

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT LUTZ

Sur la géométrie des structures de contact invariantes

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 1 (1979), p. 283-306

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_283_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA GÉOMÉTRIE DES STRUCTURES DE CONTACT INVARIANTES

par Robert LUTZ

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

L'objet de cet article est d'étudier les structures de contact invariantes par rapport à une action localement libre de groupe de Lie sur une variété compacte.

Il se trouve qu'à une telle structure est associée de manière naturelle une "fibration nouée" dont la présence conduit à de nombreuses contraintes sur la structure du groupe et la nature de la variété.

Le chapitre I est consacré à une étude détaillée de ces contraintes, particulièrement dans le cas des groupes abéliens.

Mais le véritable objectif est d'obtenir de nouvelles structures de contact en dimension supérieure à trois, particulièrement sur le tore T^5 ou des produits $T^2 \times B_3$.

Le chapitre II va dans ce sens, puisqu'à partir de certaines fibrations nouées, on y construit des structures de contact invariantes par rapport à des actions libres de T^p ou T^{p+1} sur M_{2p+1} .

Ces constructions donnent les meilleurs résultats possibles, puisque dans le chapitre III on constate que la fibration nouée détermine la structure de contact à isomorphisme équivariant près, dans les cas étudiés.

On peut remarquer le parallèle curieux entre les constructions de ce travail et celle des feuilletages de codimension un sur les sphères : dans les deux cas les fibrations nouées ont un rôle important, quoique dans le premier cas plus naturellement.

Parmi les justifications initiales de ce travail on peut citer :

— l'importance, en mécanique, des systèmes dynamiques admettant pour invariant intégral une forme de contact (cf. Reeb [12]).

– les structures de contact régulières de Boothby-Wang [1], premiers exemples non classiques de structures de contact.

– l'importance, dans les problèmes d'existence et de classification en dimension 3, des structures de contact invariantes par rapport à une action libre de \mathbf{S}^1 (cf. [7])

– le fait qu'un grand nombre de sphères exotiques admettent des structures de contact invariantes par rapport à des actions localement libres de \mathbf{S}^1 (cf. [9] et [14])

– le fait que $\mathbf{T}^k \times \mathbf{S}^{k-1}$ admette, en tant que fibré unitaire cotangent à \mathbf{T}^k la structure de contact induite par la forme de Lionville-Cartan $\sum x_i d\theta_i$, invariante par rapport à l'action naturelle de \mathbf{T}^k , alors que le tore \mathbf{T}^5 n'admet rien de semblable.

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposés C^∞ .

I. LE THEOREME DE FIBRATION

1. Préliminaires.

1.1. Une structure de contact sur une variété de dimension impaire M_{2p+1} est une équation de Pfaff σ dont tout représentant local est de contact, c'est-à-dire vérifie les deux conditions équivalentes

(i) $\omega \wedge d\omega^p$ sans zéros

(ii) $\omega_x(u) = 0$ et $u \lrcorner d\omega_x = 0$ implique $u = 0$ pour $u \in T_x(M)$.

Lorsque M est compacte orientable, comme on le suppose dans ce travail, on sait, d'après J.W. Gray [4], que σ est définie globalement par une forme de contact ω , les autres représentants étant du type $\lambda\omega$, où λ est une fonction sans zéros. On note $\bar{\sigma}$ le champ de $2p$ -plans défini par $\sigma = [\omega]$.

1.2. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ (champ de vecteurs sur M). Une équation de Pfaff $[\omega]$ est invariante par rapport à X si les deux conditions équivalentes sont satisfaites :

(i) $(L_X \omega) \wedge \omega = 0$ où L est la dérivée de Lie

(ii) $(\theta_t^* \omega) \wedge \omega = 0$ où θ est le flot de X .

Soit J un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{X}(M)$. On dira que $[\omega]$ est J -invariante si elle est invariante par rapport à chaque élément de J .

Notons J_x la distribution de plans associée à J . On a $\dim J_x \leq \dim J$ en tout point. La condition (H) “ $\dim J_x = \dim J = k$ en tout point” signifie qu’il existe k champs de vecteurs $X_1 \dots X_k$ dans J , linéairement indépendants en chaque point, qui engendrent J ; la J -invariance équivaut alors à l’invariance par rapport à chaque X_i .

Dans la suite, on suppose que J vérifie la condition (H).

1.3. Lorsque J est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(M)$, il existe un groupe de Lie connexe G et une action localement libre de G sur M dont les transformations infinitésimales sont les éléments de J . Les orbites de l’action sont alors des sous-variétés de dimension k de M , difféomorphes au quotient de G par un sous-groupe discret.

Si le groupe G est compact, une équation J -invariante admet un représentant ω qui est une forme invariante, obtenue comme moyenne des transformées d’un représentant quelconque le long du groupe, via une mesure de Haar.

1.4. Soit $\sigma = [\omega]$ une équation de Pfaff J -invariante. On peut lui associer l’application $\hat{\pi} : M \rightarrow J^*$ définie par $\hat{\pi}(x)(X) = \omega_x(X_x)$ où X parcourt J . L’ensemble $\Sigma = \hat{\pi}^{-1}(0)$ a la signification géométrique suivante : c’est l’ensemble des points de M où $J_x \subset \bar{\sigma}_x$; on l’appellera *ensemble singulier* de σ par rapport à J . Soit $\| \cdot \|$ une norme venant d’un produit scalaire sur J^* et $\pi : M - \Sigma \rightarrow S(J^*)$ l’application $\frac{\hat{\pi}}{\|\hat{\pi}\|}$ à valeurs dans la sphère unité.

Si $\| \cdot \|'$ est une autre norme de ce type, π et π' sont échangées par le difféomorphisme $z \rightarrow \frac{z}{\|z\|'}$, de S sur S' .

En pratique, on choisit une base $X_1 \dots X_k$ de J et on pose $\varphi_i = \omega(X_i)$. Alors $\hat{\pi}$ s’identifie à l’application $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) : M \rightarrow \mathbf{R}^k$. Si on pose

$$\rho = \|\hat{\pi}\| = \sqrt{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_k^2}$$

π s’identifie à $\frac{\hat{\pi}}{\rho} : M - \Sigma \rightarrow S^{k-1}$.

La J-invariance équivaut à $d\varphi_i = -X \lrcorner d\omega + f_i \omega$ où les f_i sont des fonctions sur M . Il en résulte une relation entre les propriétés de ω et la "régularité" de Σ et π ; en particulier, on a le

LEMME FONDAMENTAL. — Si σ est une structure de contact J-invariante et si J vérifie (H), alors

(i) Pour tout $x \in \Sigma$, $(\text{rang } \hat{\pi})_x = k$

(ii) Pour tout $x \in M - \Sigma$, $(\text{rang } \pi)_x = k - 1$.

