Annales de l'institut Fourier

Linda Naïm

Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 7 (1957), p. 183-281

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1957__7__183_0>

SUR LE RÔLE DE LA FRONTIÈRE DE R. S. MARTIN DANS LA THÉORIE DU POTENTIEL

par M^lle Linda NAÏM.

INTRODUCTION (*)

1. La théorie du problème de Dirichlet a connu ces dernières années un important développement, en particulier pour généraliser dans diverses directions la théorie ordinaire du cas euclidien basée sur la méthode des enveloppes de Perron-Wiener-Brelot [1]. Dans l'une de ces directions, on conserve les fonctions harmoniques et on généralise peu le domaine; on opère toutefois sur les « espaces de Green » introduits par M. Brelot et G. Choquet [20], contenant par exemple pour deux dimensions les surfaces de Riemann hyperboliques; mais l'extension porte surtout sur la frontière, obtenue non pas nécessairement comme frontière dans un espace de Green plus grand, mais par complétion à partir d'une métrique quelconque compatible avec la topologie dans l'espace de base; de plus les conditions-frontière, au lieu de porter sur des fonctions sousharmoniques ou surharmoniques u, portent sur $\frac{u}{h}$, h étant une fonction harmonique > 0 fixée. Nous considérerons seulement ici deux axiomatiques correspondantes (M. Brelot et G. Choquet [20], M. Brelot [18]) qui englobent, outre le cas euclidien classique, divers autres problèmes comme ceux relatifs à la frontière «ramifiée» [7] ou «géodésique» [20], la frontière de Stoïlov des surfaces de Riemann [39] ou celle de R. S. Martin [17].

L'allure d'une fonction harmonique ou surharmonique à

(*) Pour mieux situer les présentes recherches dans la théorie du potentiel, voir les articles historiques et bibliographiques [15], [16] et surtout [12].

la frontière de son domaine de définition a aussi été fort étudiée, mais les résultats connus, à part l'approche sur des lignes de mouvement brownien (J. L. Doob [27] [28]), ne concernent que des cas particuliers importants, comme les fonctions à intégrale de Dirichlet finie, les solutions de divers problèmes de Dirichlet, les fonctions harmoniques ou surharmoniques positives étudiées au voisinage d'un point-frontière irrégulier (M. Brelot [8]), ou bien une frontière euclidienne assez régulière comme dans l'étude par M^me^ J. Lelong-Ferrand [32] des fonctions surharmoniques > 0 dans un demi-espace.

Dans toutes ces questions, et dans bien d'autres, est apparu l'intérêt d'un usage beaucoup plus large de *la frontière de R. S. Martin* (¹), introduite par son auteur pour étendre l'intégrale de Poisson-Stieltjes selon une représentation intégrale des fonctions harmoniques > 0 dans un domaine (qui peut être plus généralement un espace de Green). On en connaît maintenant le lien étroit avec la théorie des éléments extrémaux, qui selon un théorème récent de G. Choquet, fournit aussi cette représentation intégrale. D'autres applications de cette frontière ont été données, comme une forme générale du principe des singularités positives de Bouligand et une extension du problème d'existence et d'unicité de Cauchy (M. Brelot [9]), et surtout le développement du problème de Dirichlet correspondant (M. Brelot [17] [18]), dit problème de Dirichlet-Martin, contenu dans la deuxième axiomatique qu'il a suggérée et que ce mémoire va essentiellement prolonger.

Le présent travail mettra donc en relief le rôle privilégié de la frontière de Martin dans les deux questions de théorie du potentiel soulignées plus haut : allure à la frontière des fonctions surharmoniques > 0 et problème de Dirichlet. L'outil essentiel et nouveau sera une *notion d'effilement* en un point de la frontière de Martin, notion inspirée de l'effilement classique en un point intérieur [3], et qui dans le cas très particulier du demi-espace, équivaut à l'une des notions introduites par M^me^ Lelong dans ce cas pour caractériser diverses raréfactions d'ensembles au voisinage de la frontière. Il en dérive une *notion de pseudo-limite*, plus faible que la

(¹) Voir la théorie originale dans [33]. On trouvera un historique dans [26], des compléments dans [9] et [40], et un nouvel aspect de la question dans [18].

limite selon la topologie de Martin, et qui semble bien adaptée à toute notre étude.

