ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ UNTERBERGER

Oscillateur harmonique et opérateurs pseudodifférentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 201-221

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 201-221

OSCILLATEUR HARMONIQUE ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

par André UNTERBERGER

On considère sur l'espace $\mathbf{R}^\nu$ l'oscillateur harmonique canonique $\Sigma\, \pi x_j^2 - \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ dont le symbole, dans la quantification de Weyl (correspondance entre symboles et opérateurs dont la définition est rappelée plus bas), est la fonction $\pi(|x|^2 + |\xi|^2)$ sur l'espace de phase $\mathbf{R}^{2\nu}$. L'étude du semi-groupe engendré par cet opérateur montre que l'opérateur de symbole $\exp - 2\pi s(|x|^2 + |\xi|^2)$ est, pour $0 < s \leqslant 1$, un opérateur positif, alors que pour $s > 1$ cet opérateur est positif sur les états propres de niveau d'énergie pair de l'oscillateur mais négatif sur les autres. Voici un autre énoncé de ce phénomène. Si A est l'opérateur de symbole a, et $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)$ est normalisée, la mécanique ondulatoire interprète $(\mathrm{A}u, u)$ comme la valeur de l'observable A sur le système dont la fonction d'onde est u : c'est une forme linéaire sur les a convenables, qui peut donc s'écrire $\iint a(x, \xi)\, \mathrm{H}(u, u, x, \xi)\, dx\, d\xi$, où la fonction $\mathrm{H}(u, u)$, qui est définie sur l'espace de phase, s'appelle la fonction de Wigner de u. On peut regretter que cette fonction ne soit pas toujours positive, sans quoi l'opérateur de symbole a serait pour a réel, au sens des opérateurs symétriques, une fonction croissante de a, ce qui faciliterait bien la vie de l'analyste. Si l'on effectue une régularisation gaussienne de $\mathrm{H}(u, u)$, on obtient une fonction toujours positive pourvu que la gaussienne qui sert à régulariser soit suffisamment étalée (en un sens bien sûr lié à la forme symplectique sur $\mathbf{R}^{2\nu}$, autrement dit au principe d'incertitude) : ce fait, observé par N.G. De Bruijn [2](*), est équivalent à la remarque faite plus haut sur l'oscillateur harmonique. Il est tentant, pour étudier l'opérateur de symbole a, d'approcher

(*) et, indépendamment, par D. Iagolnitzer : Matrice S et description classique des interactions, thèse, Saclay, 1966.

(par régularisation) ce symbole par des sommes de gaussiennes, qui bien sûr seront très peu étalées : heureusement, une inégalité très simple (1.9) permettra de passer "du bon côté de la constante de Planck" où ne figurent plus que des opérateurs positifs.

C'est le programme que nous remplissons dans cet article : au lieu de considérer, cependant, un seul oscillateur harmonique, on considère une "géométrie" sur l'espace de phase, i.e. un champ de normes symplectiques, d'où résulte par quantification un champ d'oscillateurs harmoniques. A une telle géométrie est naturellement associée une classe de symboles d'ordre 0 : le premier problème étudié est la recherche de conditions sur la géométrie (être d'ordre fini, déf. 2.1) permettant d'affirmer que les opérateurs associés sont bornés sur $L^2(\mathbf{R}^\nu)$: à part la régularisation indiquée plus haut, qui est décrite dans le § 3, la principale difficulté consiste à donner une borne pour certains opérateurs positifs R_ϵ, canoniquement liés à la géométrie : ce point est l'objet du § 2.

Signalons que la méthode employée démontre du même coup, bien que nous n'ayons pas explicité ce point, l'inégalité de Gårding. Par ailleurs, L. Hörmander [3] a récemment étudié un calcul symbolique lié à des champs de normes que l'on pourrait qualifier de sous-symplectiques (i.e. $g \leqslant g^\sigma$ avec ses notations), généralisant des résultats antérieurs de R. Beals [1]. Les résultats du présent article sont supérieurs à ceux de L. Hörmander dans le cas des champs de normes symplectiques, puisque la condition de métrique tempérée y est remplacée par la condition beaucoup plus faible apparaissant dans la définition 2.1. Tenant compte du fait que la norme moyenne entre une norme et sa duale relativement à la forme symplectique est une norme symplectique, on peut voir que nos résultats sur la continuité L^2 contiennent toujours ceux de R. Beals [1] ; mais dans le cas sous-symplectique, ils ne semblent pas toujours comparables à ceux de L. Hörmander.

Un deuxième point traité dans cet article (§ 4) est une méthode de microlocalisation (en un sens non asymptotique) répondant au problème de la décomposition d'une fonction arbitraire de $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ suivant les états propres de la famille d'oscillateurs harmoniques attachée au champ de normes symplectiques donné. La justification de cette méthode "spectroscopique" est le fait que, pour une géométrie d'ordre fini, on peut se contenter de ne faire intervenir que des états propres de niveau d'énergie borné. Nous avons eu connaissance, postérieurement à l'envoi de ce papier, d'un article de A. Cordoba et C. Fefferman [5], où ces auteurs utilisent dans un cas particulier (celui de géométries liées aux symboles classiques) un procédé analogue : il apparaît toutefois chez eux un terme d'erreur important (il n'y en a aucun ici) dû au fait qu'ils ne retiennent que les états fondamentaux.

1. Quelques notations et formules.

On considère l'espace $\mathbf{R}^\nu$, l'espace de phase $\mathbf{R}^{2\nu}$ muni de la forme symplectique définie par $[(x\,,\xi)\,,(y\,,\eta)] = -\langle x\,,\eta\rangle + \langle y\,,\xi\rangle$, et la quantification de Weyl $\mathrm{O}p_{1/2}$ définie, pour $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2\nu})$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$, par

$$\mathrm{O}p_{1/2}(a)\,u(x) = \iint a\Big(\frac{x+y}{2}\,,\xi\Big)\,e^{2i\pi\langle x-y,\xi\rangle}\,u(y)\,dy\,d\xi\,. \quad (1.1)$$

On a aussi

$$(\mathrm{O}p_{1/2}(a)\,u\,,v) = \iint a(x\,,\xi)\,\mathrm{H}(u\,,v\,,x\,,\xi)\,dx\,d\xi\,, \quad (1.2)$$

où $\mathrm{H}(u\,,v)$ est la fonction de Wigner définie par

$$\mathrm{H}(u\,,v\,,x\,,\xi) = 2^\nu \int u(x+z)\,\overline{v}(x-z)\,e^{-4i\pi\langle z,\xi\rangle}\,dz\,. \quad (1.3)$$

Les grandes lettres X, Y, Z,... désigneront toujours des points de l'espace de phase $\mathbf{R}^{2\nu}$. On appellera base symplectique de $\mathbf{R}^{2\nu}$ toute base $(\mathrm{V}_j)_{1\leqslant j\leqslant 2\nu}$ vérifiant les relations $[\mathrm{V}_j\,,\mathrm{V}_k] = \epsilon_j\,\delta_{j,k\pm\nu}$ avec $k\pm\nu \in [1\,,2\nu]$, $\epsilon_j = -1$ si $j \leqslant \nu$, $\epsilon_j = 1$ si $j \geqslant \nu+1$. Autrement dit, une base symplectique est une base dont la matrice de passage, relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^{2\nu}$, est une matrice symplectique. Rappelons que l'équation du groupe symplectique est $\mathrm{S}'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{S} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, les blocs intervenant dans cette formule étant des carrés de rang ν. Une norme sur $\mathbf{R}^{2\nu}$ sera dite symplectique si elle est euclidienne et admet une base orthonormale qui est en même temps une base symplectique.

