F} de $L^2(\Omega \times R_1, P \times Z)$: on a $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{E}_1}$, mais il est commode de les distinguer dans la notation.

Toute s.m.r. admet une version à trajectoires continues, mais nous n'aurons pas vraiment besoin de ce résultat. Nous espérons que les explications ci-dessus montrent que la classe des s.m.r. est raisonnablement générale dans la classe des "semi-martingales à deux paramètres".

A partir de la représentation explicite ci-dessus, il est facile d'exprimer la 1-dérivée de X , c'est-à-dire le processus $L_1(\omega, t, \mathbf{z})$ figurant dans la représentation de la partie 1-martingale $M + N^1$ de X

$$M_{uv} + N_{uv}^1 = \int_{R_{uv}} L_1(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}}.$$

On a

$$L_1(v, \mathbf{x}) = \theta_{\mathbf{x}} + \int_0^v \beta_1(t, \mathbf{x}) dt + \int_{\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}, t < v} \psi(\mathbf{z}, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{z}}. \tag{5}$$

La représentation $X = M + N^1 + N^2 + \Sigma$ sera souvent notée $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, les cinq termes correspondant à $\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi$ dans cet ordre. Les représentations étant uniques, nous poserons aussi

$$\|X\|_{smr} = (\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2)^{1/2}$$

les normes étant prises dans les espaces $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{F}$ correspondants.

Partitions et fonctions simples associées.

Nous désignons par σ une partition de l'intervalle $]0, 1]$ en intervalles semi-ouverts $]s_i, s_{i+1}] = \Delta_i$, avec

$$0 \leq i \leq m, 0 = s_0 \leq s_1 \dots \leq s_m \leq s_{m+1} = 1.$$

De même pour τ , partition en intervalles $]t_j, t_{j+1}] = \Delta'_j$, avec $0 \leq j \leq n$. Nous désignons par π la partition produit $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta'_j$; nous posons $z_{ij} = (s_i, t_j)$, $\mathcal{F}_{z_{ij}} = \mathcal{F}_{z_{ij}}$. Le pas de la subdivision σ vaut $\sup_{i \leq m} (s_{i+1} - s_i)$; on le note $|\sigma|$ et l'on pose $|\pi| = \sup(|\sigma|, |\tau|)$.

Soit $z = (s, t) \in R_1$: nous désignerons par σ_s, τ_t, π_z les traces des partitions σ, τ, π sur $]0, s],]0, t],]0, z]$ respectivement: nous gardons la même manière d'indexer les partitions, mais s_i devient simplement $s_i \wedge s, t_j$ devient $t_j \wedge t$, sans autre changement de notation.

Si X_{st} est un processus à deux indices, nous posons comme d'habitude

$$\begin{aligned} X(\Delta_i, t) &= X_{s_{i+1}t} - X_{s_i t}; & X(s, \Delta'_j) &= X_{st_{j+1}} - X_{st_j} \\ X(\Delta_{ij}) &= X_{s_{i+1}t_{j+1}} - X_{s_{i+1}t_j} - X_{s_i t_{j+1}} + X_{s_i t_j}. \end{aligned}$$

Décrivons maintenant les *fonctions simples* associées à une partition π . Dans les représentations données plus haut, nous dirons que

θ est simple si $\theta(\omega, z) = \sum_{ij} \theta_{ij}(\omega) 1_{\Delta_{ij}}(z)$, où θ_{ij} est $\mathcal{F}_{z_{ij}}$ -mesurable bornée. Définition analogue pour φ .

ψ est simple si $\psi(\omega, u, v) = \sum'_{ijk\ell} \psi_{ijk\ell} 1_{\Delta_{ij}}(u) 1_{\Delta_{k\ell}}(v)$, où

le ' indique une sommation pour $i < j$ et $j > \ell$, et $\psi_{ijk\ell}$ est $\mathcal{F}_{s_k t_j}^1$ -mesurable bornée.

β_1 est simple si $\beta_1(\omega, v, \mathbf{z}) = \sum'_{ij\ell} \beta_{ij\ell}^1 1_{\Delta_{ij}}(\mathbf{z}) 1_{\Delta_{\ell}'}(v)$, où la sommation Σ' est étendue aux $ij\ell$ tels que $j < \ell$, et $\beta_{ij\ell}^1$ est $\mathcal{F}_{s_i t_{\ell}}^1$ -mesurable bornée. De même pour β_2 par échange des coordonnées.

Ecrivons alors l'expression complète de la s.m.r. X associée à un système de fonctions simples (nous dirons brièvement : s.m.r. simple)

$$\begin{aligned} X(\mathbf{z}) = & \sum_{ij} \theta_{ij} W(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{ij}) + \sum'_{ijk\ell} \psi_{ijk\ell} W(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{ij}) W(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{k\ell}) \\ & + \sum'_{ij\ell} \beta_{ij\ell}^1 m([0, t] \cap \Delta_{\ell}') W(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{ij}) \\ & + \sum'_{ijk} \beta_{ijk}^2 m([0, s] \cap \Delta_k) W(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{ij}) + \sum_{ij} \varphi_{ij} Z(\mathbf{R}_{\mathbf{z}} \cap \Delta_{ij}). \end{aligned} \quad (6)$$

Presque tous les raisonnements ci-dessous peuvent se faire par passage à la limite à partir des s.m.r. associées aux fonctions simples (relatives à des partitions arbitrairement fines) : dans le cas particulier du processus de Wiener, il n'est pas difficile de montrer que les fonctions simples sont denses dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{F}$ correspondants, ou encore, qu'en se restreignant à l'adhérence des fonctions simples, on représente la même classe de semi-martingales (cette dernière méthode, revenant à restreindre les intégrales stochastiques aux intégrands prévisibles, est celle qui convient dans les situations plus générales).

