Annales de l'institut Fourier

Denis Feyel

La quasi-continuité dans l'étude du problème de Dirichlet. Effilement minimal abstrait et ensembles convexes compacts

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 223-237
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_223_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 223-237

LA QUASI-CONTINUITÉ DANS L'ÉTUDE DU PROBLÈME DE DIRICHLET. EFFILEMENT MINIMAL ABSTRAIT ET ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

par Denis FEYEL

Introduction.

Dans un cadre très général (l'espace de base $\hat{\Omega}$ est a priori un ensemble quelconque), on résout un problème de Dirichlet sur une frontière de Šilov associée à un cône de fonctions dites "quasi-continues".

On regroupe ainsi en un seul énoncé (n° 3) la solution du problème de Dirichlet sur la frontière de Martin, un résultat de la théorie des ensembles convexes compacts qui sont aussi des simplexes, et la caractérisation des simplexes de Bauer (métrisables).

On montre d'autre part comment le théorème de Fatou-Naïm-Doob-Gowrisankaran sur les limites fines exprime une sorte de quasi-continuité jusqu'à la frontière, et admet une généralisation abstraite conséquence immédiate de propriétés de quasi-continuité. On voit notamment que les ensembles exceptionnels ou "polaires" sur $\hat{\Omega}$ induisent les ensembles négligeables sur la frontière.

Pour finir, on montre au paragraphe VI comment un ensemble convexe compact métrisable qui est un simplexe a toujours sa frontière de Choquet quasi-fermée dans de bonnes quasi-topologies, ce qui permet de les traiter comme des simplexes de Bauer et de retrouver facilement des propriétés connues.

Remarquons que les théorèmes généraux ont leurs démonstrations très simples. La plus grande partie de l'article est donc consacrée à l'étude des exemples et à la comparaison nécessaire des notions nouvelles et des notions que l'on rencontre dans les théories classiques.

I. Hypothèses générales, exemples, et le problème de Dirichlet.

1. $\hat{\Omega}$ désigne un ensemble, $\mathcal{R}$ est un espace vectoriel de fonctions réelles finies sur $\hat{\Omega}$, tel que :

a) $u, v \in \mathcal{R} \Longrightarrow u \wedge v \in \mathcal{R}$

b) $u \in \mathcal{R} \Longrightarrow u \wedge 1 \in \mathcal{R}$

c) $1 = \sup_n u_n$ où $u_n \in \mathcal{R}$

γ est une semi-norme sur $\mathcal{R}$ vérifiant :

a′) $\gamma(|\varphi|) = \gamma(\varphi)$

b′) $0 \leqslant \varphi \leqslant \psi \Longrightarrow \gamma(\varphi) \leqslant \gamma(\psi)$

c′) si φ_n décroît et tend vers 0 sur $\hat{\Omega}$, $\gamma(\varphi_n)$ tend vers 0.

On sait (cf. [4]) que la condition c′) (condition de Daniell) permet de compléter $\mathcal{R}$ en un espace fonctionnel $\mathbf{L}^1(\gamma)$, dont les éléments sont représentables par des fonctions ou classes de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables définies à des ensembles "polaires" près ($\mathcal{B}$ tribu engendrée par $\mathcal{R}$ et les ensembles γ-polaires). On note $\mathcal{L}^1(\gamma)$ l'ensemble des fonctions (définies et finies γ-quasi-partout) représentant les éléments de $\mathbf{L}^1(\gamma)$. γ se prolonge à $\mathcal{L}^1(\gamma)$ par continuité et $\mathcal{L}^1(\gamma)$ et γ vérifient les mêmes axiomes a, b, c, et a′, b′, c′, que $\mathcal{R}$ et γ (rigoureusement on ne devrait considérer que les fonctions de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ qui sont finies partout).

Le dual topologique de $\mathbf{L}^1(\gamma)$ est représentable par des différences de mesures positives sur $\mathcal{B}$, intégrant les fonctions de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ et dites "γ-intégrables" (cf. [3]).

Axiome. – *On suppose que* $\mathbf{L}^1(\gamma)$ *est de type dénombrable.*

On sait alors définir (cf. [3]) la notion de fonction quasi-semi-continue inférieurement (q.s.c.i.) et de quasi-ouvert d'où une quasi-topologie, et les éléments de $\mathcal{L}^1(\gamma)$ sont quasi-continus.

Dans toute la suite, C désigne un cône adapté dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$, i.e. vérifiant les axiomes :

a″) C est convexe, fermé, $u, v \in C \Longrightarrow u \wedge v \in C$

b″) si $u \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, il existe $v \in C$, $u \leqslant v$ (q.p.)

c″) C-C est dense dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$.

On définit alors pour $\varphi \in \mathbf{L}^1(\gamma)$: $R\varphi = \operatorname{Inf\,ess} \{v \in C/v \geqslant \varphi\}$; $R\varphi$ est une (classe de) fonction quasi-s.c.s., et on ajoute l'axiome :

d'') si $u \in -C$, alors $Ru \in C \cap (-C)$.

2. *Exemples*

(i) $\hat{\Omega}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^m (m \geqslant 1)$, $\mathcal{R} = \mathcal{C}(\hat{\Omega})$, $\gamma(\varphi) = \|\varphi\|_\infty$ (norme uniforme), C le cône des fonctions continues sur $\hat{\Omega}$ et surharmoniques dans Ω. La quasi-topologie n'est autre que la topologie usuelle de $\hat{\Omega}$ et ϕ est le seul polaire.