Nous utiliserons constamment la formule métaplectique, due à I. Segal : il existe un homomorphisme $\mathrm{M} \longmapsto \widetilde{\mathrm{M}}$ du groupe métaplectique $Mp(\nu)$ *sur* le groupe symplectique $Sp(\nu)$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2\nu})$, on ait

$$\mathrm{M}\, \mathrm{O}p_{1/2}(a)\,\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{O}p_{1/2}(a \circ \widetilde{\mathrm{M}}^{-1})\,. \tag{1.4}$$

Une formule équivalente est relative aux fonctions de Wigner : si $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{\nu})$, on a

$$\mathrm{H}(\mathrm{M}u, \mathrm{M}v) = \mathrm{H}(u, v) \circ \widetilde{\mathrm{M}}^{-1}\,. \tag{1.5}$$

En introduisant également, pour tout $(x^0, \xi^0) \in \mathbf{R}^{2\nu}$, la transformation $\tau = \tau_{x^0, \xi^0}$ définie par $\tau u(x) = u(x - x^0)\, e^{2i\pi\langle x, \xi^0\rangle}$ (qu'on peut appeler translation de phase), puis le groupe G engendré par ces transformations et les transformations métaplectiques, on peut étendre l'homomorphisme $\mathrm{M} \longmapsto \widetilde{\mathrm{M}}$ en un homomorphisme, encore surjectif et vérifiant (1.4) et (1.5), du groupe G vers le groupe des transformations symplectiques affines de $\mathbf{R}^{2\nu}$, i.e. le groupe engendré par $Sp(\nu)$ et les translations de $\mathbf{R}^{2\nu}$.

Pour toute norme symplectique $\|\mathrm{X}\|_1$ sur $\mathbf{R}^{2\nu}$ (on réservera la notation $\|\mathrm{X}\|_0$ à la norme canonique), on appellera oscillateur harmonique associé l'opérateur $\mathrm{O}p_{1/2}(\pi\, \|\mathrm{X}\|_1^2)$.

Pour $\zeta > 0$, et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu})$, on a la formule classique

$$\exp - \pi\zeta\, \mathrm{O}p_{1/2}(\|\mathrm{X}\|_0^2)\, u(x)$$
$$= (sh\, \zeta)^{-\nu/2} \int u(y) \exp - \frac{\pi}{sh\, \zeta} \{(|x|^2 + |y|^2)\, ch\, \zeta - 2(x, y)\}\, dy\,,$$

d'où résulte que le symbole (dans la quantification de Weyl) de l'opérateur $\exp - \pi\zeta\, \mathrm{O}p_{1/2}(\|\mathrm{X}\|_0^2)$ est $\left(ch\, \dfrac{\zeta}{2}\right)^{-\nu} \exp - 2\pi\, th\, \dfrac{\zeta}{2}\, \|\mathrm{X}\|_0^2$.

A l'aide de la formule métaplectique, on a aussi, pour toute norme symplectique :

$$\mathrm{O}p_{1/2}\left(\exp - 2\pi\, th\, \frac{\zeta}{2}\, \|\mathrm{X}\|_1^2\right) = \left(ch\, \frac{\zeta}{2}\right)^{\nu} \exp - \pi\zeta\, \mathrm{O}p_{1/2}(\|\mathrm{X}\|_1^2)\,, \tag{1.6}$$

formule valable également pour ζ complexe tel que $\mathrm{R}e\, \zeta > 0$. Désignons, pour tout entier $j \geqslant 0$, par B_1^j l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace des fonctions propres de l'oscillateur harmonique $\mathrm{O}p_{1/2}(\pi\, \|\mathrm{X}\|_1^2)$ associées à la valeur propre $\dfrac{\nu}{2} + j$. D'après les propriétés des fonctions d'Hermite, on a

$$1 = \sum_j B_1^j \quad \text{et} \quad Op_{1/2}(\pi \| X \|_1^2) = \sum_j \left(\frac{\nu}{2} + j\right) B_1^j \,,$$

d'où (si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$) :

$$\left(Op_{1/2}\left(\exp - 2\pi\, th\, \frac{\zeta}{2} \| X \|_1^2\right) u \,, u\right)$$
$$= \left(ch\, \frac{\zeta}{2}\right)^\nu \sum_{j \geqslant 0} e^{-\left(\frac{\nu}{2}+j\right)\zeta} (B_1^j u \,, u) \,, \tag{1.7}$$

formule que l'on peut écrire aussi, pour $\mathrm{Re}\, z > 0$:

$$(Op_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi z \| X \|_1^2}) u \,, u) = \left(\frac{2}{1+z}\right)^\nu \sum_{j \geqslant 0} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^j (B_1^j u \,, u) \,. \tag{1.8}$$

Notons en particulier la conséquence suivante de cette formule : si s est réel, $0 < s \leqslant 1$, on a

$$\left| \left(Op_{1/2}\left(\left(\frac{2}{s}\right)^\nu e^{-2\pi s^{-1} \| X \|_1^2}\right) u \,, u\right) \right| \leqslant (Op_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi s \| X \|_1^2}) u \,, u) \,. \tag{1.9}$$

La formule (1.8) est due essentiellement, pour $\nu = 1$, à N.G. De Bruijn [2].

2. Champs de normes symplectiques.

DEFINITION 2.1. – *Soit* $Y \longmapsto \| \ \|_Y$ *un champ de normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *et soit* N *un nombre réel : nous dirons que ce champ est d'ordre* N *si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(i) *il existe* $C > 0$ *telle que, quels que soient* X, Y *et* $Z \in \mathbf{R}^{2\nu}$, *l'inégalité* $\| Y - X \|_X \leqslant C^{-1}$ *entraîne* $\| Z \|_Y \leqslant C \| Z \|_X$

(ii) *l'opérateur (sur* $L^2(\mathbf{R}^{2\nu})$*) de noyau*

$$K(Y \,, Y') = (1 + \| Y' - Y \|_{Y,Y'}^2)^{-N} \,,$$

avec

$$\| Z \|_{Y,Y'}^2 = \inf_{Z_1 + Z_2 = Z} (\| Z_1 \|_Y^2 + \| Z_2 \|_{Y'}^2) \,,$$

est borné.

La condition (i) est supposée vérifiée également par R. Beals [1], L. Hörmander [3] ; la condition (ii) est plus faible que l'hypothèse (3.7) de L. Hörmander [3] dans le cas où $g = g^\sigma$ avec les notations de cet auteur, et non directement comparable en général.

LEMME 2.1. — *Pour tout* $\epsilon \in]0,1]$, *définissons* $\epsilon' \in]0,1]$ *par l'égalité* $\epsilon = \dfrac{2\epsilon'}{1+\epsilon'^2}$, *et posons*

$$L_{\epsilon,Y} = Op_{1/2}(2^{\nu/2}(1+\epsilon'^2)^{\nu/2}\, e^{-2\pi\epsilon'\|X-Y\|_Y^2}),$$

de sorte que, R_ϵ *étant défini par*

$$R_\epsilon = \int Op_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi\epsilon\|X-Y\|_Y^2})\, dY, \tag{2.1}$$

on a l'identité $$R_\epsilon = \int L_{\epsilon,Y}^2\, dY.$$

Si Y *et* Y' *sont deux points de* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *la norme (sur* $L^2(\mathbf{R}^\nu)$) *de l'opérateur* $L_{\epsilon,Y}\, L_{\epsilon,Y'}$ *vérifie l'inégalité*

$$\|L_{\epsilon,Y}\, L_{\epsilon,Y'}\| \leqslant \exp - \pi\epsilon\, \|Y'-Y\|_{Y,Y'}^2.$$

Preuve. — En posant $\epsilon' = th\,\dfrac{\zeta}{2}$ (ζ réel), on a, grâce à (1.6), l'identité

$$L_{\epsilon,Y} = 2^{\nu/2}(ch\,\zeta)^{\nu/2} \exp - \pi\zeta\, Op_{1/2}(\|X-Y\|_Y^2), \tag{2.2}$$

d'où

$$\begin{aligned} L_{\epsilon,Y}^2 &= Op_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi\, th\,\zeta\|X-Y\|_Y^2}) \\ &= Op_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi\epsilon\|X-Y\|_Y^2}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion.