2. 1-VARIATION-PRODUIT

Dans cette partie, nous considérons les sommes

$$\left. \begin{aligned} \langle X \rangle_{\sigma_s, t} &= \sum_{\sigma_s} E[X(\Delta_i, t)^2 | \mathcal{F}_{s_i}^1] \\ [X]_{\sigma_s, t} &= \sum_{\sigma_s} X(\Delta_i, t)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où \sum_{σ_s} signifie que l'on somme sur l'indice i , mais les Δ_i sont ceux de la partition σ_s . Plus généralement, nous pouvons considérer les

les sommes correspondant à deux niveaux différents $t \leqq t'$:

$$\left. \begin{aligned} \langle X \rangle_{\sigma_s, t, t'} &= \sum_{\sigma_s} E[X(\Delta_i, t) X(\Delta_i, t') | \mathfrak{F}_{s_i}^1] \\ [X]_{\sigma_s, t, t'} &= \sum_{\sigma_s} X(\Delta_i, t) X(\Delta_i, t'). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Le résultat principal sur ces sommes est le suivant :

THEOREME 1. — Lorsque $|\sigma| \rightarrow 0$, les sommes (7) et (7') convergent dans L^1 , uniformément en s, t, t' , vers

$$\langle X \rangle_{s, t, t'}^{(1)} = [X]_{s, t, t'}^{(1)} = \int_{R_{st}} L_1(t, z) L_1(t', z) dz \quad (t \leqq t'). \quad (8)$$

Démonstration. — Il serait facile de ramener ce théorème aux théorèmes analogues pour les semi-martingales à un paramètre⁽¹⁾, mais cela ne donnerait pas la propriété de convergence uniforme dans L^1 . On va plutôt employer une méthode qui s'étendra aux autres problèmes de variation quadratique de cet article. Raisonnons par exemple sur $[X]_{\sigma_s, t, t'}$. Nous allons établir le résultat de convergence uniforme dans L^1 pour les s.m.r. associées aux fonctions simples. D'autre part, nous établirons une inégalité de la forme suivante, où C est une constante absolue : quels que soient s, t, σ

$$\|[X]_{\sigma_s, t}\|_{L^1} \leqq C(\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2) = C \|X\|_{\text{s.m.r.}}^2 \quad (9)$$

où les normes au second membre sont prises dans les espaces de Hilbert correspondants. Comme on a aussi

$$|[X]_{\sigma_s, t, t'} - [Y]_{\sigma_s, t, t'}| \leqq [X]_{\sigma_s, t}^{1/2} [X - Y]_{\sigma_s, t'}^{1/2} + [X - Y]_{\sigma_s, t}^{1/2} [Y]_{\sigma_s, t'}^{1/2} \quad (9')$$

une application de (9) et de l'inégalité de Schwarz montrera que la convergence uniforme dans L^1 passe à la limite, et vaut pour toutes les s.m.r.. Il restera à identifier la limite, ce qui n'est pas difficile.

Pour établir (9), il suffit en fait de raisonner séparément sur chacun des cinq termes de la somme. Pour les trois premiers types, qui sont des 1-martingales, on a exactement $E[[X]_{\sigma_s, t}] = E[X_{st}^2] \leqq E[X_{1t}^2]$. Pour

(1) Voir la remarque suivant la démonstration.

les deux types de martingales, on majore encore cela par $E[X_{11}^2]$, qui vaut suivant le cas $\|\theta\|^2$ ou $\|\psi\|^2$. Pour le type 1-martingale propre, on écrit

$$E[(N_{1t}^1)^2] = E \left[\int_{R_{1t}} \left(\int_0^t \beta_1(v, \mathbf{z}) dv \right)^2 d\mathbf{z} \right] \\ \leq E \left[\int_{[0,t] \times R_{1t}} \beta_1(v, \mathbf{z})^2 dv d\mathbf{z} \right] \leq \|\beta_1\|^2.$$

Pour les deux derniers types, qui sont des processus à variation finie en s , on majore $E[[X]_{\sigma_s, t}]$ par $E \left[\left(\int_0^s |d_u X_{uv}| \right)^2 \right]$, et l'on remplace s par 1. Pour $X = N^2$, nous avons

$$d_u N_{uv}^2 = \left(\int_{R_{uv}} \beta_2(u, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} \right) du,$$

d'où sans peine

$$E[[X]_{\sigma_s, t}] \leq \int_0^1 du E \left[\left(\int_{R_{ut}} \beta_2(u, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} \right)^2 \right] \\ = \int_0^1 du E \left[\int_{R_{ut}} \beta_2(u, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right] \leq \|\beta_2\|^2.$$

Enfin, le cas de $X = \Sigma$ est à peu près évident, et nous le laissons de côté⁽¹⁾.

Nous pouvons donc nous ramener au cas où les fonctions θ, ψ, \dots sont des fonctions simples associées à une subdivision fixée $\pi_0 = \sigma_0 \times \tau_0$. Nous supposons aussi, pour simplifier, que la subdivision σ est plus fine que σ_0 (en pratique, on travaille souvent avec des subdivisions dyadiques). Si cette condition n'était pas satisfaite, il conviendrait de traiter séparément les intervalles de σ contenus dans un intervalle de σ_0 , qui peuvent s'étudier comme ci-dessous, et les intervalles de σ qui contiennent un point de subdivision de σ_0 : leur longueur totale est au plus $m_0 |\sigma|$, qui tend vers 0, et il est facile de voir que leur contribution dans $[X]_{\sigma_s, t, t'}$ tend vers 0 dans L^1 , uniformément en s, t, t' .

Revenons alors à la formule (6) (où l'on remarquera que les indices i, j, k, ℓ sont relatifs à π_0). Nous découpons la somme $[X]_{\sigma_s, t, t'}$ en un nombre fini de sommes partielles, correspondant aux intervalles de σ contenus dans un même intervalle $]s_i, s_{i+1}]$ de σ_0 . Sur cet intervalle, on peut écrire pour tout t fixé, en regroupant

(1) Nous traitons en détail la situation analogue dans les théorèmes 2 et 3.

convenablement les termes de (6)

$$X_{st} = \sum_{ij} a_{ij} W(R_{st} \cap \Delta_{ij}) + b_i(s - s_i) + c_i$$

où les a_{ij} , b_i et c_i (qui dépendent aussi de t) sont des variables aléatoires $\mathfrak{F}_{s_i t}$ -mesurables bornées dans tout L^p (avec des normes indépendantes de t). On notera que les divers $W(R_{st} \cap \Delta_{ij})$ sont des mouvements browniens réels orthogonaux. Ecrivant la formule analogue pour $X_{s, t'}$, on voit que le comportement de la somme partielle de $[X]_{\sigma_s, t, t'}$ correspondant à l'intervalle $]s_i, s_{i+1}]$ se ramène à un problème tout à fait concret et classique concernant un système de mouvements browniens à un paramètre, que nous ne détaillerons pas davantage. La discussion des sommes $\langle X \rangle_{\sigma_s, t, t'}$ est plus simple.

