Annales de l'institut Fourier

Jean-Pierre Kahane

Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 293-314
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__293_0>

SUR LES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES BORNÉES

par Jean-Pierre KAHANE

Cette note comprend trois parties. Dans la première, introductive, on donne quelques propriétés simples des fonctions moyenne-périodiques bornées, et on étudie leur rapport avec les fonctions presque-périodiques. Dans la seconde, la plus importante, on étudie les fonctions et distributions pseudo-périodiques : ce sont les f telles que l'espace $\tau(f)$ engendré par leurs translatées ne contienne que des fonctions ou distributions bornées; elles sont caractérisées par une propriété de leur spectre. Dans la troisième, on étudie les fonctions moyenne-périodiques bornées, sommes de séries de Fourier absolument convergentes.

* * *

Dans la suite, C désigne l'espace des fonctions continues sur la droite, avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $f \in C$ est dite moyenne-périodique (m.p.) si le sous-espace vectoriel fermé $\tau(f)$ engendré par ses translatées ne coïncide pas avec C. On montre ([1], [2]) que $\tau(f)$ admet pour base l'ensemble des exponentielles-monômes $\{x^p e^{i\lambda x}\}$ qu'il contient (théorème fondamental); on appelle spectre de f la suite des points λ, chacun compté autant de fois qu'il y a d'exponentielles-monômes $\{x^p e^{i\lambda x}\} \in \tau(f)$, et série de Fourier de f le développement de f suivant cette base : on note $f \sim \sum a(\lambda, p) x^p e^{i\lambda x}$. Si f est bornée, on montre que le spectre $\{\lambda\}$ est réel et simple, et que les coefficients $a(\lambda)$ sont bornés; les régularisées $f * h$ par des fonctions h deux fois continûment dérivables à support compact sont presque-périodiques et de spectre $\subset \{\lambda\}$. On en déduit :

LEMME 1. — *Toute fonction m.p. bornée, de spectre $\{\lambda\}$, est limite dans* C *de sommes finies $s = \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}$ uniformément bornées.*

En effet, il suffit de prendre $h \geqslant 0$ tendant vers la mesure de Dirac, et $s - (f * h)$ tendant uniformément vers zéro.

LEMME 2. — *Si f est m.p. bornée, $f \sim \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}$, et si g est une fonction sommable, on a $f * g \sim \Sigma a(\lambda)\mathrm{G}(\lambda)e^{i\lambda x}$ avec $\mathrm{G}(u) = \int e^{iux}g(x)\,dx$.*

Résultat immédiat pour $f = s$: somme finie, qu'on étend à l'aide du lemme 1.

THÉORÈME 1. — *Soit $f \in \mathrm{C}$, m.p, bornée : $f \sim \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}$, $\sup\limits_x |f(x)| = |f| < \infty$; alors f est limite dans* C *des « sommes de Fejer » $f_{\mathrm{N}} = \sum\limits_{|\lambda| < \mathrm{N}} \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mathrm{N}}\right) a(\lambda)e^{i\lambda x}$, et $\Sigma|a(\lambda)|^2 \leqslant |f^2|$. Si de plus f est uniformément continue, f_{N} tend uniformément vers $f(\mathrm{N} \to \infty)$.*

DÉMONSTRATION. — Soit $g_{\mathrm{N}} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\mathrm{N}x}{2}}{\mathrm{N}x^2}$, de sorte que

$$\mathrm{G}_{\mathrm{N}}(u) = \max\left(0,\ 1 - \frac{|u|}{\mathrm{N}}\right).$$

D'après le lemme 2, on a $f_{\mathrm{N}} = f * g_{\mathrm{N}}$. Quand $\mathrm{N} \to \infty$, on vérifie (comme dans le cas classique de Fejer, grâce au fait que f est bornée) que f_{N} tend vers f uniformément sur tout intervalle où f est uniformément continue. D'autre part,

$$|f_{\mathrm{N}}| \leqslant |f| \qquad \text{et} \qquad \sum_{|\lambda| \leqslant \mathrm{N}} \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mathrm{N}}\right)^2 |a(\lambda)|^2 \leqslant |f_{\mathrm{N}}|^2;$$

d'où $\Sigma|a(\lambda)|^2 \leqslant |f|^2$.

Comme corollaire du théorème 1, on retrouve le fait connu que toute fonction m.p. bornée uniformément continue est presque-périodique au sens de Bohr (p.p. Bohr). Existe-t-il des fonctions m.p. bornées qui ne soient pas p.p. Bohr? L'exemple suivant répond affirmativement à cette question.

Exemple d'une fonction m.p. bornée, non uniformément continue.

Soit

$$K_\mu(x) = \frac{\sin^2 \frac{\mu x}{2}}{\mu \sin^2 \frac{x}{2}} = 1 + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\cos x + \cdots + \frac{1}{\mu}\cos(\mu - 1)x$$

(μ : entier).

On peut choisir la suite $\{\mu_n\}$ assez rapidement croissante pour que la fonction $F = \sum_1^\infty \frac{1}{\mu_n} K_{\mu_n}\left(\frac{x}{2^n} - \pi\right)$ soit bornée : en effet, à distance $> \frac{\pi}{2}$ de la suite $S_n : \{(2k+1)2^n\pi\}$ $(k = \cdots -1, 0, 1, \ldots)$ on a $\frac{1}{\mu_n} K_{\mu_n}\left(\frac{x}{2^n} - \pi\right) < (\mu_n \sin(2^{-n-2}\pi))^{-2} = \varepsilon_n$, et partout $\frac{1}{\mu_n} K_{\mu_n}\left(\frac{x}{2^n} - \pi\right) \leqslant 1$; comme la distance de deux suites S_n est $\geqslant \pi$, on a $F < 1 + \sum_1^\infty \varepsilon_n$; on choisit $\{\mu_n\}$ de sorte que $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$. Alors, $F(2^n\pi) - F\left(2^n\pi + \frac{2^n\pi}{\mu_n}\right)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$. Donc, quelle que soit la suite réelle $\{\lambda_n\}$, la fonction $f = \sum_{n=1}^\infty e^{i\lambda_n x} \frac{1}{\mu_n} K_{\mu_n}\left(\frac{x}{2^n} - \pi\right)$ est bornée et n'est pas uniformément continue.

Choisissons maintenant la suite $\{\lambda_n\}$ assez vite croissante pour que le suite

$$\{\nu_{n,p}\} = \{\lambda_n + p2^{-n}\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, \pm 1, \ldots \pm(\mu_n - 1)$$

soit simple et vérifie $\sum_{n,p} \frac{1}{\nu_{n,p}} < \infty$. Alors il existe une mesure $d\mu$ à support compact dont la transformée de Fourier s'annule sur $\{\nu_{n,p}\}$, et f satisfait l'équation $f * d\mu = 0$, donc f est m.p., bornée, et non uniformément continue.