Il sera ainsi possible d'établir des propriétés générales de pseudo-limites pour le quotient d'une fonction surharmonique > 0 quelconque par la fonction de Green, ou par une fonction harmonique > 0 fixée; elles contiennent la plupart des résultats obtenus par Mme Lelong dans le cas particulier du demi-espace. Il en résulte une forme très améliorée du principe du maximum où de nouvelles conditions-frontière s'expriment à l'aide de l'effilement ou de la pseudo-limite.

Grâce à ces résultats, l'usage systématique de la frontière de Martin dans l'étude axiomatique du problème de Dirichlet permettra d'établir l'équivalence des deux axiomatiques précitées, et d'étudier l'allure à la frontière de la solution dans le cas le plus général. Cela s'appliquera en particulier à la frontière de Martin, où l'on peut aller plus loin que dans le cas général, et étendre les traits essentiels de la théorie classique. Enfin, par une correspondance convenable établie entre la frontière de Martin et toute frontière pour laquelle la théorie du problème de Dirichlet est possible, on ramènera le problème de Dirichlet le plus général à un problème analogue relatif à la frontière de Martin, ce qui souligne le caractère en quelque sorte universel de cette frontière.

2. Donnons un aperçu un peu plus détaillé de ce travail: Dans un premier chapitre de préliminaires, on rappelle les notions indispensables sur les espaces de Green, la théorie de l'extrémisation (ou balayage) dans un espace de Green, et la frontière de Martin Δ, dont la réunion avec l'espace fondamental Ω est *l'espace de Martin* $\hat{\Omega}$. Pour tout point $x_0 \in \Delta$, on sait que la fonction de Green «normalisée» $\dfrac{G(x, y)}{G(x, y_0)}$ $(y \in \Omega$, y_0 fixé $\in \Omega)$ ou $K(x, y)$ admet, pour $x \to x_0$, une limite (harmonique) $K(x_0, y)$ qui correspond biunivoquement à x_0; les points x_0 appelés minimaux correspondent à certaines de ces limites, dites minimales et jouissant de propriétés extrémales. Suivent de brèves indications sur les théories axiomatiques du problème de Dirichlet pour des frontières générales.

Le chapitre II introduit *la notion d'effilement* à la frontière de Martin: l'effilement d'un ensemble $E \subset \Omega$ en un point

$x_0 \in \Delta$ est caractérisé, si x_0 n'est pas isolé de $\{x_0\} \cup E$, par l'existence d'une mesure $m > 0$ sur Ω telle que

$$\int K(x_0, y)\, dm(y) < \liminf_{x \to x_0,\, x \in E} \int K(x, y)\, dm(y).$$

La théorie du potentiel fournit, par un balayage, des critères essentiels. On en déduit par exemple une caractérisation nouvelle des points minimaux, qui se trouvent être les points de Δ où Ω n'est pas effilé. *La pseudo-limite* en un point-frontière x_0 (nécessairement minimal) signifie la limite prise selon le filtre formé des ensembles de complémentaire effilé en x_0; elle vaut la limite prise dans $\hat{\Omega}$ hors d'un ensemble convenable effilé en x_0.

L'introduction d'un nouveau noyau $\Theta(x, y)$ prolongeant convenablement dans Ω le quotient $\dfrac{G(x, y)}{G(x, y_0)\, G(y, y_0)}$, et l'étude des potentiels-Θ correspondants permettent de montrer un autre aspect de l'effilement. C'est ainsi que la pseudo-limite apparaît comme la limite selon la topologie la moins fine rendant continus les potentiels-Θ, dite *topologie fine*. Toutefois ces potentiels n'interviennent plus guère dans la suite, et le paragraphe qui en traite peut être laissé de côté.

Quelques propriétés des domaines partiels complètent ce chapitre.