En effet, si $x \in \Sigma$ et si $\sum_1^k \mu_i d\varphi_{i_x} = 0$, le vecteur $u = \sum \mu_i X_{i_x}$ de J_x vérifie $\omega_x(u) = 0$ et $u \lrcorner d\omega_x = \left(\sum_i f_i(x) \mu_i \right) \omega_x$. D'après 1.1. on a donc $u = 0$ et par suite tous les μ_i sont nuls.

Pour (ii), on sait qu'en $x \in M - \Sigma$, l'un des $\varphi_i(x)$ est non nul, par exemple $\varphi_1(x)$. Le rang de π en x est alors celui du système de formes linéaires $(d\psi_2)_x, \dots, (d\psi_k)_x$ où $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\rho}$. On a $d\psi_i = \frac{d\varphi_i}{\rho} - \frac{\varphi_i}{\rho^2} \left(\sum_1^k \psi_i d\varphi_i \right)$.

Si $\sum_2^k \psi_i (d\psi_i)_x = 0$, un calcul facile montre que le vecteur $u = \left(\sum_2^k \mu_i \psi_i(x) \right) \left(\sum_1^k \psi_j(x) X_j(x) \right) - \sum_2^k \mu_i X_{i_x}$ vérifie $\omega_x(u) = 0$ et $u \lrcorner d\omega_x = \left[\sum_2^k \mu_i f_i(x) - \left(\sum_2^k \mu_i \psi_i(x) \right) \left(\sum_1^k \psi_j(x) f_j(x) \right) \right] \omega$. On a donc $u = 0$ et par suite $\psi_1(x) \left(\sum_2^k \mu_i \psi_i(x) \right) = 0$ et $\mu_i = 0$ pour $i = 2, \dots, k$.

1.5. Notons Δ_x la distribution de plans définie par

$$\begin{cases} \Delta_x = \text{Ker } \hat{\pi}_x^t & \text{si } x \in \Sigma \\ \Delta_x = \text{Ker } \pi_x^t & \text{si } x \in M - \Sigma. \end{cases}$$

Dans les hypothèses du lemme 1.4., Δ admet pour variétés intégrales les sous-variétés $\pi = \text{constante}$ sur $M - \Sigma$ et est tangente à la sous-variété Σ . Afin d'étudier les relations entre Δ_x et J_x , on tire de la condition d'invariance les deux formules suivantes

$$X_i(\varphi_j) = \omega([X_i, X_j]) + f_i \varphi_j \quad \text{sur tout } M \quad (1)$$

$$X_i(\psi_j) = \frac{1}{\rho} \omega \left([X_i, X_j] - \psi_j \sum_1^k \psi_l [X_i, X_l] \right) \text{ sur } M - \Sigma \quad (2)$$

dont résulte immédiatement la

PROPOSITION. —

- (i) Si le champ de plans J_x est involutif, alors $\Delta_x \supset J_x$ le long de Σ .
- (ii) Si J est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(M)$, i.e $[J, J] \subset J$, et si, pour $x, y \in M - \Sigma$ tels que $\pi(x) = \pi(y)$ on a $J_x \subset \Delta_x$, on a aussi $J_y \subset \Delta_y$.
- (iii) Si J est abélienne ($[J, J] = \{0\}$), alors $J_x \subset \Delta_x$ partout.

La propriété (iii) admet en fait une réciproque : si $J_x \subset \Delta_x$ partout, alors $[J, J] = 0$, si on suppose que J est une algèbre de Lie.

En écrivant les inégalités sur les dimensions de Δ_x et J_x on obtient le

COROLLAIRE. —

- (i) Si le champ J_x est involutif, Σ est vide pour $k \geq p + 1$.
- (ii) Si $[J, J] = \{0\}$, on a $k \leq p + 1$.

1.6. Si J' est un sous-espace vectoriel de J , il vérifie aussi la condition (H). Soit q la projection naturelle de J^* sur J'^* . Si $[\omega]$ est J -invariante, elle est aussi J' -invariante et on a $\hat{\pi}' = q \circ \hat{\pi}$. Il en résulte que $\Sigma \subset \Sigma'$.

2. Fibrations nouées.

2.1. DEFINITION. — Une fibration nouée (en abrégé f.n.) le long du nœud N au-dessus de la sphère S^{k-1} est un triplet (E, π, N) tel que

- (i) E est une variété connexe compacte orientable
- (ii) N est soit vide, soit une sous-variété fermée de codimension k de E

- (iii) $\pi : E - N \longrightarrow \mathbf{S}^{k-1}$ est une fibration localement triviale
 (iv) Si N est non vide, il existe un voisinage ouvert W de N et un difféomorphisme $h : N \times D^k \longrightarrow W$ (où D^k est le disque unité de \mathbf{R}^k) tel que $h(z, 0) = z$ sur $N \times \{0\}$ et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 N \times (D^k - \{0\}) & \xrightarrow{h} & W - N \\
 \text{projection } \tau \downarrow & & \downarrow \pi \\
 D^k - \{0\} & \xrightarrow{\text{normalisation } \frac{\cdot}{\|\cdot\|}} & \mathbf{S}^{k-1}
 \end{array}$$

Commentaire. — (1) Sur $W - N$, la fibration π est triviale de fibre-type $N \times]0,1[$; les adhérences des fibres ont en commun le nœud N , à la manière des pages d'un livre ouvert.

(2) Si N est vide, on a une fibration localement triviale au sens usuel.

(3) pour $k = 2$, la situation est bien connue (cf. par ex. Winkelkemper [15]) et utilisée pour construire des feuilletages de codimension 1 ; les premières f.n. intéressantes sont apparues comme sous-produit de l'étude des singularités de polynômes (cf. Milnor [11]).

(4) Les fibres de π sont orientables ; pour $k \geq 3$ elles sont connexes et pour $k = 2$ les composantes connexes des fibres sont difféomorphes ; en composant π par un revêtement convenable de \mathbf{S}^1 , on se ramène au cas des fibres connexes.

(5) pour $k = 1$, la définition se résume ainsi : on a une hypersurface fermée N définie par les zéros d'une fonction admettant 0 comme valeur régulière, ou encore une hypersurface fermée transversalement orientable avec une règle de "changement de signe" au passage de chacune de ses composantes connexes.

2.2. Description différentielle.

PROPOSITION. — La donnée d'une f.n. équivaut à celle d'un couple $(E, \hat{\pi})$ où $\hat{\pi} : E \rightarrow \mathbf{R}^k$ est telle que :

(i) $\hat{\pi}$ admet 0 comme valeur régulière

(ii) sur $E - \hat{\pi}^{-1}(0)$, $\pi = \frac{\hat{\pi}}{\|\hat{\pi}\|}$ est de rang $k - 1$ partout.

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque. — Les fibrations de Milnor [11] ne sont pas obtenues directement à partir d'un $\hat{\pi}$ "naturel", comme c'est le cas dans le § 3 de ce chapitre.