En remplaçant C par $\mathfrak{D}'$, espace des distributions sur la droite [3], on définit les distributions m.p. : dire que f est une distribution m.p., c'est dire que $\tau(f) \neq \mathfrak{D}'$ ($\tau(f)$: sous-espace fermé de $\mathfrak{D}'$), ou que f est solution d'une équation $f * \varphi = 0$,

$\varphi\in\mathfrak{D}$. Les régularisées d'une distribution m.p. sont des fonctions $\in\tau(f)$; partant de cette remarque, on étend aux distributions m.p. le théorème fondamental et la notion de série de Fourier. On vérifie que la dérivée d'une distribution m.p. admet pour série de Fourier la série de Fourier dérivée formellement. Les distributions bornées sont sommes finies de dérivées d'ordre fini de fonctions continues bornées; on en déduit aisément :

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une distribution* m.p. *soit bornée, il faut et suffit que le spectre* $\{\lambda\}$ *soit réel et simple, et que* $a(\lambda) = 0\,(|\lambda|^{\mathrm{N}})$ *pour un* N *assez grand* $(f \sim \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x})$. *Pour qu'une distribution* m.p. *soit bornée, il faut et suffit qu'elle soit presque-périodique au sens de Schwartz (p.p. Schwartz).*

En remplaçant C par $\mathrm{E}^p (p \geqslant 1)$, espace des fonctions localement $\in \mathrm{L}^p$ muni de la convergence L^p sur tout compact, on définit les E^p-fonctions m.p. On étend encore facilement le théorème fondamental et la notion de série de Fourier. On dira qu'une fonction f est E^p-bornée si

$$||f|| = \sup_x \left(\int_x^{x+1} |f|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

En utilisant la transformée de Carleman, on démontre comme dans ([2] p. 47) le résultat suivant, moins intéressant que les théorèmes 1 et 2 :

Si une E^p*-fonction* m.p. $(p \geqslant 1)$ *est* E^p*-bornée, son spectre est réel et simple; et ses coefficients de Fourier sont bornés.*

REMARQUE. — A priori, nous aurions dû définir des fonctions continues C-m.p., des distributions $\mathfrak{D}'$-m.p. et des E^p-fonctions E^p-m.p.; il est aisé de voir que, pour les fonctions continues, les trois définitions coïncident, et que pour les E^p-fonctions, les deux dernières coïncident.

* * *

La notion de fonction pseudo-périodique est due à Paley et Wiener, qui en ont donné la théorie dans E^2 ([4], chap. VII). La théorie que nous indiquons est très partielle dans C (où se posent les problèmes les plus importants); dans E^2, elle reprend et complète les résultats de Paley-Wiener et d'Ingham [15] (théorème 3) et permet un calcul explicite de la pseudo-période (théorème 4); dans le cas de $\mathcal{D}'$, le théorème 5 pourrait s'obtenir directement à l'aide d'un « théorème de prolongement » ([2], p. 57); au contraire, notre étude donne une démonstration simplifiée et plus puissante de ce théorème de prolongement (voir théorème 6 et corollaire). Les notions de « suites régulières » et de « densité de répartition » joueront un rôle essentiel.

Cas de C.

Définition. — *Soit $f \in$ C. Si $\tau(f)$ ne contient que des fonctions bornées, f est dite* C*-pseudo-périodique* (C*-ps.p.*)

Toute fonction C-ps.p. est évidemment m.p. Remarquons que la condition de pseudo-périodicité, pour une fonction m.p., ne porte que sur le spectre. Le spectre doit être réel et simple. *Nous appellerons* $Q(\Lambda)$ *la condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire une suite réelle* Λ *pour que toute fonction m.p. de spectre* $\subset \Lambda$ *soit* C*-ps.p.*

Posons

$$|f|_{\mathrm{I}} = \sup_{x \in \mathrm{I}} |f(x)| \qquad |f| = \sup_{\mathrm{I}} |f|_{\mathrm{I}},$$

I désignant un intervalle borné.

Proposition 1. — $Q(\Lambda)$ *équivaut à l'existence d'un intervalle* I *et d'une constante* K *tels que, pour toute somme finie* $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$, *on ait* $|s| < \mathrm{K}|s|_{\mathrm{I}}$ (*condition* $Q(\Lambda, \mathrm{I})$).

En effet, $Q(\Lambda, \mathrm{I})$ implique $Q(\Lambda)$ car l'inégalité $|s| < \mathrm{K}|s|_{\mathrm{I}}$ pour des polynômes d'approximation de f entraîne $|f| \leqslant \mathrm{K}|f|_{\mathrm{I}}$. D'autre part, si $Q(\Lambda, \mathrm{I})$ n'est pas satisfait, on peut construire une suite d'intervalles I_n emboîtés croissants, et une suite s_n, telles que $|s_n|_{\mathrm{I}_n} < \dfrac{1}{2^n}$ et $|s_n|_{\mathrm{I}_{n+1}} > n + |s_{n-1}| + |s_{n-2}| + \cdots$. Alors $f = \Sigma s_n$ est m.p. de spectre $\subset \Lambda$, et n'est pas bornée.

Corollaire 1. — *Toute fonction* C*-ps.p. est p.p. Bohr.*

Car il existe des s_n convergeant uniformément vers f sur I, et $Q(\Lambda, \mathrm{I})$ entraîne que $|f - s_n|$ tend vers zéro.

Rappelons qu'une suite est dite *régulière* si la distance entre deux points distincts de la suite est bornée inférieurement par un nombre positif.

COROLLAIRE 2. — $Q(\Lambda)$ *entraîne que* Λ *est régulière. Autrement dit, le spectre d'une fonction C-ps.p. est régulier.*

Sinon en effet, on prendrait $s = e^{i\lambda x} - e^{i\lambda' x}$, $\lambda - \lambda'$ tendant vers zéro, et $Q(\Lambda, I)$ ne serait satisfait pour aucun I.

Il serait intéressant de savoir si $Q(\Lambda)$ se réduit à la régularité de Λ (1).

Donnons deux conditions équivalentes à $Q(\Lambda, I)$.

PROPOSITION 2. — $Q(\Lambda, I)$ *équivaut à* $Q'(\Lambda, I)$ *: toute fonction uniformément approchable sur* I *par des polynômes*

$$s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x},$$

est prolongeable de façon unique sur la droite en une fonction m.p. bornée de spectre $\subset \Lambda$.

En effet, $Q(\Lambda, I)$ entraîne visiblement $Q'(\Lambda, I)$. Inversement, $Q'(\Lambda, I)$ signifie que l'application canonique de l'espace C^*_Λ des fonctions m.p. bornées de spectre $\subset \Lambda$ (espace de Banach pour la norme $|f|$) dans l'espace $C_\Lambda(I)$ des fonctions limites uniformes sur I de polynômes s (espace de Banach pour la norme $|f|_I$) est une application biunivoque sur $C_\Lambda(I)$; comme cette application est continue dans un sens ($|f|_I \leqslant |f|$) elle l'est dans l'autre d'après Banach ([5], p. 41), d'où $Q(\Lambda, I)$.

PROPOSITION 3. — $Q(\Lambda, I)$ *équivaut encore à* $Q''(\Lambda, I)$: *il existe un* $K > 0$ *tel que, pour tout* y *réel, on puisse trouver une mesure* $d\mu = d\mu_y(x)$ *à support dans* I *fermé, de masse totale* $\int |d\mu| < K$, *et dont la transformée de Fourier* $M(u) = \int e^{iux} d\mu(x)$ *prenne sur* Λ *les mêmes valeurs que* e^{iuy}.

En effet, $Q'(\Lambda, I)$ entraîne que toute forme linéaire de norme 1 sur C^*_Λ est une forme linéaire de norme bornée ($< K$) sur $C_\Lambda(I)$, représentable par $f \to \int_I f\, d\mu$, $f \in C^*_\Lambda$, $\int |d\mu| < K$; en prenant comme forme linéaire $f \to f(y)$, et en l'appliquant à $e^{i\lambda x}$, on voit que $Q(\Lambda, I)$ entraîne $Q''(\Lambda, I)$. Inversement, si $Q''(\Lambda, I)$ est satisfaite, les fonctions s de la proposition 1 satisfont $s(y) = \int_I s(x)\, d\mu_y(x)$, d'où $Q(\Lambda, I)$.

