ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DOMINIQUE CERVEAU

Distributions involutives singulières

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 3 (1979), p. 261-294

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_261_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 261-294

DISTRIBUTIONS INVOLUTIVES SINGULIÈRES

par Dominique CERVEAU

0. Introduction.

0.1. *Notations et définitions.*

Nous désignerons par :

$\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbf{R}$ celui des réels, $\mathbf{C}$ celui des complexes.

$\mathcal{E}_n$ l'anneau des germes de fonctions C^∞ à l'origine de $\mathbf{R}^n$.

$\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles (ou bien complexes) à l'origine de $\mathbf{R}^n$ (ou bien de $\mathbf{C}^n$).

$\widetilde{\mathcal{E}}_n$ l'anneau des séries formelles à n variables réelles $x_1 \ldots x_n$ (ou bien à n variables complexes $z_1, \ldots, z_n$).

A_n l'un des trois anneaux $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{O}_n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n$.

$\mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$ le $\mathcal{E}_n$-module des germes de champs de vecteurs C^∞ à l'origine de $\mathbf{R}^n$.

$\theta_0(n)$ le $\mathcal{O}_n$-module des germes de champs de vecteurs analytiques à l'origine de $\mathbf{R}^n$ (ou bien à l'origine de $\mathbf{C}^n$ sans ambiguïté).

$\widetilde{\mathfrak{X}_0(n)}$ le $\widetilde{\mathcal{E}}_n$-module des champs de vecteurs formels (réels ou complexes).

F_n l'un des trois espaces $\mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$, $\theta_0(n)$, $\widetilde{\mathfrak{X}_0(n)}$.

$\mathrm{Diff}(n, \infty)$ le groupe des germes de difféomorphismes C^∞ laissant fixe l'origine de $\mathbf{R}^n$.

$\mathrm{Diff}(n, \omega)$ le groupe des germes de difféomorphismes analytiques laissant fixe l'origine de $\mathbf{R}^n$ (ou de $\mathbf{C}^n$).

$\widetilde{\mathrm{Diff}(n)}$ le groupe des difféomorphismes formels...

Etant donnés un germe α (de fonction, de champ...) et un entier ℓ, nous désignons par $j^\ell\alpha$ le jet d'ordre ℓ du germe α ; on écrira plutôt $\alpha(0)$ pour $j^0\alpha$ et $\widetilde{\alpha}$ pour $j^\infty\alpha$.

Pour $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ nous écrivons $|i| = i_1 + \ldots + i_n$. Nous ordonnons $\mathbf{N}^n$ par la relation : $i \leqslant i'$ si et seulement si : $|i| < |i'|$ ou $|i| = |i'|$ et i est plus petit que i' pour l'ordre lexicographique. La notation $\langle \lambda, i \rangle$ désigne la sommation $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . i_k$ où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un élément de $\mathbf{C}^n$ et $i = (i_1, \ldots, i_n)$ un élément de $\mathbf{N}^n$.

DEFINITION 0.1.1. – *Une distribution involutive* D *est un sous-module de type fini de* F_n *stable par le crochet de Lie.*

Ainsi nous parlerons de distributions involutives C^∞, formelles ou bien analytiques suivant que F_n désigne $\mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$, $\theta_0(n)$ ou bien $\widetilde{\mathfrak{X}_0(n)}$. Remarquons que dans les cas formels et analytiques la condition "de type fini" est automatiquement vérifiée. Nous désignerons par $\dim D(0)$ la dimension de l'espace vectoriel $D(0) = \{X(0), X \in D\}$, et par $g_{A_n}(D)$ le nombre minimal d'éléments nécessaires pour engendrer le A_n-module D. Nous dirons que D est *singulière* si $\dim D(0) < g_{A_n}(D)$. Deux distributions D et $D' \subset F_n$ seront dites *conjuguées* s'il existe $\phi \in D_n$ tel que : $D' = \phi_*(D) = \{\phi_*(X), X \in D\}$, D_n désignant $\mathrm{Diff}(n, \infty)$, $\mathrm{Diff}(n)$, $\mathrm{Diff}(n, \omega)$ suivant que D est C^∞, formelle ou bien analytique. Enfin une distribution D sera dite *linéarisable* si D est conjuguée à une distribution engendrée par des champs linéaires.

0.2. *Enoncé du problème et des principaux résultats.*

Lorsque $D \subset F_n$ est une distribution involutive non singulière ($\dim D(0) = g_{A_n}(D)$) le théorème de Frobénius classique donne un modèle explicite pour D : D est conjuguée à la distribution D' engendrée par les champs $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_p}$ où $p = \dim D(0)$.

Le problème que nous nous posons est le suivant : a-t-on dans le cas singulier un théorème de Frobénius ? Cette question n'a de sens que si l'on précise ce que l'on attend d'un théorème de Frobénius singulier. Du théorème classique se dégagent essentiellement trois interprétations :

1) Il existe un système de générateurs $X_1, \ldots, X_p$ de D qui engendrent une *algèbre de Lie de dimension finie.* Dit autrement, le morphisme d'algèbre de Lie $j^0 : D \longrightarrow D(0)$ qui a un élément X de D associe sa valeur en 0 possède une section $s : D(0) \longrightarrow D$, $j^0 \circ s = id_{D(0)}$; le feuilletage associé à D est alors défini par l'action d'un groupe de Lie.

2) D est conjuguée à la distribution constante D_0 définie par $D_0(x) = D(0)$; cette deuxième interprétation s'exprimant en terme de *détermination finie* : il existe un entier k (ici 0) tel que $j^k D$ détermine D.

3) D possède $n-p$ *intégrales premières* indépendantes. Dans le cas singulier nous appellerons théorème de Frobénius un résultat de l'un de ces trois types. En ce qui concerne l'optique 3) nous renvoyons le lecteur aux travaux de S. Guelorget [3], R. Moussu [7] et B. Malgrange [6] ; leurs résultats sont énoncés en termes de formes intégrables, mais ils peuvent se transcrire en termes de distributions involutives. Dans ce travail nous nous sommes attachés à répondre (partiellement...) au problème dans les optiques 1) et 2). Dans le chapitre 1, nous montrons qu'il est possible de séparer, dans une distribution involutive, les éléments singuliers des éléments non singuliers, en ce sens :

THEOREME. – *Soit* $D \subset F_n$ *une distribution involutive telle que* $\dim D(0) = p$ *et* $g_{A_n}(D) = p + q$. *Alors* D *est conjuguée à une distribution involutive* D′ *engendrée par des champs du type suivant :*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, X_p = \frac{\partial}{\partial x_p}$$

$$X_{p+1} = \sum_{j \geq p+1} a_j^{p+1}(x_{p+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$X_{p+q} = \sum_{j \geq p+1} a_j^{p+q}(x_{p+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les a_j^{p+h} *sont éléments de* A_{n-p}.

Ainsi D est la trivialisation d'une distribution D′ (celle engendrée sur A_{n-p} par les $X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}$) qui elle est purement singulière i.e. $D'(0) = 0$. Dans les chapitres suivants on suppose donc $D(0) = 0$: sous cette condition on peut alors remarquer que $j^1 D = \{j^1 X, X \in D\}$ est une algèbre de Lie, donc engendrant une distribution involutive, à laquelle on cherche à comparer D. Suivant que $j^1 D$ est semi-simple ou non on aborde le problème de deux façons différentes. En formel ou en analytique, lorsque $j^1 D$ est semi-simple nous obtenons, sans conditions aucunes, une section au morphisme $j^1 : D \longrightarrow j^1 D$ (ceci étant bien dans l'optique 1) et de plus D est linéarisable (optique 2). Nous montrons en fait plus : quel que soit la nature de $j^1 D$, D possède une "décomposition de Lévi" relevant la décomposition de $j^1 D = \text{Radical} \oplus \text{semi-simple}$. Ceci fait l'objet du chapitre 2. Lorsque $j^1 D$ n'est pas semi-simple (chapitre 3) nous sommes amenés à définir les conditions de semi-régularité et de régularité qui sont une généralisation des "conditions de linéarisation de Poincaré" pour un champ de vecteurs. Les premières permettent dans certains cas de trouver une section au morphisme $j^1 : \mathrm{D} \longrightarrow j^1\mathrm{D}$ pour les distributions formelles (chapitre 4). Les secondes quand à elles permettent d'obtenir la linéarisation formelle. Notamment nous avons le résultat suivant :

THEOREME. – *Soit* $\mathrm{D} \subset \widetilde{\mathfrak{X}_0(n)}$ *une distribution involutive formelle. Supposons que* $\mathrm{D}(0) = 0$, *que* $g_{\widetilde{\mathcal{E}}_n}(\mathrm{D}) = \dim j^1\mathrm{D}$ *et qu'il existe un élément* A *de* $j^1\mathrm{D}$ *dont les valeurs propres sont* **Z** *indépendantes. Alors* D *est linéarisable.*

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des distributions involutives C^∞ pour lesquelles il faut prendre plus de précautions ; pour obtenir la linéarisation, l'existence dans $j^1\mathrm{D}$ d'un élément contractant nous a été le plus souvent nécessaire.

Dans le chapitre 6 nous faisons une étude assez complète du cas où $\dim j^1\mathrm{D} = 2$, cas où l'on peut restreindre les hypothèses pour obtenir la linéarisation C^∞ et envisager d'autres résultats : détermination finie d'ordre supérieur à 1 et une curieuse analogie linéarisation-intégrale première en présence de résonances.

Moyennant des "conditions aux petits dénominateurs" on obtient dans le chapitre 7 la linéarisation des distributions involutives analytiques.

Des différents théorèmes de linéarisation on déduit dans le chapitre 8 une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution involutive soit linéarisable, condition valable aussi bien en formel qu'en classe C^∞ ou analytique (mais certainement la plupart du temps invérifiable. . .) : une distribution involutive $\mathrm{D} \subset \mathrm{F}_n$, $\mathrm{D}(0) = 0$, $\dim j^1\mathrm{D} = g_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{D})$ est linéarisable si et seulement si il existe un champ $\mathrm{X} \in \mathrm{F}_n$, X ayant pour partie linéaire le champ radial $\Sigma\, x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, tel que $[\mathrm{X}, \mathrm{D}] \subset \mathrm{D}$. Un critère analogue est d'ailleurs bien connu pour linéariser les algèbres de Lie de champs de vecteurs de dimension finie (c.f. [4]).