(ii) $\hat{\Omega}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^m (m \geqslant 1)$, $\mathcal{R} = \mathcal{C}(\hat{\Omega})$, τ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\hat{\Omega}$, $\gamma(\varphi) = \int R(|\varphi|)\, d\tau$ où $R(|\varphi|)$ est la réduite surharmonique de $|\varphi|$ dans Ω (boule unité ouverte). On prend pour C l'adhérence dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$ du cône C_0 des fonctions de $\mathcal{R} = \mathcal{C}(\hat{\Omega})$ qui sont surharmoniques dans Ω. Alors $\varphi \longmapsto R\varphi$ définie sur $\mathcal{R}$, à valeurs dans C_0 est uniformément continue, car pour $\varphi, \psi \in \mathcal{R}$, on a $|R\varphi - R\psi| \leqslant R(|\varphi - \psi|)$ donc $\gamma(R\varphi - R\psi) \leqslant \int R(|\varphi - \psi|)\, d\tau = \gamma(\varphi - \psi)$.

On note encore $\varphi \longmapsto R\varphi$ son prolongement uniformément continu sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$. Alors $u \longmapsto Ru$ est croissante, on a $u = Ru$ pour $u \in C$; et $w \in C$, $w \geqslant u$ entraîne $w = Rw \geqslant Ru$: Ru est donc le plus petit élément de C majorant u, d'où la propriété b''). Si $u \in -C$, alors $u = \operatorname{Lim} u_n$ avec $u_n \in -C_0$, donc $Ru_n \in C_0 \cap (-C_0)$ car u_n est sous-harmonique, par suite $Ru = \operatorname{Lim} Ru_n$ appartient à $C \cap (-C)$; c'est la propriété d'').

On voit alors que pour $u \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, on a encore

$$\gamma|u| = \|u\| = \int R(|u|)\, d\tau .$$

Enfin on montre qu'un ensemble E est polaire sur $\hat{\Omega}$ si et seulement si $E \cap \Omega$ est polaire au sens classique sur Ω et $E \cap \partial\Omega$ σ-négligeable, où σ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\partial\Omega$. On verra plus loin la caractérisation des ensembles quasi-ouverts (théorème de Fatou).

(iii) $\hat{\Omega}$ est un simplexe métrisable compact dans un espace localement convexe, τ est une mesure sur $\hat{\Omega}$, $\mathcal{R} = \mathcal{C}(\hat{\Omega})$. On prend $\gamma(\varphi) = \int R(|\varphi|)\, d\tau$ où $R(|\varphi|)$ est la réduite concave s.c.s de $|\varphi|$. On prend pour C l'adhérence dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$ du cône C_0 des fonctions concaves continues sur $\hat{\Omega}$. Pour $\varphi, \psi \in C_0$ on a comme en ii) :

$$\gamma^*(R_\varphi - R_\psi) \leqslant \int R(|\varphi - \psi|)\, d\tau = \gamma(\varphi - \psi)$$

où γ^* est le prolongement de Lebesgue de la semi-norme γ. On note encore $\varphi \longmapsto R_\varphi$ le prolongement uniformément continu. Pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, $R\varphi$ est cette fois une limite de fonctions concaves s.c.s. : elle est q.s.c.s. Si $v \in C$, on a $Rv = v$, donc pour $u \in \mathbf{L}^1(\gamma)$: $Ru \leqslant \operatorname{Inf}\{v \in C/v \geqslant u \text{ q.p.}\} = R'u$ où $R'u$ est q.s.c.s. d'après la quasi-propriété de Lindelöf (cf. [3]). Les deux fonctions R et R′ sont uniformément continues sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$ et coïncident sur $\mathcal{R} = \mathcal{C}(\hat{\Omega})$, donc $R = R'$, d'où b″). Pour $u \in -C_0$, Ru est affine s.c.s. car $\hat{\Omega}$ est un simplexe. Montrons qu'elle est dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$.

LEMME. — *Si v est concave s.c.i. > 0, $\gamma^*(v) = \int v\,d\tau$.*

Démonstration. — Il existe v_n suite croissante de concaves continues > 0 tendant vers v. D'où

$$\gamma^*(v) = \operatorname*{Sup}_n \gamma^*(v_n) = \operatorname*{Sup}_n \int v_n d\tau = \int v\,d\tau .$$

Soit alors une suite décroissante w_n d'affines continues, $w_n > Ru$ tendant vers Ru. $w_n - Ru$ est affine s.c.i. > 0, d'où : $\gamma^*(w_n - Ru) = \int (w_n - Ru)\,d\tau$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or $w_n \in C_0 \cap (-C_0)$ donc $Ru \in C \cap (-C)$, et le résultat subsiste par continuité si l'on a seulement $u \in -C$: c'est la propriété d″).

Remarque. — Soit Δ la frontière de Choquet de $\hat{\Omega}$ (ensemble des points extrêmaux). Il existe $u \in -C_0$ telle que $\Delta = \{u = Ru\}$. On en déduit que Δ est toujours un ensemble quasi-fermé, ce qui laisse prévoir que la théorie se ramène à celle des simplexes de Bauer : ce sera explicité plus loin.

(iv) Soit Ω un ouvert de Green à base dénombrable dans une théorie axiomatique de Brelot munie des axiomes 1) 2) 3) avec les constantes harmoniques. On prend pour $\mathcal{R}$ l'espace des différences de surharmoniques continues bornées sur Ω. On choisit $\tau \geqslant 0$ $\tau \neq 0$ une mesure bornée intégrant les harmoniques positives. Pour $\varphi \in \mathcal{R}$, on pose

$$\gamma(\varphi) = \int \mathrm{R}(|\varphi|)\, d\tau$$

où $\mathrm{R}(|\varphi|)$ est la réduite surharmonique de $|\varphi|$; on voit que γ est une norme sur $\mathcal{R}$, mais on n'a pas la propriété de Daniell.

