ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-FRANÇOIS MATTEI
ROBERT MOUSSU

Intégrales premières d'une forme de Pfaff analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 4 (1978), p. 229-237
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_229_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 4 (1978), 229-237.

INTÉGRALES PREMIÈRES D'UNE FORME DE PFAFF ANALYTIQUE

par J. F. MATTEI et R. MOUSSU

Introduction.

Soit $\omega = \Sigma a_i dx_i$ un germe en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme différentielle holomorphe et soit $S(\omega)$ le germe d'ensemble défini par les équations $a_i(x) = 0$. Nous dirons que ω possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle) s'il existe $f, g \in \mathcal{O}_m$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_m$) tels que $\omega = g\, df$; $\mathcal{O}_m$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_m$) désigne l'anneau des séries convergentes (resp. formelles) à m indéterminées.

THÉORÈME. — *Supposons que* ω *soit intégrable* (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$) *et qu'il existe un germe d'application holomorphe* h *de* $(\mathbf{C}^r, 0)$ *dans* $(\mathbf{C}^m, 0)$ *tel que* codim $S(h^*\omega) \geqslant 2$, *alors* ω *possède une intégrale première holomorphe dès que* $h^*(\omega)$ *possède une intégrale première formelle.*

Ce résultat précise le théorème 2 démontré par B. Malgrange dans [4] et, puisque ω possède une intégrale première formelle si codim $S(\omega) \geqslant 3$ [4], [5], on en déduit le théorème 1 de [4] :

COROLLAIRE. — *Supposons que* ω *soit intégrable et que* codim $S(\omega) \geqslant 3$; *alors* ω *possède une intégrale première holomorphe.*

Pour montrer les théorèmes 1 et 2 de [4], B. Malgrange construit une 1-forme holomorphe, non singulière, intégrable sur $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}$ qui induit ω sur $\mathbf{C}^m \times \{0\}$ et lui applique le théorème de Frobenius classique. Notre raisonnement est différent, il repose sur les trois propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbf{C}^2$ *de* 1-forme *holomorphe tel que* $S(\omega) = \{0\}$; *alors* ω *possède une intégrale première holomorphe dès que* ω *possède une intégrale première formelle.*

La proposition suivante précise un résultat de [5].

PROPOSITION 2. — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbf{C}^m$ *de* 1-*forme holomorphe, intégrable. Supposons qu'il existe un plongement* i *de* $(\mathbf{C}^r,0)$ *dans* $(\mathbf{C}^m,0)$ *tel que* $\operatorname{codim} S(i^*(\omega)) \geqslant 2$; *alors* ω *possède une intégrale première holomorphe* (*resp. formelle*) *dès que* $i^*(\omega)$ *possède une intégrale première holomorphe* (*resp. formelle*).

La proposition 3 est un « résultat de transversalité » ne faisant pas intervenir l'intégrabilité de ω .

PROPOSITION 3. — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbf{C}^m$ *de* 1-*forme holomorphe. Quel que soit l'entier* $p < m$ *il existe un plongement* i *de* $(\mathbf{C}^p,0)$ *dans* $(\mathbf{C}^m,0)$ *tel que*

$$(*) \quad S(i^*(\omega)) = i^{-1}(S(\omega))$$

et

$$\operatorname{codim} S(i^*(\omega)) = \inf (\operatorname{codim} S(\omega),p) .$$

Montrons comment ces propositions impliquent le théorème. Soit i un plongement de $(\mathbf{C}^2,0)$ dans $(\mathbf{C}^r,0)$ tel que $S(i^*(h^*(\omega))) = \{0\}$ (proposition 3). $i^*(h^*(\omega))$ possède une intégrale première formelle. D'après les propositions 1, puis 2, $h^*(\omega)$ possède une intégrale première holomorphe.

Soit $H : (\mathbf{C}^r \times \mathbf{C},(0,0)) \longrightarrow (\mathbf{C}^m,0)$ une déformation de h (i.e $H(x,0) = h(x)$ et $H(0,t) = H_t(0) = 0$) telle que H_t soit de rang maximum pour $t \neq 0$. D'après la proposition 2 , $H^*(\omega)$ admet une intégrale première et, par conséquent, pour $t \neq 0$ voisin de 0, $H_t^*(\omega)$ possède une intégrale première. Le résultat est obtenu en appliquant à H_t le théorème du rang si $r \geqslant m$ (il existe j holomorphe tel que $j \circ H_t$ soit un isomorphisme de $(\mathbf{C}^m,0)$) et, si $r < m$, la proposition 2; on a en effet :

$$2 \leqslant \operatorname{codim} S(h^*(\omega)) \leqslant \operatorname{codim} S(H_t^*(\omega)) .$$

