ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL DOMERGUE

Remarques à propos d'un lemme de R.H. Fox, le groupe fondamental d'un revêtement ramifié

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 4 (1978), p. 45-52

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 4 (1978), 45-52.

REMARQUES A PROPOS D'UN LEMME DE R. H. FOX, LE GROUPE FONDAMENTAL D'UN REVÊTEMENT RAMIFIÉ

par Michel DOMERGUE

L'article de R. H. Fox [1], document de référence dans la littérature sur les revêtements ramifiés contient un lemme (chapitre 7) dont l'énoncé et la démonstration comportent un certain nombre d'imprécisions. Nous nous proposons ici de préciser les hypothèses et de donner une démonstration d'un énoncé modifié de ce lemme. Ensuite, nous établissons trois théorèmes permettant de calculer le groupe fondamental de l'antécédent, au sens de Fox, d'un revêtement ramifié simplicial lorsque celui-ci est un complexe homogène sans bord de dimension $\leqslant 3$ ou une n-variété combinatoire sans bord.

1. Notations et définitions.

Dans cette note, un complexe simplicial est toujours supposé localement fini.

Soit L un complexe simplicial, soit $A \in L$, les définitions de $|L|$, $\mathrm{st}(A, L)$, $\overline{\mathrm{st}}(A, L)$, $\mathrm{link}\,(A, L)$, $\overline{A}$, $\dot{A}$ sont celles du chapitre I de [2].

Nous désignons par : $\hat{A}$ le barycentre de $A \in L$, $\mathrm{int}\, A$ l'intérieur de $A \in L$, L' le subdivisé barycentrique de L, L^0 l'ensemble des sommets de L, $\dot{L}$ l'ensemble des simplexes de L dont le link est réduit à un sommet.

Pour $X \subset |L|$, l'étoile ouverte de X dans L, notée $\langle X, L\rangle$, est la réunion de $\{\text{int } A\}_A A$ parcourant l'ensemble des simplexes B de L tels que $|\overline{B}| \cap X \neq \varnothing$.

Enfin, pour $X \subset |L|$, $Y \subset |L|$, K sous-complexe de L nous posons :

$$\langle X, L ; Y\rangle = \langle X, L\rangle \cap (|L| - Y) ;$$
$$\mathcal{R}(L, K) = (\langle K^o, L'\rangle) \cap (|L| - |K|) .$$

Remarques :

— $\langle K^o, L'\rangle$ est la réunion disjointe de $\{\langle \wp, L'\rangle\}_{\wp \in K^o}$.

— Pour $A \in L$ on a : $\langle \text{int } A, L'\rangle = \langle \hat{A}, L'\rangle$.

— Le complémentaire de $\mathcal{R}(L, K)$ dans $|L|$ est la réunion de $\{|\text{link}(\wp, K')|\}_{\wp \in K^o}$.

Nous dirons qu'un complexe simplicial L est un n-complexe homogène sans bord si tout simplexe est face d'un n-simplexe et si $\dot{L} = \varnothing$.

Soit $f : (X, x) \to (Y, y)$ une application continue d'espaces topologiques pointés, nous notons f_* l'homomorphisme induit par f sur les groupes fondamentaux. Par convention, pour simplifier les notations, les points de bases sont omis dans le seul cas où X est un sous-espace connexe par arcs de Y, $x = y$ et f est l'inclusion.

Soit (X, x) un espace pointé et soit 0 un ouvert de X, comme dans [1] nous dirons que $\xi \in \pi_1(X, x)$ est représentable dans 0 s'il existe un représentant de ξ de la forme $a\gamma a^{-1}$ où γ est un lacet dans 0 basé en $y \in 0$, et a est un arc issu de x et aboutissant à y.

Si G est un sous-groupe de $\pi_1(X, x)$, nous noterons $\text{Cl}(O, G)$ la clôture normale dans G de l'ensemble des $\xi \in G$ représentables dans 0 ; lorsque $G = \pi_1(X, x)$ nous noterons simplement $\text{Cl}(0)$.

2. Une application du théorème de Van Kampen.

Nous utiliserons à plusieurs reprises la proposition suivante qui se déduit du théorème de Van Kampen [3], [5].

