Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 229-238

SUR L'OPÉRATEUR d'' ET LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES AU SENS DE WHITNEY

par Alain DUFRESNOY

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

0. Introduction.

Si Γ désigne un fermé de $\mathbf{C}^n$, on désigne par $W(\Gamma)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables au sens de Whitney sur Γ, qui s'identifie au quotient $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)/\mathfrak{J}(\Gamma)$ où $\mathfrak{J}(\Gamma)$ désigne l'idéal des fonctions identiquement nulles sur Γ ainsi que toutes leurs dérivées.

Si on note $W^{(p,q)}(\Gamma)$ l'espace des formes différentielles de type (p,q) à coefficients dans $W(\Gamma)$, on a le complexe

$$W^{(p,0)}(\Gamma) \xrightarrow{d''} W^{(p,1)}(\Gamma) \xrightarrow{d''} W^{(p,2)}(\Gamma) \longrightarrow \ldots \longrightarrow W^{(p,n)}(\Gamma) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Nous nous proposons de montrer un résultat (théorème 1 ci-dessous) *qui entraîne en particulier que si Γ est un fermé convexe le complexe précédent est acyclique.*

Pour des raisons techniques, on dira qu'un fermé Γ de $\mathbf{C}^n$ possède la propriété (λ) si pour tout $R > 0$, il existe une suite $\{\Omega_\nu^R\}_\nu$ d'ouverts pseudo-convexes de $\mathbf{C}^n$ telle que :

i) $\bigcap_{\nu \in \mathbf{N}} \Omega_\nu^R = \Gamma_R$ [1]

ii) il existe p (dépendant éventuellement de R) tel que, pour tout $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$, il existe ν avec

$$\{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma_R) < \epsilon^p\} \subset \Omega_\nu^R \subset \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma_R) < \epsilon\} \; ;$$

---

[1] Où Γ_R désigne $\{z \in \Gamma \, ; |z| \leqslant R\}$.

iii) Si $R' > R$, pour tout μ, il existe ν_0 tel que, si $\nu > \nu_0$, Ω_ν^R est holomorphiquement convexe dans $\Omega_\mu^{R'}$.

Le résultat que nous obtenons est alors :

THEOREME. – *Soit* Γ *un fermé de* $\mathbf{C}^n$ *possédant la propriété* (λ). *Alors pour toute forme* $w \in W^{(p,q)}(\Gamma)$ $(q \geqslant 1)$ *telle que* $d''w = 0$, *il existe* $\alpha \in W^{(p,q-1)}(\Gamma)$ *telle que* $d''\alpha = w$.

Nous montrerons tout d'abord (§ 1) un lemme technique sur l'opérateur d'', puis (§ 2) nous montrerons le théorème dans le cas où Γ est supposé de plus *borné.* Enfin (§ 3) nous donnerons un lemme d'approximation qui permet d'obtenir le théorème. En appendice, nous donnerons des exemples d'ensembles Γ vérifiant la condition (λ).

Remarque. – Ce résultat ne contient pas le résultat de J.J. Kohn [2] pour les ouverts pseudo-convexes à frontière régulière.

1. Un lemme technique.

Si s est un entier positif (ou nul) et si V est un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{V})$ on pose

$$\|u\|^2_{(s,V)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_V |D^\alpha u|^2 \, d\lambda .$$

Rappelons que si φ est une fonction continue à valeurs réelles, on désigne par L^2_φ l'espace des fonctions f qui appartiennent localement à L^2 et telles que $\int |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$. On désigne par $\|f\|_\varphi = (\int |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda)^{1/2}$ enfin θ désigne l'opérateur adjoint formel de d''.

