Annales de l'institut Fourier

Jean-Paul Bertrandias
Christian Dupuis

Transformation de Fourier sur les espaces $\ell^p(L^{p'})$

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 189-206
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_189_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 189-206

TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LES ESPACES $\ell^p(L^{p'})$

par J.-P. BERTRANDIAS et C. DUPUIS

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Soit G un groupe commutatif localement compact. Les espaces $l^p(L^{p'})$ sont des espaces de fonctions définies sur G, appartenant localement à $L^{p'}(G)$ et dont le comportement à l'infini s'apparente à celui des éléments d'un espace l^p. Dans un article précédent [4], la définition et quelques propriétés élémentaires en sont données.

Dans cet article, nous étudions la transformation de Fourier sur certains de ces espaces. Comme ils contiennent tous l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact, on part de la transformation de Fourier définie sur $\mathcal{K}$ par l'intégrale de Fourier ordinaire et on cherche à prolonger par continuité cette transformation à tout l'espace $l^p(L^{p'})$; cela est possible si $1 \leqslant p \leqslant 2$. Si de plus $1 \leqslant p' \leqslant 2$, la transformation prend ses valeurs dans l'espace $l^{q'}(L^q)$.

L'espace $l^2(L^1)$ est le plus grand parmi ces espaces et il contient les espaces classiques $L^1(G)$, $L^2(G)$ et $L^p(G)$ avec $1 < p < 2$ sur lesquels on sait définir la transformation de Fourier par les méthodes habituelles (intégrale de Fourier si $p = 1$, prolongement d'une isométrie si $p = 2$ et prolongement au moyen d'un théorème de convexité si $1 < p < 2$). En nous inspirant du travail de N. Aronszajn et P. Szeptycki [1], nous montrons que, moyennant des conditions assez naturelles, cet espace est le plus grand espace solide de fonctions sur lequel la transformation de Fourier puisse se définir par prolongement par continuité.

1. Notations – Rappels.

a) *Notations.*

On utilisera sauf indication contraire les notations de [4].

On note Γ le groupe dual du groupe commutatif localement compact G et on le munit de la mesure de Haar $d\gamma$ duale de celle qui a été choisie sur G. La valeur du caractère γ pour l'élément t du groupe G est notée (γ, t). Les accouplements de dualité entre espaces vectoriels (en général définis par des intégrales) sont notés $\langle\ ,\ \rangle$.

Les mesures que l'on considère sont des mesures de Radon à valeurs complexes et on identifiera souvent une fonction f localement intégrable par rapport à la mesure de Haar à la mesure fdt ou $fd\gamma$ correspondante. L'espace des mesures est noté $\mathscr{M}$ et l'espace des mesures bornées $\mathscr{M}^b$.

Soit f une fonction définie sur G ou Γ. On note $\check{f}$ et f^* les fonctions définies respectivement par $\check{f}(t) = f(-t)$ et $f^*(t) = \overline{f(-t)}$. On prolonge par dualité ces définitions aux mesures définies sur G ou Γ.

On définira les espaces $l^p(L^{p'})$ sur G (resp. sur Γ) à partir d'un voisinage de l'origine E (resp. F) qu'on choisit symétrique, ouvert, relativement compact et tel que $|1 - (\gamma, t)| \leqslant 1$ pour tout t dans $E - E$ et tout γ dans $F - F$. On notera χ (resp. ξ) la fonction caractéristique de l'ensemble E (resp. F).

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des pavages $\{E_i\}$ de G formés de translatés $E_i = t_i + E$ de l'ensemble E. A toute fonction f, on associe la famille $\mathscr{F}_f$ des fonctions mesurables bornées de la forme $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ telles que $|\varphi| \leqslant |f|$ et que φ_n soit portée par l'élément E_n d'un pavage fini $\{E_n\}_{n=1,2,\dots,N}$.

La transformation de Fourier sera définie sur les espaces L^1 (ou $\mathscr{M}^b$) au moyen de l'intégrale de Fourier et sera notée $\hat{}$:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G \overline{(\gamma, t)}\, f(t)\, dt \quad \text{pour } f \text{ dans } L^1(G),$$

$$\hat{f}(t) = \int_\Gamma \overline{(\gamma, t)}\, f(\gamma)\, d\gamma \quad \text{pour } f \text{ dans } L^1(\Gamma).$$

Le théorème d'inversion ([11], § 1.5.1) indique que si f et $\hat{f}$ sont toutes deux intégrables, on a $\hat{\hat{f}} = \check{f}$.

b) *Définition des espaces* $l^p(L^{p'})$ *sur* G.

Soient p et p' des exposants tels que $1 \leqslant p, p' \leqslant \infty$. L'espace $l^p(L^{p'})$ est l'espace normé des (classes de) fonctions appartenant localement à $L^{p'}$ et telles que

$$\|f\|_{p,p'} = \sup_{\{E_i\}\in\mathcal{P}} \Big(\sum_i \|f\|^p_{L^{p'}(E_i)}\Big)^{1/p} < \infty \text{ si } 1 \leqslant p < \infty$$

ou encore des (classes de) fonctions mesurables telles que

$$\|f\|_{p,p'} = \sup_{\varphi\in\mathcal{F}_f} \Big(\sum_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|^p_{L^{p'}(E_i)}\Big)^{1/p} < \infty \text{ si } 1 \leqslant p < \infty.$$

Pour $p = \infty$, les pavages n'interviennent pas dans la définition :

$$\|f\|_{\infty,p'} = \sup_{t\in G} \|f\|_{L^{p'}(t-E)} < \infty .$$

L'espace $l^p(\mathcal{C})$ est le sous-espace fermé de $l^p(L^\infty)$ formé par les fonctions continues de $l^p(L^\infty)$.

L'espace $c_0(L^{p'})$ est le sous-espace fermé de $l^\infty(L^{p'})$ formé des fonctions telles que $\lim_{t\to\infty} \|f\|_{L^{p'}(t-E)} = 0$.

On définit de la même façon les espaces de mesures $l^p(\mathcal{M})$, $l^\infty(\mathcal{M})$ et $c_0(\mathcal{M})$.

Si $p = p'$, l'espace normé $l^p(L^{p'})$ est isomorphe à l'espace normé $L^p(G)$. On notera $\|\ \|_p$ la norme dans cet espace.

Les espaces $l^p(L^{p'})$, $l^p(\mathcal{M})$ et $l^p(\mathcal{C})$ sont invariants par translation, stables par convolution avec les mesures bornées et ont entre eux les propriétés attendues d'injectivité, de dualité, de convolution ou de produit ponctuel (voir [4], § 7). Si $p, p' < \infty$, l'espace $\mathcal{K}$ est dense dans $l^p(L^{p'})$ ainsi que dans $c_0(L^{p'})$ pour $p' < \infty$ et $l^p(\mathcal{C})$ pour $p < \infty$.

c) *Bases de filtre de Cesàro.*

On utilisera des bases de filtre d'unités approchées positives bornées de L^1 dont les ensembles sont formés de fonctions ω positives et intégrables avec $\|\omega\|_1 = 1$, dont les transformées de Fourier $\hat{\omega}$ sont positives et intégrables, l'une des deux conditions (équivalentes dans cette situation) étant vérifiée :

α) $\lim \hat{\omega} = 1$ uniformément sur tout compact ;

β) $\lim \int_W \omega dt = 1$ pour tout voisinage ouvert W de l'origine.

On peut imposer aux fonctions ω d'appartenir à $\mathcal{K}(G)$ et d'être portées par un compact fixe ; on obtient ainsi une base de filtre d'unités approchées classique. On notera $\mathcal{V}$ une telle base.

On peut imposer aux fonctions $\hat{\omega}$ d'appartenir à $\mathcal{K}(\Gamma)$. On appellera *base de filtre de Cesàro* (sur G) la transformée de Fourier d'une base de filtre d'unités approchées de $L^1(\Gamma)$ vérifiant ces conditions et on notera $\mathcal{B}$ une telle base.

De telles bases de filtre ont été essentiellement construites et utilisées par A.B. Simon pour généraliser aux groupes commutatifs localement compacts les propriétés relatives à la sommabilité au sens de Cesàro des séries trigonométriques [12].

2. Transformées de Fourier des fonctions à support compact.

a) *Lemme fondamental.*

LEMME I. – *La fonction* $\psi = \chi * \chi^*$ *est un élément positif non nul de l'espace* $l^1(L^\infty)$ *du groupe* G *et sa transformée de Fourier* $\hat{\psi} = |\hat{\chi}|^2$ *est un élément positif non nul de l'espace* $l^1(L^\infty)$ *du groupe* Γ.

Démonstration. – La première partie du lemme provient du fait que la fonction ψ est une fonction positive non nulle de $\mathcal{K}$. Elle appartient à l'algèbre A(G) des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\Gamma)$ comme convolution de deux fonctions de $L^2(G)$ (Rudin [11], th. 1.6.3). D'après le choix de l'ensemble E, la transformée de Fourier $|\hat{\xi}|^2$ de $\xi * \xi^*$ est strictement positive sur le compact $\overline{E} - \overline{E}$ qui porte $\chi * \chi^*$. Le lemme de Wiener ([9], VIII.6.3, [11], § 7.2) montre alors qu'il existe une fonction α de $L^1(\Gamma)$ telle que $\chi * \chi^* = |\hat{\xi}|^2 \hat{\alpha}$ c'est-à-dire $\hat{\psi} = |\hat{\chi}|^2 = \xi * \xi^* * \check{\alpha}$ et $\hat{\psi}$ appartient bien à $l^1(L^\infty)$ comme convolution d'une fonction $\xi * \xi^*$ de $l^1(L^\infty)$ par une mesure bornée ([4], th. II).

b) *Appartenance à* $l^p(L^{p'})$ *de certaines transformées de Fourier.*

Le résultat précédent permet d'obtenir une relation entre les propriétés locales d'une fonction portée par un compact et les propriétés à l'infini de sa transformée de Fourier (exprimées par l'appartenance aux espaces $l^p(L^{p'})$ pour p' quelconque).

LEMME II. – *Soit f une fonction intégrable portée par un compact. Sa transformée de Fourier $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^{p'})$ pour $1 < p' \leqslant \infty$ si et seulement si elle appartient à $l^p(L^1)$ et il existe deux constantes c' et $c'' > 0$ ne dépendant que de K et telles que*

$$c'' \|\hat{f}\|_{p,1} \leqslant \|\hat{f}\|_{p,p'} \leqslant c' \|\hat{f}\|_{p,1} .$$

Démonstration. – On sait déjà que si $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^{p'})$, elle appartient aussi à $l^p(L^1)$; l'application canonique étant continue, il existe une constante $M(p')$ telle que

$$\|\hat{f}\|_{p,1} \leqslant M(p') \|\hat{f}\|_{p,p'} .$$

Il suffit donc de prendre $c'' = 1/M(p')$ et de démontrer la réciproque pour $p' = \infty$.

Supposons d'abord que f soit portée par le compact $\overline{E}$. La fonction $\psi = \chi * \chi^*$ étant strictement positive sur $\overline{E}$, il existe d'après le lemme de Wiener une fonction β de $L^1(\Gamma)$ telle que $\hat{\beta}\psi = 1$ sur $\overline{E}$. La fonction $z = f/\psi = f\hat{\beta}$ est intégrable sur G et on a $\hat{z} = \check{\beta} * \hat{f}$. Si $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^1)$, la fonction $\hat{z}$ appartient aussi à cet espace et on a

$$\|\hat{z}\|_{p,1} \leqslant \|\beta\|_1 \|\hat{f}\|_{p,1} .$$

Soit g une fonction quelconque de l'espace $l^q(L^1)$ du groupe Γ. On a

$$\langle \hat{f}, g \rangle = \langle \widehat{z\psi}, g \rangle = \langle \hat{z} * \hat{\psi}, g \rangle = \langle \hat{z}, \check{\hat{\psi}} * g \rangle .$$

D'après les propriétés de dualité et de convolution des espaces $l^p(L^{p'})$, on a

$$|\langle \hat{f}, g \rangle| \leqslant M \|\hat{z}\|_{p,1} \|\hat{\psi}\|_{1,\infty} \|g\|_{q,1} .$$

On en déduit que $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^\infty)$ avec

$$\|\hat{f}\|_{p,\infty} \leqslant M' \|\hat{z}\|_{p,1} \leqslant M'' \|\hat{f}\|_{p,1} .$$

Cette propriété reste évidemment vraie si f est portée par un translaté quelconque de $\overline{E}$ et si $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^1)$. Si f est portée par un compact K et si $\hat{f}$ appartient à $l^p(L^1)$, on se ramène facilement à ce cas au moyen d'un recouvrement fini de K par des translatés de E et on obtient

$$\|\hat{f}\|_{p,\infty} \leqslant c' \|\hat{f}\|_{p,1} .$$

Remarque. – On vérifie immédiatement que le lemme II reste valable si on remplace la fonction f par une mesure à support compact.

c) *Propriétés des espaces* Φ_p .

On note Φ_p l'espace vectoriel des fonctions φ continues à support compact dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartient à l'un des espaces $l^p(L^{p'})$ pour $1 \leqslant p' \leqslant \infty$ et donc à tous d'après le lemme II. On note simplement Φ l'espace Φ_1 ; c'est évidemment le plus petit des espaces Φ_p . D'après le théorème de Hausdorff-Young, on a $\Phi_p = \mathcal{K}$ pour $2 \leqslant p \leqslant \infty$.

L'espace Φ_p est dense dans $\mathcal{K}$ pour la topologie de la limite inductive. En effet, si k est une fonction de $\mathcal{K}$, on a, dans $\mathcal{K}$, $\lim\limits_{\omega, \mathcal{V}} k * \omega = k$ et $k * \omega$ appartient à tous les espaces Φ_p car $\widehat{k * \omega} = \hat{k}\hat{\omega}$ appartient à tous les espaces $L^p(\Gamma)$.

L'espace $\hat{\Phi}_p$ des transformées de Fourier des fonctions de Φ_p est dense dans les espaces normés $l^p(L^{p'})$ si $1 \leqslant p$, $p' < \infty$ et dans $c_0(L^{p'})$ ou $l^p(\mathcal{C})$ si $p = \infty$ ou $p' = \infty$. En effet, comme $\mathcal{K}$ est dense dans ces espaces, il suffit de vérifier que toute fonction k de $\mathcal{K}(\Gamma)$ est limite d'éléments de $\hat{\Phi}_p$, ce qui est évident car, d'après [4], cor. th. II, $\lim\limits_{\zeta, \mathcal{B}} k * \hat{\zeta} = k$ et $k * \hat{\zeta}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\check{k}\,\zeta$ appartenant à $\mathcal{K}(G)$.

Si on munit l'espace Φ_p de la norme $\varphi \longrightarrow \|\hat{\varphi}\|_{p,p'}$, les résultats de dualité montrent alors que son dual topologique est l'espace $l^q(L^{q'})$ si $1 \leqslant p$, $p' < \infty$ et $l^1(L^{q'})$ ou $l^q(\mathcal{M})$ si $p = \infty$ ou $p' = \infty$.

3. Transformation de Fourier sur $l^p(L^{p'})$ pour $1 \leqslant p$, $p' \leqslant 2$.

THEOREME I. – *La transformation de Fourier définie sur* $\mathcal{K}$ *par l'intégrale de Fourier prend ses valeurs dans l'espace* $l^\infty(L^2)$ *et est continue pour la norme* $\| \ \|_{\infty,2}$ *et pour la norme* $\| \ \|_{2,1}$ *sur* $\mathcal{K}$. *On peut la prolonger de manière unique en une application* $l^2(L^1) \xrightarrow{\wedge} l^\infty(L^2)$ *continue pour les normes.*

L'application transposée $l^1(L^2) \xrightarrow{\wedge} l^2(L^\infty)$ *coïncide avec la transformation de Fourier ordinaire sur* $l^1(L^2) \subseteq L^1$ *et est continue pour les normes.*

Démonstration. – Soit f une fonction de $\mathcal{K}(G)$. On peut évaluer la norme de $\hat{f}$ dans $l^\infty(L^2)$ par l'intermédiaire de sa norme dans un espace $\cap^p(S)$ ([4], prop. VII) en majorant l'intégrale

$$\int_\Gamma |\hat{f}|^2\ \hat{\psi} * \mu d\gamma = \langle \hat{f}(\hat{\psi} * \mu), \overline{\hat{f}} \rangle ,$$

la fonction ψ étant celle qui est donnée par le lemme I et μ une mesure positive de norme bornée par 1. D'après le théorème de Plancherel et les propriétés classiques de la transformation de Fourier ([11], § 1-3, 1-5 et 1-6), on a

$$\langle \hat{f}(\hat{\psi} * \mu), \overline{\hat{f}} \rangle = \langle f * (\psi \hat{\mu}^{\vee}), \overline{f} \rangle .$$

D'après les propriétés de convolution dans les espaces $l^p(L^{p'})$ ([4], § 7-i), il existe une constante M telle que

$$\| f * (\psi \hat{\mu}^{\vee}) \|_{2,\infty} \leqslant M \| f \|_{2,1}\ \| \psi \hat{\mu}^{\vee} \|_{1,\infty} \leqslant M \| f \|_{2,1}\ \| \psi \|_{1,\infty}\ \| \hat{\mu} \|_\infty .$$

D'après la dualité entre $l^2(L^\infty)$ et $l^2(L^1)$, il existe une constante M′ telle que

$$| \langle f * (\psi \hat{\mu}^{\vee}), f \rangle | \leqslant M' \| \overline{f} \|_{2,1}\ \| f \|_{2,1}\ \| \psi \|_{1,\infty}\ \| \hat{\mu} \|_\infty .$$

Il en résulte que

$$\| \hat{f} \|^2_{\cap^2} = \sup_\mu \left| \int_\Gamma |\hat{f}|^2\ \hat{\psi} * \mu d\gamma \right| \leqslant M' \| f \|^2_{2,1}\ \| \psi \|_{1,\infty} .$$

D'après [4], prop. VII, il existe une constante M″ telle que

$$\| \hat{f} \|_{\infty,2} \leqslant M'' \| f \|_{2,1} .$$

La fonction $\hat{f}$ appartient donc à $l^\infty(L^2)$ et la transformation de Fourier $\mathcal{K} \longrightarrow l^\infty(L^2)$ est continue quand on munit $\mathcal{K}$ de la norme $\|\ \|_{2,1}$. Comme $\mathcal{K}$ est dense dans $l^2(L^1)$, on peut prolonger la transformation de Fourier par continuité en une application de $l^2(L^1)$ dans $l^\infty(L^2)$ continue pour les normes et ce prolongement est unique.

Compte-tenu des relations de dualité ([4], § 7-g), on peut considérer l'application transposée $l^1(L^2) \longrightarrow l^2(L^\infty)$ qui est continue pour les normes. A l'élément g de $l^1(L^2)$, elle fait correspondre l'élément de $l^2(L^\infty)$ qu'on peut noter $\hat{g}$ vérifiant la relation $\langle f, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, g \rangle$. Comme $l^1(L^2) \subseteq L^1$, on sait que g est une fonction de $L^1(\Gamma)$; si f est une fonction de $\mathcal{K}(G)$, le théorème de Fubini montre que

$$\int_G f(t) \hat{g}(t) dt = \int_\Gamma \int_G (\overline{\gamma, t}) f(t)\ g(\gamma) dt d\gamma$$
$$= \int_G f(t) \int_\Gamma (\overline{\gamma, t}) g(\gamma) d\gamma .$$

Il en résulte que $\hat{g}$ coïncide bien (localement presque-partout) avec la transformée de Fourier ordinaire de g. La transformation de Fourier en restriction à $l^1(\mathrm{L}^2)$ prend ses valeurs dans l'espace $l^2(\mathrm{L}^\infty)$ et est continue pour les normes.

Remarque. – Si f appartient à $\mathcal{K}$, la fonction $\hat{f}$ est continue et nulle à l'infini et appartient donc à $c_0(\mathrm{L}^2)$ qui est un sous-espace fermé de $l^\infty(\mathrm{L}^2)$. La transformation de Fourier sur $l^2(\mathrm{L}^1)$ prend donc ses valeurs dans l'espace $c_0(\mathrm{L}^2)$. D'autre part, il est évident que la transformation de Fourier sur $l^1(\mathrm{L}^2)$ prend ses valeurs dans l'espace $l^2(\mathscr{C}) = l^2(\mathrm{L}^\infty) \cap \mathscr{C}$.

THEOREME II. – *Si* $1 \leqslant p, p' \leqslant 2$, *la transformation de Fourier définie sur* $\mathcal{K}$ *prend ses valeurs dans l'espace* $l^{q'}(\mathrm{L}^q)$ *et est continue pour la norme* $\| \ \|_{q',q}$ *et* $\| \ \|_{p,p'}$ *sur* $\mathcal{K}$. *On peut la prolonger de manière unique en une application* $l^p(\mathrm{L}^{p'}) \xrightarrow{\ \hat{}\ } l^{q'}(\mathrm{L}^q)$ *continue pour les normes.*

Si $p' = 1$, *elle prend ses valeurs dans l'espace* $c_0(\mathrm{L}^q)$.

Si $p = 1$, *elle coïncide avec la transformation de Fourier ordinaire et prend ses valeurs dans l'espace* $l^{q'}(\mathscr{C})$.

Démonstration. – Ce résultat généralise le théorème classique de Hausdorff-Young. Il se démontre de la même manière à partir des quatres cas extrêmes $l^2(\mathrm{L}^1)$, $l^1(\mathrm{L}^2)$, $l^1(\mathrm{L}^1) = \mathrm{L}^1$ et $l^2(\mathrm{L}^2) = \mathrm{L}^2$ en utilisant la généralisation convenable du théorème de convexité de Riesz-Thorin :

THEOREME III. – *On considère les quatre couples d'exposants* $1 \leqslant p_\alpha, p'_\alpha, r_\alpha, r'_\alpha \leqslant \infty$ *où* α *prend les valeurs* 0 *ou* 1. *Si* θ *est un nombre réel compris entre* 0 *et* 1, *on associe à chaque couple le nombre* p, p', r *ou* r' *défini par* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{(1-\theta)}{p_0}$, *etc. Si* T *est une application linéaire définie sur l'ensemble des fonctions simples de* G *et à valeurs dans les deux espaces* $l^{r_1}(\mathrm{L}^{r'_1})$ *et* $l^{r_0}(\mathrm{L}^{r'_0})$ *avec*

$$\|\mathrm{T}f\|_{r_\alpha, r'_\alpha} \leqslant \mathrm{M}_\alpha \|f\|_{p_\alpha, p'_\alpha}$$

elle prend ses valeurs dans l'espace $l^r(\mathrm{L}^{r'})$ *et il existe une constante* M_θ *telle que* $\|\mathrm{T}f\|_{r,r'} \leqslant \mathrm{M}_\theta \|f\|_{p,p'}$.

Démonstration. – Par l'intermédiaire de la proposition IX de [4], on se ramène immédiatement à la généralisation du théorème de Riesz-Thorin donnée par A. Benedek et R. Panzone pour les espaces à norme mixte ([2], § 7).

4. Mesures ayant une transformée de Fourier dans $l^p(L^{p'})$.

Dans le cas où $p > 2$ ou $p' > 2$, la théorie de la transformation de Fourier n'est pas si simple que dans le cas où $1 \leqslant p, p' \leqslant 2$. Il serait intéressant par exemple de caractériser les éléments de $l^p(L^{p'})$ ayant une transformée de Fourier (en un sens à définir si $p > 2$) appartenant à $l^{q'}(L^q)$. Nous abordons ici cette question qui nous amène à généraliser certains résultats de F. Holland [6], [7], J. Stewart [13], L. Pigno [10].

a) *Définition de la transformation de Fourier par dualité.*

Pour certaines fonctions ou mesures, on peut définir une transformée de Fourier par dualité en utilisant les espaces Φ_p définis au paragraphe 2-c.

Soient g une fonction de $l^p(L^{p'})$ ou une mesure de $l^p(\mathscr{M})$ et σ une mesure. Si pour toute fonction φ de Φ, on a $\langle \sigma, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle$ on dira que la transformée de Fourier de σ (resp. g) est la mesure $\check{g}$ (resp. σ) et on notera ces mesures $\hat{\sigma}$ et $\hat{g}$ respectivement.

D'après les propriétés de densité des espaces Φ et $\hat{\Phi}_q$, on voit facilement qu'une mesure σ ou g admet au plus une transformée de Fourier en ce sens et que $\langle \sigma, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle$ pour tout élément φ de Φ_q.

D'autre part, $\hat{\sigma}$ et $\hat{g}$ coïncident avec la transformée de Fourier dans les cas où celle-ci a déjà été définie (théorème II).

On voit aussi immédiatement (par dualité à partir du théorème II) que si $1 \leqslant p \leqslant 2$, toute mesure de $l^p(\mathscr{M})$ admet une transformée de Fourier dans $l^\infty(L^q)$ et que l'application ainsi définie est continue pour les normes. Cette application prolonge par continuité la transformation de Fourier définie sur les mesures bornées (ou les mesures à support compact) de $l^p(\mathscr{M})$ dont l'ensemble est dense dans $l^p(\mathscr{M})$ (voir [3] th. II, rem. 2).

b) *Mesures admettant une transformée de Fourier dans* $l^p(\mathrm{L}^{p'})$.

THEOREME IV. – *Soit* σ *une mesure. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *la mesure* σ *admet une transformée de Fourier* $\hat{\sigma}$ *dans* $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ (dans $l^p(\mathscr{M})$ si $p' = 1$) ;

b) *il existe une constante* M *telle que* $|\langle \sigma, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M} \|\hat{\varphi}\|_{q,q'}$ *pour tout élément* φ *de* Φ_q *(ou simplement de* Φ) ;

c) *pour toute fonction* ζ *d'un ensemble d'une base de filtre de Cesàro* $\mathscr{B}$, *la transformée de Fourier ordinaire* $\widehat{\zeta\sigma}$ *appartient à* $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ *et il existe une constante* M *telle que* $\|\widehat{\zeta\sigma}\|_{p,p'} \leqslant \mathrm{M}$.

Si ces conditions sont réalisées, on a $\lim\limits_{\zeta, \mathscr{B}} \widehat{\zeta\sigma} = \hat{\sigma}$, *la limite étant prise dans l'espace normé* $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ *si* $1 \leqslant p < \infty$ *et* $1 < p' < \infty$, *dans l'espace* $l^\infty(\mathrm{L}^{p'})$, $l^p(\mathscr{M})$ *ou* $l^p(\mathrm{L}^\infty)$ *considérés comme espaces duals et munis de la topologie faible dans les autres cas.*

Démonstration. – D'après les propriétés de l'espace Φ_q (§ 2-c), on voit immédiatement que les conditions a et b sont équivalentes et que la condition c est équivalente à la condition

$$|\langle \widehat{\zeta\sigma}, \hat{\varphi}^\vee \rangle| \leqslant \mathrm{M} \|\hat{\varphi}^\vee\|_{q,q'} \quad \text{pour tout élément } \varphi \text{ de } \Phi_q$$

ou encore d'après la relation de Parseval

$$|\langle \zeta\sigma, \varphi \rangle| = |\langle \sigma, \zeta\varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M} \|\hat{\varphi}\|_{q,q'} \quad \text{pour tout élément } \varphi \text{ de } \Phi_q .$$

Cette dernière condition est elle-même équivalente à la condition b car

$$\|\widehat{\zeta\varphi}\|_{q,q'} = \|\hat{\zeta} * \hat{\varphi}\|_{q,q'} \leqslant \|\hat{\zeta}\|_1 \, \|\hat{\varphi}\|_{q,q'} \leqslant \|\hat{\varphi}\|_{q,q'}$$

et d'autre part

$$\lim_{\zeta, \mathscr{B}} \langle \sigma, \zeta\varphi \rangle = \langle \sigma, \varphi \rangle .$$

Enfin, si σ admet une transformée de Fourier $\hat{\sigma}$ dans $l^p(\mathrm{L}^{p'})$, on a d'après les propriétés classiques de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned}\langle \zeta\sigma, \varphi \rangle = \langle \widehat{\zeta\sigma}, \hat{\varphi}^\vee \rangle = \langle \sigma, \zeta\varphi \rangle = \langle \hat{\sigma}, \widehat{\zeta\varphi}^\vee \rangle \\ = \langle \hat{\sigma}, \hat{\zeta}^\vee * \hat{\varphi}^\vee \rangle = \langle \hat{\sigma} * \hat{\zeta}, \hat{\varphi}^\vee \rangle .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\widehat{\zeta\sigma}$ coïncide dans $l^p(\mathrm{L}^{p'})$ avec $\hat{\sigma} * \hat{\zeta}$ et la convergence de $\widehat{\zeta\sigma}$ vers $\hat{\sigma}$ résulte alors d'une propriété générale ([4] cor. th. II).

c) *Conditions de réciprocité.*

Une mesure σ admettant une transformée de Fourier dans $l^p(L^{p'})$ n'appartient pas en général à $l^{q'}(L^q)$. On peut cependant apporter quelques précisions dans les cas particuliers suivants :

1) *Si* $1 \leqslant p, p' \leqslant 2$, *la mesure* σ *appartient à* $l^{q'}(L^q)$.

En effet, la transformée de Fourier de σ est une fonction g de $l^p(L^{p'})$ dont la transformée de Fourier $\hat{g}$ appartient à $l^{q'}(L^q)$ (th. II). Alors $\langle \sigma, \varphi \rangle = \langle g, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{g}^\vee, \varphi \rangle$ pour tout élément φ de $\Phi_q = \mathscr{K}$. On en déduit que la mesure σ coïncide avec l'élément $\hat{g}^\vee$ de $l^{q'}(L^q)$.

2) *Si* $p = \infty$ *et si* σ *est positive, elle appartient à* $l^{q'}(\mathscr{M})$ *si* $1 \leqslant p' < 2$ *et à* $l^2(\mathscr{M})$ *si* $2 \leqslant p' \leqslant \infty$.

En effet, d'après les conditions imposées à E, il existe une constante M telle que $\chi \leqslant M\chi * \chi^*$ d'où

$$\int_{-E} d\sigma = \int_C \chi d\sigma \leqslant M\langle \sigma, \chi * \chi^* \rangle = M\langle \hat{\sigma}, |\hat{\chi}|^2 \rangle .$$

En considérant les translatés d'amplitude t de $\chi * \chi^*$, on obtient

$$\int_{t-E} d\sigma \leqslant M \int_\Gamma \hat{\sigma}(\gamma)\, |\hat{\chi}(\gamma)|^2\, (\overline{\gamma, t}) d\gamma \leqslant M(\hat{\sigma}|\hat{\chi}|^2) .$$

D'après le lemme I et les propriétés du produit, la fonction $\hat{\sigma}|\hat{\chi}|^2$ appartient à $l^1(L^{p'})$. Sa transformée de Fourier appartient à $l^{q'}(L^\infty)$ donc à $L^{q'}$ si $1 \leqslant p' \leqslant 2$ et à $l^2(L^\infty)$ donc à L^2 si $2 \leqslant p' \leqslant \infty$. Le résultat provient alors d'une caractérisation des éléments de $l^{q'}(\mathscr{M})$ analogue à celle donnée dans [4], prop. VI pour les éléments de $l^{q'}(L^1)$.

d) *Relation de Parseval.*

THEOREME V. – *Soient* f *et* g *deux fonctions appartenant localement à* L^q *et* L^p *respectivement et admettant des transformées de Fourier* $\hat{f}$ *et* $\hat{g}$ *dans* $l^p(L^{p'})$ *et* $l^q(L^{q'})$ *respectivement. Si* $\mathscr{B}$ *est un filtre de Cesàro, on a*

$$\lim_{\zeta, \mathscr{B}} \int_G \zeta(t)\, f(t)\, g(-t) dt = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\, \hat{g}(\gamma) d\gamma .$$

Démonstration. – Soit $\mathscr{V}$ une base de filtre d'unités approchées de $L^1(G)$ dont les ensembles sont formés de fonctions ω. On a

$$\langle \zeta f, \omega * \check{g} \rangle = \langle f, \zeta(\omega * \check{g}) \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\zeta}^{\vee} * (\hat{\omega}^{\vee} \hat{g}) \rangle = \langle \hat{f} * \hat{\zeta}, \hat{\omega}^{\vee} \hat{g} \rangle .$$

D'une part, on a, si K est un compact portant ζ :

$$\lim_{\omega, \mathscr{V}} \omega * \check{g} = \check{g} \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}^p(\mathrm{K})$$

et donc

$$\lim_{\omega, \mathscr{V}} \langle \zeta f, \omega * \check{g} \rangle = \langle \zeta f, \check{g} \rangle .$$

D'autre part $|\hat{\omega}| \leqslant 1$ et $\lim_{\omega, \mathscr{V}} \hat{\omega} = 1$ uniformément sur tout compact de Γ et donc

$$\lim_{\omega, \mathscr{V}} \langle \hat{\zeta} * \hat{f}, \hat{\omega}^{\vee} \hat{g} \rangle = \langle \hat{\zeta} * \hat{f}, \hat{g} \rangle .$$

Par suite

$$\langle \zeta f, \check{g} \rangle = \langle \hat{\zeta} * \hat{f}, \hat{g} \rangle .$$

La conclusion provient alors immédiatement de la dernière partie du théorème IV (en permutant éventuellement le rôle de f et g).

5. Domaine d'extension maximal de la transformation de Fourier.

a) *Caractérisation des fonctions de* $l^p(\mathrm{L}^1)$.

Nous aurons besoin d'une caractérisation des fonctions de $l^2(\mathrm{L}^1)$ portant sur des propriétés de transformées de Fourier.

PROPOSITION I. – *Une fonction mesurable f appartient à $l^p(\mathrm{L}^1)$ si et seulement si il existe un nombre l tel qu'à chaque fonction $\varphi = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \varphi_n$ de $\mathscr{F}_f$, on puisse associer au moins un élément γ de* F *tel que $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^p \leqslant l^p$ et dans ce cas*

$$\sup_{\gamma \in \mathrm{F}} \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^p \right)^{1/p} \leqslant \|f\|_{p,1} \leqslant 2l .$$

Démonstration. – Remarquons d'abord que pour toute fonction φ_n portée par le translaté $\mathrm{E}_n = t_n + \mathrm{E}$ de E, on a

$$\hat{\varphi}_n(\gamma) = \int_{\mathrm{G}} (\overline{\gamma, t})\, \varphi_n(t)\, dt = (\overline{\gamma, t_n}) \int_{\mathrm{E}} (\overline{\gamma, u})\, \varphi_n(t_n + u)\, du .$$

Pour tout élément γ de F, on a $|\hat{\varphi}_n(\gamma)| \leqslant \|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{E}_n)}$. Si de plus φ_n est positive, on a $\frac{1}{2} \|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{E}_n)} \leqslant |\hat{\varphi}_n(\gamma)|$.

Supposons que f appartienne à $l^p(L^1)$. On peut prendre $l = \|f\|_{p,1}$ car pour toute fonction $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ de $\mathscr{F}_f$ et pour tout élément γ de F, on a

$$\sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^p \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|^p_{L^1(E_n)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|f\|^p_{L^1(E_n)} \leqslant \|f\|^p_{p,1} .$$

Inversement, soit f une fonction mesurable telle qu'il existe un nombre l vérifiant la condition de la proposition. En prenant d'abord des fonctions φ positives et portées par un seul translaté E_n, on a

$$\sup_{0 \leqslant \varphi_n \leqslant |f|} \int_{E_n} \varphi_n dt \leqslant 2l .$$

Il en résulte que f appartient localement à $L^1(G)$. En prenant alors des fonctions φ égales à f sur un nombre fini de translatés E_n, on obtient

$$\frac{1}{2^p} \sum_{n=1}^{N} \|f\|^p_{L^1(E_n)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^p \leqslant l^p$$

ce qui entraîne bien que f appartient à $l^p(L^1)$ avec $\|f\|_{p,1} \leqslant 2l$.

Remarque. – On peut énoncer un résultat identique sur les mesures en remplaçant dans la proposition I "une fonction mesurable f appartient à $l^p(L^1)$" par "une mesure σ appartient à $l^p(\mathscr{M})$" et les fonctions $\varphi = \Sigma \varphi_n$ par les mesures ayant les mêmes propriétés de majoration relativement à σ.

b) *Prolongements de la transformation de Fourier.*

On va voir que l'espace $l^2(L^1)$ est en un certain sens le plus grand des espaces vectoriels de fonctions sur lesquels on puisse définir la transformation de Fourier par prolongement par continuité de la transformation de Fourier habituelle définie sur $L^1(G)$.

Les conditions que nous imposerons à ces espaces font intervenir de manière essentielle la structure d'espace ordonné de l'espace $L^0(G)$ des fonctions mesurables définies sur G. On dira qu'une partie E de L^0 est *solide* si tout élément y de L^0 tel que $|y| \leqslant |x|$ pour un élément x de E appartient aussi à E. On dira qu'une topologie d'espace vectoriel définie sur un sous-espace vectoriel solide A de L^0 est *localement solide* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 formé d'ensembles solides.

On considère les espaces vectoriels A de fonctions mesurables sur G vérifiant les propriétés suivantes :

α) L'espace A est un sous-espace vectoriel solide de $L^0(G)$.
β) L'espace A est muni d'une topologie d'espace vectoriel localement solide.
γ) L'espace $A \cap L^1$ est dense dans A pour cette topologie.
δ) La transformation de Fourier $A \cap L^1 \xrightarrow{\hat{}} L^0(\Gamma)$ est continue pour la topologie de A sur $A \cap L^1$ et la topologie de la convergence en mesure sur $L^0(\Gamma)$.

Dans ces conditions, la transformation de Fourier se définit sur A par prolongement (unique) de l'application continue $\hat{}$.

Il est évident que les espaces $L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^p(G)$ avec $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $l^2(L^1)$ satisfont ces conditions qui apparaissent comme des conditions naturelles pour définir la transformation de Fourier au moyen d'une méthode de prolongement par continuité.

THEOREME VI. – *Un espace* A *vérifiant les quatre conditions ci-dessus est un sous-espace vectoriel de* $l^2(L^1)$ *et l'application canonique* $A \longrightarrow l^2(L^1)$ *est continue.*

COROLLAIRE. – *La transformation de Fourier sur* A *est la restriction à* A *de la transformation de Fourier sur* $l^2(L^1)$.

Démonstration. – Pour simplifier les formules, on supposera en changeant au besoin les mesures de Haar, que $m(F) = 1$.

Soit T le voisinage de l'origine dans $L^0(\Gamma)$ formé par les fonctions g telles que
$$m\{\gamma \in F : |g(\gamma)| \leqslant 1\} \geqslant 65/66 .$$
Comme la transformation de Fourier $A \xrightarrow{\hat{}} L^0(\Gamma)$ est continue, il existe un voisinage V de l'origine dans A dont l'image est contenue dans T. Comme la topologie de A est localement solide, on peut supposer que V est solide.

Soit f une fonction appartenant à V ; les fonctions $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ de $\mathscr{F}_f$ appartiennent aussi à V ainsi que les fonctions $\sum_{n=1}^{N} \pm \varphi_n$ pour tous les choix des signes. Les fonctions $\sum_{n=1}^{N} \pm \hat{\varphi}_n$ appartiennent donc à T. On va en déduire que $\sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2 \leqslant 4$ pour au moins un élément de F en utilisant les méthodes classiques de la théorie des séries aléatoires (Zygmund [17], Kahane [8]).

Soit $\{B_n\}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs 1 et -1 avec les probabilités $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{J}, p)$. On considère l'espace produit $\Omega \times F$ muni de la mesure produit $p \times m = \pi$.

A la fonction $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ de $\mathscr{F}_f$, on associe la fonction Φ définie sur $\Omega \times F$ par $\Phi(\omega, \gamma) = \sum_{n=1}^{N} B_n(\omega)\,\hat{\varphi}_n(\gamma)$. L'ensemble E_Φ des éléments de $\Omega \times F$ tels que $|\Phi(\omega, \gamma)| \leqslant 1$ est mesurable et sa mesure $\pi(E_\Phi)$ est comprise entre 65/66 et 1. On notera Ω_γ les éléments ω de Ω tels que $|\Phi(\omega, \gamma)| \leqslant 1$ et $p_\gamma = p(\Omega_\gamma)$ sa probabilité. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_F p_\gamma d\gamma = \pi(E_\Phi) \geqslant 65/66$$

donc

$$\int_F (1 - p_\gamma) d\gamma \leqslant 1/66 .$$

En notant F' l'ensemble des éléments de F tels que $32/33 \leqslant p_\gamma \leqslant 1$, l'inégalité de Bienaymé montre que $m(F') \geqslant \frac{1}{2}\cdot$

Soit D l'ensemble des éléments $\{\omega, \gamma\}$ de E_Φ tels que γ appartienne à F'. On a

$$\iint_D \left| \sum_{n=1}^{N} B_n(\omega)\,\hat{\varphi}_n(\gamma) \right|^2 dp(\omega)\,d\gamma \leqslant \frac{65}{66}\, m(F') < m(F') .$$