Il reste à identifier la limite. Pour cela, nous appliquons le résultat sur les processus à un paramètre rappelé ci-dessous, suivant lequel la limite $\langle X \rangle_{s, t, t'} = [X]_{s, t, t'}$ ne dépend que de la partie 1-martingale $\mu_{st} = M_{st} + N_{st}^1$ de X , et est égale à $\langle \mu_{.t}, \mu_{.t'} \rangle_s$. Or ce crochet oblique est égal au second membre de (8), d'après la théorie de l'intégrale stochastique.

Remarque. — Soient $X = M + A$, $Y = N + B$ deux semi-martingales à un paramètre sur $[0, 1]$, M et N sont deux martingales continues de carré intégrable, nulles en 0, et A et B deux processus continus à variation finie, tels que $\int_0^1 |dA_s|$ et $\int_0^1 |dB_s|$ appartiennent à L^2 . Il est alors classique que les sommes

$$\sum_{\sigma_s} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i})(Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) \text{ et } \sum_{\sigma_s} E[(X_{s_{i+1}} - X_{s_i})(Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) | \mathfrak{F}_{s_i}]$$

convergent vers $\langle M, N \rangle_s$. Ce résultat a déjà été utilisé par Cairoli et Walsh pour établir l'existence du processus $\langle X \rangle_{st}^{(1)} = \langle X \rangle_{s, t, t'}^{(1)}$, lorsque X est une martingale de carré intégrable. Comme nous l'avons dit plus haut, la démonstration du théorème 1 au moyen des fonctions simples doit plutôt être considérée comme une préparation à la suite, car le raffinement d'uniformité en s, t, t' n'est pas particulièrement important.

3. VARIATIONS QUADRATIQUES

Dans cette section, nous étudions les sommes

$$\langle X \rangle_{\pi_z} = \sum_{\pi_z} E[X(\Delta_{ij})^2 | \mathcal{F}_{ij}] \quad (10)$$

$$[X]_{\pi_z} = \sum_{\pi_z} X(\Delta_{ij})^2 \quad (10')$$

lorsque X est une s.m.r.. Nous établirons pour ces sommes le théorème suivant.

THEOREME 2. — Lorsque $|\pi| \rightarrow 0$, les sommes $\langle X \rangle_{\pi_z}$ et $[X]_{\pi_z}$ convergent dans L^1 , uniformément en $z \in R_1$, vers

$$\langle X \rangle_z = [X]_z = \int_{R_z} \theta_x^2 dx + \int_{R_z \times R_z} \psi^2(x, y) dx dy.$$

Démonstration. — Comme dans la démonstration du théorème 1, la première étape consiste à établir une inégalité analogue à (9)

$$E[\langle X \rangle_{\pi_z}] = E[[X]_{\pi_z}] \leq C (\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2) = C \|X\|_{smr}^2. \quad (11)$$

Il suffit de le faire pour chacun des cinq types séparément, et nous prendrons $z = 1$ pour simplifier. Les deux types de martingales sont évidents (on a l'égalité pour toute partition). Pour le dernier, on écrit $\sum_{ij} \left(\int_{\Delta_{ij}} \varphi_z dz \right)^2 \leq \sum_{ij} Z(\Delta_{ij}) \int_{\Delta_{ij}} \varphi_z^2 dz \leq \int_{R_1} \varphi_z^2 dz$. Restent donc les types de i -martingales propres, le premier par exemple. Nous supposons X donné par la formule (3), et nous omettons l'indice 1 de β_1 .

Posons

$$L(t, z) = \int_0^t \beta(v, z) dv, \quad L(\Delta'_j, z) = L(t_{j+1}, z) - L(t_j, z).$$

Alors

$$X_z = \int_{R_z} L(t, x) dW_x$$

$$X(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_{ij}} L(t_{j+1}, x) dW_x + \int_{\Delta_i \times]0, t_j]} L(\Delta'_j, x) dW_x \quad (12)$$

puis sans difficulté

$$E[X(\Delta_{ij})^2] = E \left[\int_{\Delta_{ij}} L^2(t_{j+1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Delta_i \times]0, t_j]} L^2(\Delta'_j, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right].$$

Majorons $L^2(t_{j+1}, \mathbf{x})$ par $\int_0^1 \beta^2(v, \mathbf{x}) dv$, $L^2(\Delta'_j, \mathbf{x})$ par $m(\Delta'_j) \int_{\Delta'_j} \beta^2(v, \mathbf{x}) dv$ après quoi nous remplaçons $]0, t_j]$ par $]0, 1]$ et $m(\Delta'_j)$ par 1, et il reste après sommation sur i, j

$$E[[X]_\pi] = E[\langle X \rangle_\pi] \leq 2E \left[\int_{[0,1] \times \mathbb{R}_1} \beta^2(v, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = 2 \|\beta\|^2$$

l'inégalité désirée.

Nous laissons désormais de côté tout ce qui concerne les variations conditionnelles, sauf une remarque tout à la fin ; nous traitons en détail les variations inconditionnelles, qui sont plus difficiles.

Comme dans la démonstration du théorème 1, nous approchons maintenant le système $(\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi)$ représentant X par des systèmes $(\theta^n, \psi^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \varphi^n)$ de fonctions simples, définissant des s.m.r. simples X^n . L'inégalité (11) nous permet de majorer $E[|[X]_{\pi_z} - [X^n]_{\pi_z}|]$ uniformément en π ; il suffit donc d'établir la convergence dans L^1 pour les s.m.r. simples. D'autre part, l'identification de la limite dans le théorème 2 ne pose aucun problème quant à l'approximation par les fonctions simples : il est vraiment facile de voir que $[X^n]_z$ converge vers $[X]_z$ dans L^1 , uniformément en z . Le raisonnement pour $\langle X \rangle_\pi$ est analogue. En définitive, *la démonstration du théorème 2 est entièrement ramenée au cas des s.m.r. simples.*

Débarraçons-nous d'une autre difficulté : soit X une s.m.r. simple associée à une partition π_0 , qui reste fixe dans toute la suite. Supposons le théorème établi lorsque la partition variable π est plus fine que π_0 , et posons $\bar{\pi} = \pi \vee \pi_0$. Nous savons que, lorsque $|\pi| \rightarrow 0$, $[X]_{\bar{\pi}}$ converge dans L^1 vers la limite indiquée dans l'énoncé. Peut-on en déduire le même résultat pour $[X]_\pi$? Voici la démonstration sommaire de ce fait (nous ne donnons pas tous les détails, car en pratique on calcule les variations le long de suites de partitions emboîtées, les partitions dyadiques de pas 2^{-n} sur les deux axes par exemple, et π_0 étant elle-même dyadique ; on ne rencontre donc pas cette difficulté).