Nous nous proposons de montrer, en utilisant la solution de Hörmander pour l'opérateur d'' le lemme suivant :

LEMME 1. – *Soit* U *un ouvert pseudo-convexe borné de* $\mathbf{C}^n$ *et désignons pour tout* $\epsilon > 0$ *par* $U^\epsilon = \{z \in U \,;\, d(z, \complement U) > \epsilon\}$. *Pour toute forme* f *de type* (p,q) *à coefficients dans* $\mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ *telle que* $d''f = 0$, *il existe* u *de type* $(p, q-1)$ *à coefficients dans* $\mathcal{C}^\infty(U)$ *telle que, pour tout* $s \in \mathbf{N}$ *et tout* $\epsilon > 0$

$$\|u\|_{(s+1,\mathrm{U}^\epsilon)} \leqslant \frac{\mathrm{M}_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s,\mathrm{U})}$$

où M_s *ne dépend que du diamètre de* U.

Nous utiliserons dans la suite une version très particulière du lemme 4.4.1 de [1], complété par la remarque de [1] page 87.

THEOREME 1. – *Soit* $\varphi = |z|^2$ *et* U *un ouvert pseudo-convexe de* $\mathbf{C}^n$; *si* f *est une forme de type* (p, q) *à coefficients dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{U})$ *telle que* $d''f = 0$, *il existe une forme* u *de type* $(p, q-1)$ *telle que* :

$$d''u = f\,;\quad \theta(e^{-\varphi}u) = 0\,;\quad \|u\|_\varphi \leqslant \|f\|_\varphi\,.$$

Nous aurons aussi besoin dans la suite du lemme élémentaire suivant :

LEMME 2. – *Soit* F_1 *et* F_2 *deux fermés de* $\mathbf{R}^n$ *tels que* $d(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2) \geqslant \delta$. *Alors il existe* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *telle que* φ *soit égale à* 1 *au voisinage de* F_1, φ *soit nulle au voisinage de* F_2 *et vérifie de plus, pour tout multiindice* α

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\mathrm{D}^\alpha\varphi(x)| \leqslant \frac{\mathrm{N}_{|\alpha|}}{\delta^{|\alpha|}}$$

(*où* $\mathrm{N}_{|\alpha|}$ *ne dépend pas de* F_1 *et* F_2).

Démonstration. – Soit ψ une fonction indéfiniment différentiable dans $\mathbf{R}^n$, à support dans la boule unité telle que $\int_{\mathbf{R}^n} \psi\, d\lambda = 1$ et désignons par $\psi_\delta = \left(\frac{3}{\delta}\right)^n \psi\left(\frac{3x}{\delta}\right)$. Soit d'autre part φ_1 la fonction définie dans $\mathbf{R}^n$ par $\varphi_1(x) = 1$ si $d(x, \mathrm{F}_1) < \epsilon/2$ et $\varphi_1(x) = 0$ sinon.

Posons $\varphi = \varphi_1 * \psi_\delta$; il est immédiat que φ est égale à 1 au voisinage de F_1, égale à 0 au voisinage de F_2 ; soit D^α un monome de dérivation, alors

$$|\mathrm{D}^\alpha\varphi(x)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |\mathrm{D}^\alpha\psi_\delta(y)|\, dy \leqslant \left(\frac{3}{\delta}\right)^{|\alpha|} \sup_{y\in\mathbf{R}^n} |\mathrm{D}^\alpha\psi(y)|\,,$$

et il suffit donc de prendre

$$\mathrm{N}_{|\alpha|} = 3^{|\alpha|} \operatorname*{Max}_{|\beta|=|\alpha|} \left(\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\mathrm{D}^\beta\psi(x)|\right).$$

Démonstration du lemme 1. – Nous pouvons supposer, puisque d'' est à coefficients constants, que $0 \in \mathrm{U}$ et nous noterons dans la suite $\|g\|_{(s,\epsilon)}$ [resp. $\|g\|_{(s)}$] au lieu de $\|g\|_{(s,\mathrm{U}^\epsilon)}$ [resp. $\|g\|_{(s,\mathrm{U})}$].

a) *Le cas* $s = 0$.

On désigne par χ_ϵ une fonction égale à 1 au voisinage de U^ϵ et à support dans $\mathrm{U}^{\epsilon/6}$ fournie par le lemme 2 ; et on désigne par u la solution de $d''u = f$ fournie par le théorème 1.