En développant le premier membre et en appliquant le théorème de Fubini, celui-ci est égal à

$$\int_{F'} \left\{ p_\gamma \sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2 + 2 \int_{\Omega_\gamma} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} B_n(\omega)\, B_m(\omega)\, \hat{\varphi}_n(\gamma)\, \overline{\hat{\varphi}_m}(\gamma)\, dp(\omega) \right\} d\gamma .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left| \int_{\Omega_\gamma} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} B_n(\omega)\, B_m(\omega)\, \hat{\varphi}_n(\gamma)\, \overline{\hat{\varphi}}_m(\gamma)\, dp(\omega) \right|$$
$$\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2\, |\hat{\varphi}_m(\gamma)|^2 \Big)^{1/2}$$
$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} \left| \int_{\Omega_\gamma} B_n(\omega)\, B_m(\omega)\, dp(\omega) \right|^2 \Big)^{1/2} .$$

D'après l'inégalité de Bessel, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} \left| \int_{\Omega_\gamma} B_n(\omega)\, B_m(\omega)\, dp(\omega) \right|^2 \leqslant \int_{\Omega_\gamma} 1^2\, dp(\omega) - \Big(\int_{\Omega_\gamma} 1\, dp(\omega) \Big)^2 = p_\gamma - p_\gamma^2 .$$

En remarquant que $\sum_n \sum_m |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2\, |\hat{\varphi}_m(\gamma)|^2 \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2 \Big)^2$ et en revenant à la première inégalité, on obtient

$$\int_{F'} \big(p_\gamma - \sqrt{2(p_\gamma - p_\gamma^2)}\big) \sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2\, d\gamma \leqslant m(F') .$$

Comme γ appartient à F', on vérifie immédiatement que $8/11 \leqslant p_\gamma - \sqrt{2(p_\gamma - p_\gamma^2)} \leqslant 1$ et par suite

$$\int_{F'} \sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2\, d\gamma \leqslant 11/8\; m(F') .$$

D'après l'inégalité de Bienaymé, il en résulte que

$$m \left\{ \gamma \in F' : \sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2 \leqslant 4 \right\} \geqslant \Big(1 - \frac{11}{32}\Big) m(F') \geqslant \frac{21}{64} > 0 .$$

Par suite, on a $\sum_{n=1}^{N} |\hat{\varphi}_n(\gamma)|^2 \leqslant 4$ pour au moins un élément de F' donc de F, cela pour chaque fonction $\varphi = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ de $\mathscr{F}_f$. D'après la proposition précédente, il en résulte que f appartient à $l^2(L^1)$ avec $\|f\|_{2,1} \leqslant 4$. Cela est vrai pour toute fonction f du voisinage V. Comme V est absorbant, toute fonction de A appartient à $l^2(L^1)$ et comme l'image canonique de V dans $l^2(L^1)$ est contenue dans la boule de rayon 4, l'application canonique $A \longrightarrow l^2(L^1)$ est bien continue.

La transformation de Fourier $l^2(L^1) \xrightarrow{\;\hat{}\;} L^0(\Gamma)$ étant continue (d'après le théorème I), sa restriction à A est le prolongement par continuité (unique) de la transformation de Fourier $A \cap L^1 \longrightarrow L^0(\Gamma)$ ce qui établit le corollaire.

L'espace $l^2(L^1)$ apparait donc comme le "plus grand" espace *solide* de fonctions sur lequel la transformation de Fourier puisse se définir par prolongement : c'est le "domaine maximal d'extension" de la transformation de Fourier d'après N. Aronszajn et P. Szeptycki [1], [14], [15].

Remarque. – On peut énoncer un résultat analogue sur l'espace $l^2(\mathcal{M})$. C'est le plus grand espace solide de mesures sur lequel la transformation de Fourier puisse se définir par prolongement par continuité de la transformation de Fourier ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN, P. SZEPTYCKI, On general integral transformations, *Math. Ann.*, 163 (1966), 127-154.

[2] A. BENEDEK, R. PANZONE, The spaces L^P, with mixed norm, *Duke Math. Journ.*, 28 (1961), 301-324.

[3] J.P. BERTRANDIAS, Unions et intersections d'espaces L^p sur un espace localement compact, *Bull. Sc. Math.*, 101 (1977) 209-247.

[4] J.P. BERTRANDIAS, C. DATRY, C. DUPUIS, Unions et intersections d'espaces L^p invariantes par translation et convolution, *Ann. Inst. Fourier*, 28, 2 (1978), 53-84.

[5] R. GOLDBERG, On a space of functions of Wiener, *Duke Math. Journ.*, 34 (1967), 683-691.

[6] F. HOLLAND, Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q, *Journ. London Math. Soc.*, 2, 10 (175), 295-305.

[7] F. HOLLAND, On the representation of function as Fourier transforms of unbounded measures, *Proc. London Math. Soc.*, 3, 30 (1975), 347-365.

[8] J.P. KAHANE, Some random series of function, Heath, 1968.

[9] Y. KATZNELSON, An introduction to harmonic analysis, Wiley, 1968.

[10] L. PIGNO, Restrictions of L^p transforms, *Proc. Ann. Math. Soc.*, 29 (1971), 511-515.

[11] W. RUDIN, Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[12] A.B. SIMON, Cesàro summability on groups: characterisation and inversion of Fourier transforms, Function algebras (ed. F.T. Birtel) Scott, Foresman, 1966.

[13] J, STEWART, Unbounded positive definite functions, *Can. Journ. Math.*, 21 (1969), 1309-1318.

[14] P. SZEPTYCKI, Some remarks on the extended domain of Fourier transform, *Bull. Am. Math. Soc.*, 73 (1967), 398-402.

[15] P. SZEPTYCKI, On functions and measures whose Fourier transforms are functions, *Math. Ann.*, 179 (1968), 31-41.

[16] N. WIENER, Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, 33 (1932), 1-100.

[17] A. ZYGMUND, Trigonometric series, 2 vol., Cambridge, 1959.

Manuscrit reçu le 2 juillet 1977.

J.P. BERTRANDIAS et C. DUPUIS,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS n° 188
Institut Fourier
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.