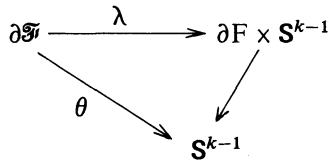
2.3. Description topologique.

Soit F une variété compacte orientable à bord et $\xi : \mathbf{S}^{k-2} \rightarrow \mathcal{O}iff^+(\mathbf{F}, \partial\mathbf{F})$ (difféomorphismes positifs égaux à l'identité le long de $\partial\mathbf{F}$) une application telle que $(u, x) \rightarrow \xi(x)(u)$ soit C^∞ .

En recollant deux exemplaires de $F \times D^{k-1}$ le long de couronnes $F \times \mathbf{S}^{k-2} \times]-\epsilon, +\epsilon[$ via le difféomorphisme

$$(u, x, t) \rightarrow (\xi(x)(u), x, 1 - t),$$

on obtient une fibration $\mathfrak{F} \xrightarrow{\theta} \mathbf{S}^{k-1}$ de fibre F , avec \mathfrak{F} compacte orientable à bord, et une trivialisat



de θ le long du bord.

Soit $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ un difféomorphisme isotope à l'identité et $g : T = \partial\mathbf{F} \times \Delta \rightarrow \partial\mathbf{F} \times \Delta$ un difféomorphisme égal à l'identité sur ∂T (Δ est le disque fermé de \mathbf{R}^k). En recollant \mathfrak{F} et T bord à bord via l'identification $f(\lambda^{-1}(x)) \sim g(x)$, on obtient après lissage une variété compacte orientable E , connexe si F l'est. Si on note par \sim le passage au quotient $\mathfrak{F} \cup T \rightarrow E$, on obtient une f.n (E, π, N) en posant

$$\begin{aligned}
 N &= \widetilde{\partial F \times \{0\}} \\
 \pi &= \theta \circ f^{-1} \text{ prolongée à } E - N \text{ via l'injection } \mathfrak{F} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{F}} \\
 W &= \overset{\circ}{\widetilde{T}} \text{ et } h(\widetilde{u}) = \widetilde{g(u)} \text{ sur } N \times \overset{\circ}{\Delta}.
 \end{aligned}$$

En adaptant la description classique des fibrations à base sphérique, on montre aisément que cette construction donne, pour $k \geq 3$ et à isomorphisme près, toutes les fibrations nouées; pour $k = 2$ on obtient celles qui ont une fibre connexe. Notons qu'un simple diagramme de Heegaard, où on recolle \mathfrak{F} et T bord à bord n'importe comment ne convient pas en général.

2.4. Conséquences

(a) Si $M \xrightarrow{q} B$ est une fibration localement triviale, et (B, π, N) une f.n., cette dernière se relève via q en une f.n. $(M, \pi \circ q, q^{-1}(N))$, car $\hat{\pi} \circ q$ vérifie 2.2.

(b) Deux f.n. (E, π, N) et (E, π', N') sont dites emboîtées s'il existe des descriptions $\hat{\pi}: E \rightarrow \mathbf{R}^k$ et $\hat{\pi}': E \rightarrow \mathbf{R}^{k'}$, ainsi qu'une projection linéaire $\nu: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{k'}$ telle que $\hat{\pi}' = \nu \circ \hat{\pi}$.

On a alors $N' \supset N$ et dans $E - N'$, fibre de $\pi' \subset$ fibre de π . Le fait important est que, si $k' < k$, alors $N' \neq N$.

En effet si $N \neq \emptyset$, les dimensions sont différentes et si $N = \emptyset$ il y a des points où $\nu(\hat{\pi}(x)) = 0$ avec $\hat{\pi}(x) \neq 0$, car π est surjective, donc N' est non vide.

(c) Il y a une notion de somme connexe de deux f.n. de mêmes dimensions $(E, \pi, N) \# (E', \pi', N') = (E \# E', \pi \# \pi', N \# N')$ obtenue par chirurgie et recollement le long de sphères contenues dans les voisinages W et W' respectifs, et qui découpent des sphères sur N et N' .

2.5. Obstacles topologiques.

D'après la description 2.3. on obtient des restrictions sur les nombres de Betti d'une f.n.. En effet, on écrit la suite de Wang du fibré $\mathfrak{F} \xrightarrow{\theta} \mathbf{S}^{k-1}$ de fibre F et la suite d'adjonction pour le recollement de \mathfrak{F} et T le long de $N \times \mathbf{S}^{k-1}$, en tenant compte de $N = \partial F$.

Il en résulte des égalités et inégalités sur les $b_i(F)$, $b_i(N)$ et $b_i(E)$ d'où l'on tire, dans certains cas, des contraintes sur les $b_i(E)$ seuls.

Le cas le plus précis est celui où $\dim F = 2$. Dans ce cas, on sait que $\pi_{k-2}(\text{Homéo}_0(F, \partial F)) = 0$ (cf. M.E. Hamstrom [5]). Le fibré \mathfrak{F} est donc homéomorphe au produit $F \times \mathbf{S}^{k-1}$ et on obtient, après calcul, la

PROPOSITION. — Si $\dim F = 2$ et $\dim E = n$, on a nécessairement

$$b_i(E) = 0 \text{ pour } i \neq 0, 1, n, n - 1$$

$$b_i(E) = b_{n-1}(E) = b_i(F)$$

$$1 \leq b_1(\partial F) \leq \frac{b_1(F)}{2}.$$

Ces relations déterminent, pour une variété de type $(1, \alpha, 0 \dots 0, \alpha, 1)$ donnée, toutes les surfaces F possibles dans une éventuelle décomposition en f.n. de E au-dessus de \mathbf{S}^{n-2} . Ainsi si E est une sphère cohomologique, on a $b_1(F) = 0$ et $b_1(\partial F) = 1$ et F est difféomorphe au disque D^2 . Mais on sait que $\pi_i(\text{Diff}_0(D^2, S^1)) = 0$ de sorte que le fibré \mathfrak{F} est différemmentiellement trivial. Les seules indéterminées restent les difféomorphismes f et g de 2.3.

COROLLAIRE. — Si une variété compacte connexe E_n se décompose en f.n. au-dessus de \mathbf{S}^{n-2} avec nœud non vide, et si E est un produit de deux variétés, alors E est de la forme $S^1 \times M$ où M est de type $(1, b, 0 \dots 0, b, 1)$.

Ainsi $\mathbf{T}^4, \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$ etc. et \mathbf{T}^n sont exclus ($n \geq 4$).

2.6. Parmi les variétés qui peuvent être décomposées en f.n. au-dessus de \mathbf{S}^{k-1} , on connaît :

(a) en toutes dimensions, la sphère $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}^{n-k} \times D^k \cup D^{n-k+1} \times \mathbf{S}^{k-1}$

(b) pour $k = 1$, toutes variétés

(c) pour $k = 2$, les variétés hautement connexes obtenues dans [15]; en particulier sur \mathbf{S}^n , il y a des décompositions non isomorphes, pour n impair.