(1) Depuis le dépôt de ce manuscrit nous avons construit une suite $\Lambda = \{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ et pour laquelle $Q(\Lambda)$ n'est pas sastisfaite. La régularité de Λ n'entraîne donc pas $Q(\Lambda)$.

Définition. — Nous appellerons C-*pseudo-période* attachée à une suite réelle régulière Λ la borne inférieure des longueurs des I vérifiant $Q(\Lambda, I)$ (resp. Q' ou Q'').

Nous calculerons (proposition 4) une borne inférieure de la C-pseudo-période attachée à Λ, et nous donnerons des exemples (proposition 6) de suites Λ pour lesquelles elle est nulle.

Remarque. — Nous aurions pu faire, de l'équivalence des trois conditions Q, Q', Q'', une démonstration « triangulaire » évitant le recours au théorème de Banach. Mais nous ne savons pas étendre cette démonstration triangulaire au cas de E^2, que nous considérons maintenant.

Cas de E^2.

Définition. — *Soit* $f \in E^2$, $\tau(f)$ *le sous-espace vectoriel fermé de* E^2 *engendré par les translatées de* f. *Si* $\tau(f)$ *ne contient que des fonctions* E^2-*bornées*, f *est dite* E^2-*pseudo-périodique* (E^2-*ps.p.*)

Appelons $Q_2(\Lambda)$ la condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire une suite réelle Λ pour que toute E^2-fonction m.p. de spectre $\subset \Lambda$ soit E^2-ps.p.

Posons

$$\|f\|_I = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}, \qquad \text{et} \qquad \|f\| = \sup_{|I|=1} \|f\|_I.$$

La proposition 1, les corollaires 1 et 2 et la proposition 2 se transcrivent immédiatement.

Proposition 1_2. — $Q_2(\Lambda)$ *équivaut à l'existence d'un intervalle* I *et d'une constante* K *tels que, pour toute somme finie*, $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$, *on ait* $\|s\| < K \|s\|_I$ (*condition* $Q_2(\Lambda, I)$),

Corollaire 1. — *Toute fonction* E^2-*ps.p. est presque-périodique au sens de Stepanoff (p.p. Stepanoff).*

Corollaire 2. — $Q_2(\Lambda)$ *entraîne la régularité de* Λ.

Soit $L^2(I)$ l'espace des fonctions de carré sommable sur I, muni de la norme $\|f\|_I$.

Proposition 2_2. — $Q_2(\Lambda, I)$ *équivaut à* $Q_2'(\Lambda, I)$: *toute fonction approchable dans* $L^2(I)$ (*c'est-à-dire en moyenne quadra-*

tique sur I) *par des sommes s, est prolongeable de manière unique sur la droite en une* E^2*-fonction m.p.* E^2*-bornée de spectre* $\subset \Lambda$.

De la proposition 1, on déduit encore immédiatement:

Corollaire 3 (*définition de Paley-Wiener*). — *f est* E^2*-ps.p. s'il existe une longueur* L *et un nombre* $K > 0$ *avec la propriété suivante: dès que* I *et* J *sont des segments de longueur* L, *et h une combinaison linéaire de translatées de f, on a* $||h||_J < K||h||_I$.

On peut préciser les corollaires 1 et 2.

Théoreme 3. — a) $Q_2(\Lambda)$ *équivaut à la régularité de* Λ.

b) *Pour qu'une* E^2*-fonction soit* E^2*-ps.p., il faut et suffit qu'elle soit p.p. Stepanoff et de spectre régulier (Paley-Wiener).*

c) *Pour les* E^2*-fonctions m.p. de spectre contenu dans une suite régulière donnée,* $f \sim \Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}$, *on a équivalence des normes* $||f||$, $||f||_I$ *(pour* I *assez grand) et* $(\Sigma|a(\lambda)|^2)^{1/2}$.

Démonstration. — Pour montrer a), il suffit d'après le corollaire 1, de montrer que la régularité de Λ entraîne $Q(\Lambda)$. Cela résulte de l'étude de Paley et Wiener, que nous reprenons pour pouvoir nous y référer ensuite. Soit $\inf\limits_{\lambda, \lambda' \in \Lambda} |\lambda - \lambda'| \geqslant 2\delta$. et $s = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)e^{i\lambda x}$ (somme finie). Alors $s . \dfrac{\sin \delta x}{x} = \displaystyle\int \varphi(u)e^{-iux}\,du$, $\varphi(u)$ étant égal à $\dfrac{a(\lambda)}{2}$ sur chaque intervalle $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ et nul ailleurs. D'où

$$\int |s|^2 \frac{\sin^2 \delta x}{x^2} = 2\pi \int |\varphi|^2 = \pi\delta\Sigma|a(\lambda)|^2.$$

Ainsi pour tout intervalle U de longueur $u < \dfrac{\pi}{\delta}$, on a

$$\frac{\sin^2 \delta u}{u^2} ||s||_U^2 < \int_U |s|^2 \frac{\sin^2 \delta x}{x^2} < \pi\delta\Sigma\, |a(\lambda)|^2.$$

Donc si $I = \left[-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right]$ il existe $A = A(L, \delta)$ et $C = C(\delta)$ telles que $||s||_I^2 < A\Sigma|a(\lambda)|^2$ et $||s||^2 < C\Sigma|a(\lambda)|^2$. D'autre part

$$\Sigma|a(\lambda)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s|^2 \leqslant ||s||^2.$$

Enfin

$$\|s\|_{\mathrm{I}}^{2} > \int_{\mathrm{I}} |s|^{2} \frac{\sin^{2} \delta x}{x^{2}} = \pi\delta\Sigma\, |a(\lambda)|^{2} - 2 \int_{\mathrm{L}/2}^{\infty} |s|^{2} \frac{\sin^{2} \delta x}{x^{2}}$$
$$> \pi\delta\Sigma|a(\lambda)|^{2} - \frac{4}{\mathrm{L}} \|s\|^{2} > \left(\pi\delta - \frac{4\mathrm{C}}{\mathrm{L}}\right)\Sigma|a(\lambda)|^{2},$$

et il suffit de prendre $\mathrm{L} > \frac{4\mathrm{C}}{\pi\delta}$ pour avoir deux constantes A et B, fonctions seulement de L et de δ, telles que

$$\|s\|_{\mathrm{I}}^{2} \leqslant \mathrm{A}\Sigma\, |a(\lambda)|^{2} \leqslant \mathrm{A}\|s\|^{2} \leqslant \mathrm{B}\|s\|_{\mathrm{I}}^{2}.$$

La dernière inégalité entraîne $Q_2(\Lambda)$. Les inégalités s'étendent immédiatement aux limites dans $L^2(\mathrm{I})$ des sommes s, d'où c). Enfin b) résulte de a) et du corollaire 2.

Corollaire. — *Si Λ est réunion d'un nombre fini de suites régulières, et si $\{a(\lambda)\}$ est une suite de carré sommable ($\lambda \in \Lambda$), il existe une fonction* p.p. *Stepanoff dont la série de Fourier est $\sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$.*

Ce corollaire, immédiat, est une généralisation naturelle du théorème de Riesz-Fischer. L'hypothèse sur Λ revient à supposer sa « densité supérieure de répartition » (voir ci-dessous) finie.