Si on remarque que $\|\chi_\epsilon u\|_{(1)} \geqslant \|u\|_{(1,\epsilon)}$ et que

$$\|\chi_\epsilon u\|_{(1)}^2 = \|\chi_\epsilon u\|^2 + \|d''\chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta\chi_\epsilon u\|^2$$

il suffit de montrer que $\|\chi_\epsilon u\|^2 + \|d''\chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta\chi_\epsilon u\|^2 \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0^2}{\epsilon^2}\|f\|^2$.

Il existe des constantes μ et ν, ne dépendant que du diamètre de U telles que

$$\|\chi_\epsilon u\|^2 \leqslant \|u\|^2 \leqslant \mu\|u\|_\varphi^2 \leqslant \mu\|f\|_\varphi^2 \leqslant \nu\|f\|^2$$

donc

$$\|\chi_\epsilon u\|^2 \leqslant \|u\|^2 \leqslant \nu\|f\|^2$$

d'autre part,

$$\|d''\chi_\epsilon u\|^2 \leqslant 2\,\{\|d''\chi_\epsilon \wedge u\|^2 + \|\chi_\epsilon d''u\|^2\} \leqslant 2\left\{\frac{\mathrm{N}_1^2}{\epsilon^2}\|u\|^2 + \|f\|^2\right\}.$$

Soit encore

$$\|d''\chi_\epsilon u\|^2 \leqslant \frac{\mathrm{K}_1^2}{\epsilon^2}\|f\|^2 .$$

Enfin, on a

$$\theta\chi_\epsilon u = \chi_\epsilon\theta u + [\theta\,,\chi_\epsilon]u .$$

La condition $\theta(e^{-\varphi}u) = 0$ se traduit par le fait que θ agit sur u comme un opérateur d'ordre 0 dont les coefficients sont majorés par une constante ne dépendant que du diamètre de U et $[\theta, \chi_\epsilon]$ est un opérateur d'ordre 0 dont les coefficients sont majorés par $\dfrac{\mathrm{L}_1}{\epsilon}$.

On a donc :

$$\|\theta(\chi_\epsilon u)\|^2 \leqslant 2\left\{\mathrm{L}_1'^2\|u\|^2 + \frac{\mathrm{L}_1^2}{\epsilon^2}\|u\|^2\right\} \leqslant 2\left\{\nu\mathrm{L}_1'^2 + \nu\,\frac{\mathrm{L}_1^2}{\epsilon^2}\right\}\|f\|^2 .$$

En ajoutant les trois termes, on obtient le résultat désiré.

b) *Le cas général.*

Nous avons montré que $\|\chi_\epsilon u\|_{(1)} \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0}{\epsilon}\|f\|$.

Supposons qu'on ait démontré $\|\chi_\epsilon u\|_{(s+1)} \leqslant \frac{M_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s)}$ et montrons qu'on peut en déduire le même résultat pour $s+1$, à savoir $\|\chi_\epsilon u\|_{(s+2)} \leqslant \frac{M_{s+1}}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)}$. Soit donc D^α une dérivation d'ordre $s+1$; on a évidemment :

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon u\| \leqslant \frac{M_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s)} \leqslant \frac{M_s}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)} \qquad (\epsilon < 1) ;$$

d'autre part, comme dans le cas $s = 0$,

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon u\|_1^2 = \|D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2 + \|d'' D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2 .$$

On a

$$d'' D^\alpha \chi_\epsilon u = D^\alpha \chi_\epsilon d'' u + D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u) .$$

Pour le premier terme, on a

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon d'' u\| \leqslant \|\chi_\epsilon f\|_{(s+1)} \leqslant \frac{T_{s+1}}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{s+1} .$$

Pour le deuxième terme, grâce à la formule de Leibnitz, on a

$$D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u) = \Sigma \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta d'' \chi_\epsilon) \wedge D^{\alpha-\beta} u$$

et $$\|(D^\beta d'' \chi_\epsilon) \wedge D^{\alpha-\beta} u\| \leqslant \frac{N_{|\beta|}}{\epsilon^{|\beta|+1}} \|D^{\alpha-\beta} u\|_{(0,\epsilon/6)} .$$