(d) pour $n = 3$, $k = 2$, on sait depuis Alexander [0], que toute variété E_3 se décompose. En fait, on peut choisir arbitrairement le nombre de cercles du nœud.

Exemple. — Sur le tore \mathbf{T}^3 , on a une f.n. donnée par

$$\varphi_1 = \sin \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\varphi_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

dont le nœud est fait de 4 cercles et la fibre est un tore \mathbf{T}^2 privé de 4 disques.

3. Le théorème de fibration.

Soit $[\omega]$ une structure de contact sur M_{2p+1} , supposée compacte orientable, invariante par rapport à un espace vectoriel J vérifiant (H). Avec les notations de 1.4., le lemme fondamental et la description différentielle 2.2 des f.n. impliquent le

3.1. THEOREME. —

(i) *Le triplet (M, π, Σ) est une f.n. au-dessus de \mathbf{S}^{k-1} .*

(ii) *Si J' est un sous-espace vectoriel de J , alors (M, π, Σ') est emboîtée dans (M, π, Σ) .*

Ce théorème a de nombreuses conséquences sur l'existence de structures de contact invariantes. Ainsi :

3.2. *Le cas extrême $k = 2p + 1$.*

Dans ce cas Σ est vide et M est fibré en cercles au-dessus de \mathbf{S}^{2p} . D'après la classification de ces fibrés on en déduit que si une variété compacte orientable admet un parallélisme laissant une structure de contact invariante, alors

(i) *pour $p > 1$, M est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{2p}$*

(ii) *pour $p = 1$, M est difféomorphe à $\mathbf{S}^3, \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ ou un espace lenticulaire.*

On retrouve par des arguments topologiques le fait qu'un groupe de Lie compact autre que \mathbf{S}^3 et $\text{SO}(3) = \mathbf{P}^3$ ne saurait admettre de forme de Maurer-Cartan qui soit de contact (cf. Goze [2]).

On peut noter que la réciproque reste indécidée, bien que tous ces espaces admettent une forme de contact invariante par rapport à l'action de \mathbf{S}^1 (en dimension 3, cf. Lutz [7] et pour $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{2p}$ on a la forme

$$\omega = i^*(x, dx_2 - x_2 dx_1 + \dots + x_{2p-1} dx_{2p} - x_{2p} dx_{2p-1} + x_{2p+1} d\theta).$$

3.3. *Le cas où J_x est involutif.*

On a vu en 1.5. que Σ est vide, dans ce cas, dès que $k \geq p + 1$. Ce fait, joint à la partie (ii) du théorème 3.1. et à la proposition 2.4. conduit à la

PROPOSITION. — *Si J' est un vrai sous-espace vectoriel de J et si J'_x est involutif, alors $\dim J' \leq p$.*

3.4. *Le cas où J est une algèbre de Lie.*

La proposition précédente s'applique à toutes les sous-algèbres de J , en particulier aux idéaux. Ainsi

- (i) *J ne saurait être résoluble pour $k > p + 1$.*
- (ii) *Si $k = 2p + 1$ ou $2p$, J est simple (utiliser une décomposition de Lévi).*

En fait, d'après un travail récent, les limitations algébriques sont beaucoup plus fortes cf. Goze [3].

3.5. *Le cas abélien.*

Dans ce cas J engendre une action localement libre de \mathbf{R}^k . On a $k \leq p + 1$ et pour $k = p + 1$, Σ est vide. D'après 1.5., Σ ainsi que les fibres de π sont invariants par l'action. On peut remarquer également que, sur $M - \Sigma$, la forme de contact $\frac{\omega}{\|\hat{\pi}\|}$ est invariante.

Voici une généralisation d'un résultat classique (cf. Reeb [12]):

THEOREME 1. — *Si une action localement libre de \mathbf{R}^k , $k \leq p$, sur une variété compacte laisse une structure de contact invariante, les deux propriétés suivantes sont incompatibles :*

- (i) l'action est transverse à la structure (ie Σ est vide)
 (ii) l'action admet une transversale compacte (sans bord) de codimension k .

En effet, si S est une transversale, la forme

$$X_1 \lrcorner X_2 \lrcorner \dots \lrcorner X_k \lrcorner \omega \wedge d\omega^p$$

induit sur S une forme volume. Un calcul facile montre que sur $M - \Sigma$, cette forme est égale, grâce à la nullité des crochets $[X_i, X_j]$ et l'invariance, à $f \left[d \left(\frac{\omega}{\rho} \right) \right]^{p+1-k} \wedge \pi^* v$ où v est une forme volume sur \mathbf{S}^{k-1} et f une fonction sans zéros. Si $S \cap \Sigma = \emptyset$, on a donc une forme volume exacte sur S , ce qui, d'après la formule de Stokes, en interdit la compacité.

Remarque. — Si $k = p + 1$, la conclusion est fausse. La forme $\cos \theta_3 d\theta_1 + \sin \theta_3 d\theta_2$ en est un exemple.

COROLLAIRE. — Si B est compacte, le produit $\mathbf{T}^k \times B_{2p+1-k}$ n'admet, pour $k < p + 1$, aucune structure de contact invariante par rapport à l'action de \mathbf{T}^k avec un ensemble singulier vide.

Dans le cas extrême $k = p + 1$, M est, d'après 3.1. fibré au-dessus de \mathbf{S}^p en fibres de dimension $p + 1$ saturées par les orbites de l'action qui ont la même dimension.

Les composantes connexes de la fibre-type sont donc des quotients compacts de \mathbf{R}^{p+1} par des sous-groupes discrets, c'est-à-dire des tores \mathbf{T}^{p+1} .

Pour $p > 1$ les fibres, étant connexes, sont des tores \mathbf{T}^{p+1} .

Pour $p = 1$, on obtient un fibré en tores \mathbf{T}^{p+1} en composant π par un revêtement $\mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ à un nombre convenable de feuillets. Ainsi, on a le

THEOREME 2. — Si une variété compacte connexe orientable M_{2p+1} admet une action localement libre de \mathbf{R}^{p+1} qui laisse une structure de contact invariante, elle est fibrée en tores \mathbf{T}^{p+1} au-dessus de \mathbf{S}^p , et les fibres sont les orbites de l'action.

On verra en II que le fibré est loin d'être principal, en général.

Remarques. — 1. On peut comparer ce théorème aux résultats classiques sur le rang des variétés (cf. [13]).