Rangeons en deux classes les rectangles de π , ceux qui sont entièrement contenus dans un rectangle de π_0 formant la première classe, et les autres la seconde. La somme des aires des rectangles de la seconde classe est majorée par $k|\pi|$, où k dépend seulement du nombre des lignes de subdivision de π_0 . Considérons maintenant θ, ψ, \dots comme des fonctions simples relatives à $\pi \vee \pi_0$, et partageons chacune d'elle en deux : θ^1 est le produit de θ par la somme des indicatrices de rectangles de la première classe, ψ^1 le produit de ψ par la somme des indicatrices de produits de deux rectangles de la première classe, etc., tandis que $\theta^2 = \theta - \theta^1$, etc. D'où une décomposition de X en deux s.m.r. $X^1 + X^2$. Il n'est pas difficile de voir que les normes de $\theta^{(2)}, \psi^{(2)} \dots$ tendent vers 0 avec $|\pi|$. D'après (11), on en déduit que les normes dans L^1 de $[X^2]_\pi, [X^2]_{\bar{\pi}}$ tendent vers 0.

Ecrivons, avec des notations évidentes

$$[X]_\pi = [X^1]_\pi + [X^2]_\pi + 2[X^1, X^2]_\pi.$$

Or nous avons $|[X^1, X^2]_\pi| \leq [X^1, X^1]_\pi^{1/2} [X^2, X^2]_\pi^{1/2}$, et l'inégalité de Schwarz montre que $[X^1, X^2]_\pi$ tend aussi vers 0 dans L^1 lorsque $|\pi| \rightarrow 0$, et de même pour $[X^1, X^2]_{\bar{\pi}}$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} |[X]_\pi - [X]_{\bar{\pi}}| &\leq |[X^1]_\pi - [X^1]_{\bar{\pi}}| + [X^2]_\pi + [X^2]_{\bar{\pi}} \\ &\quad + 2(|[X^1, X^2]_\pi| + |[X^1, X^2]_{\bar{\pi}}|). \end{aligned}$$

Il reste donc à voir que le premier terme au second membre est petit dans L^1 lorsque $|\pi| \rightarrow 0$: mais ce terme est nul. En effet, les termes correspondant aux rectangles de première classe s'éliminent de la différence, et il ne reste donc que des termes $X^1(\Delta)^2$ correspondant à des rectangles de seconde classe de π , ou à des subdivisions de tels rectangles dans $\bar{\pi}$. Mais d'après la construction des fonctions simples figurant dans X^1 , tous ces accroissements sont nuls. On a le même raisonnement pour π_z .

Désormais, nous supposons donc que X est une s.m.r. associée à π_0 , et que π est plus fine que π_0 .

Décomposons X en une somme $X^1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$, ces cinq termes correspondant respectivement aux cinq intégrands $\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi$; nous décomposons $[X]_\pi$ en une somme (nous laissons de côté π_z pour alléger)

$$\begin{aligned}
 [X]_{\pi} &= [X^1]_{\pi} + 2[X^1, X^2]_{\pi} + [X^2]_{\pi} \\
 &+ [X^3]_{\pi} + [X^4]_{\pi} + [X^5]_{\pi} + 2[X - X^3, X^3]_{\pi} \\
 &+ 2[X - X^3 - X^4, X] + 2[X - X^3 - X^4 - X^5, X^5].
 \end{aligned}$$

Nous remettons à plus tard l'étude de la première ligne. Nous allons montrer que chacun des termes de la seconde ligne tend vers 0 dans L^1 , et une application de l'inégalité de Schwarz comme ci-dessus prouvera que ceux de la troisième ligne font de même.

Cas de X^5 .

On rappelle qu'une fonction simple φ est bornée en valeur absolue par une constante k . On majore $\sum X(\Delta_{ij})^2$ par $\sum |X(\Delta_{ij})| \cdot \sup_{ij} |X(\Delta_{ij})|$. Le premier facteur est majoré par $\int_{R_1} |\varphi(z)| dz$, le second par $k \cdot \sup_{ij} Z(\Delta_{ij})$, et le résultat est immédiat.

Cas de X^3 (le cas de X^4 est identique).

Revenons à la formule (12) au début de la démonstration, en examinant le raisonnement d'un peu plus près : si $z \in \Delta_{ij}$, nous avons $t \in \Delta'_j$; or $\beta(v, z) = 0$ si $v < t$, donc $L(t_{j+1}, z) = \int_0^{t_{j+1}} \beta(v, z) dv$ est égal en réalité à $\int_t^{t_{j+1}} \beta(v, z) dv$, d'où

$$L^2(t_{j+1}, z) \leq m(\Delta'_j) \int_0^1 \beta^2(v, z) dz.$$

Rétablissant aussi le facteur $m(\Delta'_j)$ dans le second terme, on obtient $E[[X^3]_{\pi}] \leq 2 \|\pi\| \|\beta_1\|^2$ l'inégalité cherchée.

Pour achever la démonstration, il suffit donc d'étudier la première ligne, i.e. le cas des martingales. Signalons tout de suite que cette étude a été faite par Cairoli et Walsh [4] pour la variation conditionnelle, de sorte que (compte tenu de leur résultat) l'étude de celle-ci est entièrement achevée pour les s.m.r..

