R. DEHEUVELS

L'intégrale de Lebesgue

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 383-393

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__383_0>

L'INTÉGRALE DE LEBESGUE

par **R. DEHEUVELS** (Lille).

Les quelques pages ci-après contiennent un exposé de l'intégrale de Lebesgue fait dans un cours de Calcul différentiel et intégral à Lille en 1956-57. Sans en garder les détails j'ai reproduit les démonstrations essentielles. Cet exposé, conçu pour « tenir » dans un cours de licence, présente peut-être l'avantage sur les exposés classiques, d'une économie de notions et d'une motivation naturelle de chaque démarche.

L'idée de l'intégration, telle qu'elle est exposée dans Bourbaki par exemple, est de prolonger par complétion une forme linéaire positive qui définit en même temps la norme.

Nous proposons un procédé élémentaire pour l'effectuer, à partir des fonctions étagées d'une mesure abstraite, qui évite en particulier les notions de fonction mesurable et de convergence en mesure ainsi que le recours au théorème de prolongement par continuité.

Le lemme 2 est dû à Halmos, qui part, dans son livre « Measure Theory », d'une mesure sur un clan (ou « anneau ») borélien et utilise les notions de fonction mesurable et de convergence en mesure, dont on peut se passer pour définir l'intégration.

J'ai appris que M. Zamansky, poursuivant un but analogue, avait introduit de nouveaux points de vue qu'il exposera dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

I. — MESURE SUR UN ENSEMBLE

Rappelons qu'un *clan* de parties d'un ensemble E est une famille non vide Γ de parties de E satisfaisant à l'axiome : $A \in \Gamma$ et $B \in \Gamma$ entraînent $A \cup B \in \Gamma$ et $A - B \in \Gamma$.

Si $A, B \in \Gamma$, la différence symétrique :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

appartient aussi à Γ, ainsi que : $A \cap B = A \cup B - A \Delta B$.

Un clan est donc stable par les opérations : $\cup$, $\cap$, Δ.

Exemples. — 1) la famille des parties finies de E. 2) sur R^n la famille $\Gamma^{(n)}$ des réunions finies de *demi-intervalles bornés* : $[a_i < x \leqslant b_i,\ i = 1, 2 \dots n]$.

Un *clan borélien* est un clan qui satisfait en outre à l'axiome :

$A_n \in \Gamma$, $n = 1, 2, \dots$ entraîne $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$.

Pour tout clan Γ, les réunions de familles dénombrables d'éléments de Γ forment un clan borélien : Γ', fermeture borélienne de Γ.

Exemple. — On prouve aisément que le clan $\Gamma^{(n)}$ de l'exemple 2 et la famille des ouverts bornés de R^n engendrent le même clan borélien.

Une *mesure* (finie) sur l'ensemble E est une « fonction d'ensemble » μ définie sur un clan Γ de parties de E, à valeurs dans la demi-droite réelle positive, vérifiant l'axiome d'*additivité dénombrable* :

si $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, sont deux à deux disjoints et si

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma, \qquad \text{alors} \qquad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$$

(d'où $\mu(\emptyset) = 0$).

Cet axiome peut encore s'énoncer :

pour toute suite décroissante $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ d'éléments de Γ dont l'intersection est vide, $\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$.

Il en résulte que, si $A \supset B$: $\mu(A - B) = \mu A - \mu B$ et $\mu A \geqslant \mu B$.

Exemples. — Sur le clan $\Gamma^{(n)}$ de l'exemple ci-dessus, on définit la mesure de Lebesgue :

$$\mu([a_i < x \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n]) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Si φ est une fonction numérique croissante sur R, $\mu([a < x \leqslant b]) = \varphi(b^+) - \varphi(a^+)$ est une mesure sur $\Gamma^{(1)}$.

Partant du clan Γ sur E, considérons le clan borélien Γ'' ainsi défini : $X \in \Gamma''$ s'il existe un recouvrement de X par une famille dénombrable d'éléments A_n, $n = 1, 2, \ldots$ de Γ. Si $X \in \Gamma''$ et $Y \subset X$, $Y \in \Gamma''$. $\Gamma'' \supset \Gamma' \supset \Gamma$: Γ'' est la fermeture héréditaire de Γ'.