2. On vient de voir un cas où Σ est vide et la fibre de π est connue. En voici un autre, dans le cas général où J est un simple espace vectoriel vérifiant (H) : on suppose $k = 2$ et $p = 1$. Alors $\pi = (\psi_1, \psi_2)$ avec $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$. En un point x tel que $\psi_1(x) = 0$, on a donc $(d\psi_2)_x = 0$ et en particulier $X_1(\psi_2)_x = 0$. Par ailleurs $X_1(\psi_1)_x = -d\omega_x(X_1, X_1) = 0$, de sorte que le champ X_1 est tangent à la fibre (de dimension 2) passant par x . Il en résulte que chaque composante connexe de la fibre-type est un tore T^2 , bien qu'ici il n'y ait pas d'action de \mathbf{R}^2 .

3. En général, une structure de contact invariante par rapport à une action de \mathbf{R}^k ne possède pas de représentant qui soit une forme invariante (c'est cependant le cas pour une action de \mathbf{T}^k , d'après 1.3). En effet, pour une telle forme, les fonctions φ_i sont constantes sur les orbites, ce qui suppose qu'aucune orbite n'admette Σ dans son adhérence.

Voici un exemple d'une telle situation : sur $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ on considère le champ $Z = t^2 \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial t} + (2 + \sin \theta_1) \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ et la forme de contact $\omega = d\theta_1 + t d\theta_2$. On a $L_Z \omega = (t \cos \theta_1) \omega$ et $Z = \{0\} \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$; on vérifie que les trajectoires de Z s'enroulent asymptotiquement sur Σ .

3.6. Le cas des fibrés principaux en tores.

Dans le cas où J engendre l'action libre de \mathbf{T}^k sur un fibré principal en tores $M_{2p+1} \xrightarrow{q} B_{2p+1-k}$, avec M compacte orientable, il y a en plus des résultats précédents, un phénomène nouveau : l'application $\hat{\pi} : M \rightarrow \mathbf{R}^k$ se factorise par q en une application, encore notée $\hat{\pi}$, de B dans \mathbf{R}^k , et l'on en déduit sur B une fibration nouée au-dessus de \mathbf{S}^{k-1} qui est la projection de la fibration de M . L'ensemble singulier et les fibres "perdent" le facteur \mathbf{T}^k par passage au quotient.

Pour $k = p + 1$, Σ est vide et on a un revêtement $\pi : B_p \rightarrow \mathbf{S}^p$. Il en résulte que B est difféomorphe à la sphère \mathbf{S}^p ; pour $p \geq 3$ et $p = 1$, le seul fibré principal concerné est le produit $\mathbf{S}^p \times \mathbf{T}^{p+1}$, et on verra plus loin que la structure de contact est isomorphe à celle de Liouville-Cartan.

Cherchons l'expression de la condition de contact sous forme basique, via une forme de connexion $\eta = \sum_1^k \eta_i \otimes e_i$, de courbure $\sum \Omega_i \otimes e_i$.

On a $\omega = \sum_1^k (\varphi_i \circ q) \eta_i + q^* \beta$ où $\hat{\pi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : B \rightarrow \mathbf{R}^k$ et β est une forme de Pfaff sur B . Posons $\Omega = \sum \left(\frac{\varphi_i}{\rho}\right) \Omega_i$ sur $B - \Sigma$.

En calculant le produit intérieur $X_1 \lrcorner \dots \lrcorner X_p \lrcorner \omega \wedge d\omega^p$, on obtient la

PROPOSITION. — *La condition de contact équivaut à la double condition*

$$(i) \text{ si } x \in \Sigma, (\beta \wedge d\beta^{p-k} \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k)_x \neq 0$$

$$(ii) \text{ si } x \in B - \Sigma, \left[\Omega + d\left(\frac{\beta}{\rho}\right) \right]^{p+1-k} \wedge \pi^* v \neq 0$$

où v est la forme volume usuelle sur \mathbf{S}^{k-1} .

En termes géométriques, cela signifie que β induit une forme de contact sur Σ et $\Omega + d\left(\frac{\beta}{\rho}\right)$ induit une forme symplectique sur chaque fibre de π .

COROLLAIRE. — *Si $k = p$ et $p > 1$, Σ est non vide.*

En effet, si Σ est vide, pour tout $u = (u_1, \dots, u_p)$ de \mathbf{S}^{p-1} , $\pi^{-1}(u)$ est compact et $\int_{\pi^{-1}(u)} \Omega + d\left(\frac{\beta}{\rho}\right) \neq 0$, donc aussi $\int_{\pi^{-1}(u)} \Omega = \sum_1^p u_i \int_{\pi^{-1}(u)} \Omega_i \neq 0$.

Les nombres $\int_{\pi^{-1}(u)} \Omega_i$ sont des entiers qui varient continûment avec u , donc des constantes. Il y aurait donc dans \mathbf{R}^p un hyperplan passant par l'origine qui ne rencontre pas la sphère, ce qui est absurde pour $p > 1$.

Notons que pour $k = p = 1$, Σ peut être vide, pourvu que le fibré $M_3 \xrightarrow{q} B_2$ admette une connexion avec $\lambda = \int_0 \Omega \neq 0$. En effet, si W est une 2-forme d'intégrale 1, on a $\lambda W - \Omega = d\beta$ et la formé $\omega = \eta + q^* \beta$ répond à la question.

Le corollaire montre que pour $k = p > 1$, la base B est soumise, si le fibré $M \rightarrow B$ admet une forme de contact invariante, à de fortes contraintes liées, d'après 2.5., à sa décomposition en f.n.

3.7. En appliquant toutes ces remarques aux structures de contact éventuelles sur T^{2p+1} invariantes par rapport à l'action naturelle de T^k , on obtient les restrictions suivantes :

- (i) $k \geq p + 1$ est exclu sauf pour $p = 1$, $k = 2$.
- (ii) $k = p$ est exclu sauf pour $p = 1$ et $p = 2$.
- (iii) $k \leq p$ et Σ vide est exclu.
- (iv) en utilisant à fond la méthode 2.5., on montre que $k > 2$ est exclu. Le tore T^5 avec $k = p = 2$ et $\Sigma \neq \emptyset$ échappe à ces exclusions.

II. QUELQUES CAS D'EXISTENCE

Il s'agit exclusivement de l'existence de structures de contact invariantes par rapport à des actions localement libres de R^k sur des variétés compactes orientables M_{2p+1} .

1. Le cas extrême $k = p + 1$.

1.1. D'après 3.5. il est raisonnable de formuler la

Conjecture. — Sur toute variété M_{2p+1} fibrée en tores T^{p+1} au-dessus de S^p , il existe une action localement libre de R^{p+1} dont les orbites sont les fibres et une forme de contact invariante par cette action.

Je sais établir la validité de cette conjecture pour $p = 1$, c'est-à-dire sur les fibrés en tores T^2 sur S^1 ; mais la démonstration, assez longue et technique, n'a pas sa place ici.