Le chapitre III étudie l'allure à la frontière Δ d'une fonction surharmonique $v > 0$. On montre essentiellement que $\dfrac{v(x)}{G(x, y_0)}$ admet en tout point minimal une pseudo-limite > 0 finie ou $+\infty$, et que, pour x_0 minimal, $\dfrac{v(x)}{K(x_0, x)}$ admet en x_0 une pseudo-limite finie $\geqslant 0$. Puis, grâce à une étude de l'extrémisation d'une fonction harmonique $h > 0$, on voit que si v est un potentiel de Green, $\dfrac{v}{h}$ admet à la frontière une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable (c'est-à-dire de h-mesure harmonique nulle); il s'y rattache une caractérisation des ensembles sur lesquels l'extrémale de h est un potentiel de Green. Le cas particulier du demi-espace est examiné en détail.

Le chapitre IV donne d'abord dans $\hat{\Omega}$ une forme nouvelle du *principe du maximum*, où la condition-limite est imposée non sur un voisinage du point-frontière mais seulement sur un ensemble non effilé en ce point; il s'ensuit par exemple la nullité de toute fonction harmonique dont le quotient par une fonction harmonique $h > 0$ fixée est borné et admet en tout point-frontière hors d'un ensemble h-négligeable arbitrairement choisi, une pseudo-limite nulle ou seulement une limite nulle sur un ensemble non effilé en ce point.

Puis on étudie l'allure à la frontière de la solution du problème de Dirichlet-Martin. Ici encore la notion de pseudo-limite se substitue à la limite ordinaire et permet d'adapter le résultat classique fondamental sur le partage des points-frontière en points réguliers où la solution prend la valeur de la donnée pour toutes les données finies continues et en points irréguliers qui n'interviennent pas dans la résolution du problème de Dirichlet.

Un dernier chapitre traite surtout des applications de la frontière de Martin à l'étude axiomatique du problème de Dirichlet, pour tout espace compact métrisable $\overline{\Omega}$ dont Ω est un sous-espace partout dense de frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$.

A tout point minimal $x_0 \in \Delta$, tel que le filtre formé des ensembles de complémentaire effilé en x_0 soit convergent dans $\overline{\Omega}$, on fait correspondre le point limite sur Γ, dit *pôle* dans $\overline{\Omega}$ de la fonction minimale $K(x_0, y)$. Cela définit une application Φ d'un sous-ensemble de Δ, noté Δ'_1, sur un sous-ensemble de Γ, et l'on montre de manière essentielle que si le problème pour $\overline{\Omega}$ s'intègre dans la deuxième axiomatique [18] relative à une certaine fonction harmonique $h > 0$ dans Ω, les complémentaires respectifs sont h-négligeables, c'est-à-dire négligeables au point de vue du problème de Dirichlet pour les frontières Δ et Γ respectivement, et la fonction h.

Il en résulte l'équivalence pour $\overline{\Omega}$ des deux axiomatiques connues et si l'une de ces deux axiomatiques s'applique à l'espace $\overline{\Omega}$, la solution la plus générale correspondant à une donnée f sur Γ se trouve égale à la solution du problème de Dirichlet relatif à la frontière de Martin et à la donnée f_1 définie hors de l'ensemble négligeable $\Delta - \Delta'_1$ par $f_1 = f \circ \Phi$.

Cette correspondance entre les frontières a d'autres applications : lorsque chaque point-frontière de Γ forme un ensemble h-négligeable, les quotients par h des fonctions minimales dans Ω

sont non bornés; il s'ensuit par exemple que dans les domaines euclidiens plans ou bornés, les fonctions minimales sont non bornées. On donnera aussi quelques résultats généraux dans l'étude d'un phénomène « d'action à distance » dans le problème de Dirichlet, qui se manifeste, comme on le sait dans le cas euclidien par exemple, par le fait que la solution peut être non bornée au voisinage d'un point-frontière, bien que la donnée soit bornée au voisinage de ce point.

Cette étude a été résumée dans quatre Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (L. Naïm, [35] [36] [37] [38]).