Avant de commencer la discussion proprement dite, nous aurons besoin de rappeler deux faits sur les processus de Wiener à une dimension. Soient X et Y deux mouvements browniens indépendants

de paramètre 1 sur $[0, 1]$, $\sigma = (\Delta_i)$ une partition de $]u, v]$, $0 \leq u < v \leq 1$. Alors

$$E \left[\left(\sum_i X(\Delta_i)^2 - (v - u) \right)^2 \right] \leq c |\sigma| (v - u) \quad (13)$$

$$E \left[\left(\sum_i X(\Delta_i) Y(\Delta_i) \right)^2 \right] \leq |\sigma| (v - u). \quad (14)$$

Les rectangles de la partition π_0 seront notés avec des lettres du début de l'alphabet : $\Delta_{ab}, \Delta_{cd} \dots$ avec $\Delta_{ab} = \Delta_a \times \Delta'_b$. Les rectangles de la partition π (plus fine que π_0) seront notés $\Delta_{ij}, \Delta_{kl} \dots$. Nous écrivons $i \in a$ pour exprimer que l'intervalle Δ_i de σ est contenu dans l'intervalle Δ_a de σ_0 , et de même suivant l'autre axe.

Etude de $[X^1]_\pi$.

Le cas qui nous intéresse est celui des martingales fortes

$$X_z^1 = \sum_{ab} \theta_{ab} W(R_z \cap \Delta_{ab}) \quad \theta_{ab} \mathcal{F}_{ab}\text{-mesurable.}$$

Alors
$$X^1(\Delta_{ij}) = \theta_{ab} W(\Delta_{ij}) \quad \text{si } i \in a, j \in b$$

$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

Pour l'instant, travaillons sur les $i \in a, j \in b$, a et b restant fixes. La formule (13) nous donne pour chaque j

$$E \left[\left(\sum_i W(\Delta_{ij})^2 - m(\Delta'_j) m(\Delta_a) \right)^2 \right] \leq c |\sigma| m(\Delta_a) m(\Delta'_j)$$

(le mouvement brownien considéré est de paramètre $m(\Delta'_j)$ au lieu de 1). Les différents mouvements browniens, lorsqu'on fait varier j , étant indépendants, les variances s'ajoutent :

$$E \left[\left(\sum_{ij} W(\Delta_{ij})^2 - m(\Delta'_b) m(\Delta'_a) \right)^2 \right] \leq cm(\Delta_a) m(\Delta'_b).$$

Soit k une borne uniforme pour la fonction θ . Nous avons alors

$$E \left[\left(\sum_{ij} X^1(\Delta_{ij}) - \theta_{ab}^2 Z(\Delta_{ab}) \right)^2 \right] \leq k^2 c |\sigma| Z(\Delta_{ab}).$$

Ainsi la variable aléatoire $\sum_{i \in a, j \in b} X^1(\Delta_{ij})^2$ converge dans L^2 vers

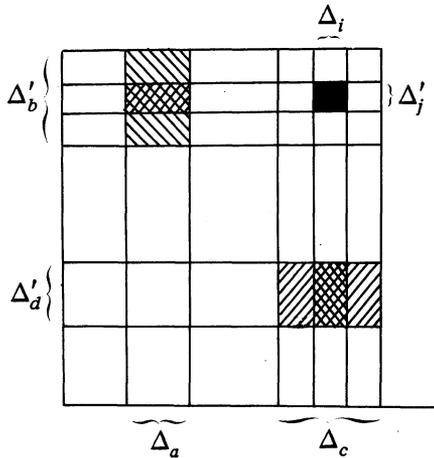
$\theta_{ab}^2 Z(\Delta_{ab})$ lorsque $|\pi| \rightarrow 0$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de rectangles dans π_0 , on peut sommer sur a, b , et on trouve que $[X^1]_\pi$ converge dans L^2 (ou L^1) vers $\int_{R_1} \theta_x^2 d\mathbf{x}$. Il resterait à remplacer π par π_z et à chercher des majorations uniformes : ce serait facile, et nous ne le détaillerons pas.

Etude de $[X^2]_\pi$.

Ici nous avons (en enlevant l'indice 2 pour éviter les confusions)

$$X_z = \sum_{abcd} \psi_{abcd} W(R_z \cap \Delta_{ab}) W(R_z \cap \Delta_{cd})$$

avec $a < c, b > d$, ψ_{abcd} \mathfrak{F}_{cb} -mesurable (voir le dessin).



On en tire

$$X(\Delta_{ij}) = \sum_{abcd} \psi_{abcd} W(\Delta_a \times \Delta_j') W(\Delta_i \times \Delta_d')$$

= 0 sinon

et par conséquent, c et b étant déterminés par $i \in c, j \in b$

$$X(\Delta_{ij})^2 = \sum_{aad\bar{a}} \psi_{abcd} \psi_{\bar{a}bc\bar{a}} W(\Delta_a \times \Delta_j') W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta_j') W(\Delta_i \times \Delta_d') W(\Delta_i \times \Delta_{\bar{d}}')$$

Nous sommes en i, j et voulons montrer que la somme converge dans L^1 vers

$$\int_{\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_1} \psi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \sum_{abcd} \psi_{abcd}^2 Z(\Delta_{ab}) Z(\Delta_{cd}).$$

Les fonctions ψ étant toutes bornées, il suffit de montrer que pour $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{d}$ fixés, on a dans L^1

$$\lim_{i \in c, j \in b} \sum W(\Delta_a \times \Delta'_j) W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta'_j) W(\Delta_i \times \Delta'_d) W(\Delta_i \times \Delta'_d) = 0$$

si $a \neq \bar{a}$ ou $d \neq \bar{d}$ (*)

$$\lim_{i \in c, j \in b} \sum W(\Delta_a \times \Delta'_j)^2 W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 = Z(\Delta_{ab}) Z(\Delta_{cd}). \quad (**)$$

Commençons par la somme (**): nous écrivons l'inégalité (13) pour le mouvement brownien $W([0, s] \times \Delta'_d)$, de paramètre $m(\Delta'_d)$, sur $[u, v] = \Delta_c$

$$E \left[\left(\sum_{i \in c} W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 - m(\Delta_c) m(\Delta'_d) \right)^2 \right] \leq c |\sigma| m(\Delta_c) m(\Delta'_d)$$

donc

$$\sum_i W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 \longrightarrow m(\Delta_c) m(\Delta'_d) \text{ dans } L^2$$

de même

$$\sum_j W(\Delta_a \times \Delta'_j)^2 \longrightarrow m(\Delta_a) m(\Delta'_b) \text{ dans } L^2.$$

Faisant le produit, nous trouvons

$$\sum_{ij} W(\Delta_c \times \Delta'_j)^2 W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 \longrightarrow m(\Delta_c) m(\Delta'_d) m(\Delta_a) m(\Delta'_b) \text{ dans } L^1$$

le résultat cherché.