La *mesure* μ sur Γ permet alors de définir sur Γ'' une fonction d'ensemble μ^*, à valeurs dans la demi-droite réelle augmentée de $+\infty$:

$$\mu^*(X) = \inf \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),\ A_n \in \Gamma,\ X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right]$$

qui coïncide avec μ sur les éléments de Γ, et qui possède les propriétés suivantes :

a) monotonie : $Y \subset X$ entraîne $\mu^*(Y) \leqslant \mu^*(X)$,

b) sous-additivité dénombrable : $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(X_n)$,

μ^* est appelée la *mesure extérieure* associée à la mesure μ.

Un ensemble $X \in \Gamma''$ de mesure extérieure nulle : $\mu^*(X) = 0$ est dit *négligeable :* aussi petit que soit ε, on peut le recouvrir par une suite d'$A_n \in \Gamma$ dont la somme des mesures est $< \varepsilon$.

Les ensembles négligeables forment un clan.

Extension d'une mesure. — Une mesure étant donnée sur un clan Γ de E, on cherche à étendre sa définition par passages à la limite au plus grand clan possible contenant Γ, en lui conservant naturellement ses propriétés.

Ce problème s'insert dans un problème en apparence plus général, mais plus maniable.

Dans l'algèbre $\mathcal{F}$ des fonctions numériques finies sur E, chaque partie X de E est représentée par sa fonction caractéristique φ_X.

L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par les φ_A, $A \in \Gamma$, est *l'algèbre des fonctions étagées* sur Γ, c'est-à-dire l'algèbre des combinaisons linéaires finies $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}$, $A_i \in \Gamma$.

On vérifie que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille Λ de parties de E forme un clan, est qu'il existe une algèbre $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ telle que $X \in \Lambda$ soit équivalent à $\varphi_X \in \mathcal{L}$.

On vérifie également que toute fonction de $\mathcal{E}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}$ où les A_i sont deux à deux disjoints et les c_i deux à deux inégaux. On peut étendre μ par linéarité à $\mathcal{E}$ en posant : si

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}, \qquad \mu(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i) = \int f d\mu$$

$\mu(f)$ est appelée *l'intégrale de f.*

L'intégrale μ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, positive, et satisfaisant en outre à la condition (équivalente à additivité dénombrable) : si l'enveloppe supérieure $\sup f_n$ d'une suite croissante de fonctions f_n de $\mathcal{E}$, appartient à $\mathcal{E}$, on a : $\mu(\sup f_n) = \sup \mu(f_n)$.

Réciproquement, une forme linéaire positive sur une algèbre $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ satisfaisant à la condition précédente est une mesure sur le clan Λ associé à $\mathcal{L}$.

Il est équivalent d'étendre la mesure μ ou la forme linéaire μ à une algèbre $\supset \mathcal{E}$.

μ définit sur $\mathcal{E}$ la semi-norme : $N_1(f) = \int |f| d\mu = \mu(|f|)$.

Si $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}$ où les A_i sont deux à deux disjoints :

$$N_1(f) = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \mu(A_i).$$

Inégalités. — On a : $\left|\int f d\mu\right| \leqslant N_1(f)$.

L'ensemble des points x où $f(x) \neq 0$ est un élément de Γ que l'on peut désigner par $S(f)$. Alors : $N_1(f) \leqslant \sup|f| . \mu(S(f))$.

Si $A \in \Gamma$, $\int \varphi_A . f d\mu = \mu(\varphi_A . f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$ que l'on note $\int_A f d\mu$. *Mais si* B *appartient au clan* Γ' (§ I), *donc* *s'il est réunion d'une famille dénombrable quelconque d'éléments de* Γ (en général $B \notin \Gamma$), *on peut également définir* :

$$\int_B f\,d\mu = \int \varphi_B . f\,d\mu = \int \varphi_{B\cap S(f)} . f\,d\mu = \int_{S(f)\cap B} f\,d\mu,$$

$\int_B f\,d\mu$ est une forme linéaire sur E, et $\int_B |f|\,d\mu \leqslant N_1(f)$.

Si B est réunion d'une famille $\{A_n\}$, d'éléments de Γ deux à deux disjoints (en général $B \notin \Gamma$) :

$$\int_B f\,d\mu = \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

(même égalité plus généralement avec A_n = réunion dénombrable d'éléments de Γ pour chaque n).

μ définit également pour chaque nombre réel $p \geqslant 1$, la semi-norme sur $\mathcal{E}$: $N_p(f) = \left[\int |f|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$. Les propriétés ci-dessous, faisant intervenir N_1 sont également valables pour N_p. Nous avons préféré ne pas parler de N_p afin de ne pas alourdir l'exposé.

II. — INTÉGRATION

L'intégrale étant définie sur les fonctions étagées, il est naturel d'étendre sa définition aux limites de suites $\{f_n\}$ de telles fonctions pour lesquelles la suite numérique $\int f_n\,d\mu$ converge.

Comme $\left|\int f_m\,d\mu - \int f_n\,d\mu\right| \leqslant N_1(f_m - f_n)$ les intégrales $\int f_n\,d\mu$ d'une suite de Cauchy (pour N_1) de fonctions de $\mathcal{E}$ tendent vers une limite finie. Mais peut-on associer une fonction sur E à une telle suite?

Lemme 1. — *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de Cauchy* (*pour* N_1) *de fonctions étagées de* $\mathcal{E}$. *On peut en extraire une suite partielle* $\{f_{n_k}\}$, *et définir une fonction* f *telles que, pour tout* $\delta > 0$, *il existe un ensemble* F_δ *avec* $\mu^* F_\delta < \delta$, *la suite* $\{f_{n_k}\}$ *convergeant uniformément vers* f *sur* $E - F_\delta$. *Il en résulte que la suite* $\{f_{n_k}\}$ *converge vers* f *presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble négligeable. De plus* f *a une valeur finie presque partout.*

Preuve. — Soient $h > 0$ et $E_{mn}(h)$ l'élément de Γ défini par :

$$E_{mn}(h) = E(|f_m - f_n| \geqslant h)$$
$$N_1(f_m - f_n) = \int |f_m - f_n| d\mu \geqslant \int_{E_{mn}(h)} |f_m - f_n| d\mu \geqslant h\mu E_{mn}(h).$$

La suite f_n étant une suite de Cauchy, pour h fixé :

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \mu E_{mn}(h) = 0.$$

Soit $N(k)$ un entier tel que $m, n \geqslant N(k)$ entraîne :

$$\mu E_{mn}(2^{-k}) < 2^{-k}.$$

Posons $n_1 = N(1)$, ..., $n_k = \text{Sup}\,(n_{k-1} + 1,\ N(k))$, ... et considérons la suite partielle $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots f_{n_k}, \dots$

Soient $E_k = E_{n_k n_{k+1}}(2^{-k})$ et $F_k = E_k \cup E_{k+1} \cup \cdots$. Si $x \notin F_i$:

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leqslant |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| + \cdots |f_{n_{j-1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$
$$\leqslant \sum_{l=i}^{\infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| < \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l} = 2^{-i+1}.$$

D'autre part $\mu^* F_k \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \mu E_k < 2^{-k+1}$.

Soit $\delta > 0$ quelconque. Choisissons k tel que $2^{-k+1} < \delta$ et posons $F_\delta = F_k$. Sur $E - F_\delta$ la suite $\{f_{n_i}\}$ converge uniformément, car $j > i > l \geqslant k$ entraîne :

$$|f_{n_i}(x) - f_n(x)| \leqslant 2^{-l}$$

pour tout $x \in E - F_\delta$.

Soit A l'ensemble des points où la suite $\{f_{n_k}\}$ ne converge pas : $A \subset F_\delta$ quel que soit $\delta > 0$ donc $\mu^* A = 0$.

Soit f la fonction limite de la suite $\{f_{n_k}\}$ sur $E - A$ prolongée par O par exemple sur A. f est finie en tout point de $\bigcup_{k=1}^{\infty} (E - F_k)$ donc presque partout.

Lemme 2. — *Si* $\{f_n\}$ *et* $\{g_n\}$ *sont deux suites de Cauchy de fonctions étagées de* $\mathcal{E}$ *qui convergent presque partout vers la même fonction* f, *si l'on pose pour chaque* $B \in \Gamma'$ (*cf.* § 1) : $\lambda(B) = \lim \int_B f_n d\mu$ et $\mu(B) = \lim \int_B g_n d\mu$, λ et μ *sont des fonctions d'ensemble dénombrablement additives et identiques. En particulier* : $\lim \int f_n d\mu = \lim \int g_n d\mu$.

Preuve. — L'additivité dénombrable de λ et μ s'obtient immédiatement par passage à la limite de la propriété analogue de $\int_B f_n\, d\mu$ ou $\int_B g_n\, d\mu$.

Soit $A \in \Gamma$. Considérons les restrictions de *toutes* les fonctions à A. D'après le lemme 1, la convergence de deux suites partielles : $\{f_{n_k}\}$ et $\{g_{m_l}\}$ vers f est uniforme sur $A - F_\delta$ avec $\mu^* F_\delta < \delta$.

Or : $|f_{n_k} - g_{m_k}| \leqslant |f_{n_k} - f| + |f - g_{m_k}|$ entraîne :

$$E_k = E(|f_{n_k} - g_{m_k}| \geqslant \varepsilon) \subset E\left(|f_{n_k} - f| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup E\left(|f - g_{m_k}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pour k assez grand, les deux ensembles de droite sont contenus dans F_δ.

$$\int_A |f_{n_k} - g_{m_k}|\, d\mu \leqslant \int_{A - E_k} |f_{n_k} - g_{m_k}|\, d\mu + \int_{E_k} |f_{n_k}|\, d\mu + \int_{E_k} |g_{m_k}|\, d\mu,$$

le premier terme est inférieur $\varepsilon . \mu A$.

Pour montrer que chacune des deux autres intégrales peut être rendue arbitrairement petite pour k suffisamment grand, il suffit de prouver qu'il existe δ tel que $\mu C < \delta$ entraîne $\int_C |f_n|\, d\mu < \varepsilon$ pour une suite de Cauchy f_n, quel que soit n :

Soit N tel que : $n,\ m \geqslant N$ entraînent $N_1(f_n - f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $H = \operatorname{Sup}\{|f_k(x)|,\ x \in E,\ k = 1, 2, \dots N\}$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2H}$.

Pour $n \leqslant N$, $\mu C < \delta (C \in \Gamma)$ entraîne : $\int_c |f_n|\, d\mu \leqslant H . \mu A < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n > N$: $\int_C |f_n|\, d\mu \leqslant \int_C |f_n - f_N|\, d\mu + \int_C |f_N|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a donc prouvé que $\lim\limits_{k \to \infty} \int_A |f_{n_k} - g_{m_k}|\, d\mu = 0$ si $A \in \Gamma$, ce qui entraîne naturellement : $\lim \int_A f_n\, d\mu = \lim \int_A g_n\, d\mu$ pour tout $A \in \Gamma$.

L'additivité dénombrable permet de conclure que :

$$\lim \int_B f_n\, d\mu = \lim \int_B g_n\, d\mu$$

pour tout $B \in \Gamma'$. Mais les éléments de Γ appartenant aux supports de tous les f_n et g_n forment une famille dénombrable dont la réunion est un élément $B \in \Gamma'$ en dehors duquel f est nulle. Donc :

$$\lim \int f_n\, d\mu = \lim \int_B f_n\, d\mu = \lim \int_B g_n\, d\mu = \lim \int g_n\, d\mu.$$

Définition. — *Une fonction numérique f, finie ou infinie, sur* E *sera dite* intégrable (*pour la mesure* μ) *s'il existe une suite de Cauchy* $\{f_n\}$ *de fonctions étagées de* $\mathcal{E}$ *qui converge presque partout vers* f.

L'*intégrale* de f sera par définition: $\int f\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu$. Elle ne dépend pas de la suite $\{f_n\}$ d'après le lemme 2.

Propriétés immédiates. — 1. Les fonctions intégrables forment un espace vectoriel $\mathcal{L}^1$ et $\int f\,d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1$.

2. Si $f = g$ presque partout et si g est intégrable, f l'est aussi. On peut définir l'intégrale d'une fonction qui n'est définie que presque partout.

3. L'ensemble des points $S(f)$ où $f(x) \neq 0$ est un élément de Γ'' pour toute fonction intégrable, et il existe $A_\varepsilon \in \Gamma$ tel que $\left|\int f\,d\mu - \int_A f\,d\mu\right| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

4. Si f est intégrable, $|f|$ l'est aussi donc $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$ car $\int \big||f_n|-|f_m|\big|\,d\mu \leqslant \int |f_n - f_m|\,d\mu$.

$N_1(f) = \int |f|\,d\mu$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1$ en vertu des inégalités ci-dessous.

5. Inégalités :

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu, \quad \int |f+g|\,d\mu \leqslant \int |f|\,d\mu + \int |g|\,d\mu.$$

6. $\int_B f\,d\mu$ est définie pour tout $B \in \Gamma'$, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1$, et est additivement dénombrable. De plus, si $A \in \Gamma$ et $a \leqslant f(x) \leqslant b$ sur A : $a\mu A \leqslant \int_A f\,d\mu \leqslant b\mu A$.

Deux questions naturelles vont nous conduire au lemme 3 : *a*) si f est intégrable et nulle presque partout, $\int f\,d\mu = 0$, est-ce que réciproquement $f \geqslant 0$ et $\int f\,d\mu = 0$ entraînent $f = 0$ *pp*? *b*) le lemme 1 affirme que l'on peut extraire d'une suite de Cauchy de fonctions étagées une suite partielle $\{f_{n_k}\}$ convergeant *pp* vers f. Mais si une autre suite partielle $\{g_{m_k}\}$ de la même suite, converge *pp* vers une fonction g, que peut-on dire de f et g? Il résultera du lemme 3 que $f = g$ *pp*. En effet $\{h_k = |f_{n_k} - g_{m_k}|\}$ est une suite de Cauchy de fonctions étagées qui converge *pp* vers la fonction $|f - g|$ et l'on sait que $\int |f - g|\,d\mu = 0$.

LEMME 3. — *Une fonction intégrable positive dont l'intégrale est nulle, est nulle presque partout.*

Preuve. — Soit f_n une suite de Cauchy de fonctions étagées qu'on peut supposer positives convergeant presque partout vers f. Soient $h > 0$ et $E_n(h)$ l'élément de Γ défini par :

$$E_n(h) = E(f_n \geqslant h)$$
$$\int f_n\, d\mu \geqslant \int_{E_n(h)} f_n\, d\mu \geqslant h\mu E_n(h).$$

Pour h fixé, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(h) = 0$.

Le reste de la démonstration se poursuit d'une manière analogue à celle du lemme 1 : on prouve qu'une suite partielle de $\{f_n\}$ converge presque partout vers zéro.

Conséquences — Dans l'ensemble seminormé des fonctions définies presque partout et intégrables, considérons le sous-ensemble des fonctions de norme nulle, ou négligeables, $\mathcal{H}$ et la relation d'équivalence : $f \sim g$ si $f = g$ *pp* ou $N_1(f - g) = 0$. Les classes d'équivalence forment un espace vectoriel L^1 normé séparé. $L^1 = \mathfrak{L}^1/(\mathfrak{L}^1 \cap \mathcal{H})$.

THÉORÈME 1. — *Pour toute fonction intégrable f et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée de $\mathcal{E}$:* g telle que $N_1(f - g) < \varepsilon$: *les fonctions étagées sont partout denses dans $\mathfrak{L}^1$ et dans L^1.*

Preuve. — f est limite presque partout d'une suite de Cauchy $\{f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{E}$. Pour m fixe, $|f_n - f_m|$ converge *pp* vers $|f - f_m|$ et c'est une suite de Cauchy. Donc :

$$N_1(f - f_m) = \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f_m|\, d\mu.$$

On peut choisir m assez grand pour que, quel que soit $n \geqslant m$, le second membre soit $< \varepsilon$ c.q.f.d.

THÉORÈME 2. — *$\mathfrak{L}^1$ et L^1 sont complets.*

Preuve. — Si $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy de fonctions intégrables, choisissons pour chaque n une fonction étagée f_n telle que $N_1(f_n - g_n) < \dfrac{1}{n}\cdot$ Soit f la limite presque partout d'une suite partielle $\{f_{n_k}\}$. f est intégrable et

$$N_1(f - g_n) \leqslant N_1(f - f_{n_k}) + N_1(f_{n_k} - g_n).$$

Pour $n \geqslant n_k \geqslant N$: $N_1(f - g_n) \leqslant \varepsilon + \frac{1}{N} \cdot$ f est donc un point limite de la suite g_n. La convergence pour la norme sera dite « *en moyenne* ».

Théorème 3 (ou de la convergence monotone). — *Soit $\{f_n\}$ une suite croissante de fonctions intégrables de limite f. Si $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$ est finie, f est intégrable et l'on a :*

$$\int f \, d\mu = \int \lim f_n . d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Preuve. — $\int f_m \, d\mu - \int f_n \, d\mu = \int (f_m - f_n) \, d\mu = N_1(f_m - f_n)$ si $m \geqslant n$.

Si $\lim \int f_n d\mu$ est finie, la suite $\{f_n\}$ est donc une suite de Cauchy et converge en moyenne vers g. Une suite partielle de $\{f_n\}$ converge *pp* vers g qui est donc égale *pp* à f, d'où l'énoncé.

Le corollaire suivant est évident :

Corollaire. — *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions intégrables, telles que $f_n(x) \leqslant g(x)$ pour tout n et pour tout x, où g est intégrable, alors* $\sup f_n$ *et* $\overline{\lim} f_n$ *sont des fonctions intégrables et*

$$\overline{\lim} \int f_n \, d\mu \leqslant \int \overline{\lim} f_n \, d\mu.$$

Théoreme 4 (Lebesgue). — Soit *$\{f_n\}$ une suite de fonctions intégrables sur* E *convergeant presque partout vers une fonction f. Si $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ presque partout pour tout n, où* F *est intégrable, alors :*

a) *f est intégrable;*

b) *la suite f_n converge en moyenne vers f :* $\lim\limits_{n \to \infty} N_1(f - f_n) = 0$ *d'où* $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

Preuve. — $\lim\limits_{m \to \infty,\ n \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$ presque partout

$$\overline{\lim} \, N_1(|f_m - f_n|) \leqslant N_1(\overline{\lim} |f_m - f_n|) = 0.$$

Donc $\lim N_1(|f_m - f_n|) = 0$.

Ensembles mesurables et intégrables.

Puisque

$$\begin{aligned} N_1(f_n g_n - f_m g_m) &= N_1(f_n(g_n - g_m) - (f_n - f_m) g_m) \\ &\leqslant \operatorname{Sup} |f_n| . N_1(g_n - g_m) + \operatorname{Sup} |g_n| N_1(f_n - f_m), \end{aligned}$$

le produit de 2 fonctions intégrables bornées f, g est une fonction intégrable bornée : les fonctions intégrables bornées forment une algèbre $\mathfrak{T}$ contenue dans l'espace $\mathfrak{L}^1$. Un ensemble X est dit *intégrable* si $\varphi_X \in \mathfrak{T}$. Les ensembles intégrables forment donc un clan Θ. La fonction $\mu(X) = \int \varphi_X \, d\mu$ sur Θ est une mesure d'après le théorème 3. Θ contient Γ et le clan des ensembles négligeables.

Un ensemble *mesurable* est pas définition un ensemble dont l'intersection avec tout ensemble intégrable est intégrable. Les ensembles mesurables forment un clan M contenant Γ et E.

Si X est mesurable et f intégrable, la fonction $\varphi_X . f$, égale à f sur X, nulle ailleurs est intégrable. En effet, si $A \in \Gamma$, $X \cap A$ est intégrable donc aussi $\varphi_{X \cap A} = \varphi_X . \varphi_A$. Si $g \in \mathcal{E}$,

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{A_i}, \qquad \varphi_X . g = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_{X \cap A_i}$$

est intégrable. Si $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy de fonctions de $\mathcal{E}$, convergeant presque partout vers f, $\{\varphi_X . g_n\}$ est une suite de Cauchy de fonctions intégrables qui converge presque partout vers $\varphi_X . f$ qui est donc intégrable.

L'intégrale $\int_X f \, d\mu$ est définie par : $\int_X f \, d\mu = \int \varphi_X . f \, d\mu$.

C'est une forme linéaire sur $\mathfrak{L}^1$ ou L^1 pour chaque $X \in M$ et dénombrablement additive.

Mesures de Radon sur un espace localement compact E. Elles sont définies comme les mesures pour lesquelles les fonctions continues à support compact ou de manière équivalente, les ouverts relativement compacts sont intégrables. Toute mesure de Radon sur R^n s'obtient au moyen d'une mesure sur le clan $\Gamma^{(n)}$ des demi-intervalles bornés, en particulier la mesure de Lebesgue.