Le théorème 3 sera précisé dans la suite : on indiquera ce qu'il faut entendre par « pour I assez grand »; nous savons déjà qu'on peut prendre $|\mathrm{I}| > \frac{4\mathrm{C}}{\pi\delta}\cdot$ Nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3_2. — $Q_2(\Lambda, \mathrm{I})$ *équivaut à* $Q_2''(\Lambda, \mathrm{I})$: *quelle que soit la suite de carré sommable $\{b(\lambda)\}$, toutes les fonctions entières $\Phi(w)$, de type exponentiel $\leqslant \frac{|\mathrm{I}|}{2}$, satisfaisant $\Phi(\lambda) = b(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, vérifient l'inégalité*

$$\Sigma|b(\lambda)|^{2} < \mathrm{K} \int |\Phi^{2}(u)|\, du$$

et il en existe une vérifiant

$$\int |\Phi^{2}(u)|\, du < \mathrm{K}\Sigma|b(\lambda)|^{2}$$

K *ne dépendant que de* Λ *et* I.

Démonstration. — On peut supposer I symétrique par rapport à l'origine. Soit $L^2_\Lambda(I)$ le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(I)$ engendré par les $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \Lambda$, et l^2 l'espace des suites $\{a(\lambda)\}$ de carré sommable; $L^2_\Lambda(I)$ et l^2 sont des espaces de Banach respectivement pour les normes $\|f\|_I$ et $n(a) = (\Sigma|a(\lambda)|^2)^{1/2}$. Compte tenu de l'équivalence des normes $\|f\|$ et $n(a)$ (théorème 3), $Q_2(\Lambda, I)$ exprime que la correspondance $f \longleftrightarrow \{a(\lambda)\}$ définie par $f \sim \Sigma a(\lambda) e^{i\lambda x}$ est un isomorphisme entre $L^2_\Lambda(I)$ et l^2. Une forme linéaire sur l^2 s'écrit $\{a(\lambda)\} \to \Sigma a(\lambda) b(\lambda)$ [norme: $n(b)$] et la forme linéaire correspondante sur $L^2_\Lambda(I)$ est $f \to \int f\varphi$ avec $(*)$ $\int_I \varphi e^{i\lambda x} = b(\lambda)$ [norme : $n(\varphi) = \inf\left(\int_I |\varphi_1|^2\right)^{1/2}$ pour tous les φ_1 satisfaisant $(*)$]. L'équivalence des normes $n(\varphi)$ et $n(b)$, exprimée en introduisant la transformée de Fourier $\Phi(w) = \int_I \varphi e^{iwx}$ et en utilisant le théorème de Paley-Wiener, n'est autre que $Q''_2(\Lambda, I)$. Donc $Q_2(\Lambda, I)$ entraîne $Q''_2(\Lambda, I)$. Inversement, supposons $Q''_2(\Lambda, I)$ soit $\varkappa' n(\varphi) < n(b) < \varkappa'' n(\varphi)$; pour une somme finie $s = \Sigma a(\lambda) e^{i\lambda x}$, on a $\|s\|_I = \sup \int_I s\varphi$ pour $n(\varphi) = 1$, et $n(a) = \sup \Sigma a(\lambda) b(\lambda)$ pour $n(b) = 1$, donc

$$\varkappa' n(a) < \|s\|_I < \varkappa'' n(a), \qquad \text{d'où} \qquad Q_2(\Lambda, I).$$

Définition. — *Appelons* E^2*-pseudo-période attachée à* Λ, *et notons* $l_2(\Lambda)$, *la borne inférieure des longueurs des intervalles* I *pour lesquels on a* $Q_2(\Lambda, I)$ (resp. Q' ou Q''). C'est la borne inférieure des longueurs L dans la définition de Paley-Wiener, et la borne inférieure des $|I|$ pour lesquels vaut la partie *c*) du théorème 3.

Nous allons montrer que si Λ est une suite régulière, on a $l_2(\Lambda) = 2\pi\Delta$, Δ étant la densité supérieure de répartition de Λ. Nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemmes sur la densité supérieure de répartition.

Définitions. — Une suite réelle $\{\lambda_n\}$ est dite bien répartie, s'il existe un $D > 0$ tel que $\lambda_n - \frac{n}{D} = O(1)$ $(n = \cdots -1, 0, 1, \ldots)$. D est alors la « densité uniforme » de $\{\lambda_n\}$. La densité supérieure de répartition d'une suite réelle Λ est la borne inférieure des densités uniformes des suites bien réparties contenant Λ

(∞ s'il n'existe pas de telles suites) : on la notera $\Delta = \Delta\{\Lambda\}$. Soit $n(r+t) - n(r)$ le nombre de $\lambda \in \Lambda$ sur l'intervalle $[r, r+t]$. On a (²)

$$\Delta = \lim_{t \to \infty} \overline{\lim_{|r| \to \infty}} \frac{n(r+t) - n(r)}{t}.$$

Rappelons que la densité supérieure d'une suite Λ positive est $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{n(r)}{r}$.

Appelons « mesure caractéristique » d'une suite discrète la somme des mesures de Dirac aux points de la suite. Nous dirons que les suites Λ_j tendent vers la suite Λ si leurs mesures caractéristiques tendent, faiblement sur tout intervalle borné, vers celle de Λ.

Si les Λ_j sont uniformément régulières $\left(\inf\limits_{\lambda, \lambda' \in \Lambda_j} |\lambda - \lambda'| \geqslant 2\delta > 0\right)$ (δ indépendant de j) et tendent vers Λ, on a $\inf\limits_{\lambda, \lambda' \in \Lambda} |\lambda - \lambda'| \geqslant 2\delta$.

LEMME 3. — *Soit* Λ *une suite réelle régulière, et* $0 < D < \Delta\{\Lambda\}$. *Alors, soit de l'ensemble des translatées de* Λ, *soit de l'ensemble de leurs symétriques, on peut extraire une suite convergente sur* $(0, \infty)$ *vers une suite régulière de densité supérieure* $\geqslant D$.

DÉMONSTRATION. — Par hypothèse, pour L assez grand, LD entier, il existe un intervalle I_n de longueur $2^n L$ contenant au moins $2^n LD$ points de Λ. Par dichotomie, on peut construire des sous-intervalles emboîtés décroissants de $I_n = I_n^0$, soit $I_n^1, I_n^2, \ldots I_n^n$, tels que I_n^j (de longueur $2^{n-j}L$) contienne au moins $2^{n-j}LD$ points de Λ ; I_n^{j-1} et I_n^j ont une extrémité commune, et on pose $\varepsilon_n^j = 0$ ou 1 suivant que c'est l'extrémité droite ou l'extrémité gauche. Les nombres $\alpha_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_n^j 2^{j-n}$ ont un point d'accumulation ; soit $\{n_\iota\}$ une suite telle que les α_{n_ι} soient convergents ; quitte à restreindre $\{n_\iota\}$, on peut supposer que $\varepsilon_{n_\iota}^{n_\iota - k}$ ne dépend pas de ι(³). En translatant les intervalles I_{n_ι} de façon que $I_{n_\iota}^{n_\iota}$ vienne sur $[0, L]$, les $I_{n_\iota}^{n_\iota - k}$ viennent sur un intervalle I^k de longueur $2^k L$, indépendant de n_i(³). Par diagonalisation, on extrait alors, de la suite des translatées correspondantes de Λ, une suite convergente sur chaque I^k,

(²) Voir [2], p. 54, où Δ est appelée « densité de répartition ». La définition introduite ici est préférable à celle de [2], qu'on devra restreindre aux suites positives.

(³) Dès que $i > i(k)$.

et on vérifie que, sur chaque I^k, la suite limite a au moins $2^k LD$ points, ce qui démontre le lemme.