Passons à (*). Supposons par exemple $d \neq \bar{d}$: d'après (14) $E \left[\left(\sum_i W(\Delta_i \times \Delta'_d) W(\Delta_i \times \Delta'_{\bar{d}}) \right)^2 \right]$ tend vers zéro tandis que d'après (13) si $a = \bar{a}$ ou (14) si $a \neq \bar{a}$ $E \left[\left(\sum_j W(\Delta_a \times \Delta'_j) W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta'_j) \right)^2 \right]$ reste borné. Nous avons donc deux variables aléatoires, dont la première tend vers 0 dans L^2 , la seconde restant bornée; leur produit tend vers 0 dans L^1 , ce que nous désirions.

Etude de $[X^1, X^2]$.

Il s'agit ici de montrer que

$$\sum_{abcd} \theta_{cb} \psi_{abcd} \sum_{i \in c, j \in b} W(\Delta_{ij}) W(\Delta_a \times \Delta'_j) W(\Delta_i \times \Delta'_d)$$

converge vers 0 dans L^1 . Comme on l'a fait plus haut, on se ramène à montrer que pour a, b, c, d , fixés, on a

$$E \left[\left(\sum_{i \in c, j \in b} W(\Delta_{ij}) W(\Delta_a \times \Delta'_j) W(\Delta_i \times \Delta'_d) \right)^2 \right] \longrightarrow 0$$

lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$.

Or si l'on développe cette somme, les termes correspondant à des couples (i, j) (k, l) différents disparaissent, l'espérance correspondant aux carrés se calcule, et il reste simplement

$$\sum_{i \in c, j \in b} Z(\Delta_{ij}) Z(\Delta_c \times \Delta'_j) Z(\Delta_i \times \Delta'_d) = Z(\Delta_a \times \Delta'_d) \sum_{i \in c, j \in b} Z(\Delta_{ij})^2$$

et la démonstration est achevée.

4. VARIATIONS MIXTES

Nous fixons deux niveaux t et t' ($t \leq t'$) et désignons par $R_{s,tt'}$ le rectangle $R_{st} \setminus R_{st'}$. Désignons aussi par $\pi_{s,tt'}$ la trace de la partition π sur $R_{s,tt'}$ (comme d'habitude, nous continuons à désigner par $\Delta_{ij}, \Delta_i, \Delta'_j$ les rectangles ou intervalles correspondants). On est amené à étudier les 1-variations mixtes des deux types

$$\sum_{ij} X(\Delta_i, t) X(\Delta_{ij}) \quad \text{et} \quad \sum_{ij} E[X(\Delta_i, t) X(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}]$$

la sommation étant faite sur $\pi_{s,tt'}$.

Les sommes inconditionnelles ont déjà été étudiées au paragraphe II. En effet, en sommant sur j on voit qu'elles sont égales à $\sum_i X(\Delta_i, t) (X(\Delta_i, t') - X(\Delta_i, t))$ autrement dit, ce sont des différences de 1-variations produit. Nous nous intéresserons donc uniquement aux variations conditionnelles. Etant données deux s.m.r. X et Y , nous poserons

$$\{X, Y\}_\pi = \sum_{ij} E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}]$$

et $\{X\}_\pi = \{X, X\}_\pi$ (une notation complète devrait rappeler s, t, t' , et le fait qu'il s'agit de 1-variations mixtes, mais ce serait très lourd).

THEOREME 3. — Lorsque $|\pi| \rightarrow 0$, la 1-variation mixte conditionnelle (1) converge dans L^1 vers

$$\{X\}_{s, t, t'} = \int_{R_{st}} L^1(t, z) \left(\int_t^{t'} \beta_1(v, z) dv \right) dz. \quad (15)$$

On peut montrer que cette convergence a lieu uniformément en s, t, t' . On remarquera aussi que l'on ne peut affirmer l'égalité des 1-variations mixtes, conditionnelle et inconditionnelle, que pour une classe restreinte de s.m.r., contenant les s.m.r. telles que $\psi = 0$ (on peut montrer que ce sont exactement les s.m.r. dont la partie martingale a une variation indépendante du chemin, au sens de Cairoli et Walsh).

Démonstration. — La méthode que nous avons suivie pour établir les théorèmes 1 et 2 doit ici être modifiée, car la fonction bilinéaire $\{X, Y\}$ n'est ni symétrique, ni positive. Rappelons que la représentation de X est notée $X = X^1 + \dots + X^5$, avec un ordre bien défini sur les cinq types.

LEMME. — Si X et Y sont deux s.m.r., on a

$$\|\{X, Y\}_\pi\|_{L^1} \leq C \|X\|_{\text{smr}} \|Y\|_{\text{smr}}. \quad (16)$$

Plus précisément, si Y est du type 1, 2 ou 4 (types de 2-martingales) on a $\{X, Y\}_\pi = 0$; si Y est du type 5, ou si $X = X^4 + X^5$ (types à 1-variation finie) on a

$$\|\{X, Y\}_\pi\|_{L^1} \leq C |\pi|^{1/2} \|X\|_{\text{smr}} \|Y\|_{\text{smr}}. \quad (17)$$

Avant de démontrer le lemme, remarquons que c'est bien la forme nécessaire pour effectuer le passage à la limite à partir des fonctions simples : si X est une s.m.r., Y une s.m.r. simple telle

(1) En fait, notre démonstration donne un résultat un peu plus général, relatif à $\{X, Y\}_\pi$.

que $\|X - Y\|_{smr}$ soit petit, on a

$$\{X\}_\pi - \{Y\}_\pi = \{Y, X - Y\}_\pi + \{X - Y, X\}_\pi$$

et l'on sait majorer chacun des deux termes du second membre. D'autre part, pour étudier la convergence de $\{X\}_\pi$ lorsque $|\pi| \rightarrow 0$, il suffira d'étudier $\{X^1 + X^2 + X^3, X^3\}$.