Soit $a(X)$ le symbole (dans la quantification de Weyl) de l'opérateur $L_{\epsilon,Y}\, L_{\epsilon,Y'}$. On a

$$a(X) = 2^{3\nu}(1+\epsilon'^2)^\nu \iint e^{-2\pi\epsilon'\|Z_1-Y\|_Y^2}\, e^{-2\pi\epsilon'\|Z_2-Y'\|_{Y'}^2}\, e^{-4i\pi[Z_1-X,Z_2-X]}\, dZ_1\, dZ_2\,.$$

On commence par remplacer $a(X)$ par $a_1(X) = a\left(X + \dfrac{Y+Y'}{2}\right)$, ce qui ne change pas la norme de l'opérateur.

Dans le même temps, on effectue le changement de variables

$$Z_1 = (2\epsilon')^{-1/2} S + \frac{T}{2} + \frac{Y+Y'}{2}$$

$$Z_2 = (2\epsilon')^{-1/2} S - \frac{T}{2} + \frac{Y+Y'}{2}\,,$$

ce qui donne

$$a_1(X) = 2^{2\nu}(1+\epsilon'^2)^\nu \epsilon'^{-\nu} \int dT$$

$$\int \exp - \pi \left\{ \| S + \left(\frac{\epsilon'}{2}\right)^{1/2} (T + Y' - Y) \|_Y^2 + \| S - \left(\frac{\epsilon'}{2}\right)^{1/2} (T + Y' - Y) \|_{Y'}^2 \right\}$$
$$e^{4i\pi(2\epsilon')^{-1/2}[S,T]}\, e^{-4i\pi[X,T]}\, dS\,.$$

On pose

$$a_2(X) = 2^\nu (1+\epsilon'^2)^\nu \epsilon'^{-\nu}$$

$$\int \exp - \pi \left\{ \| S + \left(\frac{\epsilon'}{2}\right)^{1/2} (X + Y' - Y) \|_Y^2 + \| X - \left(\frac{\epsilon'}{2}\right)^{1/2} (X + Y' - Y) \|_{Y'}^2 \right\}$$
$$e^{4i\pi(2\epsilon')^{-1/2}[S,X]}\, dS\,,$$

de sorte que

$$a_1(X) = 2^\nu \int a_2(T)\, e^{-4i\pi[X,T]}\, dT = (a_2 \# 2^{-\nu}\delta)(X)\,,$$

où δ est la masse de Dirac sur l'espace de phase, et où $\#$ désigne la composition des symboles. Comme $2^{-\nu}\delta$ est le symbole de l'opérateur $u \longmapsto \check{u}$, avec $\check{u}(x) = u(-x)$, on voit que $Op_{1/2}(a_1)$ et $Op_{1/2}(a_2)$ ont la même norme.

Introduisons l'isomorphisme σ du dual de $\mathbf{R}^{2\nu}$ sur $\mathbf{R}^{2\nu}$ défini par l'identité $\langle X, \Xi \rangle = -[X, \sigma\Xi]$. (2.3)

La formule (1.3), appliquée dans le cas de deux fonctions sur l'espace de phase, montre que a_2 n'est autre que la fonction de Wigner

$$a_2(X) = 2^{-\nu}(1+\epsilon'^2)^\nu \epsilon'^{-\nu}\, H(e^{-\pi\|\ \|_Y^2}, e^{-\pi\|\ \|_{Y'}^2};$$
$$\left(\frac{\epsilon'}{2}\right)^{1/2} (X + Y' - Y), (2\epsilon')^{-1/2}\sigma^{-1}X)\,. \quad (2.4)$$

Soit $\det Q_{Y,Y'}$ le déterminant de la forme quadratique $Z \longmapsto \|Z\|_{Y,Y'}^2$ introduite dans la définition 2.1. On a alors (voir appendice) :

$$|(H(e^{-\pi\|\ \|_Y^2}, e^{-\pi\|\ \|_{Y'}^2}, X, \sigma^{-1}Z)|$$
$$= 2^{2\nu}(\det Q_{Y,Y'})^{1/2} \exp - 4\pi \{ \|X\|_{Y,Y'}^2 + \|Z\|_{Y,Y'}^2 \}\,,$$

d'où

$$|a_2(X)| = 2^\nu (1+\epsilon'^2)^\nu \epsilon'^{-\nu} (\det Q_{Y,Y'})^{1/2}$$
$$\exp - 2\pi(\epsilon' \|X + Y' - Y\|_{Y,Y'}^2 + \epsilon'^{-1} \|X\|_{Y,Y'}^2)\,. \quad (2.5)$$

En utilisant l'inégalité élémentaire

$$\| Op_{1/2}(a_2) \|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leqslant \|a_2\|_{L^1}\,,$$

on obtient

$$\| \mathrm{O}p_{1/2}(a_2)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2)} \leqslant \exp - \frac{2\pi\epsilon'}{1+\epsilon'^2} \|\mathrm{Y}'-\mathrm{Y}\|^2_{\mathrm{Y},\mathrm{Y}'} ,$$

ce qui termine la preuve du lemme 2.1.

THEOREME 2.1. – *Soit* $\mathrm{Y} \longmapsto \| \ \|_{\mathrm{Y}}$ *un champ de normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *d'ordre* N, *et soit* $k > \mathrm{N}$. *L'opérateur* A *défini par*

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \epsilon^{k-1}\, \mathrm{R}_\epsilon \, d\epsilon , \tag{2.6}$$

où R_ϵ *est défini par* (2.1), *est borné sur* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)$.

Preuve. – $\mathrm{L}_{\epsilon,\mathrm{Y}}$ a été défini dans le lemme 2.1, et l'on pose

$$\mathrm{L}_{th\,\zeta,\mathrm{Y}} = (1 + e^{-2\zeta})^{\nu/2}\, \mathrm{M}^\zeta_{\mathrm{Y}} \tag{2.7}$$

avec, grâce à (2.2) :

$$\mathrm{M}^\zeta_{\mathrm{Y}} = e^{\frac{\nu\zeta}{2}} \exp - \pi\zeta\, \mathrm{O}p_{1/2}(\|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\|^2_{\mathrm{Y}}) . \tag{2.8}$$

Pour tout $\theta \in]0,\zeta[$, et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$, on a

$$\|\mathrm{R}_{th\frac{\zeta}{2}}\, u\|^2 = \|\Big(\int \mathrm{L}^2_{th\frac{\zeta}{2},\mathrm{Y}}\, d\mathrm{Y}\Big) u\|^2$$

$$= (1+e^{-\zeta})^{2\nu} \Big(\Big(\iint \mathrm{M}^\zeta_{\mathrm{Y}}\, \mathrm{M}^\zeta_{\mathrm{Y}'}\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Y}'\Big) u , u\Big)$$

$$\leqslant (1+e^{-\zeta})^{2\nu} \iint \|\mathrm{M}^{\zeta-\theta}_{\mathrm{Y}}\, \mathrm{M}^{\zeta-\theta}_{\mathrm{Y}'}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2)}\, \|\mathrm{M}^\theta_{\mathrm{Y}'} u\|\, \|\mathrm{M}^\theta_{\mathrm{Y}} u\|\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Y}'.$$

Compte tenu de l'inégalité élémentaire

$$(1+e^{-\zeta})^2 \leqslant (1+e^{-2\theta})(1+e^{-2(\zeta-\theta)}) ,$$

on a aussi

$$\|\mathrm{R}_{th\frac{\zeta}{2}}\, u\|^2 \leqslant \iint \|\mathrm{L}_{th(\zeta-\theta),\mathrm{Y}}\, \mathrm{L}_{th(\zeta-\theta),\mathrm{Y}'}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2,\mathrm{L}^2)}$$

$$\|\mathrm{L}_{th\,\theta,\mathrm{Y}}\, u\|\, \|\mathrm{L}_{th\,\theta,\mathrm{Y}'} u\|\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Y}' .$$