Il suffit alors d'utiliser la récurrence pour obtenir

$$\|D^{\alpha-\beta} u\|_{(0,\epsilon/6)} \leqslant \frac{M_{|\alpha-\beta|}\, 6^{|\alpha-\beta|}}{\epsilon^{|\alpha-\beta|}} \|f\|_{|\alpha-\beta|-1} .$$

Après sommation sur les multiindices $\beta \leqslant \alpha$, on obtient finalement

$$\|D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u)\| \leqslant \frac{S_{s+1}}{\epsilon^{|\beta|+1+|\alpha-\beta|}} \|f\|_{|\alpha|} = \frac{S_{s+1}}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)} .$$

Un calcul tout à fait analogue pour $\theta D^\alpha \chi_\epsilon u$ fournit le résultat cherché.

2. Démonstration du théorème quand Γ est borné.

On choisit un nombre R tel que $\Gamma_R = \Gamma$ et on notera $\Omega_\nu = \Omega_\nu^R$. Quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{\Omega_\nu\}$ initiale, on peut supposer qu'il existe $1/2 > \eta > 0$ tel que

$$\{ z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma) < \eta^{p^{\nu+1}} \} \subset \Omega_\nu \subset \{ z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma) < \frac{1}{2} \eta^{p^\nu} \} .$$

Soit maintenant w une forme de type (p, q) où $q \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathrm{W}(\Gamma)$ telle que $d''w = 0$; on désigne par $\widetilde{w}$ un prolongement de w qui soit une forme à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$. Il n'y a bien sûr aucune raison pour que $d''\widetilde{w} = 0$, mais néanmoins, pour tout N et tout entier s, il existe une constante $\mathrm{C}_{\mathrm{N},s}$ vérifiant $\|d''\widetilde{w}\|_{(s,\Omega_\nu)} \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{N},s} \eta^{\mathrm{N}p^\nu}$ car $d''\widetilde{w}$ est identiquement nul sur Γ ainsi que toutes ses dérivées.

On désigne alors par h_ν une solution de $d''h_\nu = d''\widetilde{w}$ dans Ω_ν fournie par le lemme 1 ; on a donc

$$\|h_\nu\|_{(s+1,\Omega_{\nu+1})} \leqslant \mathrm{M}_s \, \frac{1}{2} \, \eta^{p^{\nu+1-(s+1)}} \, \|d''\widetilde{w}\|_{(s,\Omega_\nu)}$$

en remarquant que

$$\Omega_{\nu+1} \subset \{ z \in \Omega_\nu \; ; \; d(z, \complement \Omega_\nu) > \frac{1}{2} \eta^{p^{\nu+1}} \} .$$

Considérons alors sur Ω_2 la forme $\widetilde{w} - h_1$, on a évidemment $d''(\widetilde{w} - h_1) = 0$; il existe donc α_1 une forme de type $(p, q-1)$ fournie par le lemme 1 telle que $d''\alpha_1 = \widetilde{w} - h_1$. De même, pour tout $\nu \geqslant 1$, on considère sur $\Omega_{\nu+2}$ la forme $h_\nu - h_{\nu+1}$, qui est d''-fermée ; désignons par $\alpha_{\nu+1}$ une solution de l'équation $d''\alpha_{\nu+1} = h_\nu - h_{\nu+1}$ fournie par le lemme 1.

On a

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2,\Omega_{\nu+3})} \leqslant \mathrm{M}_{s+1} \left(\frac{1}{2} \, \eta^{p^{\nu+2}}\right)^{-(s+2)} \mathrm{M}_s \left(\frac{1}{2} \, \eta^{p^{\nu+1}}\right)^{-(s+1)} \|d''\widetilde{w}\|_{(s,\Omega_\nu)} .$$

Soit encore

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2,\Omega_{\nu+3})} \leqslant \mathrm{M}_s \mathrm{M}_{s+1} \left(\frac{1}{2} \, \eta^{p^{\nu+2}}\right)^{-(2s+3)} \|d''\widetilde{w}\|_{(s,\Omega_\nu)} .$$