Remarque. — Le théorème est encore vrai dans le cas analytique réel en remplaçant dans l'hypothèse $\operatorname{codim} S(h^*(\omega))$ par $ht\ I(h^*(\omega))$, $I(h^*(\omega))$ désignant l'idéal de $\mathcal{O}_m$ engendré par les coefficients b_j de $h^*(\omega) = \Sigma b_j dy_j$. En effet, la 1-forme complexifiée $\tilde{\omega}$ de ω vérifie les hypothèses du théorème. Elle possède une intégrale première holomorphe $\tilde{f}$. Un calcul élémentaire montre que, soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de $\tilde{f} | \mathbf{R}^m \times \{0\}$ est une intégrale première de ω.

1. Démonstration de la proposition 1.

Elle repose sur un résultat de Brjuno [1] (p. 140 et p. 147) que l'on peut énoncer :

Soit η un germe en $0 \in \mathbf{C}^2$ de 1-forme holomorphe dont le 1-jet s'écrit, $j^1\eta = \alpha y\, dx + \beta\, x\, dy$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ premiers entre eux; alors, il existe $A, B \in \hat{\mathcal{O}}_1$ et $X, Y \in \hat{\mathcal{O}}_2$ tels que :

$$X = x + \sum_{i,j>1} a_{i,j} x^i y^j , \qquad Y = y + \sum_{i,j>1} b_{i,j} x^i y^j$$

avec

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0 \qquad \text{si} \qquad \alpha j = \beta i .$$

tels que

(i) $\quad \eta = (A(X^\alpha Y^\beta) Y dX + B(X^\alpha Y^\beta) X dY) \dfrac{D(x,y)}{D(X,Y)}$

(ii) si $\beta A = \alpha B$, alors $X, Y \in \mathcal{O}_2$ et a fortiori $A, B \in \mathcal{O}_1$.

Nous appellerons éclatement tout germe d'application π de $(\mathbf{C}^2,0)$ dans $(\mathbf{C}^2,0)$ obtenu par compositions successives d'automorphismes algébriques de $(\mathbf{C}^2,0)$ et d'applications du type $(x,y) \longrightarrow (xy,y)$. Par des majorations élémentaires on montre que si $F \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $F \circ \pi \in \mathcal{O}_2$, alors $F \in \mathcal{O}_2$.

Soit ω, comme dans l'énoncé de la proposition : il existe $f, g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ tel que $\omega = g\, df$. Nous allons montrer l'existence de $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$, tel que $l \circ f \in \mathcal{O}_2$. Puisque ω est à singularité isolée, $g(0) \neq 0$ et f n'a pas de facteurs multiples, i.e. $f = f_1 \cdot f_2, \dots, f_k$ avec $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$ et $f_i \in \hat{\mathcal{O}}_2$ irréductibles. Il est bien connu (désingularisation des courbes, cf. par exemple [3]) qu'il existe un éclatement π tel que :

$$f(\pi(x,y)) = (y - g_1(x))\, x^\alpha h(x,y) = \mathrm{F}(x,y)$$

avec $h \in \hat{\mathcal{O}}_2$, $h(0) \neq 0$ et $g_1 \in (x^2)\hat{\mathcal{O}}_1$. Il suffit de montrer l'existence de $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $l \circ \mathrm{F} \in \mathcal{O}_2$ pour montrer la proposition 1. On a

$$\pi^*(\omega) = g \circ \pi d\mathrm{F} = g(0).h(0)x^{\alpha-1}\omega_1$$

où ω_1 est un germe de 1-forme de 1-jet $j^1\omega_1 = \alpha y\, dx + x\, dy$. En appliquant le théorème de Brjuno à ω_1, on obtient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \hat{\mathcal{O}}_1$ vérifiant i) et ii).

Soient $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et le $l_1 \in \hat{\mathcal{O}}_1$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x,y) &= \mathrm{F}_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{i,j>0} c_{ij}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j, \\ l_1(\mathrm{Z}) &= \sum_{r>0} c_{r,r}\mathrm{Z}^r, \\ \mathrm{F}_2(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \mathrm{F}_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) - l(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y}). \end{aligned}$$

Avec ces notations la condition $\omega_1 \wedge d\mathrm{F}_1$ s'écrit

$$(\mathrm{A}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})\mathrm{Y}\, d\mathrm{X} + \mathrm{B}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}) \wedge (dl_1(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y}) + d\mathrm{F}_2(\mathrm{X},\mathrm{Y})) = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y}l_1'(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})(\mathrm{A}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y}) - \alpha\mathrm{B}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})) \\ &\qquad = \mathrm{A}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})\mathrm{Y}\frac{\partial\mathrm{F}_2}{\partial\mathrm{Y}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) - \mathrm{B}(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})\mathrm{X}\frac{\partial\mathrm{F}_2}{\partial\mathrm{X}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme les deux membres de cette égalité on obtient :

a) $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{B}$,

b) $\mathrm{F}_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = l_1(\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y})$ et donc $l_1'(0)$ est non nul (puisque $j^{\alpha+1}\mathrm{F}_1(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = h(0)\mathrm{X}^\alpha\mathrm{Y}$).