D'après le lemme 2.1, on a donc

$$\|\mathrm{R}_{th\frac{\zeta}{2}}\, u\|^2 \leqslant \iint e^{-\pi(th(\zeta-\theta))\,\|\mathrm{Y}'-\mathrm{Y}\|^2_{\mathrm{Y},\mathrm{Y}'}}$$

$$\|\mathrm{L}_{th\,\theta,\mathrm{Y}}\, u\|\, \|\mathrm{L}_{th\,\theta,\mathrm{Y}'}\, u\|\, d\mathrm{Y}\, d\mathrm{Y}' . \tag{2.9}$$

Soit $\mathrm{C}_1 > 0$ telle que l'on ait, pour tout $\zeta \in [0,1]$:

$$\frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k+N-1}}{2\,ch^2\,\frac{\zeta}{2}} \leqslant C_1 \int_0^{\zeta} \frac{(th(\zeta-\theta))^{N-1}\,(th\,\theta)^{k-1}}{ch^2(\zeta-\theta)\,ch^2\,\theta}\,d\theta\,. \tag{2.10}$$

En notant que l'on a, pour une certaine constante $C_2 > 0$:

$$\int_\theta^\infty \frac{(th(\zeta-\theta))^{N-1}}{ch^2(\zeta-\theta)}\,e^{-\pi(th(\zeta-\theta))\,\|Y'-Y\|^2_{Y,Y'}}\,d\zeta \leqslant C_2(1+\|Y'-Y\|^2_{Y,Y'})^{-N}\,, \tag{2.11}$$

on obtient, à l'aide de (2.9) et (2.10) :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k+N-1}}{ch^2\,\frac{\zeta}{2}}\,\|R_{th\frac{\zeta}{2}}\,u\|^2\,d\zeta$$

$$\leqslant C_1C_2\int_0^\infty \frac{(th\,\theta)^{k-1}}{ch^2\,\theta}\,d\theta \int (1+\|Y'-Y\|^2_{Y,Y'})^{-N}\,\|L_{th\,\theta,Y}\,u\|\,\|L_{th\,\theta,Y'}\,u\|\,dY\,dY'$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \frac{(th\,\theta)^{k-1}}{ch^2\theta}\,d\theta\int \|L_{th\,\theta,Y}\,u\|^2\,dY$$

$$= C\int_0^\infty \frac{(th\,\theta)^{k-1}}{ch^2\theta}\,(R_{th\,\theta}\,u,u)\,d\theta = C(Au,u)\,.$$

Enfin, pour tout $\delta > 0$, on peut écrire

$$2(Au,u) = \int_0^\infty \frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k-1}}{ch^2\,\frac{\zeta}{2}}\left(R_{th\frac{\zeta}{2}}\,u,u\right)d\zeta$$

$$\leqslant C_3\int_0^1 \frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k-1}}{ch^2\,\frac{\zeta}{2}}\left(R_{th\frac{\zeta}{2}}\,u,u\right)d\zeta$$

$$\leqslant \frac{C_3\,\delta}{2}\int_0^1 \frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k+N-1}}{ch^2\,\frac{\zeta}{2}}\,\|R_{th\frac{\zeta}{2}}\,u\|^2\,d\zeta + \frac{C_3\,\delta^{-1}}{2}\int_0^1 \frac{\left(th\ \frac{\zeta}{2}\right)^{k+N-1}}{ch^2\,\frac{\zeta}{2}}\,\|u\|^2\,d\zeta$$

$$\leqslant C_3\,C\delta\,(Au,u) + C_4\,\delta^{-1}\,\|u\|^2\,,$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.1.

3. Sur la continuité des opérateurs pseudo-différentiels.

THEOREME 3.1. – *Soit* $Y \longmapsto \| \ \|_Y$ *un champ de normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *d'ordre* N ; *soit* k *un entier* $> N$, *et soit* $a \in C^{2k}(\mathbf{R}^{2\nu})$ *vérifiant les estimations*

$$|V_1(D) \ldots V_p(D)\, a(X)| \leqslant C$$

si $p \leqslant 2k$ *et si les* V_j *sont des vecteurs vérifiant* $\| V_j \|_X \leqslant 1$.

Alors $Op_{1/2}(a)$ *est borné sur* $L^2(\mathbf{R}^\nu)$.

Preuve. – Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ réelle, positive, avec $f(0) = 1$ et $f(t) = 0$ pour $t \geqslant C^{-1}$.

Posons
$$\gamma(X) = \int f(\| X - T \|_T^2)\, dT\,. \tag{3.1}$$

La condition (i) de la définition 2.1 montre que γ et $\frac{1}{\gamma}$ sont des symboles d'ordre 0 de la classe associée au champ de normes, i.e. vérifient les conditions exigées de a dans l'énoncé du théorème 3.1. On écrit alors

$$a = \int a_T\, dT\,, \tag{3.2}$$

avec

$$a_T(X) = \frac{f(\| X - T \|_T^2)}{\gamma(X)}\, a(X)\,. \tag{3.3}$$

On se ramène, comme il est usuel, à obtenir une borne pour $\| Op_{1/2}(a) \|$ lorsque $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2\nu})$ (cette borne ne dépendant que des semi-normes en cause dans l'énoncé du théorème 3.1) ; on peut d'ailleurs supposer a réelle et enfin, par polarisation, se ramener au problème d'obtenir une borne pour $(Op_{1/2}(a)\, u, u)$ $(u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu))$.

Pour tout $T \in \mathbf{R}^{2\nu}$, et tout $s \in]0, 1]$, posons

$$g(s) = \Big(Op_{1/2}\Big(\Big(\frac{2}{s}\Big)^{\nu} \int e^{-2\pi s^{-1} \| X - Y \|_T^2}\, a_T(Y)\, dY\Big) u, u\Big) \tag{3.4}$$

et, par continuité,

$$\begin{aligned} g(0) &= (Op_{1/2}(a_T)\, u, u) \\ &= g(1) - g'(1) + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\,!}\, g^{(k-1)}(1) \\ &\qquad + \frac{(-1)^k}{(k-1)\,!} \int_0^1 s^{k-1}\, g^{(k)}(s)\, ds\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posons $\Delta_T = \dfrac{1}{4\pi} \Sigma\, W_j(D)^2$, où (W_j) est une base symplectique de $\mathbf{R}^{2\nu}$, orthonormale pour $\| \ \|_T$.

On peut aussi écrire $\Delta_T = Op_{1/2}(-\pi \, \|\sigma\Xi\|_T^2)$, où σ a été défini par (2.3), et l'on a

$$\left(\frac{2}{s}\right)^{\nu} \int e^{-2\pi s^{-1}\|X-Y\|_T^2} a_T(Y)\, dY = e^{\frac{s}{2}\Delta_T} a_T(X) . \tag{3.6}$$

D'où

$$(Op_{1/2}(a_T)\, u, u) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j\, 2^{-j}}{j\,!} \left(Op_{1/2}\left(2^{\nu} \int e^{-2\pi\|X-Y\|_T^2} \Delta_T^j\, a_T(Y)\, dY\right) u, u\right)$$
$$+ \frac{(-1)^k\, 2^{-k}}{(k-1)\,!} \int_0^1 s^{k-1} \left(Op_{1/2}\left(\left(\frac{2}{s}\right)^{\nu} \int e^{-2\pi s^{-1}\|X-Y\|_T^2} \Delta_T^k\, a_T(Y)\, dY\right) u, u\right) ds . \tag{3.7}$$

D'après (1.9), on a

$$\left|\left(Op_{1/2}\left(\left(\frac{2}{s}\right)^{\nu} e^{-2\pi s^{-1}\|X-Y\|_T^2}\right) u, u\right)\right| \leqslant \left(Op_{1/2}\left(2^{\nu}\, e^{-2\pi s\|X-Y\|_T^2}\right) u, u\right) .$$