Remarque. — Il est faux que toute action localement libre de \mathbf{R}^2 dont les orbites sont les fibres d'une fibration $M_3 \xrightarrow{\pi} \mathbf{S}^1$ admette une structure de contact invariante.

En voici un contre-exemple :

Soit $M_3 \xrightarrow{q} \mathbf{T}^2$ un fibré principal non trivial de groupe \mathbf{S}^1 , muni d'une forme de connexion α telle que $d\alpha = p^*(\Omega)$ où Ω est sans zéros sur \mathbf{T}^2 . Si X engendre l'action de \mathbf{S}^1 sur M et Y est le relèvement horizontal via α de $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$, tel que $[X, Y] = 0$, on a une action localement libre de \mathbf{R}^2 dont les orbites sont les fibres de la fibration composée $M_3 \xrightarrow{p} \mathbf{T}^2 \xrightarrow{2^{\text{e}} \text{ projection}} \mathbf{S}^1$. Si cette action laisse une structure de contact $[\omega]$ invariante, on a Σ vide et $\frac{\omega}{\|\hat{\pi}\|} = \eta$ invariante avec les notations du chap. I.

Posons $\eta(X) = P^*(\varphi)$ et $\eta(Y) = p^*(\psi)$. La condition d'invariance donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \left(\xi \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right) = -\varphi \Omega \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right)$$

où $\eta = p^*\xi + (p^*\varphi)\alpha$.

Soit x un point de \mathbf{T}^2 tel que $\varphi(x) \neq 0$ (il en existe grâce à la condition de contact : $\psi d\varphi - \varphi d\psi$ sans zéros sur \mathbf{T}^2). Sur la trajectoire $\gamma(t)$ de $\frac{\partial}{\partial \theta_1}$ passant par x à l'instant 0, φ est constante et comme Ω est sans zéros, on a $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\xi \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \right) \neq 0$ ce qui est impossible car γ est périodique.

2. Le cas des fibrés principaux en tores \mathbf{T}^p .

D'après I.3.6., dont on reprend les notations, il faut partir d'une f.n. de B_{p+1} au-dessus de \mathbf{S}^{p-1} d'ensemble singulier Σ_1 et de fibre F_2 .

2.1. THEOREME. — *Il existe sur M une forme de contact invariante dont la f.n. associée soit celle qui est donnée.*

Il s'agit de construire sur B une forme de Pfaff β telle que

$$\begin{aligned} \text{si } x \in \Sigma, (\beta \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p)_x &\neq 0 \\ \text{si } x \in B - \Sigma, \left[\Omega + d\left(\frac{\beta}{\rho}\right) \right]_x \wedge (\pi^*v)_x &\neq 0. \end{aligned}$$

On suppose le voisinage W de Σ défini par $\rho < 1$. Sur W il existe une 1 - forme fermée β_0 telle que $\beta_0 \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p > 0$ (par rapport à une orientation fixée de B). Sur $W - \Sigma$, on a alors

$$d\left(\frac{\beta_0}{\rho}\right) \wedge \pi^*v = \frac{1}{\rho^p} \beta_0 \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p.$$

Sur la base $\beta_0, d\varphi_1, \dots, d\varphi_p$, on a $\Omega_i = \beta_0 \wedge \sum a_i^j d\varphi_j + \text{termes en } d\varphi_k \wedge d\varphi_l$, de sorte que

$$\Omega \wedge \pi^*v = \frac{1}{\rho^p} \left(\sum_{i,j,l} \varphi_l \frac{\varphi_i}{\rho} a_i^j \right) \beta_0 \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p.$$

Posons $\lambda = \sum_{i,j,l} \varphi_l \frac{\varphi_i}{\rho} a_i^j$; on a $|\lambda| < \rho^p \sum_{i,j} |a_i^j|$ sur $W - \Sigma$.

Quitte à rétrécir W, on peut supposer les fonctions a_i^j bornées, de sorte qu'il existe une constante μ_0 telle que $|\lambda| \leq \rho \mu_0 \leq \mu_0$ sur $W - \Sigma$.

Soit k une constante $> \mu$; on a alors $\left[\Omega + kd\left(\frac{\beta_0}{\rho}\right) \right] \wedge \pi^*v > 0$ sur $W - \Sigma$, et la forme $k\beta_0$ est une solution du problème sur W.

Soit T le voisinage de Σ défini par $\rho < 1/4$ et une trivialisat ion $U_i \times F$ de π . Sur $B - T$, Ω est bornée; il existe donc des formes α_i telles que $(\Omega + d\alpha_i) \wedge \pi^*v > 0$ (choisir sur F une 2-forme positive et en multiplier une primitive par une constante assez grande).

Si g_i est une partition de l'unité subordonnée aux $U_i \subset \mathbf{S}^{p-1}$, on a $\left[\Omega + d\left(\sum_i g_i \alpha_i\right) \right] \wedge \pi^*v = \sum_i g_i [(\Omega + d\alpha_i) \wedge \pi^*v]$ qui est positive.

La forme $\beta_1 = \rho(\sum g_i \alpha_i)$ est donc une solution sur $B - T$. Soit $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow [0,1]$ telle que

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{sur } \left[0, \frac{1}{2} \right] \\ f(t) = 0 & \text{sur } \left[\frac{3}{4}, +\infty \right[\end{cases}$$

Posons $\beta = f(\rho) k\beta_0 + (1 - f(\rho))\beta_1$. On a $\beta = k\beta_0$ pour $\rho \leq 1/2$ et $\beta = \beta_1$ pour $\rho \geq 3/4$. Pour $\rho \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right]$, on a :

$$\begin{aligned} & \left[\Omega + d \left(\frac{\beta}{\rho} \right) \right] \wedge \pi^* v \\ &= \left[f(\rho) \left(\Omega + kd \left(\frac{\beta_0}{\rho} \right) \right) + (1 - f(\rho)) \left(\Omega + d \left(\frac{\beta_1}{\rho} \right) \right) \right] \wedge \pi^* v \\ & \quad + \left[f'(\rho) (C - k) \frac{1}{\rho^{p-3}} \right] \beta_0 \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p \end{aligned}$$

où C est la composante de β_1 sur le premier élément de la base de formes $\beta_0, d\varphi_1, \dots, d\varphi_p$ dans W .

Le premier terme est > 0 par convexité. Entre $1/2$ et $3/4$ on peut supposer $f'(\rho) < 0$ et comme C est majoré, il suffit que k soit assez grand pour que β soit une solution du problème.

2.2. COROLLAIRE. — *Sur tout fibré principal $M_5 \rightarrow B_3$ en tores T^2 , avec M et B compactes orientables, il existe une forme de contact invariante dont l'ensemble singulier ait un nombre de composantes connexes arbitrairement élevé.*

Ceci résulte de la conjonction de 2.1. et I.2.5.

En ce qui concerne les fibrés principaux $M_3 \rightarrow B_2$ en cercles, le résultat est encore vrai et utilisé dans [7].