PROPOSITION 2.1. — *Soit* X *un espace topologique connexe par arcs,* 0 *un ouvert connexe de* X, $\{0_i\}_{i \in I}$ *une famille d'ouverts, deux à deux disjoints, simplement connexes de* X *tels que :*

X *est la réunion de* 0 *et de* $\{0_i\}_{i \in I}$, *pour chaque* $i \in I$ $0 \cap 0_i$ *est non vide et connexe. Alors, l'inclusion* $0 \hookrightarrow X$ *induit un épimorphisme de* $\pi_1(0) \to \pi_1(X)$ *dont le noyau est égal à* $\mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i \in I} (0 \cap 0_i)\right)$.

3. Remarques à propos du lemme de R.H Fox.

Dans ce paragraphe, nous avons gardé les notations de [1]. Le lemme tel qu'il est énoncé dans [1] est le suivant :

« Soient Y un complexe connexe, barycentriquement subdivisé, localement fini et K un sous-complexe tel que pour chaque sommet u de K, l'intersection $S(u)$ de $Y - K$ avec l'étoile ouverte $\mathrm{st}\, u$ de u soit non vide et connexe.

Alors l'inclusion induit un homomorphisme :

$$\Phi : \pi_1(Y - K) \to \pi_1(Y)$$

surjectif, et son noyau est la clôture normale de l'ensemble des éléments de $\pi_1(Y - K)$ représentables dans $U_u S(u)$ ».

a) Le début de la démonstration de ce lemme où il est dit que « les composantes de $U_u \mathrm{st}\, u$ sont les $\mathrm{st}\, u$ » implique que u parcourt l'ensemble des sommets de K (seulement). Par contre, la fin de la démonstration implique que u parcourt l'ensemble des sommets de K' car il y est dit que « Y est la réunion de $Y - K$ et de $U_u \mathrm{st}\, u$ » (voir remarques du paragraphe 1).

b) Si nous supposons que dans l'énoncé du lemme, u parcourt seulement l'ensemble des sommets de K, l'hypothèse du lemme n'implique pas que $Y - K$ soit connexe (par exemple si Y est la réunion de deux simplexes disjoints reliés par un 1 simplexe qui joue le rôle de K). De plus, dans ce cas, même si $Y - K$ est connexe, la conclusion du lemme n'est pas toujours vérifiée :

Y est un complexe simplicial qui recouvre le plan; K est un 1-simplexe de Y. On a $\pi_1(Y - K) \cong \mathbf{Z}$ et $\pi_1(Y)$ trivial alors que l'ensemble des éléments de $\pi_1(Y - K)$ représentables dans $U_u S(u)$ est réduit à l'élément neutre car $S(u)$ est simplement connexe.

c) Si nous supposons que dans l'énoncé du lemme u parcourt l'ensemble des sommets de K', $Y - K$ connexe est bien impliqué par l'hypothèse du Lemme, car dans ce cas $Y - K$ est dense et localement connexe dans Y ([1], chapitres 1 et 3), mais la conclusion du lemme n'est pas vraie en général :

Y est un complexe simplicial dont le support est un tore solide du genre 1.

K est un sous-complexe de Y dont le support est l'âme de ce tore solide.

On peut vérifier que tout élément de $\pi_1(Y - K)$ est représentable dans $\bigcup_u S(u)$ alors que $\pi_1(Y) \cong \mathbf{Z}$, $\pi_1(Y - K) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

4. Groupe fondamental d'un revêtement ramifié.

Dans ce paragraphe, nous reprenons les notations et définitions du paragraphe 1.

a) Nous proposons tout d'abord la modification suivante du lemme de R. H. Fox.

PROPOSITION 4.1. — *Soient* L *un complexe simplicial connexe,* K *un sous-complexe de* L *tel que pour tout* $A \in K$, $\langle \hat{A}, L; |K| \rangle$ *soit non vide et connexe. Alors l'inclusion* i : $|L| - |K| \hookrightarrow \mathscr{R}(L, K)$ *induit un épimorphisme* i_* *de* $\pi_1(|L| - |K|)$ *dans* $\pi_1(\mathscr{R}(L, K))$ *ayant pour noyau* $\mathrm{Cl}(\langle K^o, L'; |K| \rangle)$.