Le reste du second membre de (3.7) est donc borné par

$$\frac{2^{-k}}{(k-1)\,!} \int_0^1 s^{k-1}\, ds \int |\Delta_T^k\, a_T(Y)|\, (Op_{1/2}(2^{\nu}\, e^{-2\pi s\|X-Y\|_T^2})\, u, u)\, dY .$$

Finalement

$$(Op_{1/2}(a)\, u, u) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j\, 2^{-j}}{j\,!} \int \left(Op_{1/2}\left(2^{\nu} \int e^{-2\pi\|X-Y\|_T^2} \Delta_T^j\, a_T(Y)\, dY\right) u, u\right) dT + (\text{erreur})_k , \tag{3.8}$$

avec

$$|(\text{erreur})_k| \leqslant \frac{2^{-k}}{(k-1)\,!} \int_0^1 s^{k-1}\, ds \iint |\Delta_T^k\, a_T(Y)|\, (Op_{1/2}(2^{\nu}\, e^{-2\pi s\|X-Y\|_T^2})\, u, u)\, dY\, dT . \tag{3.9}$$

Sur le support de a_T, on a $\|Y - T\|_T \leqslant 1$, et on peut alors écrire

$$|(\text{erreur})_k| \leqslant C \int_0^1 s^{k-1}\, ds$$
$$\iint e^{-\pi\|Y-T\|_T^2}\,(\mathrm{Op}_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi s\|X-Y\|_T^2})u,u)\,dY\,dT\,. \quad (3.10)$$

En notant que

$$\int e^{-\pi\|Y-T\|_T^2}\, e^{-2\pi s\|X-Y\|_T^2}\, dY = (2s+1)^{-\nu} \exp - \pi\,\frac{2s}{1+2s}\,\|X-T\|_T^2\,, \quad (3.11)$$

on a enfin

$$|(\text{erreur})_k| \leqslant C \int_0^1 s^{k-1}\,(R_{s(1+2s)^{-1}}\,u,u)\,ds\,, \quad (3.12)$$

où R_ϵ a été défini par (2.1) ; on applique alors le théorème 2.1.

Ceci termine la preuve du théorème 3.1, la méthode de majoration du reste s'appliquant naturellement aussi aux termes réguliers du développement.

4. Microlocalisation associée à une famille d'oscillateurs harmoniques.

LEMME 4.1. – *Soit* $Y \longmapsto \|\ \|_Y$ *un champ de normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *d'ordre* N. *Il existe* $\epsilon > 0$ *et* $C > 0$ *tels que l'on ait, avec la notation du théorème 2.1,*

$$(R_\epsilon u, u) \geqslant C^{-1}\|u\|^2 \quad (4.1)$$

pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$.

Preuve. – Reprenons la démonstration du théorème 3.1, dans le cas où $a(X) = 1$ pour tout X. Posant, pour $s \in]0,1]$,

$$G(s) = \int \left(\mathrm{Op}_{1/2}\left(\left(\frac{2}{s}\right)^\nu \int e^{-2\pi s^{-1}\|X-Y\|_T^2}\, a_T(Y)\,dY\right)u,u\right)dT\,, \quad (4.2)$$

on a

$$\begin{aligned} G(0) &= \|u\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j\, 2^{-j}}{j\,!} \int \left(\mathrm{Op}_{1/2}\left(2^\nu \int e^{-2\pi\|X-Y\|_T^2}\,\Delta_T^j\, a_T(Y)\,dY\right)u,u\right)dT \\ &+ \frac{(-1)^k 2^{-k}}{(k-1)\,!}\int dT \\ &\int_0^1 s^{k-1}\left(\mathrm{Op}_{1/2}\left(\left(\frac{2}{s}\right)^\nu \int e^{-2\pi s^{-1}\|X-Y\|_T^2}\,\Delta_T^k\, a_T(Y)\,dY\right)u,u\right)ds\,. \quad (4.3)\end{aligned}$$

Egalement,

$$G(\epsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j 2^{-j}(1-\epsilon)^j}{j\,!} \int \Big(\mathrm{Op}_{1/2}\Big(2^\nu \int e^{-2\pi \|X-Y\|_T^2} \Delta_T^j\, a_T(Y)\, dY\Big) u, u\Big)\, dT$$
$$+ \frac{(-1)^k 2^{-k}}{(k-1)\,!} \int dT$$
$$\int_\epsilon^1 (s-\epsilon)^{k-1} \Big(\mathrm{Op}_{1/2}\Big(\Big(\frac{2}{s}\Big)^\nu \int e^{-2\pi s^{-1} \|X-Y\|_T^2} \Delta_T^k\, a_T(Y)\, dY\Big) u, u\Big)\, ds\,. \tag{4.4}$$

Choisissant $k > N$, on vérifie alors, en utilisant les estimations employées dans la preuve du théorème 3.1, que l'on a $|G(\epsilon)| \geqslant \frac{1}{2} \|u\|^2$ pour $\epsilon > 0$ assez petit.

Utilisant à nouveau (1.9), on obtient

$$\int \Big(\mathrm{Op}_{1/2}\Big(2^\nu \int e^{-2\pi\epsilon \|X-Y\|_T^2} a_T(Y)\, dY\Big) u, u\Big)\, dT \geqslant \frac{1}{2} \|u\|^2 ,$$

ce qui fournit (4.1) avec l'aide de (3.11).

THEOREME 4.1. – *Soit* $Y \longmapsto \| \;\|_Y$ *un champ de normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *d'ordre* N. *Pour tout entier* $j \geqslant 0$, *et tout* $Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2\nu}$, *soit* P_Y^j *l'espace engendré par les fonctions propres de l'oscillateur harmonique* $\pi\, \mathrm{Op}_{1/2}(\|X\|_Y^2)$ *correspondant à la valeur propre* $\frac{\nu}{2} + j$.

Soit A_Y^j *le projecteur orthogonal sur l'espace des fonctions (de* x*) de la forme*

$$\psi_Y(x-y)\, e^{2i\pi\langle x,\eta\rangle} \quad , \quad \psi_Y \in P_Y^j\,.$$

On pose $\quad \Omega_n = \sum_{j=0}^{n} \int A_Y^j\, dY$:

pour n *entier* $\geqslant 0$ *bien choisi, on a alors, pour une certaine constante* $C > 0$, *l'estimation, valable pour* $u \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$: $(\Omega_n u, u) \geqslant C^{-1} \|u\|^2$.

Preuve. – Remarquons d'abord que Ω_n est autoadjoint et borné pour tout n, ce que l'on obtient par exemple par comparaison avec R_ϵ, $\epsilon < 1$. Posons, pour $\mathrm{Re}\, z > 0$, et $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$:

$$F(z) = \int (\mathrm{Op}_{1/2}(2^\nu e^{-2\pi z \|X-Y\|_Y^2}) u, u)\, dY : \tag{4.5}$$

c'est une fonction holomorphe, et le lemme 4.1 indique que $F(\epsilon) \geqslant C^{-1} \|u\|^2$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. Le lemme des trois cercles d'Hadamard, appliqué à la fonction $F\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ (représentable pour $|z| < 1$, d'après (1.8), par une série entière à coefficients positifs), montre qu'on a pour $r < 1$, $r \longrightarrow 1$, l'estimation

$$F(r) \geqslant C^{-1}(1-r)^n \|u\|^2 \tag{4.6}$$

valable pour n entier assez grand.