Les présentes recherches posent bien des questions et quelques-unes seront explicitées; mais il faudrait aussi approfondir les relations de la frontière de Martin avec la théorie des lignes de Green (trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de la fonction de Green) (voir [20] [13] [29]) ou avec celle du mouvement brownien (selon les idées de J. L. Doob [27] [28]), théories qui introduisent de nouvelles conditions aux limites, ou encore avec la nouvelle frontière idéale de Kuramochi [30]. D'autre part, bien que notre étude utilise la théorie fine du potentiel classique, on peut espérer une extension systématique aux solutions de certaines équations aux dérivées partielles de type elliptique [34], ou même à certaines familles de fonctions dans les espaces topologiques généraux pour lesquels on a déjà développé des axiomatiques d'un problème du type de Dirichlet qu'il s'agirait de poursuivre (G. Tautz [41], J. L. Doob [28], M. Brelot [19]).

Je suis heureuse de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Marcel Brelot, dont les conseils, les suggestions et les constants encouragements m'ont été si précieux, et à qui je dois l'essentiel de ma formation mathématique. Je remercie M. Henri Cartan qui m'a fait l'honneur de présider le Jury, et M. Laurent Schwartz qui a bien voulu me donner le sujet de la seconde thèse. Mes remerciements vont également à M. Gustave Choquet qui a accepté de se joindre au Jury lors de la soutenance.

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

I. — Rappel de notions sur les espaces de Green.

3. Espaces de Green. — Rappelons [20] qu'un *espace* $\mathcal{E}$ est un espace topologique connexe séparé satisfaisant aux conditions suivantes :

a) A chaque point x est associé un voisinage ouvert $\mathcal{V}_x$ et un homéomorphisme de $\mathcal{V}_x$ sur un ouvert $\mathcal{V}'_x$ de l'espace $\overline{R}^\tau$ (déduit de l'espace euclidien R^τ à $\tau \geqslant 2$ dimensions par l'adjonction d'un point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$ qui le rend compact).

b) Si l'intersection de deux tels voisinages n'est pas vide, les images correspondantes sont, par l'intermédiaire des deux homéomorphismes, dans une correspondance isométrique, ou aussi, dans le cas $\tau = 2$, seulement conforme.

Cette correspondance peut être directe ou inverse.

On démontre que $\mathcal{E}$, localement compact, est métrisable et dénombrable à l'infini (réunion dénombrable de compacts). Dans le cas de structure isométrique, tout point dont l'image dans $\mathcal{V}'_x$ est à l'infini, ce qui est indépendant de x, est dit *point à l'infini;* ces points forment un ensemble dénombrable. On les évite dans le cas de structure conforme en prenant toujours $\mathcal{V}'_x$ dans R^2.

Les espaces $\mathcal{E}$ comprennent en particulier les surfaces classiques de Riemann, les variétés analogues à deux dimensions, mais non orientables, et aussi les espaces métriques connexes localement euclidiens, dont la structure est définie par l'isométrie locale avec R^τ.

L'harmonicité, *la sous ou surharmonicité* dans un ouvert de $\mathcal{E}$ sont définies par les mêmes propriétés locales sur l'image, ce qui implique la connaissance de ces notions au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ dans $\overline{\mathrm{R}}^\tau$ (voir [4]). A toute fonction v surharmonique dans un ouvert de $\mathcal{E}$ correspond localement, donc globalement, une mesure positive « associée » (on dit aussi des masses associées) qui est sur toute image locale la mesure associée à v au sens de la théorie dans $\overline{\mathrm{R}}^\tau$. Un ensemble de $\mathcal{E}$ est dit *polaire* s'il existe localement une fonction surharmonique valant $+\infty$ au moins sur lui; « quasi-partout » signifie « sauf sur un ensemble polaire ». Une fonction est quasi-surharmonique si elle vaut quasi-partout une fonction surharmonique, dite régularisée, et nécessairement unique.