2. Démonstration de la proposition 2.

Rappelons les notations de [4]. Si $f = \Sigma a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_m$ et $(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_m) = \rho$, avec $\rho_i > 0$, on pose $|f|_\rho = \Sigma|a_\alpha|\rho^\alpha$. Si $\omega = \Sigma a_i dx_i \in \Omega_m^1$, le $\mathcal{O}_m$-module des germes en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme holomorphe, on pose $|\omega|_\rho = \Sigma|a_i|_\rho$. Le sous-espace de $\mathcal{O}_m$ (resp. Ω^1_m) sur lequel $|\ |_\rho$ est finie est noté $\mathcal{O}(\rho)$ (resp. $\Omega^1(\rho)$).

Lemme. — *Supposons que* $\omega \in \Omega^1_m$ *et que* codim $S(\omega) \geqslant 2$; *alors, quel que soit* $\pi \in \Omega^1_m$ *vérifiant* $\omega \wedge \pi = 0$, *il existe* $g \in \mathcal{O}_m$, *unique, tel que* $g\omega = \pi$. *De plus, il existe* $K > 0$ *et* ρ *tel que si* $\pi \in \Omega(\rho)$ *alors* $g \in \mathcal{O}(\rho)$ *et*

$$|g|_{t\rho} \leqslant K|\pi|_{t\rho} \qquad \text{si} \qquad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

L'existence de g est un cas particulier d'un théorème sur le complexe de Koszul associé à ω ([4], [6]). La majoration est une conséquence évidente du théorème de division par une fonction holomorphe.

Notons $(x,t) = (x_1,x_2,\ldots x_n,t)$ les coordonnées d'un point de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}$. Soit $\omega \in \Omega^1_{m+1}$, intégrable; notons

$$\omega = \sum_{n\geqslant 0} t^n(\omega_n + a_n\, dt)$$

son développement de Taylor suivant les puissances de t et supposons que :

(2.1) codim $S(\omega_0) \geqslant 2$ et $\omega_0 = df_0$ avec $f_0 \in \mathcal{O}(\rho)$.

(2.2) $\omega_n \in \Omega^1(\rho)$, $a_n \in \mathcal{O}(\rho)$ pour $n \geqslant 0$.

(2.3) $\sum_{n\geqslant 0} (|a_n|_\rho + |\omega_n|_\rho)\, t^n$ a un rayon de convergence > 0.

La proposition 2 se déduit par récurrence sur r (compte tenu du lemme) des deux assertions suivantes :

(2.4.) Il existe une suite unique $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\rho)$ telle que $\omega \wedge d\left(\sum_{n\geqslant 0} t^n f_n\right) = 0$.

(2.5) La série $\sum_{n\geqslant 0} |f_n|_{\rho/2} t^n$ a un rayon de convergence > 0.

Démonstration de (2.4.). — Remarquons que pour $f_1 \in \mathcal{O}(\rho)$

$$\text{(2.4.1)} \qquad \omega = d(f_0 + tf_1) \quad (t)$$

est équivalent à $a_0 = f_1$. Supposons qu'il existe $f_1, \ldots, f_n$, $h_1, h_2, \ldots h_{n-1} \in \mathcal{O}(\rho)$ uniques tels que :

$$\text{(2.4.}n\text{)} \qquad \omega' = \left(1 + \sum_{p=1}^{n-1} t^p h_p\right)\omega = d\left(\sum_{p=0}^{n} t^p f_p\right) \quad (t^n).$$

Montrons l'existence et l'unicité de f_{n+1}, $h_n \in \mathcal{O}(\rho)$ tels que

(2.4.$n+1$) soit vrai, ou ce qui est équivalent, tels que :

$$(1 + t^n h_n)\omega' = d\left(\sum_{p=0}^{n+1} t^p f_p\right) \qquad (t^{n+1}).$$

D'après (2.4.n) il existe $a'_n \in \mathcal{O}(\rho)$ et $\omega'_n \in \Omega^1(\rho)$ tels que :

$$\omega' = d\left(\sum_{p=0}^{n} t^p f_p\right) + t^n(\omega'_n + a'_n\, dt) \quad (t^{n+1}).$$

Un calcul élémentaire montre que f_{n+1} et h_n sont déterminés par :

$$h_n\omega_0 + \omega'_n = 0\,, \quad (n+1)f_{n+1} = h_n a_0 + a'_n\,.$$

La condition $\omega' \wedge d\omega' = 0\,(t^n)$ étant équivalente à $\omega_0 \wedge \omega'_n = 0$, du lemme 1 on déduit l'existence et l'unicité de h_n et f_{n+1}.