LEMME. – *$\mathcal{R}$ muni de la norme γ est de type dénombrable.*

Démonstration. – Soit $\mathcal{R}_0$ le sous-espace des différences de potentiels : $\mathcal{R}_0$ est de type dénombrable de manière presque évidente (Ω à base dénombrable). Soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace des harmoniques bornées : γ induit sur $\mathcal{H}_0$ la topologie de l'espace $\mathcal{H}^1$ (de Hardy) isomorphe à $\mathbf{L}^1(\sigma)$ où σ est la mesure représentative de la fonction 1 sur Δ_1, partie minimale de la frontière de Martin Δ normalisée par τ. Or $\mathbf{L}^1(\sigma)$ est de type dénombrable.

Soit maintenant $\mathcal{R}_1$ un sous-espace de $\mathcal{R}$, dense dans $\mathcal{R}$, vérifiant les propriétés a) b) c) du 1, séparant les points de Ω et stable par l'opération $\varphi \longrightarrow \mathrm{R}\varphi$. On peut si l'on veut prendre $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$, ou bien prendre $\mathcal{R}_1$ séparable en norme uniforme, d'après le lemme précédent. Alors $\mathcal{R}_1$ s'identifie à un sous-espace dense dans $\mathcal{C}(\widetilde{\Omega})$ où $\widetilde{\Omega}$ est un espace compact contenant Ω comme ouvert partout dense. $\widetilde{\Omega}$ peut être métrisable selon le choix de $\mathcal{R}_1$.

Pour $u \in \mathcal{R}_1$, on pose $\widetilde{\gamma}(u) = \gamma(u|_\Omega)$. Si $u_n \in \mathcal{R}_1$ décroît et tend vers 0 sur $\widetilde{\Omega}$, le lemme de Dini montre que $\widetilde{\gamma}(u_n)$ tend vers 0 : les propriétés a) b) c), a$'$) b$'$) c$'$) du 1 sont vérifiées par $\widetilde{\Omega}$, $\mathcal{R}_1$ et $\widetilde{\gamma}$. On en déduit un espace $\mathbf{L}^1(\widetilde{\gamma})$ de type dénombrable sur $\widetilde{\Omega}$, isomorphe au complété de $\mathcal{R}$ pour la norme γ.

Soit C_0 le cône des surharmoniques continues bornées sur Ω. On note C l'adhérence de C_0 dans $\mathbf{L}^1(\widetilde{\gamma})$ (indépendant du choix de $\mathcal{R}_1$). Les propriétés b$''$) et d$''$) se vérifient comme dans l'exemple ii). On reviendra plus loin à cet exemple.

On retourne maintenant au cas général du 1.

Si $\mu, \nu \geqslant 0$ sont deux mesures γ-intégrables, μ est dite "balayée" de ν : $\mu \leqslant \nu$ si $\int u\, d\mu \leqslant \int u\, d\nu$ pour toute $u \in \mathrm{C}$.

Δ désignera la frontière de Šilov du cône C. Rappelons (cf. [3]) que c'est le plus petit quasi-fermé (classe de) Δ pour lequel on ait : $u \in C$ et $u \geqslant 0$ q.p. sur $\Delta \Longrightarrow u \geqslant 0$ q.p. sur $\hat{\Omega}$.

THEOREME 3 (Solution d'un problème de Dirichlet). – *Soit* $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, *il existe* $H_\varphi \in C \cap (-C)$, H_φ *unique ayant même trace que* φ *sur* Δ.

Démonstration. – L'unicité est claire puisque Δ est frontière de Šilov de C. Pour $u \in -C$, on pose $H_u = Ru$ qui convient d'après d''), d'où l'existence de H_φ pour $\varphi \in C - C$. Si $\varphi \in C - C$, on a aussi $|\varphi| \in C - C$ et $|H_\varphi| \leqslant H_{|\varphi|} \leqslant R|\varphi|$ donc

$$\|H_\varphi\| = \gamma(|H_\varphi|) \leqslant \gamma^*(R|\varphi|) \leqslant \text{cste} \quad \gamma(\varphi).$$

En effet, d'après ([3]), $\varphi \longmapsto \gamma^*(R|\varphi|)$ est une semi-norme équivalente à γ sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$. On note encore H_φ le prolongement linéaire continu sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$ (c'')), et l'on vérifie sans peine que $\varphi - H_\varphi$ vaut 0 q.p. sur Δ.

COROLLAIRE 4. – *Soit* $\mu \geqslant 0$, γ*-intégrable, et soit* μ^Δ *définie par* $\mu^\Delta(\varphi) = \mu(H_\varphi)$. *Alors* μ^Δ *est l'unique balayée de* μ *ne chargeant que* Δ, *et aussi l'unique balayée minimale de* μ.

Démonstration. – Soit $\nu < \mu$, $\nu \geqslant 0$, ν portée par Δ. Alors pour $u \in -C$, on a : $\nu(u) = \nu(Ru) = \nu(H_u) = \mu(H_u) = \mu^\Delta(u)$. Donc $\nu = \mu^\Delta$ car $C - C$ est dense dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$.

Soit $\nu < \mu$, ν minimale : on a $\nu^\Delta < \nu$, donc $\nu = \nu^\Delta$ est portée par Δ puis $\nu = \mu^\Delta$.

Ce qui précède montre déjà que le système $(\mathbf{L}^1(\gamma), C, \Delta)$ s'apparente à un simplexe de Bauer. On va pousser plus loin l'analogie. D'ailleurs les simplexes de Bauer sont des cas particuliers de la théorie présente.

THEOREME 5. – *Soit* $\mathcal{L}^1(\gamma^\Delta)$ *l'espace des restrictions à* Δ *des éléments de* $\mathcal{L}^1(\gamma)$ *muni de la semi-norme :*

$$\gamma^\Delta(f) = \text{Inf}\,\{\gamma(v)/v \in \mathcal{L}^1(\gamma),\ v \geqslant |f| \text{ q.p. sur } \Delta\}.$$

Alors l'application $f \longmapsto H_f$ *(définition évidente) est un isomorphisme de* $\mathbf{L}^1(\gamma^\Delta)$ *sur le sous-espace* $\mathcal{H}^1 = C \cap (-C)$ *de* $\mathbf{L}^1(\gamma)$.