1. Séparation des parties singulières des parties non singulières.

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème de trivialisation que nous rappelons :

THEOREME 1.1. – *Soit* $D \subset F_n$ *une distribution involutive telle que* $\dim D(0) = p$ *et* $g_{A_n}(D) = p + q$. *Alors* D *est conjuguée à une distribution involutive* D′ *engendrée par les champs de vecteurs :*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_p = \frac{\partial}{\partial x_p}$$

$$X_{p+1} = \sum_{j \geqslant p+1} a_j^{p+1}(x_{p+1}, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

$$\vdots$$

$$X_{p+q} = \sum_{j \geqslant p+1} a_j^{p+q}(x_{p+1}, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où les a_j^{p+k} *sont des éléments de* A_{n-p}.

Démonstration. – Elle se fait par récurrence sur p.

a) $p = 1$. Choisissons des générateurs $X, X_1, \dots, X_q$ de D et des coordonnées $x_1 \dots x_n$ dans lesquelles on ait :

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad X_k = \sum_{j \geqslant 2} a_j^k(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_j^k \in A_n, \; a_j^k(0) = 0, \quad k = 1 \dots q.$$

Puisque D est involutive il existe des $\alpha_j^k \in A_n$ tels que :

$$[X, X_k] = \sum_{j=1}^{q} \alpha_k^j . X_j .$$

Pour prouver 1.1 il est suffisant de trouver des champs $\overline{X}_k$; $k = 1 \dots q$:

$$\overline{X}_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_k^j . X_j, \quad \beta_k^j \in A_n, \quad \beta_k^j(0) = \delta_k^j$$

de sorte que l'on ait $[X, \overline{X}_k] = 0$. (δ_k^j désigne le symbole de Kroenecker).

Nous devons donc résoudre en β_k^j le système de q équations :

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial \beta_k^j}{\partial x_1} . X_j + \sum_{j=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{q} \beta_k^j . \alpha_j^\ell . X_\ell = 0, \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Il est clair que la solution β_k^j du système de q^2 équations :

$$\frac{\partial \beta_k^j}{\partial x_1} + \sum_{\ell=1}^{q} \beta_k^\ell . \alpha_\ell^j = 0 \quad , \quad j = 1 \dots q, \; k = 1 \dots q$$

avec condition initiale $\beta_k^j(0) = \delta_k^j$ convient.

b) *récurrence* : On suppose le résultat démontré pour les distributions $D' \subset F_m$, $p-1 \leqslant m \leqslant n$, satisfaisant à $\dim D'(0) = p-1$ et $g_{A_m}(D') = p+q-1$. Soit $D \subset F_n$ vérifiant $\dim D(0) = p$ et $g_{A_n}(D) = p+q$. Choisissons des générateurs $X'_1, \ldots, X'_p$, $X'_{p+1}, \ldots, X'_{p+q}$ de D tels que $X'_j(0) \neq 0$ pour $j = 1, \ldots, p$ et $X'_k(0) = 0$ pour $k = p+1, \ldots, p+q$. Il est clair que l'on peut trouver un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ tel que l'on ait : $X'_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $X'_j(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j = 2 \ldots p$.

On peut alors supposer que les générateurs $X_1, \ldots, X_{p+q}$ s'écrivent :

$$X'_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$X'_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j \geqslant p+1} a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\vdots$$

$$X'_p = \frac{\partial}{\partial x_p} + \sum_{j \geqslant p+1} a_j^p \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$X'_{p+1} = \sum_{j \geqslant p+1} a_j^{p+1} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\vdots$$

$$X'_{p+q} = \sum_{j \geqslant p+1} a_j^{p+q} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{avec} \quad a_j^k \in A_n, \quad a_j^k(0) = 0 .$$

La distribution D' engendrée par les champs $X'_2, \ldots, X'_{p+q}$ est involutive et satisfait l'hypothèse de récurrence : $\dim D'(0) = p-1$, $g_{A_n}(D') = p+q-1$. Il existe donc un système de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ dans lequel D' est engendré par les champs de vecteurs :

$$Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$\vdots$$

$$Y_p = \frac{\partial}{\partial y_{p-1}}$$

$$Y_{p+1} = \sum_{j \geqslant p} \alpha_j^{p+1} (y_p, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$\vdots$$

$$Y_{p+q} = \sum_{j \geqslant p} \alpha_j^{p+q} (y_p, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad \alpha_j^k \in A_{n-p+1} .$$

Pour engendrer D (dans le système de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$) il faut ajouter à $Y_2, \ldots, Y_{p+q}$ un certain champ Y_1. On peut modifier les coordonnées $y_p, \ldots, y_n$ de sorte que l'on ait : $Y_1(0) = \dfrac{\partial}{\partial y_p}$, ceci ne perturbant pas la forme des générateurs de D'. Il est alors clair que l'on peut choisir Y_1 du type :

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_p} + \sum_{j \geqslant p+1} \alpha_j(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_j} \quad , \quad \alpha_j \in A_n .$$

Le crochet $[Y_2, Y_1]$ s'exprime alors uniquement sur les champs $Y_1, Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q}$, ie :

$$[Y_2, Y_1] = \lambda_1 Y_1 + \lambda_{p+1} Y_{p+1} + \cdots + \lambda_{p+q} Y_{p+q}$$

où les λ_j sont des éléments de A_n. Soit $(a_1, a_{p+1}, \ldots, a_n)$ la solution du système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 \quad &+ \frac{\partial a_1}{\partial y_1} = 0 \\ \lambda_{p+1} a_1 &+ \frac{\partial a_{p+1}}{\partial y_1} = 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{p+q} a_1 &+ \frac{\partial a_{p+q}}{\partial y_1} = 0 \end{aligned}$$

avec condition initiale $(1, 0 \ldots 0)$ et soit $\overline{Y}_1$ le champ

$$\overline{Y}_1 = a_1 . Y_1 + \sum_{j=p+1}^{p+q} a_j . Y_j$$

le champ $\overline{Y}_1$, qui vérifie $[\overline{Y}_1, Y_2] = 0$ s'écrit donc :

$$\overline{Y}_1 = \sum_{j=p}^{n} \alpha_j(y_2, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad \alpha_j \in A_{n-1} .$$

D'autre part $\overline{Y}_1, Y_2, \ldots, Y_{p+q}$ engendrent D.

Considérons maintenant la distribution involutive $D'' \subset F_{n-1}$ engendrée par les champs $Y_3, \ldots, Y_p$, $Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q}$ et $\overline{Y}_1$; nous avons $\dim D''(0) = p - 1$ et $g_{A_{n-1}}(D'') = p + q - 1$. En appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence, cette fois à D'', on trouve des coordonnées $z_2, \ldots, z_n$ de $\mathbf{R}^{n-1}$ dans lesquelles D'' est engendrée par :

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{\partial}{\partial z_2} \\
&\ \vdots \\
Z_p &= \frac{\partial}{\partial z_p} \\
Z_{p+1} &= \sum_{j \geqslant p+1} \beta_{p+1,j}(z_{p+1}, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j} \\
&\ \vdots \\
Z_{p+q} &= \sum_{j \geqslant p+1} \beta_{p+q,j}(z_{p+1}, \ldots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j} .
\end{aligned}
$$

Il suffit maintenant de remarquer que dans le système de coordonnées $y_1, z_2, \ldots, z_n$ D est engendrée par $Y_2, Z_2, \ldots, Z_{p+q}$.

q.e.d.

2. Décomposition de Lévi des distributions involutives formelles et analytiques. Linéarisation des distributions semi-simples.

Dorénavant toutes les distributions considérées s'annulent en 0. Nous désignons par $j^k D = \{j^k X, X \in D\}$ l'ensemble des k-jets d'éléments de D. Puisque $D(0) = 0$, on peut munir $j^k D$ d'une structure d'algèbre de Lie $[\ ,\ ]_k$ définie par :

$$[j^k X, j^k Y]_k = j^k [X, Y] .$$

Les applications jets :

$$j^k : D \longrightarrow j^k D$$

et

$$
\begin{aligned}
j^k_\ell : j^\ell D &\longrightarrow j^k D \qquad , \quad k \leqslant \ell \\
j^\ell X &\longrightarrow j^k j^\ell X = j^k X
\end{aligned}
$$

sont alors des morphismes d'algèbre de Lie surjectifs.

Notons que $[\ ,\ ]_1$ est le crochet usuel puisque $j^1[X,Y] = [j^1X, j^1Y]$. Soit R_D le radical de D : $R_D = \{X \in D, j^1 X \in R_1\}$ où R_1 est le radical de $j^1 D$.

Definition. — Une sous-alèbre de Lévi de D est une sous-algèbre de *dimension finie* (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) supplémentaire de R_D dans D pour la structure d'espace vectoriel de D. (Pour les définitions usuelles cf. N. Bourbaki-algèbres de Lie).

THEOREME 2.1. – *Soit* D *une distribution involutive formelle (resp. analytique) vérifiant* $D(0) = 0$; D *possède une sous-algèbre de Lévi* S. *De plus* S *est linéarisable, i.e. il existe un difféomorphisme* ϕ *formel (resp. analytique) tel que* $\phi_* S = j^1 S$ *et* $j^1 S$ *est une sous-algèbre de Lévi de* $j^1 D$.

Démonstration. – Soit $j^1 D = R_1 \oplus S_1$ une décomposition de Lévi de $j^1 D$ et soit R_k le radical de $j^k D$. Il est clair que $(j_k^1)^{-1}(R_1)$ est résoluble, donc $(j_k^1)^{-1} R_1 \subset R_k$. Si S_k est une sous-algèbre de Lévi de $j^k D$, comme j_k^1 est surjectif, $j_k^1(S_k)$ est une sous-algèbre de Lévi de $j^1 D$. Il en résulte que $j^k D = (j_k^1)^{-1}(R_1) + S_k$ et ainsi $R_k = (j_k^1)^{-1}(R_1)$.

De même $R_k = (j_k^\ell)^{-1}(R_\ell)$ pour $\ell \leqslant k$.

On obtient donc : $j^k D = (j_k^1)^{-1} R_1 \oplus S_k$.

Comme $\operatorname{Ker} j_k^1 \cap S_k = \{0\}$, S_k et S_1 ont la même dimension. Supposons que l'on ait construit des sous-algèbres de Lévi S_ℓ de $j^\ell D$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$ vérifiant la propriété suivante :

$$j_\ell^m S_\ell = S_m \quad \text{pour tout } m \quad 1 \leqslant m \leqslant \ell \quad \text{et tout} \quad \ell \leqslant k-1 .$$

Nous allons construire S_k vérifiant la même propriété.