LEMME 4. — *Soit* Λ *une suite réelle régulière, et* $0 < D < \Delta\{\Lambda\}$. *Il existe des sous-suites finies de* Λ, *soit* Λ_ι, *et des* $\mu_\iota \in \Lambda_\iota$ *tels que, sur* $[-\pi D, \pi D]$, *toute fonction g continue soit limite uniforme de polynômes trigonométriques* $\sigma_\iota = \sum_{\lambda \in \Lambda_\iota} a_\iota(\lambda) e^{i(\lambda - \mu_\iota)x}$.

En effet, si $\{\lambda^*\}$ est la suite limite définie au lemme 3, on sait que les $e^{i\lambda^* x}$ engendrent l'espace des fonctions continues sur $[-\pi D, \pi D]$. Étant donnée g, on peut approcher ses polynômes d'approximation $\sum c(\lambda^*) e^{i\lambda^* x}$ par des sommes σ_ι, ce qui démontre le lemme.

LEMME 5. — (*Lévine*, [6]) *Soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite régulière* $(\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant 2\delta > 0)$, *bien répartie et de densité uniforme* 1 $(|\lambda_n - n| < h)$ *avec* $\lambda_0 = 0$. *Alors la fonction*

$$C(w) = w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{w}{\lambda_{-n}}\right)$$

vérifie

$$|C(w)| < A(1 + |w|)^{4h} e^{\pi |v|} \qquad (w = u + iv)$$

A *ne dépendant que de* δ *et de* h.

LEMME 6. — *Même hypothèse que lemme* 5. *Soit* $\{b_n\}$ *une suite bornée (resp. de carré sommable). Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $\Phi(w)$ *de type exponentiel* $\leqslant \pi + \varepsilon$, *telle que* $\Phi(\lambda_n) = b_n$ $(-\infty < n < \infty)$ *et telle que*

$$\sup_u |\Phi(u)| < A_1 \sup_n |b_n| \text{ resp } \int |\Phi(u)|^2 du < A_1^2 \Sigma |b_n|^2$$

A_1 *ne dépendant que de* ε, δ *et* h.

DÉMONSTRATION. — Posons $D_0(w) = \dfrac{C(w)}{w}\left(\dfrac{\sin \eta w}{\eta w}\right)^K$ avec $K\eta = \varepsilon$ et $K = [4h + 2]$. C'est une fonction de type exponentiel $\pi + \varepsilon$, satisfaisant $D_0(\lambda_n) = \delta_n^0$ (symbole de Kronecker), et, d'après le lemme 5, $|D_0(u)| < \dfrac{A_2}{1 + u^2}$ (dans la suite, $A_j = A_j(\varepsilon, \delta, h)$). Quitte à translater la suite $\{\lambda_n\}$, on construit ainsi, pour chaque m, une fonction entière $D_m(w)$ satisfaisant $D_m(\lambda_n) = \delta_m^n$ et

$$|D_m(w)| < \frac{A_2}{1 + |w - \lambda_m|^2} e^{(\pi + \varepsilon)|v|}.$$

Posons $\Phi(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m D_m(w)$: c'est bien une fonction de type exponentiel $\leqslant \pi + \varepsilon$, prenant en λ_m la valeur b_m et

$$|\Phi(u)| \leqslant \sup_m |b_m| \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2}{1+(u-\lambda_m)^2}.$$

Or $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(u-\lambda_m)^2} \leqslant 2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{1+(2n\delta)^2}$. Donc $|\Phi(u)| < A_1 \sup_m |b_m|$.

Soit maintenant, sur $\left[-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta}\right]$, $t(x)$ une fonction bornée dont la transformée de Fourier $T(u) = \int t(x) e^{-iux} dx$ satisfait $K_1 < T(u)(1+u^2) < K_2$, K_1 et K_2 étant deux constantes positives; par exemple, $t(x) = \cos \frac{\pi x \delta}{8} \max(0,\ 1 - \delta|x|)$. Alors $|D_m(u)| < A_3 T(u-\lambda_m)$, donc

$$\int |\Phi(u)|^2 du < A_3 \int |\Sigma b_m T(u-\lambda_m)|^2 du.$$

Cette dernière intégrale égale (Plancherel)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1/\delta}^{1/\delta} |\Sigma b_m e^{i\lambda_m x} . t(x)|^2 dx$$

et comme, d'après la démonstration du théorème 3,

$$\int_{-1/\delta}^{1/\delta} |\Sigma b_m e^{i\lambda_m x}|^2 < A_4 \Sigma |b_m|^2$$

on a $\int |\Phi(u)|^2 du < A_1^2 \Sigma |b_m|^2$.

Remarque. — D'après le théorème de Riesz-Thorin, on a $\left(\int |\Phi|^p\right)^{1/p} < A_1 (\Sigma |b_n^p|)^{1/p}$ dès que $2 \leqslant p \leqslant \infty$.

Dans la suite, les lemmes 4 et 6 seront seuls utilisés.

Nous pouvons maintenant établir :

THÉORÈME 4. — *La* E^2*-pseudo-période attachée à une suite régulière* Λ (*borne inférieure des longueurs des* I *pour lesquels vaut la partie* c) *du théorème* 3) *est* $l_2 = 2\pi\Delta$, Δ *étant la densité supérieure de répartition de* Λ.

DÉMONSTRATION. — Montrons d'abord $l_2 \leqslant 2\pi\Delta$. Soit $D^* > \Delta$, et $\{\lambda_n\}$ une suite bien répartie, régulière, de densité uniforme D^*, contenant Λ. Il suffit d'établir $Q_2''(\{\lambda_n\}, I)$ (voir proposition 3_2), quand $|I| > 2\pi D^*$. On peut sans restriction supposer $D^* = 1$ et poser $b(\lambda_n) = b_n$. La suite $\{b_n\}$ étant donnée, prenons pour Φ la fonction définie au lemme 6 : on a bien $\int |\Phi|^2 < K\Sigma|b_n|^2$. L'inégalité $\Sigma|\Phi(\lambda_n)|^2 < K\int|\Phi|^2$ pour toutes les fonctions Φ de type exponentiel $\leqslant \frac{|I|}{2}$ résulte de la régularité de Λ ([7] p. 101).

Montrons maintenant $l_2 \geqslant 2\pi\Delta$. Utilisons le lemme 4. Prenons les Λ_ι disjoints, et $g = 0$ sur $[-\pi D, \pi D - \varepsilon] = I$, $g > 0$ sur $(\pi D - \varepsilon, \pi D) = J$. Comme les sommes σ_ι tendent vers g, le rapport $\|\sigma_\iota\|_{I+J}\|\sigma_\iota\|_I^{-1}$ tend vers l'infini ; et comme $\sigma_\iota e^{i\mu_\iota x}$ est une somme s, $\|s\|\,\|s\|_I^{-1}$ est aussi grand qu'on veut, donc $Q_2(\Lambda, I)$ n'est pas satisfait. Or $|I|$ est aussi voisin qu'on veut de $2\pi\Delta$. Donc $l_2 \geqslant 2\pi\Delta$, et le théorème est démontré.

Nous ne connaissons d'analogue du théorème 4 ni pour C, ni pour $\mathcal{D}'$. Cependant la seconde partie de la démonstration se transcrit immédiatement dans le cas de C.

Proposition 4. — *La* C-*pseudo-période attachée à une suite régulière* Λ *satisfait* $l_C \geqslant 2\pi\Delta$.

Par contre, c'est la première partie de la démonstration qui se transcrit facilement dans le cas de $\mathcal{D}'$, comme nous allons le voir.