Démonstration. – On peut supposer $\gamma(\varphi) = \gamma^*(R|\varphi|)$ (semi-norme équivalente sur $\mathbf{L}^1(\gamma)$). Pour $\varphi \in C - C$, on a $|H_\varphi| \in -C$ et $R(|H_\varphi|) = H_{|\varphi|}$, d'où

$$\gamma(H_\varphi) = \gamma^*(R|H_\varphi|) = \gamma(H_{|\varphi|})$$
$$= \sup_{0 \leqslant \mu \leqslant \gamma} \int H_{|\varphi|}\, d\mu = \sup_{0 \leqslant \mu \leqslant \gamma} \mu^\Delta(|\varphi|) = \gamma^\Delta(\varphi),$$

où la dernière égalité est dûe au théorème de Hahn-Banach (on recopie un raisonnement de Mokobodzki). Ainsi $\varphi \longrightarrow H_\varphi$ se prolonge en isométrie de $\mathbf{L}^1(\gamma^\Delta)$ sur $\mathcal{H}^1$ (isométrie conservant l'ordre).

Remarque 6. – Le théorème 5 ressemble au théorème de résolutivité de Brelot. Supposons plus précisément que la semi-norme γ soit de la forme $\gamma(\varphi) = \int R|\varphi|\, d\tau$ pour une mesure τ, γ-intégrable. Soit σ l'unique mesure balayée de τ sur Δ. Supposons en outre les constantes dans $\mathcal{H}^1$ (cela entraîne que τ et σ sont bornées). La condition $0 \leqslant \mu \leqslant \gamma$ équivaut à $0 \leqslant \mu$ et $\mu \underset{c}{\prec} \tau$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\gamma^\Delta)$, on a ainsi $\gamma^\Delta(f) = \operatorname{Sup}\{\mu^\Delta(f) / 0 \leqslant \mu \leqslant \gamma\}$, soit $\gamma^\Delta(f) = \sigma(|f|)$ donc $\gamma^\Delta = N_1^\sigma$ et $\mathcal{L}^1(\gamma^\Delta) = \mathcal{L}^1(\sigma)$. En ce cas, on voit que toute $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$ admet un prolongement unique $H_f \in \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{L}^1(\gamma)$.

II. Effilement minimal.

Dans ce qui suit, on suppose que $\gamma(\varphi) = \int R(|\varphi|)\, d\tau$ (cf. remarque 6), et que les constantes sont dans $\mathcal{H}^1$. (Cela exclut l'exemple i) mais vaut pour les exemples ii), iii), iv)). On pose $\Omega = \hat{\Omega} \backslash \Delta$: Ω est un quasi-ouvert.

DEFINITION 7. – *Soit f une fonction $\mathcal{B}$-mesurable sur $\hat{\Omega}$. On dit que f est* C-*concave si :*

– *f est minorée q.p. par une fonction de $\mathcal{L}^1(\gamma)$,*

– *pour toutes mesures $\mu, \nu \geqslant 0$, γ-intégrables telles que $\mu \underset{c}{\prec} \nu$, on a $\int f d\mu \leqslant \int f d\nu$ $(\leqslant +\infty)$.*

PROPOSITION 8. – *Si u est quasi-s.c.i., minorée par une fonction de $\mathcal{L}^1(\gamma)$, alors il existe une fonction f notée* Ru *qui est la plus petite (classe de) fonction* C-*concave majorant u.*

Démonstration. – Soit φ_n une suite croissante, $\varphi_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, et $u = \sup_n \varphi_n$. Posons $f = \sup_n R\varphi_n$. f est évidemment C-concave. Soit g une C-concave, telle que $g \geqslant u$. On a $g \geqslant \varphi_n$ pour tout n. Soit $\mu \geqslant 0$, γ-intégrable. On a :

$$\int R\varphi_n \, d\mu = \operatorname{Sup} \left\{ \int \varphi_n \, d\nu \Big/ \begin{matrix} \nu \geqslant 0 \\ \nu \underset{c}{\prec} \mu \end{matrix} \right\} \leqslant \int g d\mu .$$

On en déduit $R\varphi_n \leqslant g$ q.p. grâce au théorème de capacitabilité de Choquet. On obtient alors $f \leqslant g$ q.p.

Evidemment, si $u \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, Ru coïncide avec l'ancienne définition.

DEFINITIONS 9. – *Soit p une fonction C-concave sur $\hat{\Omega}$. On dit que p est un pseudo-potentiel, si $p = 0$ q.p. sur Δ (donc $p \geqslant 0$ sur $\hat{\Omega}$) et si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, $\varphi \leqslant p$ sur Ω implique $\varphi \leqslant 0$ sur $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ quasi-frontière de Ω est incluse q.p. dans Δ).*

On dit que $E \subset \Omega$ est effilé suivant $e \subset \Delta$ s'il existe un pseudo-potentiel p majorant $H_e = H_{1_e}$ q.p. sur E.