Le corollaire s'applique à $T^5 = T^2 \times T^3$. Sur l'exemple de f.n. donné en I.2.5. on obtient la forme

$$\begin{aligned} \omega = & (\sin \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3) d\theta_4 + (\sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ & + \sin \theta_2 \cos \theta_3) d\theta_5 + \sin \theta_2 \cos \theta_2 d\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_2 \\ & + \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\theta_3 \end{aligned}$$

qui est invariante par rapport à $\frac{\partial}{\partial \theta_4}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta_5}$ et de contact.

2.3. COROLLAIRE. — *Si $M \rightarrow B_{p+1}$ et $M' \rightarrow B'_{p+1}$ sont deux fibrés principaux en tores T^p admettant des formes de contact invariantes, tout fibré principal en tores T^p au-dessus de $B \# B'$ en admet également une, dont l'ensemble singulier basique est $\Sigma \# \Sigma'$ ($\#$ désigne la somme connexe).*

Ceci résulte de 2.1. et I.2.4.

2.4. Comme on sait décrire toutes les f.n., le théorème 2.1. fournit un grand nombre de formes de contact nouvelles sur des variétés de grande dimension.

Un des exemples les plus simples est celui de la forme

$$\omega = i^*(x_1 d\theta_1 + \dots + x_p d\theta_p + x_{p+1} dx_{p+2} - x_{p+2} dx_{p+1})$$

où $i: \mathbf{T}^p \times \mathbf{S}^{p+1} \rightarrow \mathbf{T}^p \times \mathbf{R}^{p+2}$ est l'injection naturelle.

2.5. Dans le cas des fibrés principaux en tores \mathbf{T}^k avec $k < p$, des difficultés considérables apparaissent car $\left[\Omega + d \left(\frac{\beta}{\rho} \right) \right]^{p+1-k} \wedge \pi^*v$ se comporte très mal par rapport aux moyennes du type $f\alpha_0 + (1-f)\alpha_1$. Les "raccords" ne seront possibles que dans certains cas.

Voici cependant un exemple avec Σ non vide, sur $\mathbf{T}^k \times \mathbf{S}^{2p+1-k}$, qui généralise 2.4 :

$$\begin{aligned} \omega = i^*(x, d\theta, + \dots + x_k d\theta_k + x_{k+1} dx_{k+2} - x_{k+2} dx_{k+1} \\ + \dots + x_{2p+1-k} dx_{2p+2-k} - x_{2p+2-k} dx_{2p+1-k}). \end{aligned}$$

III. QUELQUES RESULTATS DE CLASSIFICATION

Deux structures de contact $[\omega]$ et $[\omega']$ invariantes par rapport à une action d'un groupe G sur une variété M sont équi-isomorphes s'il existe un difféomorphisme $h: M \rightarrow M$, G -équivariant, tel que $h^*[\omega] = [\omega']$. Il est clair que les f.n. associées aux deux structures sont alors échangées par h ; leurs caractéristiques géométriques (nature de la fibre type et de l'ensemble singulier) sont des invariants dans cette classification.

On se propose de montrer que, dans certains cas, deux structures de contact invariantes ayant même f.n. (ou ce qui revient au même, dont les f.n. sont échangées par un difféomorphisme équivariant) sont isomorphes. Le résultat s'applique en particulier aux structures obtenues en II.1.1. et II.2.1.

1. Familles à 1 paramètre de structures de contact invariantes.

1.1. Soit ω_t une famille à 1 paramètre de formes de contact. On sait, d'après Martinet [10], qu'il existe pour chaque t un unique champ de vecteur Z_t tel que

$$\begin{cases} \omega_t(Z_t) = 0 \\ \omega_t \wedge (\omega_t - L_{Z_t} \omega_t) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\omega_t \wedge h_t^* \omega_0 = 0$, où h_t est la famille de difféomorphismes obtenue par intégration de l'équation différentielle $\frac{du}{dt} = Z_t(u)$, avec $h_0 = \text{id.}$. Ces difféomorphismes sont tous positifs.

Si chaque forme ω_t est invariante par rapport à une action de groupe, le champ Z_t , grâce à son unicité, l'est également et les h_t sont équivariants.

1.2. Il en résulte immédiatement la stabilité équivariante des structures de contact qui admettent un représentant invariant.

2. Cas des actions localement libres de \mathbf{R}^{p+1} et de \mathbf{R}^p avec Σ vide.

2.1. PROPOSITION. — Soient $[\omega]$ et $[\omega']$ deux structures de contact invariantes par rapport à une action localement libre de \mathbf{R}^{p+1} , ayant même fibration associée. Alors elles sont équi-isomorphes (positivement).

D'après 1.3, on peut supposer les formes ω et ω' invariantes. Ici Σ est vide, et on peut supposer $\|\hat{\pi}\| = \|\hat{\pi}'\| = 1$. Soit $\omega_t = t\omega' + (1-t)\omega$. On a $\hat{\pi} = \hat{\pi}'$ par hypothèse et $\hat{\pi}_t = t\hat{\pi}' + (1-t)\hat{\pi}$ de sorte que $\pi_t = \pi$ pour tout t . La condition de contact se réduisant à $\pi_t^* v \neq 0$, on conclut en utilisant 1.1.

Application. — Sur $\mathbf{T}^{p+1} \times \mathbf{S}^p$, $p > 1$, toute structure de contact \mathbf{T}^{p+1} -invariante est équi-isomorphe à celle de Liouville-Cartan, car il y a un seul revêtement de \mathbf{S}^p , à difféomorphisme

près. Pour $p = 1$, il y a une infinité de modèles :

$$\cos n \theta_3 d\theta_1 + \sin n \theta_3 d\theta_2, \quad n \in \mathbf{Z} - \{0\}.$$

2.2. PROPOSITION. — Soient $[\omega]$ et $[\omega']$ deux structures de contact invariantes par rapport à une action localement libre de \mathbf{R}^p , ayant leur ensemble singulier vide et même fibration associée. Alors si $\omega \wedge d\omega^p$ et $\omega' \wedge d\omega'^p$ sont de même orientation, les deux structures sont équivalentes (positivement).

On considère à nouveau $\omega_t = t\omega' + (1-t)\omega$, en supposant les formes ω et ω' invariantes et normalisées. On a alors $\pi_t = \pi$ pour tout t et la condition de contact $d\omega_t \wedge \pi_t^*v$ se réduit à $t d\omega' \wedge \pi^*v + (1-t)d\omega \wedge \pi^*v$ sans zéro, ce qui est vérifié par convexité. On conclut via 1.1.

2.3. THEOREME. — Soient ω et ω' deux formes de contact invariantes par rapport à une action localement libre de \mathbf{R}^p sur M_{2p+1} qui admette une connexion. Supposons qu'elles aient même fibration associée et même orientation. Alors elles sont positivement équivalentes.