Démonstration de 2.5. — Nous allons utiliser la même méthode que B. Malgrange dans [4]. Il suffit de montrer (compte tenu de 2.4. et du lemme) que si

$$df \wedge \omega = 0 \qquad \text{avec} \qquad f = \sum_{n\geqslant 0} t^n f_n\,, \qquad f_n \in \mathcal{O}(\rho)\,, \qquad \omega_0 = df_0\,,$$

alors $\sum_{n\geqslant 0} t^n |f_n|_{\rho/2}$ converge. La condition 2.4. implique en particulier pour $n \geqslant 0$

$$(n+1)f_{n+1}\omega_0 = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}f_p - \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)f_{p+1}\omega_{n-p}\,.$$

D'après le lemme 1, pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on en déduit :

$$|f_{n+1}|_{t\rho} \leqslant \frac{K}{n+1}\sum_{p=0}^{n} |a_{n-p}|_\rho\, |df_p|_{t\rho} + K\sum_{p=0}^{n-1} |f_{p+1}|_{t\rho}|\omega_{n-p}|_\rho$$

et, en utilisant la majoration du lemme 2.4. de [3] :

$$|df_p|_{t\rho} \leqslant \frac{C}{s-t}|f_p|_{s\rho} \qquad \text{si} \qquad t < s \leqslant 1\,,$$

on obtient la majoration suivante :

$$(2.5.n) \quad |f_{n+1}|_{t\rho} \leqslant \frac{K.C}{(n+1)(s-t)}\sum_{p=0}^{n} |a_{n-p}|_\rho |f_p|_{s\rho} + K\sum_{p=0}^{n-1} |f_{p+1}|_{t\rho}|\omega_{n-p}|_\rho\,.$$

Soit $\{u_p\}_{p\geqslant 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = |f_0|_\rho \\ u_{n+1} = \text{K.C.}\, e \sum_{p=0}^{n} |a_{n-p}|_\rho u_p + \text{K} \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} |\omega_{n-p}|_\rho \,. \end{cases}$$

Il suffit de montrer, comme dans [4], les deux assertions suivantes :

(2.6) On a $|f_p|_{t\rho} \leqslant \dfrac{u_p}{(1-t)^p}$ si $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $p \in \mathbf{N}$.

(2.7.) La série $\mathrm{F}(t) = \sum_{n\geqslant 0} u_n t^n$ est convergente.

Il est clair que pour $p = 0$ et $p = 1$ l'assertion (2.6.) est vraie. Supposons qu'elle le soit jusqu'à l'ordre $n \geqslant 1$; on obtient, en majorant $|f_p|_{t\rho}$ dans (2.5.n) par $\dfrac{u_p}{(1-t)^p}$,

$$(1-t)^{n+1}|f_{n+1}|_{t\rho} \leqslant \text{K.C.}\ \mu_n(t,s) \sum_{p=0}^{n} |a_{n-p}|_\rho u_p + \text{K} \sum_{p=0}^{n-1} |\omega_{n-p}|_\rho u_{p+1} \,.$$

En choisissant $1 - s = \dfrac{n}{n+1}(1-t)$, comme dans [4], on a :

$$\mu_n(t,s) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(s-t)(1-s)^n(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

d'où (2.6.).

Pour vérifier (2.7.) il suffit de constater que $\mathrm{F}(t)$ est « la » solution de l'équation linéaire

$$\mathrm{F}(t) = |f_0|_\rho + \text{K.C.e.t}\, \mathrm{A}(t)\,.\,\mathrm{F}(t) + \text{K}.t.\mathrm{B}(t)\,(\mathrm{F}(t) - |f_0|_\rho)$$

où $\mathrm{A}(t) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|_\rho t^n$ et $\mathrm{B}(t) = \sum_{n\geqslant 0} |\omega_{n+1}|_\rho t^n$ sont des séries convergentes d'après (2.3.).