Démonstration du Lemme. — Remarquons d'abord que $\{X, Y\} = 0$ dès que Y est une 2-martingale. En effet, un conditionnement préalable par $\mathcal{F}_{\infty t_j}$ annule les termes $Y(\Delta_{ij})$.

Etude du terme $\{X, Y^5\}$.

Nous utilisons la majoration

$$E[|E\{X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}\}|] \leq E[|X(\Delta_i, t)| |Y(\Delta_{ij})|].$$

Puis nous remplaçons $|Y(\Delta_{ij})|$ par $\int_{\Delta_{ij}} |\varphi_z| dz$ et sommons en j :

$$E[|\{X, Y^5\}_\pi|] \leq E\left[\sum_i |X(\Delta_i, t)| \int_{\Delta_i \times [0,1]} |\varphi_z| dz\right].$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Schwarz ; d'après le théorème 1

$$E\left[\sum_i X(\Delta_i, t)^2\right] \leq C \|X\|_{smr}^2 \text{ et il reste à majorer}$$

$$E\left[\sum_i \left(\int_{\Delta_i \times [0,1]} |\varphi_z| dz\right)^2\right] \leq E\left[\sum_i m(\Delta_i) \int_{\Delta_i \times [0,1]} \varphi_z^2 dz\right] \leq |\pi| \|Y^5\|_{smr}^2.$$

Etude de $\{X, Y\}$ lorsque $X = X^4 + X^5$.

Nous pouvons nous ramener au cas où Y est du type 3, car les types 1, 2, 4 donnent 0, et 5 vient d'être étudié. Nous représentons Y de la manière habituelle $Y_w = \int_{R_w} L(v, x) dW_x$ ($w = (u, v)$) et par conséquent

$$Y(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_i \times]0, t_j]} L(\Delta'_j, x) dW_x + \int_{\Delta_{ij}} L(t_{j+1}, x) dW_x.$$

Le second terme disparaît dans le conditionnement, comme au début de la démonstration. Notons donc U_{ij} le premier terme,

et majorons

$$E[|E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}]|] \leq E[|X(\Delta_i, t)| |U_{ij}|].$$

Puis

$$U_{ij} = \int_{\Delta_i \times]0, t_{j+1}[} L(\Delta'_j, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dv \int_{\Delta_i \times]0, t_{j+1}[} \beta(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}}$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer $]0, t_{j+1}[$ par $]0, v]$, d'après la forme de β . Alors

$$\sum_i |U_{ij}| \leq \int_t^{t'} dv \left| \int_{\Delta_i \times]0, v]} \beta(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} \right|.$$

Notons J_i le second membre ; l'inégalité de Schwarz nous donne

$$E[|\{X, Y\}_{\pi}|] \leq E \left[\sum_i X(\Delta_i, t)^2 \right]^{1/2} E \left[\sum_i J_i^2 \right]^{1/2}.$$

Le premier facteur est majoré par $C \|X\|_{\text{smr}}$ d'après le théorème 1. En fait, une analyse un peu plus précise conduirait à une majoration du type $C |\pi|^{1/2} \|X\|_{\text{smr}}$ du fait que X se réduit à $X^4 + X^5$, mais nous n'avons pas vraiment besoin de ce résultat. Il nous suffit pour la suite de savoir que ce facteur tend vers 0 avec $|\pi|$, ce qui résulte du théorème 1.

Le second facteur se majore ainsi :

$$J_i^2 \leq (t' - t) \int_t^{t'} dv \left(\int_{\Delta_i \times]0, v]} \beta(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} \right)^2$$

d'où en supprimant le facteur $t' - t \leq 1$ et en intégrant

$$E[J_i^2] \leq E \left[\int_{[0,1] \times \Delta_i \times]0,1]} \beta^2(v, \mathbf{x}) dv d\mathbf{x} \right]$$

et finalement, après sommation en i , le dernier facteur est majoré par $\|\beta\|_2 = \|Y\|_{\text{smr}}$.

Etude de $\{X, Y\}$ lorsque $X = X^1 + X^2 + X^3$.

Ici, d'après ce qui précède, nous pouvons supposer que $Y = Y^3$.

Nous écrirons les deux représentations

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{w}} &= \int_{R_{uv}} L(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} \quad (\mathbf{w} = (u, v)) \\ Y_{\mathbf{w}} &= \int_{R_{uv}} \Lambda(v, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}}, \quad \text{avec } \Lambda(v, \mathbf{x}) = \int_0^v \beta(r, \mathbf{x}) dr. \end{aligned} \quad (18)$$

Introduisons les deux martingales à un paramètre suivantes, par rapport à la famille (\mathcal{F}_s^1)

$$U_s = X_{st} = \int_{R_{st}} L(t, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}}$$

$$V_s = X_{st_{j+1}} - X_{st_j} = \int_{]0,s] \times \Delta'_j} \Lambda(t_{j+1}, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}} + \int_{R_{st_j}} \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x}) dW_{\mathbf{x}}.$$

Le crochet $\langle U, V \rangle$ par rapport à la famille (\mathcal{F}_s^1) est donné par

$$\langle U, V \rangle_s = \int_{R_{st}} L(t, \mathbf{x}) \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et alors nous avons

$$\begin{aligned} E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}] &= E[U(\Delta_i) V(\Delta_i) | \mathcal{F}_{ij}] \\ &= E[U(\Delta_i) V(\Delta_i) | \mathcal{F}_{s_i}^1 | \mathcal{F}_{ij}] = E[\langle U, V \rangle_{s_{i+1}} - \langle U, V \rangle_{s_i} | \mathcal{F}_{s_i}^1 | \mathcal{F}_{ij}] \end{aligned}$$

et par conséquent, en prenant une espérance

$$\begin{aligned} E[|E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}]|] &\leq E\left[\int_{\Delta_i \times]0,t]} |L(t, \mathbf{x}) \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x})| d\mathbf{x}\right] \\ &\leq E\left[\int_{\Delta_i \times]0,t]} |L(t, \mathbf{x})| \left(\int_{\Delta'_j} |\beta(v, \mathbf{x})| dv\right) d\mathbf{x}\right]. \end{aligned}$$

Sommant en j , puis en i ,

$$E[|\{X, Y\}_\pi|] \leq E\left[\int_{]0,1] \times]0,t]} |L(t, \mathbf{x})| \left(\int_t^{t'} |\beta(v, \mathbf{x})| dv\right) d\mathbf{x}\right].$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Schwarz nous donne comme majorant du second membre

$$\begin{aligned} E\left[\int_{]0,1] \times]0,t]} L^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}\right]^{1/2} E\left[\int_{]0,1] \times R_1} \beta(v, \mathbf{x})^2 dv d\mathbf{x}\right]^{1/2} \\ \leq C \|X\|_{smr} \|Y\|_{smr}. \end{aligned}$$

Le lemme est entièrement établi.