LEMME 10. – *Si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, $\varphi \geqslant 0$, alors $\omega = \{\varphi > 1\} \cap \Omega$ est effilé suivant $e = \{\varphi = 0\} \cap \Delta$.*

Démonstration. – Soit $p = R(1_\omega . H_e)$: p est C-concave et vaut 0 sur Δ, d'après la proposition 8. Soit $\theta \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, $\theta \leqslant p$ q.p. sur Ω. On a $\theta \leqslant H_e$ q.p. sur Ω donc aussi sur $\overline{\Omega}$ (quasi-adhérence), donc $\theta \leqslant 1_e$ sur $\Delta \cap \overline{\Omega} = \partial\Omega$. On a $H_e \leqslant \varphi$ sur ω, donc $p \leqslant R\varphi$ sur $\hat{\Omega}$ puis $\theta \leqslant R\varphi$ sur $\overline{\Omega}$ comme ci-dessus ($R\varphi$ est quasi-s.c.s.), d'où $\theta \leqslant \varphi$ sur $\partial\Omega$ et finalement $\theta \leqslant \varphi \wedge 1_e = 0$ sur Δ.

THEOREME 11 (de type Fatou). – *Si $f = p + \varphi$ où p est un pseudo-potentiel fini q.p. et $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, pour tous $\eta > \epsilon > 0$, l'ensemble $E = \{|f - t| > \eta\} \cap \Omega$ est effilé suivant $e = \{|f - t| \leqslant \epsilon\} \cap \Delta$.*

Démonstration. – Soit η' tel que $\eta > \eta' > \epsilon$.

Posons $\omega_1 = \{|\varphi - t| > \eta'\} \cap \Omega$ et $E_2 = \{p > \eta - \eta'\} \cap \Omega$. On a $E \subset \omega_1 \cup E_2$ et il suffit de montrer que ω_1 et E_2 sont effilés suivant e. Cela résulte de la définition 9 pour E_2. Pour ω_1, on utilise le lemme 10 en remplaçant φ par $\dfrac{(|\varphi - t| - \epsilon)^+}{\eta'}$ car $f = \varphi$ q.p. sur Δ.

Remarque 12. – Le résultat subsiste pour f quasi-continue à valeurs q.p. finies ou non.

III. Application à la frontière de Martin.

On reprend l'exemple iv) du 1. On vérifie sans peine que la frontière de Silov $\widetilde{\Delta}$ de C vaut $\widetilde{\Omega}\backslash\Omega$ à un ensemble polaire près (il existe $u \in -C_0$ telle que $\widetilde{\Delta} = \{u = Ru\}$). Si u et $v \in -C$ et $u = v$ q.p. sur Ω, alors $Ru = Rv$, donc $u = v$ sur $\widetilde{\Delta}$, par suite $\widetilde{\Delta}$ ne contient aucun quasi-ouvert non $\widetilde{\gamma}$-polaire. Ainsi $\partial\Omega = \widetilde{\Delta}$. Soit $\widetilde{\sigma}$ l'unique balayée de τ sur $\widetilde{\Delta}$. L'espace $\mathcal{H}^1$ est isomorphe à $\mathbf{L}^1(\widetilde{\sigma})$ avec conservation de la fonction 1 et conservation de l'ordre : la mesure $\widetilde{\sigma}$ sur $\widetilde{\Delta}$ est donc isomorphe à la mesure σ sur Δ_1 ou Δ. Posons donc $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta$, et si $f \in \mathcal{L}^1(\widetilde{\gamma})$, posons :

$$\hat{f} = \begin{cases} f & \text{sur } \Omega \\ f^* & \text{sur } \Delta \end{cases}$$

où $f^* \in \mathcal{L}^1(\sigma)$ est un représentant de l'image de $f|_{\widetilde{\Delta}}$ dans l'isomorphisme de $\mathbf{L}^1(\widetilde{\sigma})$ sur $\mathbf{L}^1(\sigma)$. Désignons par $\mathcal{L}^1(\gamma)$ l'ensemble des fonctions $\hat{f}$ obtenues de la sorte, et pour $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, posons $\gamma(\hat{f}) = \widetilde{\gamma}(f)$. Alors le couple $(\mathcal{L}^1(\gamma), \gamma)$ vérifie toutes les propriétés requises au n° 1. L'espace $\mathbf{L}^1(\gamma)$ correspondant s'identifie à $\mathbf{L}^1(\widetilde{\gamma})$. Les quasi-topologies sur $\hat{\Omega}$ et $\widetilde{\Omega}$ sont isomorphes. On peut remarquer que $\Delta\backslash\Delta_1$ est γ-polaire et σ-négligeable. On a $\partial\Omega = \Delta$. On vérifie immédiatement si τ est assez régulière qu'un ensemble $P \subset \hat{\Omega}$ est γ-polaire si et seulement si $P \cap \Omega$ est polaire au sens de Brelot et $P \cap \Delta$ est σ-négligeable.

LEMME 13. – *Soit $f \geqslant 0$ sur Ω. On note $\mathcal{B}f$ la "balayée" de f au sens de Brelot sur Ω. Alors pour toute f q.s.c.i. $\geqslant 0$ sur $\hat{\Omega}$, les fonctions $\mathcal{B}(1_\Omega . f)$ et* R*f coïncident q.p. sur Ω.*

Démonstration. – C'est évident si $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ et $1_\Omega . f$ appartient à $\mathcal{R}$ (différences de surharmoniques continues bornées). Si seulement $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, il est clair que $1_\Omega . \mathrm{R}f$ vaut une surharmonique sauf peut être sur un ensemble semi-polaire dans Ω. Soit $\hat{\mathrm{R}}f$ sa régularisée surharmonique dans Ω. On a $\hat{\mathrm{R}}f = \mathrm{R}f$ μ-p.p. sur Ω, pour toute mesure μ sur Ω ne chargeant pas les semi-polaires, donc $\hat{\mathrm{R}}f \leqslant \mathrm{R}f$ q.p. sur Ω car $\mathrm{R}f$ est quasi-continue. Posons alors pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ et pour $\mu \geqslant 0$, γ-intégrable ne chargeant que Ω :

$$\mathrm{C}_1(\varphi) = \int \mathrm{R}(|\varphi|)\, d\mu\,, \quad \mathrm{C}_2(\varphi) = \int \hat{\mathrm{R}}(|\varphi|)\, d\mu\,,$$
$$\mathrm{C}_3(\varphi) = \int \mathcal{B}(|\varphi| . 1_\Omega)\, d\mu\,.$$