Soit en majorant $\|d''\widetilde{w}\|_{(s,\Omega_\nu)}$

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2,\Omega_{\nu+3})} \leqslant \mathrm{M}_s \, \mathrm{M}_{s+1} \, \mathrm{C}_{\mathrm{N},s} \left(\frac{1}{2} \, \eta^{p^{\nu+2}}\right)^{-(2s+3)} \times \eta^{\mathrm{N}p^\nu} .$$

On choisit alors N suffisamment grand pour que cette inégalité, jointe au lemme de Sobolev fournisse la convergence de $\Sigma \alpha_\nu$ dans $\mathrm{W}^{(p,q-1)}(\Gamma)$ muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

3. Démonstration du théorème.

Traitons d'abord le cas $q > 1$.

Soit $w \in W^{(p,q)}(\Gamma)$ telle que $d''w = 0$.

Il existe une suite $\{u_n\}$ $u_n \in W^{(p,q)}(\Gamma_n)$ (1), telle que $d''u_n = w/\Gamma_n$ d'après le paragraphe précédent.

On peut modifier la suite $\{u_n\}$ de telle façon que $u_{n+1}/\Gamma_n = u_n$ pour tout n. Pour s'en convaincre, il suffit de montrer que $u_{n+1}/\Gamma_n - u_n$ peut se prolonger en une $(p, q-1)$ forme d''-fermée sur Γ_{n+1}. En effet, puisque $d''(u_{n+1}/\Gamma_n - u_n) = 0$, il existe v une $(p, q-2)$-forme à coefficients dans $W(\Gamma_n)$ telle que $d''v = u_{n+1}/\Gamma_n - u_n$. Notons $\tilde{v}$ un prolongement de v dans $W(\Gamma_{n+1})$ et $d''\tilde{v}$ est le prolongement cherché.

La série Σu_n ainsi modifiée converge évidemment dans $W(\Gamma)$ vers une solution $u \in W(\Gamma)$ de l'équation $d''u = w$.

Dans le cas $q = 1$, l'argument précédent disparaît, mais est remplacé par le lemme suivant. La démonstration est alors un argument à la Mittag-Leffler.

LEMME 2. – *Soit* Γ *un fermé de* $\mathbf{C}^n$ *possédant la propriété* (λ) *et deux nombres réels strictement positifs* R *et* R' *avec* $R < R'$; *si* $f \in W(\Gamma_R)$ *est telle que* $d''f = 0$ *alors* f *est limite dans* $W(\Gamma_R)$, *muni de la topologie quotient de celle de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ *de fonctions holomorphes dans* $\Omega_1^{R'}$.

Démonstration. – Soit $\tilde{f}$ un prolongement de f dans $\mathbf{C}^n$. On a $d''\tilde{f}$ nul sur Γ_R ainsi que toutes ses dérivées. En notant h_ν la solution fournie par le lemme 1 de l'équation $d''h_\nu = d''\tilde{f}$ dans Ω_ν^R et en appliquant les arguments du § 2, il est facile de voir que la série $\Sigma\,(h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R$ est convergente dans $W(\Gamma_R)$ muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ et que

$$f = (\tilde{f} - h_1)/\Gamma_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R .$$

(1) Rappelons que $\Gamma_n = \{z \in \Gamma \,;\, |z| \leqslant n\}$.

Pour P assez grand,

$$\widetilde{f} - h_1 + \sum_{\nu=1}^{N} (h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R$$

est une fonction holomorphe dans Ω_P^R qui grâce à la condition iii) de la propriété (λ) est limite dans $W(\Gamma_R)$ de fonctions holomorphes dans $\Omega_1^{R'}$ en vertu des théorèmes 4.3.2 et 4.3.4 de [1].

Appendice : Exemples de fermés de $\mathbf{C}^n$ vérifiant la condition (λ).

- *Un fermé convexe de* $\mathbf{C}^n$ *vérifie la condition* (λ).

En effet, posons $\Omega_\nu^R = \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma_R) < 2^{-\nu}\}$.