Nous passons maintenant à la convergence proprement dite. Bien que nous n'ayons pas donné d'énoncé formel, il est intéressant d'étudier, non seulement la convergence de $\{X\}_\pi$, mais celle de $\{X, Y\}_\pi$ pour tout couple de s.m.r.. D'autre part, d'après la discussion précédente, le seul terme qui ne converge pas vers 0 dans L^1 est $\{X^1 + X^2 + X^3, Y^3\}$. On peut donc supposer que X se réduit à $X^1 + X^2 + X^3$, Y à Y^3 , et on supposera que X et Y sont donnés par les représentations (18). Nous voulons montrer que

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \{X, Y\}_\pi = \int_{R_s, tt'} L(t, \mathbf{x}) \left(\int_t^{t'} \beta(v, \mathbf{x}) dv\right) d\mathbf{x}. \quad (19)$$

Comme nous l'avons fait pour les théorèmes précédents, il suffit d'établir cela lorsque X et Y sont des s.m.r. simples associées à une subdivision $\pi_0 = \sigma_0 \times \tau_0$, et nous pouvons supposer que t et t' sont deux niveaux t_p et t_q de π_0 . On peut aussi se ramener au cas où la subdivision variable π est plus fine que π_0 .

La s.m.r. $Y = Y^3$ est une somme de s.m.r. élémentaires de la forme suivante : si $w = (u, v)$

$$Y_w = \beta_{abc} m([0, v] \cap \Delta'_c) W(R_w \cap \Delta_{ab})$$

où Δ_{ab} est un rectangle de π_0 , Δ'_c un intervalle de τ_0 avec $b < c$, et β_{abc} est \mathfrak{F}_{ac} -mesurable bornée. On a alors si Δ_{ij} est un rectangle de π

$$\begin{aligned} Y(\Delta_{ij}) &= \beta_{abc} m(\Delta'_j) W(\Delta_i \times \Delta'_b) \text{ si } i \in a, j \in c \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Pour établir la formule, il n'est pas nécessaire de sommer en a, b, c : nous pouvons la démontrer pour chaque terme, et sommer ensuite. Donc a, b, c sont des indices fixés dans la suite. D'autre part, nous ne nous intéressons qu'aux Δ_{ij} placés entre t et t' , donc on a $p \leq c < q$.

Passons à X . Il est facile de voir que X admet la représentation suivante sur un rectangle Δ_{ef} de π : si $w = (u, v) \in \Delta_{ef}$,

$$X_w(\omega) = \rho_{ef}(v, \omega) W(R_{uv} \cap \Delta_{ef}) + \sum_{g < f} \rho_{eg}(\omega) W(R_{uv} \cap \Delta_{eg}) + r_{ef}(v, \omega)$$

où les variables aléatoires $\rho_{ef}(v, \cdot), r_{ef}(v, \cdot), \rho_{eg}(\cdot)$ sont \mathfrak{F}_{sev} -mesurables et intégrables. Alors, toujours pour $v \in \Delta'_f$

$$L(v, z) = \rho_{ef}(v, \cdot) \text{ si } z \in \Delta_{ef}, \rho_{eg} \text{ si } z \in \Delta_{eg}, g < f, \\ 0 \text{ si } z \in \Delta_{eg}, g > f.$$

Calculons alors $E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathfrak{F}_{ij}]$, en rappelant que a, b, c, p, p' sont des constantes, que $b < c$, que $p \leq c < p'$. Si $i \notin a$ ou $j \notin c$, le produit est nul. Si $i \in a$ et $j \in c$, le produit vaut

$$\sum_{g \leq p} \beta_{abc} \rho_{ag} m(\Delta'_j) W(\Delta_i \times \Delta'_b) W(\Delta_i \times \Delta'_g).$$

Avant de conditionner par \mathfrak{F}_{ij} , conditionnons par $\mathfrak{F}_{s_i \infty}$: le produit des deux accroissements de W est remplacé par $Z(\Delta_i \times \Delta'_b) \delta_{bg}$,

et le conditionnement par \mathcal{F}_{ij} ne change plus rien. Ainsi

$$E[X(\Delta_i, t) Y(\Delta_{ij}) | \mathcal{F}_{ij}] = \beta_{abc} \rho_{ab} m(\Delta_{ij}) m(\Delta'_b) \text{ si } b \leq p, i \in a, j \in c \\ = 0 \text{ sinon}$$

et la sommation sur i, j donne

$$\{X, Y\}_\pi = \beta_{abc} \rho_{ab} m(\Delta_{ac}) m(\Delta'_b) \mathbf{1}_{\{b \leq p\}}.$$

Il est facile de voir que cette expression (qui ne dépend pas de π) est égale à l'intégrale (19). La démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. WONG et M. ZAKAI, Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie*, 29 (1974), 109-122.
- [2] R. CAIROLI et J.B. WALSH, Stochastic integral in the plane, *Acta Mathematica*, 134 (1975), 111-183.
- [3] E. WONG et M. ZAKAI, Weak martingales and stochastic integrals in the plane, *Annals of Prob.*, Vol. 4 (1976), 570-586.
- [4] R. CAIROLI et J.B. WALSH, Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales, *Z. Wahrsch.*, 44 (1978), 279-306.
- [5] X. GUYON et B. PRUM, Processus à indice dans $[0,1]^2$, Préprint Orsay (1978).
- [6] Séminaire de Probabilités, Strasbourg 1, Springer-Verlag, (1967), 91-92.

Manuscrit reçu le 1^{er} juin 1978
révisé le 2 avril 1979.

X. GUYON et B. PRUM,
Université Paris-Sud
Bât. Math. (425)
91405 Orsay (France).