Par connexion on entend un champ de plans de codimension p invariant et transverse aux orbites, ou, de manière équivalente, la donnée de p formes de Pfaff η_i telles que $\eta_i(X_j) = \delta_{ij}$ et $X_j \lrcorner d\eta_i = 0$, les champs de vecteurs X_i étant les générateurs de l'action. La condition de contact donne, au voisinage de $\Sigma = \Sigma'$,

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p \wedge \omega \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0$$

et

$$d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_p \wedge \omega' \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0$$

puisque, par hypothèse, $\varphi'_i = \omega'(X_i) = \lambda\varphi_i = \lambda\omega(X_i)$, $\lambda > 0$, ce qui implique $d\varphi'_i = \lambda d\varphi_i$ sur Σ .

Sur ce voisinage, ω' s'écrit $\sum a_i d\varphi_i + b\omega + \sum c_i \eta_i$, de sorte que $b > 0$ car les deux formes de contact ont même orientation.

Les fonctions a_i , b et c_i sont invariantes ; si g est une fonction ≥ 0 d'une variable nulle pour $|t| > \epsilon$ et valant 1 au voisinage de 0, la fonction $\tilde{b} = 1 + (b-1)g(\rho)$ (ici $\rho = \sqrt{\sum \varphi_i^2}$) est partout définie sur M (si ϵ est assez petit), invariante et positive.

égale à b au voisinage de Σ . Posons $\omega'' = \frac{\omega'}{b}$ et soit Y le champ de vecteur au voisinage de Σ défini par $\omega(Y) = 1$, $Y(\varphi_i) = 0$, $\eta_i(Y) = 0$.

On a $d\varphi_i([Y, X_j]) = \omega([Y, X_j]) = \eta_i([Y, X_j]) = 0$, de sorte que $[Y, X_j] = 0$. On prolonge Y à M en un champ \tilde{Y} tel que $[\tilde{Y}, X_j] = 0$ pour tout j et $\tilde{Y} = 0$ en dehors d'un voisinage de Σ .

Si $\theta_t(x)$ est le flot associé à \tilde{Y} , il commute avec l'action pour chaque t ; posons $h(x) = \theta_{\sum_i a_i(x)\varphi_i(x)}(x)$ au voisinage de Σ . Alors h se prolonge par l'identité à M et on voit facilement que

- (i) si $x \in \Sigma$, $h(x) = x$
- (ii) $\varphi_i(h(x)) = \varphi_i(x)$
- (iii) $h^*\omega = \omega''$ en tout point de Σ
- (iv) Le Jacobien de h est égal à $1 + \sum_i \tilde{Y}(a_i)\varphi_i$, de sorte que, si $\tilde{Y} = 0$ assez près de Σ , il est positif, car les fonctions φ_i seront assez petites là où $\tilde{Y} \neq 0$. L'application h est donc un difféomorphisme local de M dans M .

M étant compacte et connexe, la contre-image d'un point y a un nombre fini constant de points. Si $y \in \Sigma$ et $h(x) = y$, on a $\varphi_i(h(x)) = 0 = \varphi_i(x)$, de sorte que $x \in \Sigma$ et $h(x) = x$. Il en résulte que h est un difféomorphisme positif qui commute avec l'action.

On est ainsi ramené au cas où, en plus des hypothèses, ω et ω' coïncident en tout point de Σ . Mais alors $\omega_t = (1-t)\omega + t\omega'$ est de contact au voisinage de Σ et invariante, ce qui détermine un champ Z_t du type 1.1. sur ce voisinage. On prolonge Z_t en un champ nul en dehors d'un voisinage de Σ . D'après 1.1. on est ainsi ramené au cas où $\omega = \omega'$ au voisinage de Σ , les autres hypothèses étant inchangées.

On a maintenant $\varphi'_i = \mu\varphi_i$, où μ est une fonction invariante positive, égale à 1 au voisinage de Σ .

Posons

$$\begin{cases} \omega_t = (1-t)\omega + t \frac{\omega'}{\mu} \text{ sur } M - \Sigma \\ \omega_t = \omega = \omega' \text{ au voisinage de } \Sigma. \end{cases}$$

Alors tous les ω_t ont le même $\hat{\pi}$; la condition de contact $d\omega_t \wedge \pi_t^*v$ est donc vérifiée par connexité et on conclut comme en 2.2.

Remarque. — Dans le cas des fibrés principaux en tores T^p , l'action admet une connexion et toute structure de contact invariante se ramène à une forme de contact invariante. La condition sur l'orientation des formes n'est importante que dans le cas où p est impair.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] J.W. ALEXANDER, A lemma on systems of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 9 (1923), 93-95.
- [1] W.M. BOOTHBY and H.C. WANG, On contact manifolds, *Ann. of Math.*, 68, 3 (1958).
- [2] M. GOZE, Sur la classe des formes invariantes sur un groupe de Lie, *C.R.A.S.*, Paris, 283, série A (1976), 499-501.
- [3] M. GOZE, Degré de symétrie d'une structure de contact, *CRAS*, Paris, 287, série A (1978), 337-338.
- [4] J.W. GRAY, Some global properties of contact structures, *Ann. of Math.*, 69, 2 (1959), 421-450.
- [5] M.E. HAMSTROM, Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Illinois J. Math.*, 10 (1966), 563-573.
- [6] S. KOBAYASHI, Principal fiber bundles with 1-dimensional toroidal group, *Tôhoku math. J.*, 8 (56), 29-45.
- [7] R. LUTZ, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 27, 3 (1977), 1-15.
- [8] R. LUTZ, Structures de contact en codimension quelconque, *Lecture notes*, 392 (1974), 23-29.
- [9] R. LUTZ et C. MECKERT, Structures de contact sur certaines sphères exotiques, *C.R.A.S.* Paris, 282 (mars 1976).
- [10] J. MARTINET, Formes de contact sur les variétés de dimension 3, *Springer Lect. Notes in Math.*, 209 (1971), 142-163.

- [11] J. MILNOR, Singular points of Complex Hypersurfaces, Princeton Univ. Press 1968, *Ann. of Math.*, series 61.
- [12] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Mémoires de l'Acad. Royale de Belgique.*, Sér. Sci., 2, 27 (1952).
- [13] G. CHATELET, H. ROSENBERG et D. WEIL, *Publ. Math. IHES*, 43 (1974), 245-260.
- [14] C.B. THOMAS, Almost regular contact manifolds, *Journal of Diff. Geometry*, vol. 11, 4 (1976), 521-533.
- [15] H.E. WINKELNKEMPER, Manifolds as open books, *B.A.M.S.*, 79 (1973), 45-51.

Manuscrit reçu le 18 mai 1978.

Robert LUTZ,
Institut de Recherche Mathématique
Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.
&
Institut des Sciences Exactes
et Appliquées
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex.