Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 107-111

SUR LES SOUS-ESPACES SPECTRAUX D'UN OPÉRATEUR COMPACT RELATIVEMENT A UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN

par Michel HILSUM

Introduction.

Soit A une algèbre de von Neumann. On définit les opérateurs compacts de A en prenant l'adhérence normique des opérateurs de rang fini de A.

Soit T un opérateur compact de A. Dans [1], M. Breuer montre que $\ker(1-T)$, et par suite $\ker(1-T)^n$, est fini. Nous nous proposons ici d'étendre cette propriété, en généralisant un résultat classique bien connu :

THEOREME. — $\sup \ker(1-T)^n$ *est fini.*

Ceci répond à une question de M. Breuer dans [1].

Soit (Q_n) une suite orthogonale de projecteurs de A de somme infinie. Nous montrons que T ne peut pas être bornée inférieurement uniformément sur chaque Q_n.

Cette propriété est appliquée ensuite à la famille de sous-espaces $\operatorname{Im} Q_n = \ker(1-T)^n \ominus \ker(1-T)^{n-1}$ pour laquelle $Q_n T Q_n = Q_n$.

*

* *

Soit A une algèbre de von Neumann opérant dans l'espace H.

DEFINITION. — *Un élément* T *de* A *est dit de rang fini si le projecteur sur* Im T *est relativement fini dans* A. T *est dit compact s'il est limite en norme d'opérateurs de rang fini.*

L'ensemble des opérateurs compacts forme un idéal bilatère autoadjoint fermé de A (cf. [1]). Il est noté K(A).

Soit E un projecteur de A. L'algèbre réduite EAE est notée A_E, l'application canonique de A dans A_E qui à $x \in A$ associe ExE est notée ϕ_E.

Proposition 1. – *Soit* T *un élément de* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $T \in K(A)$

ii) *Si* E *est un projecteur de* A *tel que* $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} T$, *alors* E *est fini.*

Démonstration – Montrons que $1) \Longrightarrow 2)$. Soit E un projecteur tel que $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} T$. Alors ET est inversible sur son image : il existe $S \in A$ tel que $ETS = E$.

Lemme 1. – *On a l'inclusion :*

$$\phi_E(K(A)) \subset K(A_E)\,.$$

Soit $R \in K(A)$; il existe une suite R_n d'opérateurs de rang fini telle que $\lim\limits_n R_n = R$. Comme $\phi_E(R_n)$ est de rang fini dans A_E et $\lim \phi_E(R_n) = \phi_E(R)$ on voit que $\phi_E(R)$ est compact dans A_E.

Donc si $T \in K(A)$, alors $\phi_E(TS) \in K(A_E)$.

D'autre part nous savons que $\phi_E(TS) = 1$. Ceci implique que E est fini, d'après le lemme suivant :

Lemme 2. – *Si* F *est un projecteur infini de* A, *alors* $1 \notin K(A_F)$.

En effet, considérons la boule de centre 1 et de rayon 1/2 dans A_F : elle est formée d'opérateurs inversibles, donc d'opérateurs de rang infini. Par conséquent 1 ne peut pas être limite d'opérateurs de rang fini, d'où le résultat.

Réciproquement, soit T vérifiant la propriété ii) et $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Alors $|T|$ vérifie la propriété ii) car $U \operatorname{Image} |T| = \operatorname{Image} T$. Soit $a > 0$ et soit E_a le projecteur spectral de T correspondant à l'intervalle $[0, a]$, $1 - E_a$ est fini car son image est contenue dans celle de T. Comme la norme de $|T|\,E_a$ est $\leqslant a$, on voit que $|T|$ est limite en norme des $|T|\,(1 - E_a)$ qd $a \longrightarrow 0+$, qui sont de rang fini. Ainsi $|T|$ et T sont compacts. q.e.d.

COROLLAIRE. – *Soit* $T \in K(A)$ *et soit la décomposition spectrale de* $|T| = (T * T)^{1/2}$:

$$|T| = \int_0^R x\, dE_x\,.$$

Alors pour $a > 0$, $1 - E_a$ *est fini.*

PROPOSITION 2. – *Supposons que* A *soit une algèbre semi-finie. Soit* $(Q_n)_{n=1,2,\ldots}$ *une suite orthogonale de projecteurs de* A, P *un projecteur fini de* A *et* d *un réel* > 0. *Supposons que* P *soit borné inférieurement par* d *sur* $\operatorname{Im} Q_n$, *quel que soit* $n \geqslant 1$, *c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \operatorname{Im} Q_n\,, \qquad \|Px\| \geqslant d\,\|x\|.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n$ *est fini.*

Démonstration. – Nous établissons d'abord quelques lemmes.

LEMME 3. – *On a l'inégalité :* $Q_n P Q_n \geqslant d^2 Q_n$.

Il faut montrer que quel que soit $y \in H$, on a :

$$(Q_n P Q_n y, y) \geqslant d^2 (Q_n y, y)\,.$$

Mais cette inégalité se récrit :

$$\|PQ_n y\|^2 \geqslant d^2\ \|Q_n y\|^2\,.$$

Cette dernière inégalité est celle qui est supposée dans l'énoncé de la proposition avec $x = Q_n y$. q.e.d.

Posons $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n = Q$.

LEMME 4. – *Soit* φ *une trace normale sur* A *telle que* $\varphi(P) < +\infty$. *On a* $\varphi(P) \geqslant d^2 \varphi(Q)$.

Démonstration. – On a $\varphi(Q_n P Q_n) = \varphi(PQ_n P)$. Donc d'après le lemme 3, on a $\varphi(PQ_n P) \geqslant d^2 \varphi(Q_n)$, d'où il vient l'inégalité $\varphi(PQP) \geqslant d^2 \varphi(Q)$. De cette dernière relation, il résulte que $\varphi(P) \geqslant d^2 \varphi(Q)$. q.e.d.

LEMME 5. – *Soit* E *un projecteur de* A. *Alors* E *est fini si et seulement s'il existe une famille fidèle de traces normales* *semi-finies* (*) $(\varphi_i\,,\, i \in \mathrm{I})$ *telle que, quel que soit* $i \in \mathrm{I}$, *on ait :* $\varphi_i(\mathrm{E}) < +\infty$.

Démonstration. – Voir [2], lemme 2.5.3. page 97.

Fin de la démonstration de la prop. 2. – D'après le lemme 5, il existe une famille fidèle de traces normales semi-finies sur A, $(\varphi_i\,,\, i \in \mathrm{I})$ telle que : $\varphi_i(\mathrm{P}) < +\infty$, pour $i \in \mathrm{I}$. Mais d'après le lemme 4 on a alors : $\varphi_i(\mathrm{Q}) < +\infty$ quel que soit $i \in \mathrm{I}$. Donc, d'après le lemme 5, Q est fini. q.e.d.

PROPOSITION 3. – *Supposons que* A *soit une algèbre semi-finie. Soit* $\mathrm{T} \in \mathrm{K(A)}$, $(\mathrm{Q}_n)_{n=1,2\ldots}$ *une suite orthogonale de projecteurs de* A, *et* d *un réel* > 0, *tels que* T *soit borné inférieurement par* d *sur* $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_n$, *pour tout* n, *c'est-à-dire :*

$$\|\mathrm{T}\,\mathrm{Q}_n x\| \geqslant d\,\|\mathrm{Q}_n x\| \qquad \textit{pour } x \in \mathrm{H}.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Q}_n$ *est fini.*

Démonstration. – Considérons la décomposition spectrale de $|\mathrm{T}| = (\mathrm{T} * \mathrm{T})^{1/2}$: $|\mathrm{T}| = \int_0^{\mathrm{R}} x\, d\mathrm{E}_x$.

LEMME. – *Soit* $y \in \mathrm{H}$ *tel que* $\|\mathrm{T}y\| \geqslant d\,\|y\|$. *Alors on a l'inégalité :* $\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| \geqslant (d/2\,\|\mathrm{T}\|)\,\|y\|$, *avec* $d' = d/2$.

En effet on a : $\|\mathrm{T}y\| \leqslant \|\mathrm{T}(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| + \|\mathrm{T}\mathrm{E}_{d'}y\|$. Mais d'autre part :

$$\|\mathrm{T}(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| \leqslant \|\mathrm{T}\|\,\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| \quad \text{et} \quad \|\mathrm{T}\mathrm{E}_{d'}y\| \leqslant d'\,\|y\|.$$

On a alors l'inégalité $d\,\|y\| \leqslant \|\mathrm{T}\|\;\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| + d'\,\|y\|$, d'où il vient : $\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\,y\| \geqslant ((d - d')/\|\mathrm{T}\|)\,\|y\|$. q.e.d.

D'après ce lemme, il résulte que $1 - \mathrm{E}_{d'}$ est borné inférieurement par $(d/2\,\|\mathrm{T}\|)$ sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_n$ pour tout n.

Or d'après le corollaire à la proposition 1, $1 - \mathrm{E}_{d'}$ est fini. On peut alors appliquer la proposition 2 avec $1 - \mathrm{E}_{d'}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n=1,2\ldots}$, ce qui montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Q}_n$ est fini. q.e.d.

(*) Par famille fidèle il faut entendre : si $\mathrm{R} \in \mathrm{A}^+$, est tel que $\varphi_i(\mathrm{R}) = 0$, $\forall i$, alors $\mathrm{R} = 0$.

Soit A une algèbre de von Neumann *quelconque.*

THEOREME. – *Soit* $T \in K(A)$. *Alors* $\sup_n \ker(1-T)^n$ *est fini.*

Démonstration. – On peut supposer que A est semi-finie. En effet, soit G le projecteur central de A tel que A_G soit semi-finie et $A_{(1-G)}$ purement infinie. Pour tout projecteur fini E de A on a $(1-G)E = 0$, et par conséquent $K(A)(1-G) = 0$, ce qui nous ramène au cas où $G = 1$.

Soit Q_n le projecteur sur $\operatorname{Ker}(1-T)^n \ominus \operatorname{Ker}(1-T)^{n-1}$. Il faut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n$ est fini.

Cela résulte de la proposition 3 et du lemme suivant :

LEMME. – *On a l'égalité* : $Q_n T Q_n = Q_n$.

En effet on a l'inclusion : $(1-T)\ker(1-T)^n \subset \ker(1-T)^{n-1}$. Il en résulte : $Q_n(1-T)Q_n = 0$, d'où $Q_n T Q_n = Q_n$. q.e.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Manfred BREUER, Fredholm theories in von Neumann algebras, I & II, *Math. Annal.,* 178 (1968), p. 243-254, et 180 (1969), p. 313-325.

[2] S. SAKAI, C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag 1971.

Manuscrit reçu le 21 juillet 1977
Proposé par J. Dieudonné.

Michel HILSUM,
Laboratoire de
Mathématiques Fondamentales
Aile 45-46, 3e étage
4, Place Jussieu
75230 – Paris.