Il suffit donc de prouver, pour $r \longrightarrow 1-0$, l'estimation

$$F(r) \leqslant C(\Omega_n u, u) + C(1-r)^{n+1} \|u\|^2 . \tag{4.7}$$

Or, d'après (1.8), on a

$$\begin{aligned} F(r) &= 2^\nu \sum_{j \geqslant 0} (1-r)^j (1+r)^{-j-\nu} \int (A_Y^j u, u)\, dY \\ &\leqslant \left(\frac{2}{1+r}\right)^\nu (\Omega_n u, u) \\ &\quad + (1-r)^{n+1} \sum_{j \geqslant n+1} 2^\nu (1-r)^{j-n-1} (1+r)^{-j-\nu} \int (A_Y^j u, u)\, dY . \end{aligned}$$

En écrivant

$$(1-r)^{j-n-1} (1+r)^{-j-\nu} = 3^{n+1} (1+r)^{-n-\nu-1} \left(\frac{3(1-r)}{1+r}\right)^{j-n-1} 3^{-j} ,$$

expression majorée pour C bien choisie, et $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$, par $C\left(\frac{2}{3}\right)^\nu 3^{-j}$, on obtient

$$F(r) \leqslant C(\Omega_n u, u) + C(1-r)^{n+1} F\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

ce qui termine la preuve du théorème 4.1.

Pour tout $Y \in \mathbf{R}^{2\nu}$, soit $(\psi_Y^\alpha)_{|\alpha| \leqslant n}$ une base de $P_Y^0 \oplus \ldots \oplus P_Y^n$, et posons

$$\varphi_Y^\alpha(x) = \psi_Y^\alpha(x-y)\, e^{2i\pi \langle x - \frac{y}{2}, \eta \rangle} . \tag{4.8}$$

L'intérêt du théorème 4.1 est de permettre la décomposition des fonctions de $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ suivant les fonctions φ_Y^α puisque, en posant, pour $u \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$:

$$\widetilde{u}_\alpha(Y) = (u, \varphi_Y^\alpha) , \tag{4.9}$$

on a $\Omega_n u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \int \widetilde{u}_\alpha(Y)\, \varphi_Y^\alpha(x)\, dY .$ (4.10)

Introduisons maintenant l'espace $F = \bigoplus_{j=0}^{n} L^2(\mathbf{R}^{2\nu}) \otimes S^j(\mathbf{C}^\nu)$ dont les éléments sont des systèmes $(U_\alpha)_{|\alpha|\leqslant n}$ de fonctions de $L^2(\mathbf{R}^{2\nu})$, et l'application $J : \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu) \longrightarrow F$ définie par

$$(Ju)_\alpha(Y) = (\Omega_n^{-1/2} u)_\alpha^\sim (Y)\,. \tag{4.11}$$

L'application J se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ sur un sous-espace fermé de F, et l'on a aussi, si $U = (U_\alpha) \in F$:

$$\Omega_n^{1/2}\, J^* U(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} \int U_\alpha(Y)\, \varphi_Y^\alpha(x)\, dY\,. \tag{4.12}$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2\nu})$ un symbole, et soit $\mathbf{K}$ l'opérateur sur F de noyau K, dont les composantes sont définies par

$$\begin{aligned} K^{\alpha\beta}(Y, Y') &= \int a(X)\, H(\varphi_{Y'}^\beta, \varphi_Y^\alpha, X)\, dX \\ &= e^{i\pi[Y,Y']} \int a(X)\, e^{2i\pi[Y'-Y,X]}\, H\Big(\psi_{Y'}^\beta, \psi_Y^\alpha, X - \frac{Y+Y'}{2}\Big)\, dX\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Les formules (4.11) et (4.12) montrent que l'on a

$$\mathbf{K} = J\, \Omega_n^{1/2}\, Op_{1/2}(a)\, \Omega_n^{1/2}\, J^* \tag{4.14}$$

et

$$J^*\, \mathbf{K}\, J = \Omega_n^{1/2}\, Op_{1/2}(a)\, \Omega_n^{1/2}\,, \tag{4.15}$$

identités qui montrent en particulier que l'opérateur $\mathbf{K}$ (sur F) et l'opérateur $\Omega_n^{1/2}\, Op_{1/2}(a)\, \Omega_n^{1/2}$ (sur $L^2(\mathbf{R}^\nu)$) ont la même norme (finie ou infinie) : un avantage de ce deuxième opérateur attaché à a est que, dans de larges cas comprenant non seulement des opérateurs pseudo-différentiels, mais aussi des opérateurs métaplectiques, ou intégraux de Fourier, l'étude des noyaux $K^{\alpha\beta}$ définis par (4.13) se ramène à une simple intégration par parties.

Dans le cas du champ de normes trivial, $\|\ \|_Y = \|\ \|_0$, on peut prendre évidemment $n = 0$, et le lien entre $Op_{1/2}(a)$ et l'opérateur $\mathbf{K}$ de noyau $K(Y, Y')$ donné par (4.13) peut se décrire aussi de la façon suivante : à une équivalence unitaire près, on peut remplacer K par K' :

$$K'(Y, Y') = 2^{2\nu}\, e^{4i\pi[Y,Y']} \int a(X)\, e^{4i\pi[Y'-Y,X]}\, \Phi(X - Y - Y')\, dX\,, \tag{4.16}$$

avec $\Phi = H(\psi, \psi)$.

Le symbole $\mathcal{K}'$ de l'opérateur associé est

$$\mathcal{K}'(X, \Xi) = a\left(X + \frac{\sigma\Xi}{2}\right)\Phi\left(-X + \frac{\sigma\Xi}{2}\right), \tag{4.17}$$

où σ est défini par (2.3).

Définissons l'isomorphisme A de $\mathbf{R}^{2\nu}$ sur $\mathbf{R}^{2\nu}$ par l'identité

$$\langle (x, \xi), A(y, \eta)\rangle = \langle x, \eta\rangle + \langle y, \xi\rangle, \tag{4.18}$$

de sorte qu'avec $(x, \xi)^{\vee} = (-x, \xi)$, on a la formule $\sigma\Xi = (A^{-1}\Xi)^{\vee}$.

Appliquant la transformation symplectique

$$(X, \Xi) \longmapsto \left(\frac{1}{2}(X - A^{-1}\Xi), AX + \Xi\right),$$

on transforme $\mathcal{K}'$ en $\mathcal{K}''$ avec

$$\mathcal{K}''(X, \Xi) = a\left(\frac{1}{2}(X + \check{X} + (A^{-1}\Xi)^{\vee} - A^{-1}\Xi)\right)$$
$$\Phi\left(\frac{1}{2}(-X + \check{X} + (A^{-1}\Xi)^{\vee} + A^{-1}\Xi)\right). \tag{4.19}$$

L'opérateur $\mathbf{K}''$ associé est en fait

$$\mathbf{K}'' = Op_{1/2}(\Phi^{\#}) \otimes Op_{1/2}(\widetilde{a}), \tag{4.20}$$

avec $\widetilde{a}(x, \xi) = a(-\xi, x)$, symbole unitairement équivalent à a (conjuguer par la transformation de Fourier), et $\Phi^{\#}(x, \xi) = \Phi(-x, \xi)$, symbole de l'opérateur de projection orthogonale sur χ, avec $\chi(x) = \overline{\psi}(-x)$.

Il en résulte que $\mathbf{K}''$ (donc $\mathbf{K}$) et $Op_{1/2}(a)$ ont la même norme.

Appendice

Calcul de la fonction de Wigner de deux états propres d'oscillateurs distincts.

Ce calcul est rendu nécessaire par les applications de (4.13), et par la preuve du théorème 2.1. Toute cette section repose sur le livre de Maas [4].

Soit $X \longmapsto \|X\|_1$ une norme symplectique sur $\mathbf{R}^{2\nu}$, et soit V un repère symplectique de $\mathbf{R}^{2\nu}$, base orthonormale pour cette norme. On a $\|X\|_1^2 = (T^{-1}X, X)$, avec $T = VV'$, et T varie dans P_ν, espace de représentation du groupe symplectique, constitué des matrices symplectiques définies > 0.

$$\text{Si } \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{C} \end{pmatrix} \quad (\mathrm{A} \text{ et } \mathrm{C} \text{ symétriques} > 0),$$

on a

$$\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{T} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C} & -\mathrm{B}' \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix},$$

et $\mathrm{BA} = \mathrm{AB}'$, $\mathrm{CB} = \mathrm{B}'\mathrm{C}$, $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 1$.

Avec $\mathfrak{G}_\nu = \{\mathrm{Z} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y},\ \mathrm{X} \text{ et } \mathrm{Y} \text{ symétriques},\ \mathrm{Y} > 0\}$, Siegel associe à T la matrice $\mathrm{Z} = \mathrm{BC}^{-1} + i\mathrm{C}^{-1} \in \mathfrak{G}_\nu$. Nous poserons

$$\mu(\mathrm{T}) = \Lambda = \mathrm{A}^{-1} - i\,\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \in \mathfrak{S}_\nu = \{\mathrm{X} + i\mathrm{Y},\ \mathrm{X} \text{ et } \mathrm{Y} \text{ symétriques},\ \mathrm{X} > 0\},$$

de sorte que $i\overline{\mu(\mathrm{T})}$ est la matrice associée à T^{-1} dans la représentation de Siegel.

$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ appartenant au groupe symplectique opère sur les repères par $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{SV}$, sur P_ν par $\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{STS}'$, sur $\mathfrak{G}_\nu$ par $\mathrm{Z} \longmapsto (\mathrm{AZ} + \mathrm{B})(\mathrm{CZ} + \mathrm{D})^{-1}$, et finalement sur $\mathfrak{S}_\nu$ par $\Lambda \longmapsto (\mathrm{D}\Lambda - \mathrm{C}i)(\mathrm{A} + i\mathrm{B}\Lambda)^{-1} = \mathrm{S}\langle\Lambda\rangle$: l'important est que si $\Lambda = \mu(\mathrm{T})$, on a $\mathrm{S}\langle\Lambda\rangle = \mu(\mathrm{S\,T\,S}')$.

LEMME A1. — *Si* $\|\mathrm{X}\|_1^2 = (\mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}, \mathrm{X})$ *et* $\mu(\mathrm{T}) = \Lambda$, *un état fondamental de* $\mathrm{L} = Op_{1/2}(\pi\,\|\mathrm{X}\|_1^2)$ *est, à une normalisation près,* $\omega = \exp - \pi(\Lambda x, x)$.

Preuve. — Avec $\mathrm{B} = (b_{jk})$, etc. , on a

$$\|\mathrm{X}\|_1^2 = (\mathrm{C}x, x) - 2(\mathrm{B}x, \xi) + (\mathrm{A}\xi, \xi)$$

et comme

$$Op_{1/2}(2(\mathrm{B}x, \xi)) = \frac{1}{i\pi}\left(\Sigma\, b_{jk}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr\,B}\right),$$

on a

$$\mathrm{L} = \pi\,\Sigma\, c_{jk}\, x_j x_k + i\,\Sigma\, b_{jk}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{4\pi}\,\Sigma\, a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr\,B}.$$

Aussi,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = -\,2\pi\omega \sum_\mu \lambda_{\mu j}\, x_\mu\,,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\,\partial x_k} = 4\pi^2\omega \sum_{\mu\rho} \lambda_{\mu j}\,\lambda_{\rho k}\, x_\mu\, x_\rho - 2\pi\omega\,\lambda_{jk}\,,$$

et enfin

$$\omega^{-1} L\omega = \pi \Sigma c_{jk} x_j x_k - 2i\pi \Sigma b_{jk} \lambda_{\mu j} x_k x_\mu$$
$$- \pi \Sigma a_{jk} \lambda_{\mu j} \lambda_{\rho k} x_\mu x_\rho + \frac{1}{2} \Sigma a_{jk} \lambda_{jk} + \frac{l}{2} \operatorname{Tr} B .$$

Le terme constant est $\frac{1}{2} \operatorname{Tr} A \Lambda + \frac{i}{2} \operatorname{Tr} B = \frac{\nu}{2}$. La matrice de la forme quadratique est le produit par π de

$$C - 2i\Lambda B - \Lambda A \Lambda = C - 2i(A^{-1} - iA^{-1}B)B - (A^{-1} - iA^{-1}B)(1 - iB)$$
$$= C - A^{-1}B^2 - A^{-1} = 0 ,$$

ce qui prouve le lemme.

Ce lemme montre d'ailleurs qu'un oscillateur harmonique est caractérisé par l'espace engendré par son état fondamental puisque A et $A^{-1}B$ permettent de reconstituer T.

On va maintenant considérer également des opérateurs définis sur des fonctions sur l'espace de phase. L'espace de phase de $\mathbf{R}^{2\nu}$ considéré comme nouvel espace de configuration est constitué par des couples $(X, \Xi) \in \mathbf{R}^{2\nu} \times \mathbf{R}^{2\nu}$.

DEFINITION A1. — *Soient* $\| \ \|_1$ *et* $\| \ \|_2$ *deux normes symplectiques sur* $\mathbf{R}^{2\nu}$, *et soit* $X \in \mathbf{R}^{2\nu}$: *il existe un unique* Y *tel que* $\| X - Y \|_1^2 + \| Y \|_2^2$ *soit minimum, et on pose alors*

$$(\Lambda_{1,2} X, X) = 4 \{ \| X - Y \|_1^2 + \| Y \|_2^2 - i[X, Y] \} .$$

On a ainsi défini une forme quadratique en X puisque, dans une base orthonormale pour $\| \ \|_1$ qui diagonalise $\| \ \|_2$, $\| X \|_2^2 = \Sigma \mu_j X_j^2$, on voit qu'il faut prendre $Y_j = (1 + \mu_j)^{-1} X_j$, et alors $\| X - Y \|_1^2 + \| Y \|_2^2 = \Sigma \mu_j (1 + \mu_j)^{-1} X_j^2$.

LEMME A2. — *Soient* ψ_1 *et* ψ_2 *deux états propres, correspondant aux valeurs propres* $\frac{\nu}{2} + m$ *et* $\frac{\nu}{2} + n$ *respectivement, des oscillateurs harmoniques* $\pi \operatorname{Op}_{1/2}(\| X \|_1^2)$ *et* $\pi \operatorname{Op}_{1/2}(\| X \|_2^2)$.

Soit $T \in P_{2\nu}$ *telle que* $\mu(T) = \Lambda_{1,2} \in \mathfrak{S}_{2\nu}$. *Alors* $W(X) = H(\psi_1, \psi_2, X)$ *est un état propre, correspondant à la valeur propre* $\nu + m + n$, *de l'oscillateur harmonique* $\pi \operatorname{Op}_{1/2}(T^{-1}(X, \Xi), (X, \Xi))$.

Preuve. — Soient Λ_1 et Λ_2 les images dans $\mathfrak{S}_\nu$ de $T_1 \in P_\nu$ et $T_2 \in P_\nu$ définissant les deux oscillateurs. D'après [4], p. 39, il existe S symplectique telle que

$$S\langle \Lambda_1 \rangle = I\,,\ S\langle \Lambda_2 \rangle = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_\nu \end{pmatrix}\,,\ \lambda_j > 0\,.$$

On a donc $I = \mu(S\,T_1\,S')$, $J = \mu(S\,T_2\,S')$, et

$$\|S^{-1}X\|_1^2 = \Sigma\, x_j^2 + \xi_j^2\,,$$
$$\|S^{-1}X\|_2^2 = \Sigma\, \lambda_j x_j^2 + \lambda_j^{-1}\xi_j^2\,.$$

Définissant $M \in Mp(\nu)$ telle que $\widetilde{M} = S(M \longmapsto \widetilde{M}$ étant l'homomorphisme métaplectique), et posant $\varphi_1 = M\,\psi_1$, $\varphi_2 = M\,\psi_2$, on voit que φ_1 et φ_2 sont des états propres, correspondant aux valeurs propres $\frac{\nu}{2} + m$ et $\frac{\nu}{2} + n$ respectivement, de

$$\pi\,\Sigma\, x_j^2 - \frac{1}{4\pi}\,\Sigma\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \text{et} \quad \pi\,\Sigma\,\lambda_j x_j^2 - \frac{1}{4\pi}\,\Sigma\,\lambda_j^{-1}\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,.$$