Les ouverts Ω_ν^R sont convexes, donc pseudo-convexes et $\bigcap_\nu \Omega_\nu^R = \Gamma_R$, d'autre part la condition ii) est évidemment satisfaite. La condition iii) est une conséquence immédiate du fait que $\overline{\Omega_\nu^R}$ est convexe.

- *Une intersection localement finie d'adhérences d'ouverts strictement pseudo-convexes de* $\mathbf{C}^n$ *vérifie la condition* (λ).

Désignons par $\rho_1, \dots, \rho_n \dots$ les fonctions définissant les ouverts strictement pseudo-convexes U_n de classe C^2 ; autrement dit, ρ_n est de classe C^2 dans un voisinage de U_n, le gradient de ρ_n ne s'annule pas sur $\rho_n^{-1}(0) = \partial U_n$ et la restriction au plan tangent complexe de la forme de Levi de ρ_n est définie positive.

Pour R fixé, il existe $n_1, \dots, n_p$ tel que

$$\Gamma_R = \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; \rho_{n_j}(z) \leqslant 0 \; ; \; |z|^2 - R^2 \leqslant 0\}.$$

Quitte à composer les fonctions ρ_{n_j} par une fonction convexe, on peut supposer que les fonctions ρ_{n_j} sont strictement plurisousharmoniques dans un voisinage de la frontière de U_{n_j} ; il est alors facile de voir que $\Omega_\nu^R = \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; \sup_j \rho_j(z) < 2^{-\nu}\}$ est (pour ν assez grand) un ouvert pseudo-convexe et que $\bigcap \Omega_\nu^R = \Gamma_R$. Du fait que l'enveloppe supérieure d'une famille finie de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, il existe une constante c telle que $\Omega_\nu^R \supset \{z \in \mathbf{C}^n \; ; \; d(z, \Gamma_R) < c 2^{-\nu}\}$ et la condition sur le gradiant des fonctions ρ_j fournit une constante C telle que $\Omega_\nu^R \subset \{z \in \mathbf{C}^n \,;\, d(z, \Gamma_R) < C2^{-\nu}\}$. Si $R' > R$, il existe un voisinage de $\Gamma_{R'}$ tel que Ω_ν^R soit défini *dans ce voisinage de* $\Gamma_{R'}$ par des fonctions plurisousharmoniques.

Si on choisit le voisinage de $\Gamma_{R'}$ pseudo-convexe, on en déduit que $\overline{\Omega_\nu^R}$ est holomorphiquement convexe dans ce voisinage de $\Gamma_{R'}$, ce qui fournit la condition iii).

- *Un polyèdre analytique ou un ensemble analytique complexe vérifie la condition* (λ).

Nous allons montrer simultanément ces deux affirmations en montrant plus généralement que toute intersection localement finie d'ensembles de la forme $\{\operatorname{Re} f \leqslant 0\}$ où f est une fonction holomorphe dans un voisinage du fermé possède la propriété (λ).

Pour tout R, il existe $i_1, \ldots, i_p$ tels que Γ_R soit défini par $\Gamma_R = \{z \,;\, \operatorname{Re} f_{i_p}(z) \leqslant 0 \,;\, |z|^2 - R^2 \leqslant 0\}$. On pose alors $\Omega_\nu^R = \{z \,;\, \operatorname{Re} f_{i_p}(z) \leqslant 2^{-\nu} \,;\, |z|^2 - R^2 \leqslant 2^{-\nu}\}$. Il est facile de voir que Ω_ν^R est un ouvert pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$ et que $\bigcap_\nu \Omega_\nu^R = \Gamma_R$. La condition ii) s'obtient en partie en utilisant le fait que les fonctions qui définissent Ω_ν^R sont lipschitziennes dans un voisinage de Γ_R et en partie en utilisant l'inégalité de Lojasiewicz. La condition iii) se vérifie comme dans le cas précédent.

* * *
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. HORMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, The University series in higher Mathematics, D. Van Nostrand Company.

[2] J.J. KOHN, Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 (1973), 273-292.

Manuscrit reçu le 9 décembre 1977.

Alain DUFRESNOY,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS n° 188
Institut Fourier
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.