Soit S_k' une sous-algèbre de Lévi de $j^k D$: comme $j_k^{k-1} : j^k D \longrightarrow j^{k-1} D$ est surjectif, $j^{k-1}(S_k')$ est une sous-algèbre de Lévi de $j^{k-1} D$. Il existe donc un élément X_{k-1} de R_{k-1} tel que $e^{ad\, X_{k-1}}\, j_k^{k-1}(S_k') = S_{k-1}$.

Soit X_k un élément de R_k tel que $j_k^{k-1} X_k = X_{k-1}$; $S_k = e^{ad\, X_k} S_k'$ est une sous-algèbre de Lévi de $j^k D$ et de plus :

$$j_k^{k-1}(S_k) = e^{ad\, j_k^{k-1} X_k}\, j_k^{k-1}(S_k') = S_{k-1} .$$

Nous avons bien $j_k^m S_k = S_m$ pour $m \leqslant k$.

Soit maintenant $S = \{X \in D , j^k X \in S_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ où les S_k sont construites par récurrence de façon que $j_\ell^m S_\ell = S_m$ $m . \leqslant \ell$.

Nous avons clairement $D = R_D \oplus S$; de plus S est une algèbre de Lie semi-simple isomorphe à $j^1 S = S_1$.

D'après [5] et [2] S est linéarisable ; ce qui achève la démonstration.

Le théorème suivant se déduit facilement du précédent :

THEOREME 2.2. – *Soit* D *une distribution involutive formelle ou analytique,* $D(0) = 0$, *telle que* $j^1 D$ *soit semi-simple ; le morphisme* $j^1 : D \longrightarrow j^1 D$ *possède une section. Si de plus* $g_{A_n} D = \dim j^1 D$, D *est linéarisable.*

3. Distributions involutives semi-régulières. Distributions involutives régulières.

Nous définissons des conditions de "non résonances" du type "conditions de Poincaré" qui permettront notamment la linéarisation formelle des distributions involutives. Nous avons cru utile pour familiariser le lecteur d'expliciter ces conditions dans les cas particuliers les plus significatifs.

Donnons-nous une distribution involutive D s'annulant en 0 et choisissons une base $A_1, \ldots, A_p$ de $j^1 D$; dénotons par $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre de A_1 et par Λ la matrice $p-1 \times p-1$: $\Lambda = (\lambda_j^k)_{j=2\ldots p}^{k=2\ldots p}$, où les λ_j^k sont les constantes de structures définies par :

$$[A_1, A_j] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k . A_k .$$

Soit $\mathfrak{M}(p-1)$ l'espace des matrices carrées complexes $p-1 \times p-1$ et $Id_{p-1} \in \mathfrak{M}(p-1)$ la matrice identité. Si $i \in N^n$ est un multi-indice nous considérons sur $\mathfrak{M}(p-1)$ les opérateurs linéaires π_i et Λ_i définis de la façon suivante :

$$\pi_i(M) = (\langle \lambda, i \rangle . Id_{p-1} - \Lambda) . M$$
$$\Lambda_i(M) = \pi_i . M + M . \Lambda \quad , \quad M \in \mathfrak{M}(p-1) .$$

DEFINITION 3.1. – Nous dirons qu'une distribution involutive formelle $\widetilde{D}$ est *semi-régulière* si les conditions suivantes sont remplies :

1) $\widetilde{D}(0) = 0$ et $\dim j^1 \widetilde{D} = g_{\widetilde{\mathcal{E}}_n}(\widetilde{D}) = p$,

2) il existe une base $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $j^1 \widetilde{D}$ telle que l'on ait :

a) les valeurs propres de A_1 sont non nulles et A_1 est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

b) les opérateurs π_i et Λ_i (associés à $A_1, \ldots, A_p$) sont inversibles pour tout multi-indice $i \in \mathbf{N}^n$ de longueur $|i| \geqslant 1$.

Remarquons que la condition b) est invariante par changement de base du type $A_1, A_2, \ldots, A_p \longrightarrow A_1, A'_2, \ldots, A'_p$, et ne dépend donc que du choix de A_1 ; nous dirons donc indifféremment que les conditions de semi-régularité sont portées par A_1 ou la base $A_1, A_2, \ldots, A_p$ (étant entendu que A_1 a un rôle privilégié).

DEFINITION 3.2. – Une distribution involutive formelle $\widetilde{D}$ est *régulière* si $\widetilde{D}$ est *semi-régulière* et s'il existe $A_1 \in j^1 D$ portant les conditions de régularité et vérifiant de plus a) et b) :

a) A_1 est régulier, i.e. $\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j \neq 0$ pour tout multi-indice $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| \geqslant 2$ et tout entier $j = 1, 2, \ldots, n$.

b) les matrices $\pi_{i,j} = \pi_i - \lambda_j \, Id_{p-1}$ sont inversibles pour tout $i \in \mathbf{N}^n$, $|i| \geqslant 2$ et tout $j = 1, 2, \ldots, n$.

Notons que la remarque précédente est ici aussi valable.

Il nous arrivera de dire sans ambiguïté possible que $j^1 \widetilde{D}$ ou toute autre algèbre de Lie d'endomorphismes linéaires est semi-régulière ou bien régulière.

En tenant compte de la remarque précédant 3.2 on peut trianguler l'opérateur $ad_{A_1} : j^1 D \longrightarrow j^1 D$, i.e. la matrice Λ, ceci quitte à complexifier $j^1 D$, et rendre plus agréable les conditions précédentes. Pour les vérifier il suffit de s'assurer de la non nullité des expressions :

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j^j \qquad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 1 \ , \ j = 2 \ldots p,$$

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j^j + \lambda_k^k \qquad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 1 \ , \ j = 2 \ldots p, \ k = 2 \ldots p,$$

pour la semi-régularité et la non nullité de :

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j \qquad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 2 \ , \ j = 1 \ldots n,$$

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j - \lambda_k^k \qquad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 2 \ , \ j = 1 \ldots n, \ k = 2 \ldots p,$$

ajoutées aux précédentes pour la régularité (où λ_k^k sont les termes diagonaux de la matrice Λ une fois triangulée). Mais comme les λ_k^k apparaissent comme la différence de 2 valeurs propres de A_1 nous pouvons énoncer la :

PROPOSITION 3.3. – *Soit* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *une distribution involutive formelle vérifiant* $\widetilde{\mathrm{D}}(0) = 0$ *et* $\dim j^1\widetilde{\mathrm{D}} = g_{\widetilde{\mathscr{E}}_n}(\widetilde{\mathrm{D}})$. *S'il existe un élément* $\mathrm{A}_1 \in j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ *de spectre* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *vérifiant*

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j - \lambda_\ell \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 3 \quad \forall j, \forall \ell$$

alors $\widetilde{\mathrm{D}}$ *est régulière.*

Le dépistage d'un élément A_1 satisfaisant 3.3. est relativement aisé lorsque $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ est résoluble. Nous avons en effet à notre disposition des formes linéaires poids $\lambda_j : j^1\widetilde{\mathrm{D}} \longrightarrow \mathbf{C}$, $j = 1 \ldots n$, qui à un élément A de $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ associent ses valeurs propres ; si ces formes satisfont :

$$\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j - \lambda_\ell \not\equiv 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}^n, |i| \geqslant 3, \forall j, \forall \ell$$

alors $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ est régulière (λ désignant cette fois l'application linéaire $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\langle \lambda, i \rangle = \Sigma \lambda_k \cdot i_k$).

Comme nous le voyons, suivant la nature de $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ les conditions de semi-régularité se simplifient plus ou moins. Mentionnons tout de même pour mémoire le cas particulier suivant :

PROPOSITION 3.4. – *Soit* $\widetilde{\mathrm{D}} \subset \widetilde{\mathscr{X}_0(n)}$ *une distribution involutive vérifiant* $\widetilde{\mathrm{D}}(0) = 0$, $\dim j^1\widetilde{\mathrm{D}} = g_{\widetilde{\mathscr{E}}_n}(\widetilde{\mathrm{D}})$. *Supposons que* $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ *possède un centre* $\mathscr{C}$ *contenant un élément* A *régulier (i.e.* $\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j \neq 0$ $\forall i, |i| \geqslant 2, \forall j = 1 \ldots n$, λ *spectre de* A*). Alors* D *est régulière.*

Enfin remarquons que si le radical R de $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ est semi-régulier (respect. régulier) $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ est semi-régulière (respect. régulière).

4. Problèmes formels.
La linéarisation des distributions involutives régulières.

La linéarisation des distributions formelles régulières repose sur le lemme suivant :

LEMME 4.1. – *Soit* $\widetilde{\mathrm{D}} \subset \widetilde{\mathscr{X}_0(n)}$ *une distribution involutive formelle semi-régulière : il existe des générateurs* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ *de* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *tels que :*

$$[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j \cdot \mathrm{X}_j$$

où les λ_k^j *sont des nombres réels (ou complexes si* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *est complexe).*

Démonstration. – Soient $A_1, \ldots, A_p$ une base de $j^1 \widetilde{D}$ portant les conditions de semi-régularité et $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p$ des éléments de $\widetilde{D}$ tels que $j^1 \overline{X}_j = A_j$. Il est clair que les $\overline{X}_j$ engendrent $\widetilde{D}$. Soient enfin suivant les notations de 3.1., λ_j^k tels que $[A_1, A_j] = \sum_{k=1}^{p} \lambda_j^k A_k$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le spectre de A_1. Un calcul simple montre qu'il suffit de prouver le résultat pour les distributions complexes, la complexification et le retour en réel ne présente en effet pas de difficultés (cf. [11]. Ceci permet de choisir des coordonnées dans lesquelles A_1 s'écrit $\Sigma \lambda_j z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$.

Puisque $\widetilde{D}$ est involutive, il existe des séries formelles f_j^k telles que l'on ait :

$$[\overline{X}_1, \overline{X}_j] = \Sigma f_j^k . \overline{X}_k \qquad j = 2, \ldots, p \tag{0}$$

avec $f_j^k(0) = \lambda_j^k$.

Nous cherchons à modifier $\overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p$ en $X_2, \ldots, X_p$:

$$X_k = \overline{X}_k + \sum_{j=1}^{p} \alpha_k^j . \overline{X}_j \quad , \quad k = 2, \ldots, p\,,$$

où les α_k^j sont des séries formelles sans termes constants à déterminer de sorte que l'on ait précisément :

$$[X_1, X_k] = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k^\ell X_\ell \qquad k = 2, \ldots, p \tag{1}$$

avec $X_1 = \overline{X}_1$.