Posons $\widetilde{W} = H(\varphi_1\,, \varphi_2)$, de sorte que $W(X) = \widetilde{W}(SX)$, et soit $f(X, \Xi) = (T^{-1}(X\,, \Xi)\,, (X\,, \Xi))$, d'où, en posant

$$L = \pi\, Op_{1/2}(f(S^{-1}X, S'\Xi))\,,$$

l'égalité $$\pi Op_{1/2}(f(X, \Xi))\, W(X) = (L\widetilde{W})\,(SX)\,.$$

Tout revient donc à prouver l'identité $L\widetilde{W} = (\nu + m + n)\,\widetilde{W}$. Avec $\Lambda = \Lambda_{1,2}$, $\exp - \pi(\Lambda X, X)$ est par définition de μ un état fondamental de $\pi\, Op_{1/2}(f(X, \Xi))$, et par suite $\exp - \pi(\Lambda\, S^{-1}X, X)$ est un état fondamental de L.

Comme

$$(\Lambda\, S^{-1}\,X, S^{-1}\,X) = 4\,\{\|S^{-1}\,X - Z\|_1^2 + \|Z\|_2^2 - i[S^{-1}\,X, Z]\}$$

pour Z réalisant le minimum de la partie réelle, on a aussi, avec $X = (x\,, \xi)$ et $Z = S^{-1}Y = S^{-1}(y\,, \eta)$:

$$(\Lambda\, S^{-1}X, S^{-1}X) = 4\,\{\Sigma\,(x_j - y_j)^2 + (\xi_j - \eta_j)^2 + \Sigma\,\lambda_j y_j^2 + \lambda_j^{-1}\eta_j^2 - i\,\Sigma\,(-\,x_j\,\eta_j + y_j\,\xi_j)\}$$

pour (y, η) réalisant le minimum de la partie réelle.

Il faut prendre $y_j = (1 + \lambda_j)^{-1}x_j$, $\eta_j = \lambda_j(1 + \lambda_j)^{-1}\,\xi_j$, et on trouve alors

$$(\Lambda\, S^{-1}X, S^{-1}X) = 4\,\Sigma\,\frac{\lambda_j}{1 + \lambda_j}\,x_j^2 + \frac{1}{1 + \lambda_j}\,\xi_j^2 + i\,\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\,x_j\,\xi_j\,,$$

ce qui montre que $\exp - \pi(\Lambda\, S^{-1}X, S^{-1}X)$ est un état fondamental de l'oscillateur associé à

$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} \in P_{2\nu}$ telle que

$$A^{-1} = 4\begin{pmatrix} J(1+J)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+J)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A^{-1}B = -2\begin{pmatrix} 0 & (J-1)(J+1)^{-1} \\ (J-1)(J+1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} J^{-1}(1+J) & 0 \\ 0 & 1+J \end{pmatrix}, \quad B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & J^{-1}(J-1) \\ J-1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$C = \begin{pmatrix} J+1 & 0 \\ 0 & J^{-1}(J+1) \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$f(S^{-1}X, S'\Xi) = (CX, X) - 2(BX, \Xi) + (A\Xi, \Xi)$$

et

$$L = \pi(\lambda+1)x^2 + \pi\frac{\lambda+1}{\lambda}\xi^2 + \frac{1}{2i}\frac{\lambda-1}{\lambda}\xi\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i}(\lambda-1)x\frac{\partial}{\partial\xi}$$
$$- \frac{1}{16\pi}\frac{1+\lambda}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{16\pi}(1+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},$$

expression où l'on a négligé le signe de sommation et tous les indices j, le problème qui reste (calcul de $L\widetilde{W}$) étant maintenant diagonalisé. On a

$$\widetilde{W}(x,\xi) = 2^\nu \int \varphi_1(x+z)\,\overline{\varphi}_2(x-z)\,e^{-4i\pi z\xi}\,dz,$$

et

$$L\widetilde{W}(x,\xi) = 2^\nu \int e^{-4i\pi z\xi}\,dz\,\Big\{\Big(\pi(\lambda+1)x^2 + \pi\frac{\lambda+1}{\lambda}\xi^2\Big)\varphi_1\overline{\varphi}_2$$
$$- \frac{i}{2}\frac{\lambda-1}{\lambda}\xi(\varphi_1\overline{\varphi}_2' + \varphi_1'\overline{\varphi}_2) - 2\pi(\lambda-1)xz\varphi_1\overline{\varphi}_2$$
$$- \frac{1}{16\pi}\frac{1+\lambda}{\lambda}(\varphi_1''\overline{\varphi}_2 + \varphi_1\overline{\varphi}_2'') - \frac{1}{8\pi}\frac{1+\lambda}{\lambda}\varphi_1'\overline{\varphi}_2'$$
$$+ \pi(1+\lambda)z^2\varphi_1\overline{\varphi}_2\Big\}.$$

Après usage des identités d'intégration par parties

$$\int e^{-4i\pi z\xi}\,\xi^2\varphi_1\overline{\varphi}_2\,dz = -\frac{1}{16\pi^2}\int e^{-4i\pi z\xi}(\varphi_1''\overline{\varphi}_2 - 2\varphi_1'\overline{\varphi}_2' + \varphi_1\overline{\varphi}_2'')\,dz$$

et

$$\int e^{-4i\pi z\xi}\,\xi(\varphi_1\overline{\varphi}_2' + \varphi_1'\overline{\varphi}_2)\,dz = \frac{1}{4i\pi}\int e^{-4i\pi z\xi}(\varphi_1''\overline{\varphi}_2 - \varphi_1\overline{\varphi}_2'')\,dz,$$

il reste

$$L\widetilde{W}(x, \xi) = 2^\nu \int e^{-4i\pi z\xi}\, dz\, \{\pi(\lambda + 1)\, x^2 \varphi_1 \overline{\varphi}_2 - 2\pi(\lambda - 1)\, xz\, \varphi_1 \overline{\varphi}_2 + \pi(1 + \lambda)\, z^2 \varphi_1 \overline{\varphi}_2 - \frac{1}{4\pi} \varphi_1'' \overline{\varphi}_2 - \frac{1}{4\pi\lambda} \varphi_1 \overline{\varphi}_2''\}\, .$$

Utilisant enfin les équations différentielles

$$\frac{1}{4\pi} \varphi_1'' = \pi(x + z)^2 \varphi_1 - \left(\frac{\nu}{2} + m\right) \varphi_1$$

et

$$\frac{1}{4\pi\lambda} \varphi_2'' = \pi\lambda(x - z)^2 \varphi_2 - \left(\frac{\nu}{2} + n\right) \varphi_2\, ,$$

on obtient $L\widetilde{W} = (\nu + m + n)\, \widetilde{W}$, ce qui termine la preuve du lemme A2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, A general calculus of pseudo-differential operators, *Duke Math. J.*, 42 (1975), 1-42.

[2] N.G. De BRUIJN, Uncertainty principles in Fourier Analysis, *Proc. Symp. on Inequalities*, Ac. Press (1967), 57-71.

[3] L. HORMANDER, The Weyl calculus of pseudo-differential operators (preprint).

[4] H. MAAS, Siegel's modular forms and Dirichlet Series, *Lecture Notes in Math.* 216 (1971), Springer-Verlag.

[5] A. CORDOBA, C. FEFFERMAN, Wave packets and Fourier integral operators, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 3, 11 (1978), 979-1006.

Manuscrit reçu le 20 octobre 1978
révisé le 9 février 1979.

André UNTERBERGER,
Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse
B.P. n° 347
51062 – Reims-Cedex.