3. Démonstration de la proposition 3.

Choisissons dans $\mathbf{C}^m$ des coordonnées adaptées à $\mathrm{S}(\omega)$, i.e. si j est l'inclusion canonique $x \longrightarrow (x,0)$ de $\mathbf{C}^p$ dans $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{m-p}$ [2]

$$\operatorname{codim} j^{-1}(\mathrm{S}(\omega)) = \inf\,(\operatorname{codim} \mathrm{S}(\omega), p)\,.$$

Nous allons obtenir le plongement i cherché en perturbant l'inclusion j. Plus précisément soit $I = (I_1, I_2, \dots I_m)$ l'application de $\mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ dans $\mathbf{C}^m$ définie par

$$I(x,A,B) = j(x) + Ax + Bx^2$$

où $A, B \in \mathbf{C}^{mp}$ sont des matrices $p \times m$ et $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots x_p^2)$. Pour A, B proche de 0, l'application partielle $I_{A,B}$: $x \longrightarrow I(x,A,B)$ vérifie (comme j) la condition

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname{codim} I_{A,B}^{-1}(S(\omega)) = \inf (\operatorname{codim} S(\omega), p) .$$

Pour établir la proposition il suffit de montrer l'assertion suivante : il existe un sous-ensemble analytique propre Z de $(\mathbf{C}^{mp})^2$ tel que

$$\text{(3.2)} \qquad S(I_{A,B}^*(\omega)) = I_{A,B}^{-1}(S(\omega)) \quad \text{si} \quad A,B \notin Z .$$

Remarquons d'abord que l'application $\tilde{I} = \left(I, \dfrac{\partial I}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial I}{\partial x_p}\right)$ de $\mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ dans $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^{mp}$ est une submersion en dehors de $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. En effet, $(x^0, A^0, B^0) \in \mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ avec $x_l \neq 0$ étant fixé, la restriction $\tilde{I}^l$ de $\tilde{I}$ au sous-espace d'équations

$$x = x^0 , \qquad B = (B_1^0, \dots, B_{l-1}^0 , B_l , B_{l+1}^0, \dots, B_p^0) = \hat{B}_l$$

(B_k désignant la k^ième^ colonne de B) s'écrit

$$(A, B_l) \longrightarrow (Ax + \hat{B}_l x^2 , \quad A + 2x_l \hat{B}_l) + (\lambda, u)$$

où $(\lambda, u) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^{mp}$ est une constante. $\tilde{I}_l$ est un isomorphisme affine.

Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^m$ sur lequel ω est holomorphe, $TU = U \times \mathbf{C}^m$ son espace tangent et soit $\tilde{\omega}$ l'application de $U \times \mathbf{C}^{mp}$ dans U définie par :

$$\tilde{\omega}(x, X_1, X_2, \dots X_p) = (\omega_x(X_1), \omega_x(X_2) \dots, \omega_x(X_p))$$

π désignant la projection de $U \times \mathbf{C}^{mp}$ sur U. $\tilde{Z} = \tilde{\omega}^{-1}(0)$ contient $\pi^{-1}(S(\omega))$ et $\tilde{Z} - \pi^{-1}(S(\omega))$ est une sous-variété lisse de codimension p.

Des deux égalités,

$$\tilde{I}^{-1}(\tilde{Z}) = \bigcup_{A,B} S(I_{A,B}^*(\omega)) \qquad \text{et} \qquad \pi \circ \tilde{I} = I$$

on déduit que

$$H = \tilde{I}^{-1}(Z) - I^{-1}(S(\omega)) = \bigcup_{A,B} (S(I^{*}_{A,B}(\omega)) - I^{-1}_{A,B}(S(\omega)))$$

est une sous-variété analytique (lisse) de codimension p de $\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ qui ne contient pas $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. Son adhérence, $\overline{H}$, est un sous-ensemble analytique de codimension p et ne peut donc contenir $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. ([2]).

Par construction $Z = \overline{H} \cap 0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ vérifie (3.1.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. D. Brjuno, Analytic form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25 (1971), 131-282.

[2] R. C. Gunning and H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall Inc., London.

[3] M. Lejeune-Jalabert et B. Tessier, Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Centre Math. École Polytechnique (Nov. 1971).

[4] B. Malgrange, Frobenius avec singularités 1. codimension un, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 46 (1976), 163-173.

[5] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, *Annales Inst. Fourier*, 26-2 (1971), 171-220.

[6] K. Saito, On a generalisation of de Rham lemma, *Annales Inst. Fourier*, 26-2 (1976), 165-170.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1978
Proposé par B. Malgrange.

J. F. Mattei, R. Moussu,
Université de Dijon
Département de Mathématiques
21000 Dijon.