Cas de $\mathcal{D}'$.

Définition. — Soit $f \in \mathcal{D}'$. Si $\tau(f)$ (sous-espace fermé de $\mathcal{D}'$ engendré par les translatées de f) ne contient que des distributions bornées, f est dite $\mathcal{D}'$-pseudo-périodique.

Nous appellerons $Q_D(\Lambda)$ la condition nécessaire et suffisante que doit remplir Λ réelle pour que toute distribution de spectre $\subset \Lambda$ soit pseudo-périodique. Pour simplifier, nous supposerons que Λ ne contient pas 0. Les propositions 1, 2, 3 s'étendent encore.

Proposition 1_D. — $Q_D(\Lambda)$ *équivaut à l'existence d'un intervalle borné* I, *d'un entier* $p \geqslant 0$ *et d'une constante* K *tels que, pour toute somme finie* $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)e^{i\lambda x}$, *on ait* $|s| < K|s^{(p)}|_I$ (*condition* $Q_D(\Lambda, I)$).

En effet, $Q_D(\Lambda, I)$ entraîne qu'une distribution m.p. de spectre $\subset \Lambda$, et d'ordre q sur I, admet une primitive d'ordre

$p+q+1$ bornée. D'autre part, si $Q_D(\Lambda, I)$ n'était pas satisfaite, on pourrait construire une suite d'intervalles I_n emboités croissants couvrant la droite, et une suite s_n, telles que

$$|s_n|_{I_n} < 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad |s_n^{(-n)}|_{I_{n+1}} > n + |s_{n-1}^{(-n)}| + |s_{n-2}^{(-n)}| + \cdots$$

(on pose $s^{(-n)} = \Sigma a(\lambda)\lambda^{-n}e^{i\lambda x}$). Alors $f = \Sigma s_n$ est une distribution m.p. de spectre Λ (c'est d'ailleurs une fonction) dont aucune primitive $f^{(-n)}$ n'est bornée : ce n'est donc pas une distribution bornée.

Soit $\mathcal{B}(I)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions f indéfiniment dérivables sur I, muni des semi-normes $|f^{(n)}|_I$ ($n = 0, 1, \ldots$). Quand $I = (-\infty, \infty)$, on retrouve l'espace $\mathcal{B}$ de L. Schwartz ([3], t. II, p. 55).

Proposition 2_D. — $Q_D(\Lambda, I)$ *équivaut à* $Q'_D(\Lambda, I)$ *toute fonction approchable dans* $\mathcal{B}(I)$ *par des sommes* $s = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)e^{i\lambda x}$ *est prolongeable de manière unique sur la droite en une fonction* $\in\mathcal{B}$ *m.p. et de spectre* $\subset \Lambda$.

En effet, $Q_D(\Lambda, I)$ entraîne visiblement $Q'_D(\Lambda, I)$. Pour la réciproque, on raisonne comme dans la démonstration de la proposition 2, en utilisant le théorème de Banach.

La proposition 2_D exprime le rapport entre la $\mathcal{D}'$-pseudo-périodicité et certains problèmes de prolongement considérés en [2].

Proposition 3_D. — $Q_D(\Lambda, I)$ *équivaut à* $Q''(\Lambda, I)$: *pour tout* y *réel, on peut trouver une distribution, uniformément bornée, à support dans* I *fermé, dont la transformée de Fourier prend sur* Λ *les mêmes valeurs que* $e^{i\omega y}$.

Démonstration analogue à celle de la proposition 3.

Autre forme de $Q''_D(\Lambda, I)$: pour tout y réel, il existe une fonction de type exponentiel $\frac{|I|}{2}$, uniformément bornée par un polynôme sur la droite réelle, et prenant sur Λ les mêmes valeurs que $e^{i\omega y}$.

Définition. — On appellera $\mathcal{D}'$-pseudo-période attachée à une suite régulière Λ, et on notera $l_D(\Lambda, I)$ la borne inférieure des longueurs des intervalles I satisfaisant $Q_D(\Lambda, I)$ (resp. Q' ou Q'').

En utilisant le lemme 6 comme dans la démonstration du théorème 4, on obtient facilement le théorème suivant :

Théorème 5. — *Pour qu'une distribution soit $\mathcal{D}'$-ps.p., il suffit qu'elle soit p.p. Schwartz et de spectre régulier. Si Λ est régulière on a $l_D(\Lambda, I) \leqslant 2\pi\Delta$, Δ étant la densité supérieure de répartition de Λ.*

La démonstration du théorème 5 n'utilise que très partiellement le lemme 6 : car elle utilise le fait que $|\Phi(u)|$ est bornée par un polynôme indépendant de y, alors qu'en réalité $|\Phi(u)|$est uniformément borné. Le lemme 6 sera exploité plus complètement dans la dernière partie de cette note.

* * *

Soit I un intervalle fermé. Désignons par :

C(I) : l'espace des fonctions continues sur I, muni de la norme $|f|_I$.

C′(I) : l'espace des fonctions continûment dérivables sur I, muni de la norme $|f|_I + |f'|_I$.

$C_\Lambda(I)$: le sous-espace fermé de C(I) engendré par les $\{e^{i\lambda x}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$.

A : l'espace des fonctions transformées de Fourier de mesures bornées, $f(x) = \int e^{iux}\, d\mu(u)$, muni de la norme $||f||_A = \int |d\mu|$.

A(I) : l'espace quotient de A par le sous-espace des fonctions s'annulant sur I (représenté par des fonctions définies sur I, la norme étant notée $||f||_{A(I)}$).

B : le dual de A.

B(I) : le dual de A(I).

On sait (théorème de Wiener) que l'appartenance à A est une propriété locale, dans ce sens que si, sur chaque intervalle I d'un recouvrement fini de la droite (deux demi-droites de sens opposé comptant pour un seul intervalle), on a $f \in A(I)$ alors $f \in A$. On connaît d'ailleurs de nombreuses conditions, soit nécessaires, soit suffisantes, pour l'appartenance à A(I). Nous allons montrer que, pour une fonction m.p. de spectre régulier, l'appartenance à A(I) pour un seul I assez grand entraîne l'appartenance à A.

Des éléments $\varphi \in B$ ont été nommés « pseudomesures » [8] :

ce sont les distributions ([4]) dont la transformée de Fourier $\langle \varphi, e^{iux} \rangle = \Phi(u)$ est bornée. La dualité entre A et B s'exprime par $\langle \varphi, f \rangle = \int \Phi \, d\mu$. On démontre que B(I) est constitué des pseudomesures à support dans I; il nous suffira dans la suite d'utiliser le fait évident que toute φ dont le support est intérieur à I appartient à B(I).

LEMME 7. — *Si $f \in C'(I)$, on a $f \in A(I)$ et $\|f\|_{A(I)} < K(|f|_I + |f'|_I)$, K ne dépendant que de* I.

En effet, soit f_1 la fonction continue égale à f sur $I = [a, b]$ nulle en dehors de $[a-1, b+1]$, linéaire sur $[a-1, a]$ et sur $[b, b+1]$; on a $\|f\|_{A(I)} \leqslant \|f_1\|_A$, $|f_1| \leqslant |f_1|_I$ et $|f_1'| \leqslant |f|_I + |f'|_I$. Il suffit donc de montrer qu'on a $\|f_1\|_A \leqslant |f|_I + |f'|_I$. Or, si on pose $F_1(u) = \int f e^{iux}$, on a

$$\left(\int |F_1|\right)^2 \leqslant \pi \int (1+u^2)|F_1|^2 = 2\pi^2 \int (|f_1|^2 + |f_1'|^2)$$

d'où le résultat.