S'il existe dans $\mathcal{E}$ une fonction surharmonique >0 non constante, l'espace est dit *espace de Green*. Il existe alors pour tout point x une fonction minima dans $\mathcal{E}$, qui soit surharmonique >0 et dont les masses associées contiennent la masse $+1$ en x; elle est harmonique hors de x, atteint en x seulement son maximum (fini ou infini suivant que x est à l'infini ou non); c'est la *fonction de Green* de pôle x, $\mathrm{G}_x(y)$, symétrique en x et y, notée aussi $\mathrm{G}(x, y)$.

Le potentiel de Green d'une mesure positive m dans $\mathcal{E}$ est par définition la fonction $v(x) = \int \mathrm{G}(x, y)\, dm(y)$; il est partout infini, ou bien surharmonique, harmonique hors du support fermé de m, et de mesure associée identique à m. Un ensemble polaire est caractérisé par l'existence d'un potentiel égal à $+\infty$ sur lui. Si une fonction surharmonique admet une minorante harmonique, elle vaut la somme du potentiel de Green d'une mesure $\geqslant 0$ et de la plus grande minorante harmonique.

L'effilement [3] d'un ensemble E de $\mathcal{E}$ en un point x_0 équivaut, si x_0 n'est pas isolé de $\{x_0\} \cup \mathrm{E}$, à l'existence d'un potentiel de Green v d'une mesure >0 dans $\mathcal{E}$ tel que $v(x_0) < \liminf\limits_{\substack{x \to x_0,\, x \in \mathrm{E} \\ x \neq x_0}} v(x)$, avec la restriction que $x_0 \notin \mathrm{E}$ si x_0 est un point à l'infini de $\mathcal{E}$ et si $\tau \geqslant 3$. Les points d'un ensemble où il est effilé forment un ensemble polaire, réunion dénombrable d'ensembles fermés dans $\mathcal{E}$. Les ensembles contenant un point x_0 et de complémentaire effilé en x_0 sont les voisinages de ce point dans la topologie la moins fine sur $\mathcal{E}$ rendant continus les potentiels de Green, topologie introduite par H. Cartan [21], et appelée par lui *topologie fine*.

4. Le problème de Dirichlet « ordinaire » pour un ouvert contenu dans un espace de Green. — A tout espace de Green Ω, qui est nécessairement non compact, on adjoint un point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ qui le compactifie selon l'espace Ω', et on étudie comme suit [20], pour un ouvert partiel ω de Ω, le problème de Dirichlet « ordinaire » relatif à la frontière de ω dans Ω'.

Si f est une fonction réelle sur cette frontière, on considère les fonctions qui sont, dans chaque domaine composant ω_i de ω, sousharmoniques ou $-\infty$, et dont chacune est bornée supépérieurement et de $\limsup \leqslant f$ en tout point-frontière de ω; l'enveloppe supérieure $\underline{H}_f^\omega$ est dans chaque ω_i, $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique, et égale à $\underline{H}_f^{\omega_i}$ (où f est prise sur la frontière de ω_i). Définition analogue de $\overline{H}_f^\omega$, qui vaut $-\underline{H}_{(-f)}^\omega$, et $\underline{H}_f^\omega \leqslant \overline{H}_f^\omega$.

L'égalité avec une fonction harmonique H_f^ω, dite solution, définit la *résolutivité* de f. Toute fonction finie continue est résolutive, et la fonctionnelle $H_f^\omega(x)$ définit, pour x fixé, une mesure > 0 m^x sur la frontière, dite mesure harmonique en x relative à ω. Pour ω connexe, la résolutivité de f équivaut à la sommabilité-dm^x de f pour un ou tout point x, et la solution s'écrit

$$H_f^\omega(x) = \int f dm^x.$$

Si f est résolutive, la solution H_f^ω vaut, dans tout ouvert partiel ω_1, $H_{f_1}^{\omega_1}$ où f_1 vaut H_f^ω dans ω et f sur la frontière de ω.