On a $\mathrm{C}_2 \leqslant \mathrm{C}_1$ sur $\mathrm{L}^1(\gamma)$, donc par continuité $\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1$ puisque ces deux fonctions sont continues et coïncident sur $\mathcal{R}$. Ainsi $\mathrm{R}(|\varphi|) = \hat{\mathrm{R}}(|\varphi|)$ μ-q.p. puis (μ arbitraire) $\mathrm{R}(|\varphi|) = \hat{\mathrm{R}}(|\varphi|)$ q.p. sur Ω grâce au théorème de capacitabilité de Choquet. On en déduit facilement $\hat{\mathrm{R}}(|\varphi|) \geqslant \mathcal{B}(1_\Omega . |\varphi|)$ q.p. sur Ω pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, d'où $\mathrm{C}_3 \leqslant \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1$, et comme ci-dessus $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1$ et

$$\mathcal{B}(1_\Omega . |\varphi|) = \hat{\mathrm{R}}(|\varphi|) = \mathrm{R}(|\varphi|) \text{ q.p. sur } \Omega\,.$$

Si f est q.s.c.i. $\geqslant 0$, soit $\varphi_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, une suite croissante tendant vers f. On a $\mathrm{R}f = \sup\limits_n \mathrm{R}\varphi_n$ q.p., d'où $\mathrm{R}f = \hat{\mathrm{R}}f \leqslant \mathcal{B}(1_\Omega . f)$ q.p. sur Ω. Or, comme ci-dessus $\hat{\mathrm{R}}f \geqslant \mathcal{B}(1_\Omega . f)$ q.p. sur Ω, d'où le résultat.

LEMME 14. – *Soient ω quasi-ouvert dans Ω, et $e \subset \Delta$, e σ-mesurable. Alors ω est effilé suivant e si et seulement si ω est effilé au sens minimal en σ-presque tout point $h \in e$.*

Démonstration. – On a $\mathrm{R}(1_\omega . \mathrm{H}_e) = \mathcal{B}(1_\omega . \mathrm{H}_e)$ q.p. sur Ω et est borné. Dire que $\mathrm{R}(1_\omega . \mathrm{H}_e)$ est un pseudo-potentiel équivaut alors à dire que $\mathcal{B}(1_\omega . \mathrm{H}_e)$ est un potentiel au sens de Brelot dans Ω. Or, on a d'après [6] : $\mathcal{B}(1_\omega . \mathrm{H}_e) = \int_e \mathcal{B}(1_\omega . h)\, d\sigma(h)$ donc $\mathcal{B}(1_\omega . \mathrm{H}_e)$ est un potentiel de Brelot si et seulement si $\mathcal{B}(1_\omega . h)$ est un potentiel pour σ-presque tout $h \in e$, c'est-à-dire si ω est effilé au sens minimal en σ-presque tout point $h \in e$.

COROLLAIRE 15 (Fatou-Naïm-Doob-Gowrisankaran). – *Si v est surharmonique $\geqslant 0$ v a une limite fine en σ-presque tout point $h \in \Delta_1$.*

Démonstration. – On se ramène au cas où v est bornée, donc $v = h + p$ avec h harmonique bornée et se laisse prolonger en $\tilde{h} \in \mathcal{H}^1$, et p prolongé en $\tilde{p}$ par 0 sur Δ devient un pseudo-potentiel. On applique alors le théorème 2 et le corollaire 14.

COROLLAIRE 16 (cf. aussi [5]). – *Pour* $h \in \Delta_1$, *soit* $\mathcal{F}_h$ *le filtre des complémentaires d'ensembles effilés en* h. *Soit* $\tilde{\Omega}$ *une compactification métrisable de* Ω *considérée 1, iv). Alors* $\mathcal{F}_h$ *converge dans* $\tilde{\Omega}$ *pour* σ*-presque tout* $h \in \Delta_1$. *De plus l'application* π *valant l'identité sur* Ω *et telle que* $\pi(h) = \mathrm{Lim}\, \mathcal{F}_h$ *pour* $h \in \Delta_1$, *qui est définie q.p. sur* $\hat{\Omega}$ *réalise l'isomorphisme des quasi-topologies de* $\hat{\Omega}$ *et* $\tilde{\Omega}$.

Démonstration. – C'est évident après le théorème 11 et le corollaire 14.

COROLLAIRE 17. – *Si* ω *est quasi-ouvert dans* $\hat{\Omega}$, *alors* $\omega \cap \Omega$ *est quasi-ouvert dans* Ω, *et pour* σ*-presque tout* $h \in \omega \cap \Delta_1)$, *on a* $\omega \in \mathcal{F}_h$.

Remarque 18. – Si l'axiome D est vérifié par le faisceau harmonique sur Ω on peut montrer que la propriété du corollaire 17 est caractéristique des ensembles quasi-ouverts et que l'on peut même remplacer "quasi-ouvert dans Ω" par "ensemble égal q.p. à un ensemble ouvert fin dans Ω". On voit ainsi comment le théorème de Fatou-Naïm-Doob-Gowrisankaran exprime seulement une propriété de quasi-continuité jusqu'à la frontière

Remarque 19. – Supposons Ω ouvert relativement compact dans un ouvert de Green. Alors comme au corollaire 16, $\mathcal{F}_h$ converge dans $\overline{\Omega}$ pour σ-presque tout $h \in \Delta_1$, et l'application π définie ainsi réalise un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{R}$. En ce cas Δ_1(ou Δ) et $\partial\Omega$ sont (quasi-)identifiables par π et $\pi(\sigma)$ qui vaut la mesure harmonique $\tau\Omega$ est isomorphe à σ.

IV. Sur les espaces $\mathcal{H}^p$.

Les hypothèses sont les mêmes qu'au I et l'on suppose de plus que la constante 1 est C-concave. $\mathcal{L}^\infty(\gamma)$ désigne l'espace des fonctions quasi-continues et bornées. La trace de $\mathcal{H}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma)$ sur Δ est alors exactement $\mathcal{L}^1(\gamma^\Delta) \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma^\Delta)$. On en déduit que $\mathcal{H}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma)$ est partout dense dans $\mathcal{H}^1$.

Soit p réel, $1 \leqslant p < +\infty$. Pour $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma) \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma)$, on pose $\gamma_p(\varphi) = \sqrt[p]{\gamma^*(|\varphi|^p)}$. On vérifie trivialement les propriétés a′) b′) c′) pour la semi-norme γ_p, et l'on pose $\mathcal{L}^p(\gamma) = \mathcal{L}^1(\gamma_p)$. Les ensembles polaires sont les mêmes que pour γ_1.

Si une suite φ_n *uniformément bornée* converge vers f dans $\mathbf{L}^1(\gamma)$; alors f est bornée, et la convergence a lieu dans $\mathbf{L}^p(\gamma)$. Il s'ensuit que $\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty$ est inclus et est partout dense dans $\mathbf{L}^p$, puis que $\mathbf{L}^p$ est de type dénombrable.

Si 1 est C-concave, on note C_p l'adhérence de $\mathrm{C} \cap \mathbf{L}^\infty$ dans $\mathbf{L}^p$. Les propriétés a″) b″) c″) d″) sont immédiates, et la frontière de Šilov Δ_p vaut Δ (il existe $u \in (-\mathrm{C}) \cap \mathbf{L}^\infty$, telle que $\Delta = \Delta_p = \{u = \mathrm{R}u\}$). On pose $\mathcal{H}^p = \mathrm{C}_p \cap (-\mathrm{C}_p)$, d'où l'isométrie de restriction de $\mathcal{H}^p$ à $\mathbf{L}^p(\gamma_p^\Delta, \Delta)$.

Supposons alors les hypothèses du II. Alors $\mathbf{L}^p(\gamma_p^\Delta)$ vaut $\mathbf{L}^p(\sigma)$, et $\mathcal{H}^p$ est un espace analogue à l'espace de Hardy classique. On note que $\mathcal{H}^p \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma)$ est dense dans $\mathcal{H}^p$ $(p < +\infty)$: les fonctions de $\mathcal{H}^p$ sont donc quasi-bornées au sens de Parreau.

V. Sur les harmoniques positives.

L'étude suivante est inspirée de [2].

Les hypothèses sont celles du II.

On dit que $h \geqslant 0$ sur $\hat{\Omega}$ est pseudo-harmonique si :

– h est quasi-continue finie q.p. sur $\hat{\Omega}$.

– pour toute $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, on a $\mathrm{R}(\varphi + h) = h + \mathrm{R}\varphi$.

On note $\mathcal{H}^+$ le cône des pseudo-harmoniques $\geqslant 0$ sur $\hat{\Omega}$: il contient $\mathcal{H}^{1+}$ et $\mathcal{H}^{1+} = \mathcal{H}^+ \cap \mathbf{L}^1(\gamma)$ contient aussi $\mathcal{H}^+ \cap \mathbf{L}^\infty(\gamma)$.

THEOREME 20. – *Soit* $h \in \mathcal{H}^+$, *et soit* φ *une fonction convexe sur* $[0, +\infty[$ $\varphi \geqslant 0$, *et* $\varphi(t)/t \longrightarrow +\infty$ *quand* $t \longrightarrow +\infty$. *On suppose que* $\varphi(h)$ *possède une majorante* C-*concave et* τ-*intégrable. Alors* h *et* $\mathrm{H}_{\varphi(h)}$ *sont dans* $\mathcal{H}^1$ *et* $\mathrm{H}_{\varphi(h)}$ *majore* $\varphi(h)$, *enfin* $\varphi(h)$ *est dans* $\mathcal{L}^1(\gamma)$.

Démonstration. – Il existe une suite croissante t_n tendant vers $+\infty$ telle que $t \leqslant \frac{\varphi(t)}{n} + t \wedge t_n$ pour tout $t \geqslant 0$. Soit v la majorante. On a : $h \leqslant v/n + h \wedge t_n$ donc h est τ-intégrable et aussi σ-intégrable. On a aussi : $h - h \wedge t_n \leqslant v/n$ donc $\mathrm{R}(h - h \wedge t_n) \leqslant v/n$ soit $h + \mathrm{R}(-(h \wedge t_n)) \leqslant v/n$ car $h \wedge t_n \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ et même $h \wedge t_n \in \mathrm{C}$, donc $\mathrm{R}(-(h \wedge t_n)) = -\mathrm{H}_{h \wedge t_n}$. On obtient $h \leqslant v/n + \mathrm{H}_{h\wedge t_n} \leqslant v/n + \mathrm{H}_h$ $(h \in \mathcal{L}^1(\sigma))$. Quand $n \longrightarrow +\infty$, on trouve $h \leqslant \mathrm{H}_h$ q.p. sur $\hat{\Omega}$. On a évidemment $\mathrm{H}_h \leqslant h$ q.p., donc $h = \mathrm{H}_h \in \mathcal{H}^1$.