En tenant compte de (0), l'équation (1) s'écrit :

$$\sum_{\ell=1}^{p} \left[f_k^\ell + \sum_{j=2}^{p} \alpha_k^j . f_j^\ell + X_1(\alpha_k^\ell) \right] \overline{X}_\ell = \sum_{\ell=1}^{p} \left(\lambda_k^\ell + \sum_{j=2}^{p} \lambda_k^j \alpha_j^\ell \right) . \overline{X}_\ell .$$

Pour résoudre l'équation précédente on étudie le système (2) suivant :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} X_1(\alpha_k^\ell) + f_k^\ell + \displaystyle\sum_{j=2} (\alpha_k^j f_j^\ell - \lambda_k^j \alpha_j^\ell) - \lambda_k^\ell = 0 \\ \qquad \ell = 1, \ldots, p, \quad k = 2, \ldots, p . \end{array} \right.$$

Si f est une série formelle nous écrirons : $f = \Sigma_i f . z^i$.

Moyennant cette écriture le système (2) se traduit dans le système infini :

$$(3,\mathrm{i})\quad \left\{\begin{array}{l} \langle\lambda , i\rangle \, . \, {}_i\alpha_k^\ell + \sum\limits_{j=2}^{p} ({}_i\alpha_k^j \, . \, \lambda_j^\ell - {}_i\alpha_j^\ell \, . \, \lambda_k^j) \\ \qquad + {}_i\left[(\mathrm{X}_1 - \mathrm{A}_1)\,(\alpha_k^\ell + f_k^\ell + \sum\limits_{j=2}^{p} (f_j^\ell - \lambda_j^\ell) \, . \, \alpha_k^j)\right] = 0 \\ \qquad \ell = 1, \ldots , p , \quad k = 2, \ldots , p \end{array}\right.$$

où i décrit $\mathbf{N}^n$, $|i| \geqslant 1$.

En introduisant les notations π_i et Λ_i de 3.1., le système (3,i) s'écrit :

$$\pi_i \, . \begin{bmatrix} {}_i\alpha_2^1 \\ \vdots \\ {}_i\alpha_p^1 \end{bmatrix}$$

$$+ \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \sum\limits_{j=2}^{p} {}_i\alpha_k^j \, . \, \lambda_j^1 + {}_i\left[(\mathrm{X}_1 - \mathrm{A}_1)\,(\alpha_k^1) + f_k^1 + \sum\limits_{j=2}^{p} (f_j^1 - \lambda_j^1) \, . \, \alpha_k^j\right] \\ \vdots \end{array}\right] = 0$$

$$\Lambda_i \, . \begin{bmatrix} {}_i\alpha_2^2 & \cdots\cdots & {}_i\alpha_2^p \\ \vdots & & \vdots \\ {}_i\alpha_p^2 & \cdots\cdots & {}_i\alpha_p^p \end{bmatrix}$$

$$+ \left[\ldots , {}_i\left\{(\mathrm{X}_1 - \mathrm{A}_1)\,(\alpha_k^\ell) + f_k^\ell + \sum_{j=2}^{p} (f_j^\ell - \lambda_j^\ell) \, . \, \alpha_k^j \right\} \ldots \right] = 0 \, .$$

Remarquons alors que dans les parenthèses ${}_i\{\ldots\}$ les multi-indices m des coefficients ${}_m\alpha_k^\ell$ qui apparaissent sont de longueur $|m| < i$. Comme les opérateurs Λ_i sont surjectifs on peut d'abord trouver les ${}_i\alpha_k^\ell$, $k = 2, \ldots , p$, $\ell = 2, \ldots , p$ par récurrence sur $|i|$ et ensuite, en tenant compte de la surjectivité de π_i calculer les ${}_i\alpha_k^1$.

q.e.d.

Une première conséquence du lemme 4.1., qui rentre dans l'optique 1, est énoncée ci-dessous :

COROLLAIRE 4.2. — *Soit* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *une distribution involutive formelle telle que* $j^1\widetilde{\mathrm{D}} = g_{\widetilde{\mathcal{E}}_n}\widetilde{\mathrm{D}}$ *et telle que* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *soit libre sur* $\widetilde{\mathcal{E}}_n$. *Supposons que* $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ *possède un centre semi-régulier* $\mathcal{C}$. *Le morphisme*

$j^1 : \widetilde{\mathrm{D}} \longrightarrow j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ *qui à un élément de* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *associe sa partie linéaire possède alors une section.*

Démonstration. – Soit $A_1, A_2, \ldots, A_p$ une base de $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$, l'élément A_1 de $\mathcal{C}$ portant les conditions de semi-régularités :

$$\langle \lambda , i \rangle \neq 0 \qquad \forall i \in \mathbf{N}^n ,\ |i| \geqslant 1 , \quad \lambda \text{ spectre de } A_1 .$$

D'après le lemme 4.1. on peut trouver des générateurs $X_1, \ldots, X_p$ de $\widetilde{\mathrm{D}}$ vérifiant :

$$j^1 X_j = A_j \quad , \quad j = 1, \ldots, p$$
$$[X_1 , X_j] = 0 \quad , \quad j = 2, \ldots, p .$$

Soient $f_{jk}^{\ell} \in \widetilde{\mathcal{E}}_n$ satisfaisant :

$$[X_j , X_k] = \sum_{\ell} f_{jk}^{\ell} X_{\ell} .$$

Il résulte de l'identité de Jacobi que :

$$0 = [X_1 , [X_j , X_k]] = \sum_{\ell} X_1(f_{jk}^{\ell}) X_{\ell}$$

et puisque le module $\widetilde{\mathrm{D}}$ est libre nous avons :

$$X_1(f_{jk}^{\ell}) = 0 \qquad \forall j , k , \ell .$$

Mais le champ X_1 ne peut avoir d'autres intégrales premières que les constantes puisque $\langle \lambda , i \rangle \neq 0\ \forall i , |i| \geqslant 1$, et donc les f_{jk}^{ℓ} sont des constantes.

q.e.d.

La deuxième conséquence de 4.1. est le théorème de linéarisation des distributions involutives régulières.

THEOREME 4.3. – *Soit* $\widetilde{\mathrm{D}} \subset \widetilde{\mathcal{X}_0(n)}$ *une distribution involutive formelle régulière ; alors* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *est linéarisable.*

Démonstration. – Soient $A_1, \ldots, A_p$ une base de $j^1\widetilde{\mathrm{D}}$ portant les conditions de régularité, avec $[A_1 , A_k] = \Sigma\, \lambda_k^j A_j$. En vertu de 4.1. on peut trouver des générateurs $X_1, \ldots, X_p$ de $\widetilde{\mathrm{D}}$ tels que :

$$[X_1 , X_k] = \Sigma\, \lambda_k^j X_j$$

et $j^1 X_k = A_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Le champ A_1 étant régulier on peut supposer, en faisant un changement de coordonnées convenables, que $X_1 = A_1$. Quitte à faire une complexification et un nouveau changement de coordonnées, cette fois linéaire, on peut mettre A_1 sous forme diagonale : $A_1 = \Sigma \lambda_j z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$.

L'égalité (1) conduit alors à :

$$[A_1, X_k - A_k] = \sum_{j=2}^{p} \lambda_k^j (X_j - A_j)$$

soit

$$[\langle \lambda, i \rangle - \lambda_\ell)\, {}_i\beta_k^\ell = \sum_{j=2}^{p} \lambda_k^j \cdot {}_i\beta_j^\ell \tag{2,i}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et où les ${}_i\beta_k^\ell$ proviennent de l'écriture :

$$X_k - A_k = \sum_{|i| \geqslant 2} \sum_{\ell} {}_i\beta_k^\ell \cdot z^i \frac{\partial}{\partial z_\ell}.$$

Mais (2,i) signifie précisément, avec les notations de 3.1., que :

$$\pi_{i,\ell} \cdot \begin{bmatrix} {}_i\beta_2^\ell \\ \vdots \\ {}_i\beta_p^\ell \end{bmatrix} = 0 .$$

Comme les $\pi_{i,\ell}$ sont inversibles, les ${}_i\beta_k^\ell$ sont nuls et donc $X_k = A_k$, $k = 2, \ldots, p$.

q.e.d.

5. Problèmes C^∞ ; linéarisation en classe C^∞.

DEFINITION 5.1. – Une distribution involutive $D \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$ est semi-régulière (resp.^{t} régulière) si, $\widetilde{D} \subset \widetilde{\mathfrak{X}_0(n)}$ désignant la distribution involutive formelle sous-jacente à D on a :

a) $\widetilde{D}$ est semi-régulière (resp.^{t} régulière).

b) $g_{\mathcal{E}n}(D) = g_{\widetilde{\mathcal{E}n}}(\widetilde{D}) = \dim j^1 \widetilde{D}$.

c) Si $A_1 \in j^1 D$ porte les conditions de semi-régularité A_1 est hyperbolique, i.e. n'a pas de valeur propre imaginaire pure.

Comme en formel la linéarisation nécessite un lemme préparatoire du type 4.1. :

LEMME 5.2. – *Si* $D \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$ *est semi-régulière, il existe des générateurs* $X_1, \ldots, X_p$ *de* D *tels que :*

$$[X_1, X_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j \cdot X_j$$

où les λ_k^j *sont des nombres réels.*

Moyennant ce lemme, le lecteur se convaincra aisément du résultat suivant, analogue à 4.2. :

COROLLAIRE 5.3. – *Soit* $D \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$ *une distribution involutive* C^∞ *vérifiant* $D(0) = 0$, $\dim j^1 D = g_{\mathcal{E}_n}(D)$ *et telle que* D *soit libre sur* $\mathcal{E}_n$. *Supposons que* $j^1 D$ *possède un centre* $\mathcal{C}$ *contenant un élément contractant ; le morphisme* $j^1 : D \longrightarrow j^1 D$ *possède alors une section.*

Démonstration de 5.2. – On suit la même démarche que dans le cas formel ; soient $A_1, \ldots, A_p$ des générateurs de $j^1 D$ portant les conditions de semi-régularité, avec :

$$[A_1, A_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j A_j \quad , \quad k = 2, \ldots, p$$

et A_1 hyperbolique ; on choisit alors des générateurs $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_p$ de D tels que $j^1 \overline{X}_k = A_k$, $k = 1, \ldots, p$. Puisque D est involutive, il existe des $f_k^j \in \mathcal{E}_n$ tels que l'on ait :

$$[\overline{X}_1, \overline{X}_k] = \sum_{j=1}^{p} f_k^j \cdot \overline{X}_j \quad , \quad k = 2, \ldots, p$$

avec $f_k^j(0) = \lambda_k^j$.

Comme dans 4.1., cherchons à modifier les $\overline{X}_k$ en X_k, $k = 2, \ldots, p$.

$$X_k = \overline{X}_k + \sum_{j=1}^{p} \alpha_k^j \overline{X}_j$$

avec $\alpha_k^j(0) = 0$, de sorte que l'on ait précisément :

$$[X_1, X_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j X_j \quad , \quad k = 2, \ldots, p \, , \quad X_1 = \overline{X}_1 \, . \qquad (1)$$

Une solution de (1) sera donnée par la résolution du système :

$$(2)\quad \begin{cases} X_1(\alpha_k^\ell) + f_k^\ell + \sum_{j=2}^{p} (\alpha_k^j \,.\, f_j^\ell - \lambda_k^j \,.\, \alpha_j^\ell) - \lambda_k^\ell = 0 \\ k = 2, \dots, p, \quad \ell = 1, \dots, p\,. \end{cases}$$

Soient $\widetilde{\alpha}_k^\ell$, $k = 2, \dots, p$, $\ell = 1, \dots, p$ une solution formelle du système (2) (Lemme 4.1.) et $\overline{\alpha}_k^\ell \in \mathcal{E}_n$ des prolongements de Borel de ces $\widetilde{\alpha}_k^\ell$.

Nous avons :

$$\begin{cases} X_1(\overline{\alpha}_k^\ell) + f_k^\ell + \sum_{j=2}^{p} (\overline{\alpha}_k^j \,.\, f_j^\ell) - \lambda_k^\ell = b_k^\ell \\ k = 2, \dots, p\,;\ \ell = 1, \dots, p \end{cases}$$

où les b_k^ℓ sont des germes de fonctions plates en 0.

Les α_k^ℓ sont recherchés sous la forme :

$$\alpha_k^\ell = \overline{\alpha}_k^\ell + h_k^\ell \quad , \quad k = 2, \dots, p \quad , \quad \ell = 1, \dots, p$$

où les h_k^ℓ sont des germes de fonctions plates en 0 à déterminer ; le système d'équations en h_k^ℓ s'écrit :

$$(3)\quad \begin{cases} X_1(h_k^\ell) + \sum_{j=2}^{p} (h_k^j \,.\, f_j^\ell - h_j^\ell \lambda_k^j) + b_k^\ell = 0 \\ \ell = 1, \dots, p, \quad k = 2, \dots, p\,. \end{cases}$$

Désignons par $\mathfrak{M}^\infty$ l'idéal de $\mathcal{E}_n$ des germes de fonctions plates en 0. Le système (3) est du type :

$$X_1(g) + \mu \,.\, g + b = 0 \tag{4}$$

où $g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$ sont des matrices colonnes à coefficients dans $\mathfrak{M}^\infty$, $\mu = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdot\,\cdot & \mu_{jk} & \\ & \vdots & \end{bmatrix}$ une matrice carrée $N \times N$ à coefficients dans $\mathcal{E}_n$ et $X_1(g)$ désigne la matrice colonne ayant pour coefficients les $X_1(g_k)$. Cette équation est à résoudre en g, b et μ étant donnés. Les équations du type (4) sont étudiées dans [1] et reprises dans [11] ; l'existence d'une solution g provient de l'hyperbolicité du champ X_1 qui fournit des majorations en exponentielle du flot de X_1.

THEOREME 5.4. – *Soit* $D \subset \chi_0(\mathbf{R}^n)$ *une distribution involutive régulière, les conditions de régularité portant sur les générateurs* $A_1, \ldots, A_p$ *de* $j^1 D$.

Si A_1 *est contractant* D *est* C^∞*-linéarisable.*

Démonstration. – D'après le lemme 5.2. on peut trouver des générateurs $X_1, \ldots, X_p$ de D, $j^1 X_j = A_j$, $j = 1, \ldots, p$, tels que :

$$[X_1, X_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j \cdot X_j \quad , \quad k = 2, \ldots, p . \tag{1}$$

Le champ A_1 étant hyperbolique et régulier on peut supposer (Théorème de linéarisation de Sternberg [8]) que $X_1 = A_1$. Nous savons (Théorème 4.3.) que les X_j sont formellement linéarisés, ie :

$$X_j = A_j + P_j \quad , \quad j = 2, \ldots, p \tag{2}$$

où les P_j sont des germes de champs plats à l'origine. Puisque $[A_1, A_k] = \Sigma \lambda_k^j \cdot A_j$, il résulte de (1) et (2) que :

$$[A_1, P_k] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j \cdot P_j . \tag{3}$$

Ecrivons $P_j = \sum_{\ell=1}^{n} P_j^\ell \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}$, P_j^ℓ fonctions plates en 0, et $A_1 = \sum_{\ell=1}^{n} A_1^\ell \dfrac{\partial}{\partial x_\ell}$, A_1^ℓ formes linéaires.

De (3) on déduit :

$$A_1(P_k^\ell) = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k^j \cdot P_j^\ell + \sum_{j=1}^{p} P_k^j \frac{\partial A_1^\ell}{\partial x_j}$$

$$k = 1, \ldots, p \quad , \quad \ell = 1, \ldots, n .$$

Ce système d'équation est du type suivant :

$$A_1(f) = B \cdot f \tag{4}$$

où f est une matrice colonne à coefficients f_k plats en 0 et B une matrice carrée à coefficients réels.

Plaçons-nous sur un voisinage V de l'origine où sont simultanément définis des représentants des f_k. Désignons par φ_t le flot de A_1 ; A_1 étant contractant on peut choisir V de sorte que si $x \in V$, $\varphi_t(x) \in V$ pour $t \geqslant 0$. L'équation (4) se traduit alors pour $x \in V$ et $t \geqslant 0$ par :

$$\frac{\partial f \circ \varphi_t(x)}{\partial t} = \mathrm{B} \, . \, f(\varphi_t(x)) \, . \tag{5}$$

Le long des orbites de A_1 on a : $f(\varphi_t(x)) = e^{t\mathrm{B}} \, . \, f(x)$, $x \in \mathrm{V}, t \geqslant 0$,

soit : $f(x) = e^{-t.\mathrm{B}} \, . \, f(\varphi_t(x))$.

On a donc la majoration : $\| f(x) \| \leqslant e^{t.\|\mathrm{B}\|} \, . \, \| f(\varphi_t(x)) \|$.

Puisque les f_k sont plats à l'origine, il existe des constantes C_m, $m \in \mathbf{N}$, telles que l'on ait pour $x \in \mathrm{V}$: $\| f(x) \| \leqslant C_m \, . \, \| x \|^m$.

En tenant compte du fait que A_1 est contractant i.e. : $\| \varphi_t(x) \| \leqslant e^{-ct} \, . \, \| x \|$ pour $x \in \mathrm{V}$ où c est une constante positive, on déduit l'estimation : $\| f(x) \| \leqslant C_m \, . \, e^{t(\|\mathrm{B}\| - m.c)} \| x \|^m$. En choisissant m assez grand on obtient la nullité de f.

q.e.d.

On peut légèrement restreindre les hypothèses de 5.4. dans le cas suivant :

THEOREME 5.5. – *Soit* $\mathrm{D} \subset \chi_0(\mathbf{R}^n)$ *une distribution involutive telle que* $\dim j^1 \mathrm{D} = g_{\mathcal{E}_n}(\mathrm{D}) = g_{\widetilde{\mathcal{E}}_n}(\widetilde{\mathrm{D}})$. *Supposons que* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *soit un* $\widetilde{\mathcal{E}}_n$*-module libre et que* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *soit formellement linéarisable. Alors* D *est* C^∞*-linéarisable dès que* $j^1 \mathrm{D}$ *contient un champ contractant.*

Démonstration. – Soient $A_1, \ldots, A_p$ des générateurs de $j^1\mathrm{D}$, A_1 contractant et $X_1, \ldots, X_p$ des générateurs de D, $j^1 X_j = A_j$. D'après l'hypothèse, on peut supposer que $X_1 = A_1$, $\widetilde{X}_2 = A_2, \ldots, \widetilde{X}_p = A_p$; les X_j s'écrivent donc : $X_j = A_j + P_j$ $j = 2, \ldots, p$, où les P_j sont des germes de champs plats en 0. Puisque D est involutive, il existe des germes f_k^j tels que l'on ait :

$$[A_1, X_k] = \sum_{j=1}^{p} f_k^j \, . \, X_j$$

et donc :

$$[A_1, A_k] = \sum_{j=1}^{p} \widetilde{f_k^j} \, . \, A_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_k^j \, . \, A_j \qquad \text{où} \qquad \lambda_k^j \mathrm{R} \, .$$

$\widetilde{\mathrm{D}}$ étant libre on a $\widetilde{f_k^j} = \lambda_k^j$.

A ce stade on peut obtenir le résultat de 5.2. i.e. trouver des générateurs $\overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p$ de D tels que $[A_1, \overline{X}_k] = \Sigma \, \lambda_k^j \, \overline{X}_j$; en effet les équations que l'on a à résoudre (équations (2) de 5.2.) sont ici du type équation (4) de 5.2.

Le même argument que dans 5.4. permet ensuite de conclure.

q.e.d.

6. Etude du cas dim j^1D = 2.

Lorsque dim $j^1\mathrm{D} = 2$, $j^1\mathrm{D}$ est l'une des deux algèbres de Lie :

$$g_{2,0} = \{e_1, e_2 ; [e_1, e_2] = 0\}$$
$$g_{2,1} = \{e_1, e_2 ; [e_1, e_2] = e_2\} .$$

Grâce au récent théorème de linéarisation des actions de $\mathbf{R}^2$ de Dumortier-Roussarie [1] nous avons le résultat suivant :

THEOREME 6.1. – *Soit* $\mathrm{D} \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^n)$ *une distribution involutive régulière. Supposons que* $j^1\mathrm{D} = g_{2,0}$ *et que l'action linéaire de* j^1D *soit hyperbolique. Alors* D *est* C^∞ *linéarisable.*

Rappelons que l'action linéaire provenant d'une algèbre de Lie g de champs linéaires commutants est hyperbolique s'il existe deux générateurs A et B de g vérifiant :

(i) A et B sont simultanément diagonalisables sur $\mathbf{C}$.

(ii) si λ_j et μ_j désignent les valeurs propres de A et B alors : $\dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda_j}{\mathrm{Re}\,\mu_j} \neq \dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda_k}{\mathrm{Re}\,\mu_k}$ pour les indices $j \neq k$ tels que $\lambda_j \neq \lambda_k$ et $\mu_j \neq \mu_k$.

(iii) si λ et μ sont des valeurs propres complexes, non réelles de A et B alors $\lambda \notin \mathbf{R}\mu$.

Démonstration de 6.1. – Compte tenu de 5.2. on peut trouver deux générateurs X et Y de D commutant, avec en outre j^1X régulier. Le théorème de Dumortier-Roussarie permet alors de conclure.

q.e.d.

Lorsque la dimension de l'espace ambiant est 2, l'hypothèse d'hyperbolicité implique à elle seule la régularité :

COROLLAIRE 6.2. – *Soit* $D \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^2)$ *une distribution involutive vérifiant* $g_{\mathscr{E}_2}(D) = 2$, $j^1 D \equiv g_{2,0}$ *hyperbolique. Alors* D *est* C^∞ *linéarisable.*

En dimension 3, l'hyperbolicité n'implique plus la régularité, mais la semi-régularité ajoutée à l'hyperbolicité permet de trouver des générateurs polynomiaux dans un système de coordonnées bien choisi ; plus précisément, nous avons le résultat suivant :

THEOREME 6.3. – *Soit* $D \subset \chi_0(\mathbf{R}^3)$ *une distribution involutive semi-régulière avec* $j^1 D$ *commutative de dimension* 2 ; *supposons que l'action linéaire de* $j^1 D$ *soit hyperbolique. Alors* D *est conjuguée à une distribution* D'_α *engendrée par les champs commutants* X *et* Y *suivants :*

$$X = A + \alpha x_2^p x_3^q \frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad \alpha \in \mathbf{R}\,, \ (p, q) \in \mathbf{N}^2$$
$$Y = B$$

où A *et* B *sont linéaires.*

La démonstration nécessite le lemme suivant :

LEMME. – *Sous les hypothèses de 6.3., si* A *et* B *sont des générateurs de* $j^1 D$, *de spectre* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *et* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ *il existe au plus un couple* $(i_0, j_0) \in \mathbf{N}^3 \times \{1, 2, 3\}$, $|i_0| \geq 2$, *tel que :*

$$\langle \lambda, i_0 \rangle - \lambda_{j_0} = \langle \mu, i_0 \rangle - \mu_{j_0} = 0\,.$$

Démonstration du lemme. – Remarquons qu'il suffit d'établir le résultat pour un couple (A, B) choisi, ce résultat sera alors vrai pour tous les autres couples de générateurs. On peut donc supposer, puisque D est semi-régulière, que l'on a :

$$\langle \lambda, i \rangle \neq 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}^3 \quad , \quad |i| \geq 1$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est le spectre de A.

Il en résulte que pour une relation du type $\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j = 0$, on a $i_j = 0\ (i = (i_1, i_2, i_3))$.

Supposons que A et B aient deux résonances communes du "même type" ie :

$$\begin{cases} \lambda_1 = i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3 \\ \mu_1 = i_2\mu_2 + i_3\mu_3 \end{cases} \quad , \quad i_2 + i_3 \geq 2$$

et

$$\begin{cases} \lambda_1 = j_2\lambda_2 + j_3\lambda_3 \\ \mu_1 = j_2\mu_2 + j_3\mu_3 \end{cases}, \quad j_2 + j_3 \geqslant 2, \quad (i_2, i_3) \neq (j_2, j_3).$$

On a alors les égalités :

$$(i_2 - j_2)\lambda_2 + (i_3 - j_3)\lambda_3 = 0$$
$$(i_2 - j_2)\mu_2 + (i_3 - j_3)\mu_3 = 0$$

égalités qui contredisent l'hyperbolicité de $j^1 D$.

Si A et B ont deux résonances de type différent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3 \\ \mu_1 = i_2\mu_2 + i_3\mu_3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_2 = j_1\lambda_1 + j_3\lambda_3 \\ \mu_2 = j_1\mu_1 + j_3\mu_3 \end{cases}$$

on tire alors :

$$\lambda_1(1 - i_2 j_1) = (j_1 j_3 + i_3)\lambda_3$$
$$\mu_1(1 - i_2 j_1) = (j_1 j_3 + i_3)\mu_3 .$$

Ici encore ces égalités sont en contradiction avec l'hyperbolicité de $j^1 D$.

q.e.d.

Démonstration de 6.3. – Soient A et B deux générateurs de $j^1 D$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ leurs spectres. Si A et B n'ont pas de résonance commune, le théorème 6.1 permet de conclure (avec $\alpha = 0$).

Sinon, supposons que l'unique résonance commune (lemme) soit :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 = p \,.\, \lambda_2 + q \,.\, \lambda_3 \\ \mu_1 = p \,.\, \mu_2 + q \,.\, \mu_3 \end{cases}, \quad (p, q) \in \mathbf{N}^2 \quad , \quad p + q \geqslant 2 .$$

Puisque A et B sont simultanément diagonalisables sur $\mathbf{C}$ on peut supposer que $\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j \neq 0$ pour $(i, j) \neq ((0, p, q), 1)$; en effet un champ $s \,.\, A + t \,.\, B \in j^1 D$ a pour spectre $s\lambda + t\mu$ et $\langle s\lambda + t\mu, i \rangle - (s\lambda + t\mu)_j = s(\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j) + t(\langle \mu, i \rangle - \mu_j)$.

Nous allons montrer que les λ_j sont réels ; tout d'abord il est clair que λ_1 et μ_1 sont réels (égalités (1) et hyperbolicité de $j^1 D$).

Supposons λ_2 et λ_3 complexes non réels ; nécessairement $\lambda_2 = \overline{\lambda}_3$, donc $p = q$ et :

$$\lambda_1 = 2 \,.\, p \operatorname{Re} \lambda_2 = 2p \,.\, \operatorname{Re} \lambda_3$$

$$\mu_1 = p(\mu_2 + \mu_3) \,.$$

L'égalité $[A, B] = 0$ implique alors $\operatorname{Re} \mu_2 = \operatorname{Re} \mu_3$ et donc $\mu_1 = 2 \,.\, p \,.\, \operatorname{Re} \mu_2 = 2p \operatorname{Re} \mu_3$; mais ceci contredit l'hyperbolicité de $j^1 D$.

On peut maintenant supposer que A et B sont diagonaux réels ; soit alors $X \in D$ tel que $j^1 X = A$: on sait [10] qu'il existe un germe de difféomorphisme $\phi : \mathbf{R}^3, 0 \longrightarrow \mathbf{R}^3, 0$, $j^1 \phi = id$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que : $\phi_* X = A + \alpha \,.\, x_2^p \,.\, x_3^q \dfrac{\partial}{\partial x_1}$.

D'autre part, d'après le lemme 5.2. on peut trouver un champ $Y \in D$, $j^1 Y = B$, tel que X et Y engendrent D et $[X, Y] = 0$. Si Y désigne le champ $\phi_* Y$ on a : $Y = B + Z$ où $Z \in \chi_0(R^3)$ vérifie $j^1 Z = 0$. Comme A et B sont diagonaux et vérifient

$$\langle \lambda, (0, p, q) \rangle - \lambda_1 = \langle \mu, (0, p, q) \rangle - \mu_1 = 0 \,,$$

nous avons : $\left[A + \alpha x_2^p x_3^q \dfrac{\partial}{\partial x_1}, B\right] = 0$

ce qui implique l'égalité :

$$\left[A + \alpha x_2^p x_3^q \frac{\partial}{\partial x_1}, Z\right] = 0 \,. \tag{2}$$

Nous allons montrer que Z s'écrit :

$$Z = \beta x_2^p x_3^q \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{où} \quad \beta \in \mathbf{R} \,.$$

1) *Etape formelle.*

Ecrivons $Z = \sum\limits_{\substack{m = 1,2,3 \\ i \in \mathbf{N}^3, |i| \geq 2}} Z_i^m x^i \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ le développement en série formelle de Z. L'égalité (2) s'écrit suivant (a), (b), (c) :

$$\text{(a)} \quad 0 = \sum_{\substack{i = (i_1, i_2, i_3) \\ |i| \geq 2}} (\langle \lambda, i \rangle - \lambda_1) \,.\, Z_i^1 \,.\, x^i$$

$$+ \alpha \,.\, i_1 Z_i^1 \,.\, x_1^{i_1 - 1} x_2^{i_2 + p} x_3^{i_3 + q} - \alpha p Z_i^2 x_1^{i_1} x_2^{i_2 + p - 1} x_3^{i_3 + q}$$

$$- \alpha q Z_i^3 x_1^{i_1} x_2^{i_2 + p} x_3^{i_3 + q - 1}$$

$$\text{(b)}\ 0 = \sum_{\substack{i=(i_1,i_2,i_3)\\ |i|\geq 2}} (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_2) . Z_i^2 x^i + \alpha i_1 Z_i^2 x_1^{i_1-1} x_2^{i_2+p} x_3^{i_3+q}$$

$$\text{(c)}\ 0 = \sum_{\substack{i=(i_1,i_2,i_3)\\ |i|\geq 2}} (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_3) . Z_i^3 x^i + \alpha i_2 Z_i^3 x_1^{i_1-1} x_2^{i_2+p} x_3^{i_3+q}$$

Les égalités (b) et (c) conduisent à (b′) et (c′)

$$\text{(b}'\text{)}\ 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_2)\, Z_i^2 + \alpha(i_1+1) . Z^2_{(i_1+1,i_2-p,i_3-q)}$$

$$(c')\ 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_3)\, Z_i^3 + \alpha(i_1+1) . Z^3_{(i_1+1,i_2-p,i_3-q)}$$

pour les indices $i = (i_1, i_2, i_3)$ tels que $i_2 - p \geqslant 0$ et $i_3 - q \geqslant 0$ et aux égalités

$$\text{(b}''\text{)}\ 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_2) . Z_i^2$$

$$\text{(c}''\text{)}\ 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_3) . Z_i^3$$

pour les indices $i = (i_1, i_2, i_3)$ tels que $i_2 - p < 0$ ou bien $i_3 - q < 0$.

Puisque les quantités $\langle \lambda , i\rangle - \lambda_2$ et $\langle \lambda , i\rangle - \lambda_3$ sont non nulles, on a d'après (b″) et (c″) :

$Z_i^2 = Z_i^3 = 0$ pour les indices $i = (i_1, i_2, i_3)$ tels que l'on ait soit $i_2 - p < 0$, soit $i_3 - q < 0$.

En reportant ce résultat dans (b′) (c′) on obtient :

$$Z_i^2 = Z_i^3 = 0$$

dès que $i_2 - p < p$ ou bien $i_3 - q < q$, et ainsi de suite :

$$Z_i^2 = Z_i^3 = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}^3 ,\ |i| \geqslant 2 .$$

L'égalité (a) s'écrit maintenant

$$\text{(a}'\text{)} : 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_1)\, Z_i^1 + \alpha(i_1+1)\, Z^1_{i_1+1,i_2-p,i_3-q}$$

pour les indices i tels que $i_2 - p \geqslant 0$ et $i_3 - q \geqslant 0$ et

$$\text{(a}''\text{)} : \qquad 0 = (\langle \lambda , i\rangle - \lambda_1)\, Z_i^1$$

pour les indices i tels que l'on ait soit $i_2 - p < 0$, soit $i_3 - q < 0$.

$\langle \lambda , i\rangle - \lambda_1$ ne s'annulant que pour le multi-indice $i = (0, p, q)$ on a d'après (a″) : $Z_i^1 = 0$

pour les indices i tels que $i_2 - p < 0$ ou bien $i_3 - q < 0$.

De (a') on tire alors : $Z_i^1 = 0$ pour $i \neq (0, p, q)$.

Seul donc $Z^1_{(0,p,q)}$ peut être non nul, ce qui achève la démonstration formelle.

2) *Etape* C^∞ :

a) Supposons d'abord que le champ A est contractant. D'après l'étape formelle le champ $\overline{Y} = \phi_* Y$ s'écrit :

$$\overline{Y} = B + \beta \, . \, x_2^p x_3^q \, \frac{\partial}{\partial x_1} + P$$

où P est un germe de champ plat en 0. Nous allons montrer que P est nul.

La condition $[X, Y] = 0$ et la résonance commune (1) impliquent l'égalité : $[\phi_* X, P] = 0$.

Choisissons une boule $B(0, \delta)$ où l'on peut définir un représentant P du germe P si $X = \phi_* X$ et $P = \sum_{j=1}^{3} P_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ on obtient les égalités :

$$X(P_1) - \lambda_1 \, . \, P_1 - p\alpha P_2 x_2^{p-1} x_3^q - q\alpha P_3 x_2^p x_3^{q-1} = 0 \qquad (1)$$

$$X(P_2) = \lambda_2 \, . \, P_2 \qquad (2)$$

$$X(P_3) = \lambda_3 \, . \, P_3 \, . \qquad (3)$$

Désignons par φ_t le flot de X ; puisque X est contractant si δ est suffisamment petit, on a pour x dans $B(0, \delta)$ et t positif : $\| \varphi_t(x) \| \leqslant e^{-ct} \, . \, \| x \|$ où c est une constante positive.

L'égalité (2) implique que : $P_2(\varphi_t(x)) = e^{\lambda_2 t} \, . \, P_2(x)$.

Puisque P_2 est plate en 0, pour tout entier k il existe une constante $c_k > 0$ telle que : $| P_2(x) | \leqslant C_k \| x \|^k$ pour $x \in B(0, \delta)$.

On obtient donc (pour tout t positif) :

$$| P_2(x) | = e^{-\lambda_2 t} \, . \, | P_2(\varphi_t(x)) | \leqslant C_k e^{-\lambda_2 t} \, . \, \| \varphi_t(x) \|^k \leqslant C_k e^{-(\lambda_2 + kc) t} \, . \, \| x \| \; .$$

En choisissant k assez grand $\lambda_2 + kc$ est positif et donc $P_2(x)$ est nul ; il en est de même pour P_3. L'égalité (1) s'écrit alors : $X(P_1) = \lambda_1 \, . \, P_1$, ce qui conduit à la nullité de P_1.

b) Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que l'on peut trouver dans $j^1 D$ un champ contractant $sA + tB$ n'ayant qu'une seule résonance.

Ecrivons : $\quad A = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \quad$ et $\quad B = \sum_{j=1}^{3} \mu_j x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Il nous faut trouver s et t tels que l'on ait les inégalités :

$$s\lambda_1 + t\mu_1 < 0$$
$$s\lambda_2 + t\mu_2 < 0$$
$$s\lambda_3 + t\mu_3 < 0$$

et l'implication :

$$\langle s\lambda + t\mu , i\rangle - (s\lambda_j + t\mu_j) = 0 \Longrightarrow i = (o , p , q) \text{ et } j = 1 .$$

En ce qui concerne l'implication, il suffit que l'on ait :

$$\frac{s}{t} \neq - \frac{\langle \mu , i\rangle - \mu_j}{\langle \lambda , i\rangle - \lambda_j} \quad \forall (i , j) \text{ tels que } \langle \lambda , i\rangle - \lambda_j \neq 0 ,$$

car pour les (i , j) tels que $\langle \lambda , i\rangle - \lambda_j = 0$ on a soit $\langle \mu , i\rangle - \mu_j \neq 0$, soit $i = (o , p , q)$ et $j = 1$.

L'hyperbolicité de $j^1 D$ assure que les droites du plan d'équations :

$$s\lambda_2 + t\mu_2 = 0$$
$$s\lambda_3 + t\mu_3 = 0$$

sont distinctes. De sorte que l'on peut trouver s et t vérifiant les inégalités :

$$s\lambda_2 + t\mu_2 < 0$$
$$s\lambda_3 + t\mu_3 < 0$$

et l'implication.

Les relations :

$$\lambda_1 = p\lambda_2 + q\lambda_3$$
$$\mu_1 = p\mu_2 + q\mu_3$$

conduisent alors à : $s\lambda_1 + t\mu_1 = p(s\lambda_2 + t\mu_2) + q(s\lambda_3 + t\mu_3) < 0$.

q.e.d.

Il reste le cas, en dimension 3 , où $j^1 D \equiv g_{2,0}$ est hyperbolique mais n'est pas semi-régulière, cas où il apparaît un phénomène assez curieux :

THEOREME 6.4. – *Soit* $D \subset \mathfrak{X}_0(\mathbf{R}^3)$ *une distribution involutive avec* $j^1 D \equiv g_{2,0}$ *hyperbolique mais non semi-régulière et* $g_{\mathcal{E}3}(D) = 2$. *Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) D *possède une intégrale première* C^∞ *non plate en* 0.

2) D *possède une intégrale première formelle.*

3) D *est* C^∞ *linéarisable.*

Démonstration. – Nous montrons $2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$, $1 \Longrightarrow 2$ étant trivial.

Soient A et B des générateurs de $j^1 D$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ leurs spectres respectifs ; puisque $j^1 D$ n'est pas semi-régulière, il existe une relation commune :

$$\begin{cases} p\lambda_1 + q\lambda_2 + r\lambda_3 = 0 \\ p\mu_1 + q\mu_2 + r\mu_3 = 0 \end{cases} \qquad (p, q, r) \in \mathbf{N}^3$$

minimale, en ce sens que toute autre relation à coefficients entiers positifs est multiple de (p, q, r). L'hyperbolicité de $j^1 D$ implique clairement que les λ_i et les μ_i sont réels et nous pouvons choisir A de sorte que toute relation i, $\langle i, \lambda \rangle = 0$ avec $i \in \mathbf{N}^3$ soit multiple de (p, q, r). En jouant une fois encore avec l'hyperbolicité de $j^1 D$, on peut supposer en outre que les quantités $s\lambda_k - \lambda_j$ sont non nulles pour $s \geqslant 2$.

Soient X et Y des générateurs de D ayant pour 1-jet A et B et $\widetilde{f}$ l'intégrale première de $\widetilde{D}$: $\widetilde{X} . \widetilde{f} = \widetilde{Y} . \widetilde{f} = 0$.

Des propriétés du spectre λ de A, il résulte qu'il existe une mise sous forme normale de X du type suivant :

$$\widetilde{Z} = \widetilde{\varphi}_* \widetilde{X} = \sum_{\ell \geqslant 0} (x^p y^q z^r)^\ell \left(a_\ell x \frac{\partial}{\partial x} + b_\ell y \frac{\partial}{\partial y} + c_\ell z \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

où $\widetilde{\varphi}$ est un difféomorphisme formel et $(a_0, b_0, c_0) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

En écrivant que $\widetilde{F} = \widetilde{f} \circ \widetilde{\varphi}$ est intégrale première formelle de Z, il vient :

a) $pa_\ell + qb_\ell + rc_\ell = 0$ pour tout ℓ

b) $\widetilde{F} = \psi(x^p y^q z^r)$ où ψ est une série formelle à une variable.

En remarquant alors que $\widetilde{F}$ est intégrale première des champs linéaires A et B on conclut, en utilisant par exemple le lemme de Saïto [9], que D est formellement linéarisable, i.e. il existe un germe de difféomorphisme φ tel que $\varphi_* D$ soit engendrée par les champs :

$$U = A + P$$
$$V = B + Q$$

où P et Q sont plats en 0.

Mais on peut alors modifier V de sorte que $[U, V] = 0$; en tenant compte du fait que $j^1 D$ est hyperbolique, on obtient maintenant, via [1], la linéarisation C^∞ de D. Ceci prouve l'implication $2 \Longrightarrow 3$.

L'implication $3 \Longrightarrow 1$ est triviale puisque les champs A et B possèdent l'intégrale première monomiale $x^p y^q z^r$.

q.e.d.

Lorsque $j^1 D \equiv g_{2,1}$ on ne peut guère améliorer les résultats du chapitre 5 ; on peut tout de même prouver (cf. [11]) que si $D \subset \mathscr{X}_0(\mathbf{R}^2)$ est régulière, $j^1 D \equiv g_{2,1}$, D est C^∞ linéarisable. Par contre on peut montrer que l'hypothèse "A_1 contractant" dans 5.4. n'est pas superflue : nous allons construire sur l'espace $\mathbf{R}^3$ une distribution involutive régulière, donc formellement linéarisable, qui ne soit pas C^∞-linéarisable.

Les coordonnées d'un point $x \in \mathbf{R}^3$ sont notées (x_1, x_2, x_3) ; A désigne le champ linéaire :

$$A = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{avec} \quad \lambda_2 = \lambda_1 - 1, \quad \lambda_1 > 2, \quad \lambda_3 < 0 \quad \text{et}$$

B le champ $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Nous supposons $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ choisi de telle sorte que l'on ait :

$$(\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j) . (\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j - 1) \neq 0 \ \forall i \in \mathbf{N}^3 \ |i| \geqslant 2 \ \text{et} \ \forall j \in \{1, 2, 3\}.$$

Si $D \subset \chi_0(\mathbf{R}^3)$ est une distribution involutive vérifiant $g_{\mathscr{E}_3}(D) = 2$ et $j^1 D = \mathfrak{G}$ où $\mathfrak{G}$ est l'algèbre de Lie engendrée par A et B, D est régulière et donc formellement linéarisable.

Les variétés invariantes du champ A sont le plan $x_3 = 0$ et la droite Ox_3. On peut trouver alors $f : \mathbf{R}^3, 0 \longrightarrow \mathbf{R}^3, 0, C^\infty$, s'annulant sur ces variétés, plate en 0 et telle que $A(f) = (\lambda_3 + 1) . f$.

Pour cela, on se donne un plan horizontal $x_3 = \epsilon$, $\epsilon > 0$ et une fonction $f_\epsilon : f_\epsilon : (x_3 = \epsilon) \longrightarrow \mathbf{R}$, C^∞, plate en $(0, 0, \epsilon)$ et strictement positive en dehors de ce point. On prolonge f_ϵ à $\mathbf{R}^3$ de la façon suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_\epsilon \left(x_1 . \left(\frac{x_3}{\epsilon}\right)^\alpha, x_2 . \left(\frac{x_3}{\epsilon}\right)^\beta \right.$$

pour $x_3 > 0$

$$f(x_1, x_2, 0) = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, -x_3) \quad \text{pour} \quad x_3 < 0$$

avec $\alpha = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$, $\beta = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$.

La platitude de f_ϵ implique alors que f est C^∞ et plate en 0.

Soit D la distribution involutive engendrée par A et le champ Y

$$Y = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + f \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \quad [A, Y] = Y .$$

La distribution D n'est pas linéarisable pour la raison suivante : soit $\Sigma(D) = \{x \in \mathbf{R}^3 , \dim D(x) \leqslant 1\}$ le lieu singulier de D.

$\Sigma(D)$ a pour équation : $(x_1 = 0, x_2 = 0)$; $\Sigma(D)$ est donc une droite ; si maintenant D′ désigne la distribution involutive engendrée par A et B on a :

$$\Sigma(D') = \Sigma(j^1 D) = \{x \in \mathbf{R}^3 , \ A(x) \text{ et } B(x) \text{ sont colinéaires}\}$$

$\Sigma(D')$ qui a pour équation $\{x_1 = 0\}$ est un plan. En remarquant qu'une conjugaison échange les lieux singuliers, on obtient le résultat annoncé.

Pour clore ce chapitre signalons que l'on peut obtenir certains résultats lorsque $\dim j^1 D = 1$ et $g_{\mathcal{E}n}(D) = 2$.

Par exemple supposons que l'on puisse trouver des générateurs X et Y de D tels que :

$$j^1 X = X_1 = \Sigma x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$j^{m-1} Y = 0 \quad \text{pour un certain} \quad m \geqslant 2$$

$$j^m Y = Y_m . \neq 0 .$$

Alors D est conjuguée à la distribution involutive engendrée par X_1 et Y_m (on utilise la même technique que précédemment : on peut trouver Y′ tel que $[X, Y'] = (m-1) . Y'$, ensuite la linéarisation de X permet de conclure).

7. Linéarisation en analytique.

On sait combien il est difficile de linéariser un champ de vecteur analytique ; il n'est donc pas étonnant que l'on doive, pour linéariser des distributions involutives, raffiner les hypothèses et introduire des "conditions de petits dénominateurs".

THEOREME 7.1. – *Soit* $D \subset \theta_0(\mathbf{R}^n)$ *une distribution involutive régulière, les conditions de régularité étant portées par les générateurs* $A_1, \ldots, A_p$ *de* $j^1 D$. *Si* A_1 *vérifie des conditions aux petits dénominateurs*

$$(|\langle \lambda, i \rangle - \lambda_j| > \mu \,.\, |i|^{-\alpha} \quad \forall\, i \in \mathbf{N}^n, \quad |i| \geq 2, \ \forall\, j = 1, \ldots, n, \ \mu > 0, \ \alpha > 0)$$

alors D *est analytiquement linéarisable.*

Démonstration. – Soient $X_1, \ldots, X_p$ des générateurs de D, $j^1 X_j = A_j$, $j = 1, \ldots, p$, et soit $\bar{D}$ la distribution involutive formelle engendrée par les X_j :

$$\bar{D} = \{\Sigma\, g_j \,.\, X_j \ , \ g_j \in \widetilde{\mathcal{E}}_n\} \,.$$

Nous pouvons écrire : $D \subset \bar{D}$. Soit ϕ un germe de difféomorphisme analytique ayant pour partie linéaire l'identité qui linéarise X_1, i.e $\phi_*(X_1) = A_1$. Remarquons que $j^1(\phi_* D) = j^1 D$; puisque D est régulière, il en est de même pour $\phi_*(\bar{D})$ et il résulte du théorème 4.3., ou plutôt de sa démonstration, que $\phi_*(\bar{D})$ est engendrée par les champs linéaires $A_1, \ldots, A_p$. Comme $\phi_*(D) \subset \phi_*(\bar{D})$, si Y est un élément de $\phi_* D$, il existe des séries formelles f_j, $j = 1, \ldots, p$, telles que :

$$Y = \sum_{j=1}^{p} f_j \,.\, A_j \,.$$

L'équation en y_j :

$$Y - \sum_{j=1}^{n} y_j \,.\, A_j = 0$$

est à coefficients analytiques et possède une solution formelle. Il résulte de la fidèle platitude de $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ sur $\mathcal{O}_n$ que cette équation a une solution $g_1, \ldots, g_p$ analytique. Si D' désigne la distribution involutive analytique engendrée par les A_j :

$$D' = \left\{ \sum_{j=1}^{p} h_j \,.\, A_j \ , \ h_j \in \mathcal{O}_n \right\}$$

nous avons l'inclusion : $\phi_*(D) \subset D'$; mais l'égalité $j^1(\phi_*(D)) = j^1 D'$ implique alors l'égalité $\phi_*(D) = D'$.

q.e.d.

8. Un critère de linéarisation.

Ce critère, annoncé dans l'introduction, est valable aussi bien en formel qu'en classe C^∞ ou analytique.

THEOREME 8.1. – *Soit* $D \subset F_n$ *une distribution involutive vérifiant* $\dim_{\mathbf{R}} D(0) = 0$ *et* $g_{A_n}(D) = \dim j^1 D$. D *est linéarisable si et seulement si il existe un champ* $X \in F_n$, *ayant pour partie linéaire le champ radial* $\sum_{j=1}^{n} x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, *tel que* $[X, D] \subset D$.

Démonstration. – Supposons D linéarisable ; il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi_*(D)$ soit engendrée par les champs linéaires $A_1, \ldots, A_p$. Soit A_0 le champ radial :

$$A_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot$$

Nous avons $[A_0, A_j] = 0$, $j = 1, \ldots p$. Le champ $X = \phi_*^{-1}(A_0)$ convient.

Inversement supposons l'existence d'un tel champ X, $j^1 X = A_0$. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des générateurs de D ; on a

$$[X, X_j] = \sum_{k=1}^{p} f_j^k X_k \quad , \quad f_j^k \in A_n , \ j = 1, \ldots, p .$$

Les sommations précédentes n'ayant pas de composante sur X, on peut trouver des générateurs X_j de D tels que l'on ait $[X, X_j] = 0$, ceci dans les cas formels et C^∞ (il suffit de reprendre la démonstration de 4.1. et 5.2.). En linéarisant X on obtient le résultat.

En analytique on procèdera de la façon suivante : on considère la distribution involutive formelle $\overline{D}$ engendrée par D ; on peut alors trouver des générateurs $X_1, \ldots, X_p$ de $\overline{D}$ tels que

$$[X, X_j] = 0 .$$

Si ϕ est un difféomorphisme analytique qui linéarise X, les $\phi_* X_j$ sont linéaires. Comme dans 7.1. on en conclut que $\phi_* D$ est engendrée par ces champs linéaires.

On pourrait aussi dans le cas analytique reprendre la démonstration de 4.1. et voir que les X_j ainsi trouvés convergent.

q.e.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Dumortier et R. Roussarie, Linéarisation différentiable de germes d'actions de $\mathbf{R}^2$ et de champs holomorphes, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, t. 285 (14 Nov. 77), 841-844.

[2] M. Flato, G. Pinczon, J. Simon, Non linear representations of Lie Groups, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.,* t. 10 (1977), 405-418.

[3] S. Guelorget et R. Moussu, Le théorème de Frobenius pour un pli intégrable, *C.R. Acad. Sc.,* Paris, t. 282-9 (1976), 445.

[4] W. Guillemin et S. Sternberg, Remarks on a paper of Hermann, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 130 (1968), 110-116.

[5] R. Hermann, Formal linearization of a semi-simple Lie algebra of vector fields about a singular point, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 130 (1968), 105-109.

[6] B. Malgrange, Frobenius avec singularité codimension 1, *Publ. Math. IHES,* 46 (1976), 163-173.

[7] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, XXVI fasc. 2 (1976), 171-220.

[8] S. Sternberg, Local contractions and a theorem of Poincaré, *Amer. J. of Math.,* Vol. 79 (1957), 809-824.

[9] K. Saito, On a generalisation of de Rham lemma, *Ann. Inst. Fourier,* XXVI fasc. 2 (1976), 165-170.

[10] F. Takens, Singularities of Vector Fields, *Publ. Math. I.H.E.S., 43,* (1974), 47-100.

[11] D. Cerveau, Distributions involutives singulières et formes de Pfaff, Thèse de 3ème cycle (1978).

Manuscrit reçu le 6 décembre 1978
révisé le 27 février 1979.

Dominique Cerveau,
Laboratoire de Topologie
Faculté des Sciences
Mirande
21000 – Dijon.