Il est clair que l'hypothèse $\langle \hat{A}, L; |K| \rangle$ non vide et connexe entraîne $\langle \hat{A}, L'; |K| \rangle$ non vide et connexe, et que cette hypothèse entraîne $|L| - |K|$ connexe (voir remarque 3*c*).

Cette proposition est alors une application de la proposition 2.1 au recouvrement de $\mathscr{R}(L, K)$ formé par $|L| - |K|$

et $\{\langle v , L'\rangle\}_{v \in K^0}$ car $\langle K^0 , L' ; |K|\rangle$ est la réunion (disjointe) de $\{\langle v , L' ; |K|\rangle\}_{v \in K^0}$.

— Si j, k désignent les inclusions respectives de $\mathcal{R}(L , K)$ dans $|L|$ et de $|L| - |K|$ dans $|L|$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} |L| - |K| \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, hook, "k"'] & \\ & \mathcal{R}(i , k) , \\ |L| & \arrow[l, hook', "j"] \end{tikzcd}$$

induit le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(|L| - |K|) \arrow[dr, "i_*"] \arrow[dd, "k_*"'] & \\ & \pi_1(\mathcal{R}(L , K)) \arrow[dl, "j_*"] \\ \pi_1(|L|) & \end{tikzcd}$$

et la proposition 4.1 montre que k_* est un épimorphisme dont le noyau est $Cl(\langle K^0 , L' ; |K|\rangle)$ si et seulement si j_* est un isomorphisme.

b) Nous étudions maintenant deux cas où, dans le diagramme précédent, j_* est un isomorphisme.

PROPOSITION 4.2. — *Soit* L *un n-complexe homogène sans bord. Si* K *est un sous-complexe de* L *tel que pour tout* $A \in K$, $\langle \hat{A} , L ; |K|\rangle$ *soit non vide et connexe alors* $\dim K \leqslant n - 2$.

En effet, si $A \in K$ et $\dim A = n$, on a $\langle \hat{A} , L\rangle = \operatorname{int} A$ car A n'est face propre d'aucun simplexe, donc $\langle \hat{A} , L ; |K|\rangle$ est vide.

D'autre part si $A \in K$ et $\dim A = n - 1$, on a $\langle \hat{A} , L ; |K|\rangle = \bigcup_{i=1}^{s} \operatorname{int} B_i$ où $B_1 , \ldots , B_s$ sont les n-simplexes de L ayant A pour face $(s \geqslant 2)$ car L est sans bord.

Ce qui prouve que $\langle \hat{A} . L ; |K|\rangle$ n'est pas connexe.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* L *un complexe homogène sans bord de dimension* $\leqslant 3$, *soit* K *un sous-complexe de* L *tel que,* *pour tout* $A \in K$, $\langle \hat{A}, L ; |K| \rangle$ *soit non vide et connexe : alors* $j_* : \pi_1(\mathcal{R}(L, K)) \to \pi_1(|L|)$ *induit par l'inclusion est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.2, $\dim K \leqslant n - 2$ donc si $\dim L \leqslant 2$ on a $K = \varnothing$ où K est un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de L. Dans tous les cas $\mathcal{R}(L, K) = |L|$ et le résultat est trivial.

Supposons $\dim L = 3$. Alors $\dim K \leqslant 1$ et

$$\mathcal{R}(L, K) = |L| - \{\hat{A}\}_A \quad A \in K, \qquad \dim A = 1 .$$

Soit $A \in K$ tel que $\dim A = 1$ et soit Γ le 1-sous complexe de L' défini comme suit :

Les sommets de Γ sont les barycentres des simplexes de L ayant A pour face propre; les 1-simplexes de Γ sont tous les 1-simplexes de L' dont les extrémités $\hat{B}$, $\hat{C}$ sont les barycentres de B, C où A est face propre de B, B est face propre de C.