LEMME 8. — *Soit J un intervalle intérieur à I, et $f \in A(I) \cap C_\Lambda(I)$. Alors f est approchable dans $A(J)$ par des sommes finies $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$.*

DÉMONSTRATION. — Soit U un intervalle intérieur à I, et contenant J à son intérieur. Supposons $g \in C'(U) \cap C_\Lambda(U)$. Sur J, g' est limite uniforme d'éléments de $C_\Lambda(J)$ (à savoir $\dfrac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon}$ pour ε assez petit) donc $g' \in C_\Lambda(J)$, donc g est approchable dans $C'(J)$, et à fortiori (lemme 7) dans $A(J)$ par des sommes s. Soit maintenant $h_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon} \max\left(0.\ 1 - \dfrac{|x|}{\varepsilon}\right)$, et $g_\varepsilon = f * h_\varepsilon$. Si ε est assez petit, on a $g_\varepsilon \in C'(U) \cap C_\Lambda(U)$, donc g_ε est approchable dans $A(J)$ par des sommes s. D'autre part, quand $\varepsilon \to 0$, la transformée de Fourier de h_ε tend vers 1 sur tout compact, en restant comprise entre 0 et 1, donc $\|g_\varepsilon - f\|_{A(J)}$ tend vers zéro, ce qui établit le lemme.

THÉOREME 6. — *Supposons Λ réelle et régulière, de densité supérieure de répartition Δ, $|I| > 2\pi\Delta$,* et *$f \in A(I) \cap C_\Lambda(I)$. Alors $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda) e^{i\lambda x}$ avec $\sum |a(\lambda)| < K\|f\|_{A(I)}$, K ne dépendant que de Λ et* I.

([4]) : à support compact; dans [8], on les définit sur le tore.

DÉMONSTRATION. — D'après le lemme 8, il suffit d'établir le résultat quand $f = s$, somme finie. Le lemme 6 exprime l'existence d'un intervalle J intérieur à I avec la propriété suivante : à toute suite $\{b(\lambda)\}$ bornée en module par 1 correspond au moins une pseudomesure φ, à support dans J, telle que $\langle\varphi, e^{i\lambda x}\rangle = b(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et dont la norme $\|\varphi\|_B$ dans B(I) est bornée par une constante K ne dépendant que de Λ et J. Soit maintenant $s = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)e^{i\lambda x}$ une somme finie. On a $\langle\varphi, s\rangle = \Sigma a(\lambda)\,b(\lambda)$ donc $\Sigma|a(\lambda)| \leqslant K\|s\|_{A(I)}$. La même inégalité vaut (avec un autre K) en remplaçant I par un intervalle intérieur J assez voisin, d'où le théorème.

COROLLAIRE. — *Toute fonction* $\in C_\Lambda(I) \cap C'(I)$, $|I| > 2\pi\Delta\{\Lambda\}$ *est prolongeable sur la droite sous la forme* $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)e^{i\lambda x}$ *et* $|f| \leqslant \Sigma|a(\lambda)| \leqslant K(|f|_I + |f'|_I)$, K *ne dépendant que de* Λ *et* I.

Immédiat d'après le lemme 7.

Les théorèmes 3 et 4 d'une part, 6 d'autre part, appliqués au cas où Λ est une suite d'entiers, fournissent d'intéressantes réponses au problème soulevé par M. Mandelbrojt dans ([9], p. 142) : le spectre Λ d'une fonction périodique f étant donné, indiquer des propriétés locales telles que, si f les vérifie au voisinage d'un point, elle les vérifie partout. Par exemple, le théorème 6 montre que, si $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_j e^{in_j x}$, avec $\lim_{|j|\to\infty}(n_{j+1} - n_j) = \infty$, et si f satisfait au voisinage d'un point une condition garantissant l'appartenance locale à A, alors $f \in A$. Dans des cas particuliers, ce dernier résultat a été trouvé par Kennedy [10].

L'énoncé du théorème 6 se simplifie pour les suites telles que $C_\Lambda(I) \subset A(I)$.

DÉFINITION. — Nous appellerons *suites de Szidon de* 1re *espèce* les suites réelles Λ telles que $C_\Lambda(I) \subset A(I)$ pour tout intervalle I.

PROPOSITION 5. — *Pour que* Λ *soit une suite de Szidon de* 1re *espèce, il faut et suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée, quel que soit l'intervalle* I :

a) *pour les suites sommables* $\{a(\lambda)\}$ $(\lambda\in\Lambda)$, *les normes* $\Sigma|a(\lambda)|$ *et* $|\Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}|_I$ *sont équivalentes.*

b) *à toute suite bornée* $\{b(\lambda)\}$ *correspond au moins une mesure* $d\mu$ *support dans* I *telle que* $\int e^{i\lambda x}\, d\mu = b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

c) *à toute suite* $\{c(\lambda)\}$ *tendant vers zéro à l'infini correspond au moins une fonction* φ *sommable à support dans* I *telle que* $\int e^{i\lambda x}\varphi \doteq c(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

D'après le théorème 6 en effet, une définition des suites de Szidon de 1re espèce est la suivante : pour tout I, tout $f \in C_\Lambda(I)$ s'écrit $\Sigma a(\lambda)e^{i\lambda x}$, $\Sigma|a(\lambda)| < \infty$. D'autre part, $C_\Lambda(I) \neq C(I)$ entraîne que $\{e^{i\lambda x}\}$ est une base de $C_\Lambda(I)$ (car de l'existence d'une mesure $d\mu \neq 0$ à support dans I, telle que $\int_I e^{ixw}\, d\mu(x)$ s'annule sur Λ, on déduit immédiatement, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'existence d'une mesure $d\mu_\lambda$ telle que $\int_I e^{ixw} d\mu_\lambda(x)$ s'annule sur Λ sauf en λ). Si Λ est une suite de Szidon de 1re espèce, l'application $\{a(\lambda)\} \rightarrow f$ est donc une application biunivoque de l'espace l^1 des suites sommables sur $C_\Lambda(I)$; elle est visiblement continue, donc (Banach) les normes $|f|_I$ et $\Sigma|a(\lambda)|$ sont équivalentes, soit *a*) ; inversement, *a*) entraîne évidemment que Λ est une suite de Szidon de 1re espèce.

Pour montrer *a*) $\Longleftrightarrow$ *b*) et *c*) $\Longleftrightarrow$ *a*), il suffit d'utiliser le lemme suivant, qui est facile à démontrer et sans doute connu : soit $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces de Banach tels qu'existe une application linéaire continue de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}_2$, l'image de $\mathcal{E}_1$ étant dense dans $\mathcal{E}_2$; pour que cette application linéaire applique $\mathcal{E}_1$ *sur* $\mathcal{E}_2$, il faut et suffit que l'application linéaire transposée, du dual $\mathcal{E}'_1$ de $\mathcal{E}_1$ dans le dual $\mathcal{E}'_2$ de $\mathcal{E}_2$, applique $\mathcal{E}'_1$ *sur* $\mathcal{E}'_2$. Pour montrer *a*) $\Longleftrightarrow$ *b*), on prend $\mathcal{E}_1 = l^1$, $\mathcal{E}_2 = C_\Lambda(I)$, $\mathcal{E}'_1 = l^\infty$, $\mathcal{E}'_2 =$ quotient de l'espace des mesures à support dans I par son sous-espace orthogonal aux $e^{i\lambda x}$. Pour montrer *c*) $\Longleftrightarrow$ *a*), on prend $\mathcal{E}_1 = c$ (espace des suites tendant vers zéro à l'infini), $\mathcal{E}_2 =$ quotient de $L^1(I)$ par son sous-espace orthogonal aux $e^{i\lambda x}$, $\mathcal{E}'_1 = l^1$, $\mathcal{E}'_2 =$ sous-espace de $L^\infty(I)$ engendré par les $e^{i\lambda x}$, soit $C_\Lambda(I)$. La proposition 5 est démontrée.