Soit maintenant φ_n une suite croissante de fonctions convexes, linéaires au voisinage de $+\infty$ et telles que $\varphi = \sup\limits_n \varphi_n$. On a $\varphi_n(h) \leqslant \mathrm{A}_n \,.\, h + \mathrm{B}_n$ pour des constantes A_n et B_n bien choisies, donc $\varphi_n(h) \in \mathcal{L}^1(\gamma)$, et $\varphi_n(h) \leqslant \mathrm{H}_{\varphi_n(h)}$. Quand $n \longrightarrow +\infty$, $\mathrm{H}_{\varphi_n(h)}$ converge en croissant vers $\mathrm{H}_{\varphi(h)}$, donc aussi dans $\mathcal{L}^1(\tau)$ et par suite dans $\mathcal{H}^1$. On en déduit : $\varphi(h) = \sup\limits_n \varphi_n(h) \leqslant \sup\limits_n \mathrm{H}_{\varphi_n(h)} = \mathrm{H}_{\varphi(h)}$ et aussi $\varphi(h) \in \mathcal{L}^1(\gamma)$ car $\varphi(h)$ est quasi-continue $\leqslant \mathrm{H}_{\varphi(h)} \in \mathcal{H}^1$.

COROLLAIRE 21. – *Si* $h \in \mathcal{H}^+$ *et* $h^p \leqslant v$ *avec* $1 < p < +\infty$, v C-*concave* τ-*intégrable, alors* $h \in \mathcal{H}^p$.

En effet, ce qui précède montre que $\mathrm{H}_{h\wedge n}$ tend vers h dans $\mathcal{L}^p(\sigma)$ donc est de Cauchy dans $\mathcal{H}^p$.

Remarque 22. – Il ne semble pas facile d'étendre le théorème 20 à une famille de fonctions analogues aux sous-harmoniques faute d'une définition satisfaisante de telles fonctions.

VI. Retour sur l'exemple (iii) ($\hat{\Omega}$ simplexe métrisable).

On a vu que toute fonction u affine s.c.i. bornée était γ-quasi-continue, et que Δ frontière de Choquet de $\hat{\Omega}$ était quasi-fermée, et identique (à un polaire près) à la frontière de Šilov du cône C. En appliquant le théorème 3, on trouve :

THEOREME 23. – *Soit* $\mathcal{A}$ *l'espace des fonctions affines continues sur* $\hat{\Omega}$. $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathcal{H}^1$, *et la trace de* $\mathcal{A}$ *sur* Δ *est dense dans* $\mathbf{L}^1(\sigma)$. *De même pour* $1 \leqslant p < +\infty$, $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathcal{H}^p$ *et sa trace sur* Δ *est dense dans* $\mathbf{L}^p(\sigma)$.

Démonstration. – $\overline{\mathcal{A}}$ contient les affines s.c.s. bornées (cf. le lemme du I, 1, (iii)). Pour $u \in -C_0$, $Ru = H_u$ est affine s.c.s. bornée donc appartient à $\overline{\mathcal{A}}$. Donc $H_\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. De même si $1 \leqslant p < +\infty$.

COROLLAIRE 24. – *Soit* σ *une mesure portée par l'ensemble des points extrêmaux :* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathsf{L}^p(\sigma)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Démonstration. – On prend $\tau = \sigma$, et on applique le théorème 23.

PROPOSITION 25. – *Soit* h *fortement affine. Alors* $h \in \mathcal{H}^1$.

Démonstration. – Rappelons que h universellement mesurable bornée est dite fortement affine si $h(x) = \int h d\mu$ pour tout mesure $\geqslant 0$ de résultante ϵ_x (G. Mokobodzki). Si φ est universellement mesurable et bornée sur Δ, notons H'_φ son prolongement fortement affine. Un simple raisonnement de classes monotones prouve que $H_\varphi = H'_\varphi$ q.p. pour toute φ borélienne bornée, puis pour toute φ, universellement mesurable et bornée sur Δ, par encadrement. On obtient alors le résultat en remarquant que h vaut $H'_{h|\Delta}$.

PROPOSITION 26 (Réciproque). – *Soit* $u \in \mathcal{H}^1 \cap \mathcal{L}^\infty(\gamma)$, *alors* u *vaut q.p. une fonction fortement affine.*

Démonstration. – Soit f borélienne sur Δ valant u σ-p.p., et f bornée. On a q.p. : $u = H_f = H'_f$ qui est borélienne fortement affine.

Remarque 27. – On pourrait naturellement étendre cette théorie à des cas plus généraux que celui des simplexes métrisables compacts d'espaces localement convexes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Montréal, Les Presses de l'Université, 1966.

[2] M. BRELOT, Allure des potentiels à la frontière, et fonctions fortement sous-harmoniques, Séminaire de th. du potentiel, 14e-15e année, I.H.P., 1970-72.

[3] D. FEYEL, Espaces de Banach fonctionnels adaptés. Quasi-topologies et balayage, Séminaire th. du potentiel. Lectures notes, n° 3, 1976-77, Springer, Vol. 681.

[4] D. FEYEL et A. de La PRADELLE, Cônes locaux et faisceaux de fonctions quasi-continues (à paraître). Séminaire th. du potentiel. Lectures notes, n° 4, 1977-78, Springer.

[5] K. GOWRISANKARAN, Fatou-Naïm-Doob limit theorems in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 16, fasc. 2 (1966), 455.

[6] R.M. HERVE, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 12, (1962), 415.

[7] G. MOKOBODZKI, Structure des cônes de potentiels, Séminaire Bourbaki, n° 377, 1969-70.

[8] G. MOKOBODZKI, Représentation intégrale, dans les cônes convexes au moyen des réduites, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 15 (1965), 103.

[9] L. NAIM, Sur le rôle de la frontière de Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, t. 7 (1957), 183.

[10] L. LUMER-NAIM, $\mathcal{H}^p$-spaces of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 17, 2 (1967), 425.

[11] M. PARREAU, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 3 (1951), 103.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1978.

Denis FEYEL,
Equipe d'Analyse
Université Pierre et Marie Curie
Tour 46 – 4e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.