L'hypothèse $\langle \hat{A}, L ; |K| \rangle$ non vide et connexe entraîne $\langle \hat{A}, L' ; |K| \rangle$ non vide et connexe et par suite entraîne Γ non vide et connexe. D'autre part, il est clair que :

$$\langle \hat{A}, L' ; |L| - \mathcal{R}(L, K) \rangle = \langle \hat{A}, L' \rangle - \{A\}$$
$$\operatorname{link}(\hat{A}, L') = \dot{A} * \Gamma \qquad (\text{Joint de } \dot{A} \text{ et } \Gamma[2])$$

et que $\langle \hat{A}, L' \rangle - \{\hat{A}\}$ a même type d'homotopie que $|\operatorname{link}(\hat{A}, L')|$.

Donc $\langle \hat{A}, L' \rangle - \{\hat{A}\}$ est simplement connexe comme $\dot{A} * \Gamma$ puisque Γ est un graphe connexe non vide.

Le théorème est alors une conséquence de la proposition 2.1 appliquée au recouvrement de $|L|$ formé par $\mathcal{R}(L, K)$ et $\{\langle \hat{A}, L' \rangle\}_A$ $A \in K$ $\dim A = 1$, puisque

$$\operatorname{Cl}\Big(\bigcup_{A \in K \dim A = 1} \langle \hat{A}, L' ; |K| \rangle \Big)$$

est trivial.

THÉORÈME 4.2. — *Soit* L *une* n*-variété combinatoire sans bord, soit* K *un sous-complexe de* L *tel que pour* *tout* $A \in K$; $\langle \hat{A} , L ; |K| \rangle$ *soit non vide et connexe. Alors* $j_* : \pi_1(\mathscr{R}(L , K)) \to \pi_1(|L|)$ *induit par l'inclusion est un isomorphisme.*

D'après la proposition 4.2, $\dim K \leqslant n - 2$.

De plus $|L| - \mathscr{R}(L , K) = \bigcup_{v \in K^o} |\text{link}(v , K')|$ (1. remarques) est de dimension $\leqslant n - 3$.

Le théorème est une conséquence du théorème de position générale [2] ou [4]. En effet, une homotopie H (resp. un lacet) dans $|L|$ peut être supposée p. l, puis être mise en position générale par rapport à $|L| - \mathscr{R}(L , K)$, c'est-à-dire tel que H soit une homotopie (resp. un lacet) dans $\mathscr{R}(L , K)$.

— Nous nous sommes limités aux complexes homogènes sans bords pour simplifier les démonstrations, ce qui n'exclut pas la validité de ces théorèmes dans d'autres cas plus généraux.

— La portée de ces théorèmes peut probablement être élargie grâce à l'utilisation d'un nombre restreint d'étoiles.

Enfin, comme conséquence des théorèmes 4.1 et 4.2, la méthode de démonstration du théorème du chapitre 7 de [1] permet d'aboutir au théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Soit* $p : M \to L$ *un revêtement ramifié simplicial d'indice de branchement fini en tout point de* $|L|$. *On suppose que* M *est un complexe homogène de dimension* $\leqslant 3$ *ou une n-variété sans bord. Soit* $K \subset L$ *le sous-complexe singulier de* p ; *alors* $\pi_1(|M|)$ *est isomorphe à*

$$G/\mathrm{Cl}(\langle K^o , L' ; |K| \rangle , G)$$

où G *est le sous-groupe de* $\pi_1(|L| - |K|)$ *correspondant au revêtement ordinaire associé à* p .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. H. FOX, Covering spaces with singularities. Algebraic geometry and topology; a symposium in honor of S. Lefschetz, (Ed. by Fox. Spencer. and Tuckey), Princeton 1957, (243-257).

[2] J. F. P. HUDSON, Chicago lectures notes on p. l. topology, Published by Benjamin N.Y., 1969.

[3] W. S. MASSEY, Algebraic Topology: An introduction, Harcourt Brace and World Inc., New-York, 1967.

[4] C. ROURKE and B. SANDERSON, Introduction to Piecevoise-linear topology, *Ergebness der Mathematik*, 69, Springer Verlag (chapitre 5), 1972.

[5] Van KAMPEN, On the connexion between the fundamental groups of some related spaces, *Amer. J. Math.*, 55 (1933), 261-267.

Manuscrit reçu le 19 septembre 1977
Proposé par J. L. Koszul.

Michel DOMERGUE,
Université de Provence
3, place Victor-Hugo
13331 Marseille Cedex 3.