La condition *a*) entraîne que, si Λ est une suite de Szidon de 1re espèce, toute fonction $\in C_I(\Lambda)$ est prolongeable en une $f \in C_\Lambda$, avec équivalence des normes $|f|$ et $|f|_I$. Autrement dit, *la condition* $Q(\Lambda, I)$ *est satisfaite pour tout* I [3].

[3] Cette remarque, jointe au résultat de Zygmund indiqué plus bas (proposition 6), rend compte d'une inégalité conjecturée par Turan [11].

Les conditions b) et c), quand Λ est une suite d'entiers, signifient la possibilité de choisir « arbitrairement » les coefficients de Fourier d'une mesure (resp. d'une fonction sommable) dont les indices appartiennent à Λ. Banach a montré que c) est satisfaite [avec $I = (0, 2\pi)$] quand Λ est une suite d'entiers lacunaires.

Indiquons maintenant deux conditions, l'une suffisante et l'autre nécessaire, pour que Λ soit une suite de Szidon de 1re espèce.

PROPOSITION 6. — (*Zygmund*) [12]. *Pour qu'une suite symétrique* $\{\pm \lambda_n\}$ *soit une suite de Szidon, il suffit que*

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

PROPOSITION 7. — *Pour que* Λ *soit une suite de Szidon de 1re espèce il est nécessaire* : 1° *qu'elle soit régulière et de densité de répartition nulle*; 2° *que le nombre de points de* Λ *de la forme* $n_1u_1 + \cdots + n_pu_p$, *où* $u_1, \ldots u_p$ *sont des nombres réels et* $n_1, \ldots n_p$ *des entiers relatifs tels que*

$$|n_1| + \cdots + |n_p| \leqslant s,$$

soit $N = N(u_1, \ldots u_p, s)$, *satisfasse* $N < Ap\log(s+1)$, A *étant une constante ne dépendant que de* Λ.

DÉMONSTRATION. — Le 1° résulte du fait que $Q(\Lambda, I)$ est satisfaite pour tout I si Λ est une suite de Szidon de 1re espèce, joint au corollaire 2 de la proposition 1 et à la proposition 4. Le 2° résulte du lemme suivant démontré dans [13] : quels que soient les $r_{n_1, \ldots n_p} \geqslant 0$, on peut déterminer les signes $+$ et $-$ de façon que le polynôme trigonométrique à p variables

$$P(x_1, \ldots x_p) = \Sigma \pm r_{n_1, \ldots n_p} e^{i(n_1x_1 + \cdots n_px_p)}$$

satisfasse

$$\max |P(x_1, \ldots, x_p)| = P < C(\Sigma r^2_{n_1, \ldots, n_p} . p\log(s+1))^{1/2},$$

C étant une constante absolue. Pour définir les $r_{n_1, \ldots n_p}$, on considère ici successivement tous les points $n_1u_1 + \cdots + n_pu_p$: on prend $r_{n_1, \ldots n_p} = 1$ si le point $n_1u_1 + \cdots + n_pu_p$ appartient à Λ et n'a pas encore été considéré, et $r_{n_1, \ldots n_p} = 0$ sinon; ainsi $\Sigma r^2_{n_1, \ldots n_p} = \Sigma r_{n_1, \ldots n_p} = N$. Posons $s(x) = P(u_1x, \ldots u_px)$; c'est une combinaison linéaire des $e^{i\lambda x}$ et

$$||s||_A = N, \qquad |s| \leqslant |P| < C(Np\log(s+1))^{1/2}.$$

L'inégalité voulue résulte de l'équivalence des normes $|s|$ et $\|s\|_A$.

On peut sans doute améliorer la proposition 6 à l'aide des fines estimations de Stetchkin [14].

La plupart des résultats établis pour les suites de Szidon de 1re espèce se transcrivent facilement pour les suites de Szidon de 2e espèce, ainsi définies.

DÉFINITION. — Nous appellerons *suites de Szidon de* 2e *espèce* les suites réelles Λ telles que $C_\Lambda \subset A$.

PROPOSITION 8. — $C_\Lambda \subset A$ *entraîne l'existence d'un intervalle* I *pour lequel* $C_\Lambda(I) \subset A(I)$.

En effet, C_Λ est un espace $(\mathcal{F})$ admettant les $|f|_I$ comme semi-normes, et $A \cap C_\Lambda$ un espace de Banach avec la norme $\|f\|_A$. L'application canonique de $A \cap C_\Lambda$ dans C_Λ (munis de ces topologies) est biunivoque et continue; $C_\Lambda \subset A$ exprime que l'application est sur C_Λ. D'après Banach les normes $\|f\|_A$ et $|f|_I$ sont équivalentes pour au moins un I, d'ou le résultat.

PROPOSITION 9. — *Pour qu'une suite soit une suite de Szidon de* 2e *espèce, il faut et suffit que l'une des conditions* a) b) c) *de la proposition* 5 *soit vérifiée pour au moins un* I.

COROLLAIRE. — *Toute suite de Szidon de* 2e *espèce satisfait la condition* $Q(\Lambda)$.

PROPOSITION 10. — *Toute suite de Szidon de* 2e *espèce est régulière, et satisfait la condition* 2° *de la proposition* 7.

Démonstration calquée sur celles des propositions 5 et 7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. SCHWARTZ, Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, *Annals of Math.* 48 (1947), pp. 857-929.

[2] J.-P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement. *Ann. Inst. Fourier* V (1953-54), pp. 39-130.

[3] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, tomes I et II, *Hermann*, 1950-1951.

[4] R. PALEY et N. WIENER, Fourier transforms in the complex domain, *A.M.S. Colloquium publications*, 1934.

[5] S. BANACH, Théorie des opérations linéaires, *Mon. Mathe.*, 1932.

[6] B. Lévine, Fonctions de degré fini, bornées sur une suite de points (en russe) *Dokladı A. N., S.S.S.R.*, 65 (1949), p. 265.
[7] R.P. Boas, Entire functions, *Academic Press*, 1954.
[8] J.-P. Kahane et R. Salem, Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures, etc., *Comptes Rendus*, 243 (1956) p. 1185-1187, 1706-1708, 1986-1988.
[9] S. Mandelbrojt, Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, *Gauthier-Villars*, 1935.
[10] P. B. Kennedy, Fourier series with gaps, *Quart. Journal of Math. Oxford* (1956), p. 224-230.
[11] P. Turan, On the gap theorem of Fabry, *Hung. Acta Math.* (1947), p. 21-29.
[12] A. Zygmund, Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques..., *Studia Math.*, III (1931) p. 77-91.
[13] J.-P. Kahane, Généralisation d'un théorème de Bernstein, *Bull. Soc. Math. France*, 1957.
[14] S. B. Stetchkin, Sur la convergence absolue des séries de Fourier (en russe), *Izvestia A.N., S.S.S.R.*, 1956, p. 385-412.
[15] A. E. Ingham, Some trigonometrical inequalities..., *Math. Zeitschr.*, 41 (1936), pp. 367-379.