L'étude de l'allure de la solution au voisinage d'un point-frontière situé dans Ω se ramène, vu le caractère local, aux cas classiques antérieurs. Un tel point x_0 est dit *régulier* si pour toute fonction f finie continue, $H_f^\omega(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$, ce qui équivaut à l'existence au voisinage de x_0 sur ω d'une fonction surharmonique > 0 tendant vers 0 en x_0 et de borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de x_0. *L'irrégularité* d'un point x_0 pour ω équivaut à l'effilement en x_0 du complémentaire, et les points-frontière irréguliers forment un ensemble polaire.

Le rôle spécial du point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ demande une étude particulière qu'on ne rappellera pas ici.

Pour une fonction φ dans Ω, on note $\underset{*}{\varphi}$ la fonction prolongée par 0 en $\mathcal{A}$.

5. La théorie de l'extrémisation ou du balayage. — La théorie dite le plus souvent du « balayage » a été développée de diverses manières; dans [5] elle a, sous le nom d'extrémisation, une forme qui s'applique immédiatement à un espace de Green et à une fonction surharmonique > 0 quelconque et que pour cette raison nous adopterons ici.

Rappelons que *l'extrémale* d'une fonction surharmonique $v > 0$ relativement à un ensemble $E \subset \Omega$ (ou plus brièvement sur E) est par définition la plus petite fonction surharmonique > 0 majorant v quasi-partout sur $\Omega - E$; elle minore v, l'égale quasi-partout sur $\Omega - E$, et en tout point de Ω où $\Omega - E$ n'est pas effilé. On la note $\mathcal{E}_v^E$, et le passage de v à $\mathcal{E}_v^E$ s'appelle *extrémisation* de v relative à E ou sur E. $\mathcal{E}_v^E$ croît quand E décroît; elle est harmonique à l'intérieur de E, et si E est ouvert, elle y vaut la solution $\underset{*}{H_v^E}$.

Lorsque v est le potentiel de Green d'une mesure $m > 0$, c'est-à-dire une fonction surharmonique > 0 dont la plus grande minorante harmonique est nulle, il en est de même de l'extrémale, et la mesure associée m' est dite extrémisée de m relativement à E (ou sur E). Le passage de m à m' s'appelle extrémisation de m relativement à E (ou sur E), ou encore *balayage* de m relativement à $\Omega - E$. L'invariance d'un potentiel par extrémisation sur E équivaut à ce que la mesure associée ne charge [2] pas l'ensemble des points d'effilement de $\Omega - E$, et si l'on note ε_x la mesure définie par la masse $+1$ en x, l'extrémale sur E de toute v surharmonique > 0 admet la représentation intégrale

$$\mathcal{E}_v^E(x) = \int v(y)\, d\varepsilon'_x(y).$$

Si E est ouvert, l'extrémisée ε'_x est, pour tout $x \in E$, la restriction à Ω de la mesure harmonique en x relative à E.

II. — La frontière de R. S. Martin.

6. L'espace de Martin $\hat{\Omega}$. — La théorie originale de R. S. Martin [33] peut s'adapter à un espace de Green Ω. On

(2) Le substantif charge signifie mesure; ne pas charger un ensemble signifie « donner la valeur 0 à la mesure de cet ensemble ».

peut d'abord caractériser la frontière de Martin de la façon suivante [18] :

Soit $K(x, y) = \dfrac{G(x, y)}{G(x, y_0)}$ la fonction de Green « normalisée » en un point fixé $y_0 \in \Omega$, prise égale à 1 pour x et y en y_0. Il existe un espace compact $\hat{\Omega}$ unique à un homéomorphisme près, dont Ω soit un sous-espace partout dense (donc ouvert dans $\hat{\Omega}$ et de frontière $\hat{\Omega} - \Omega$), tel que $K(x, y)$ admette, quel que soit $y \in \Omega$, une limite quand $x \in \Omega$ tend vers un point-frontière quelconque x_0, et que la fonction-limite, notée $K(x_0, y)$ et nécessairement harmonique > 0 en y, corresponde biunivoquement à x_0.

Alors $K(x,y)$ est continue de l'ensemble (x,y) pour $x \in \hat{\Omega}$, $y \in \Omega$.

Cet espace $\hat{\Omega}$ est métrisable et indépendant du choix de y_0. Il complète l'espace Ω pourvu d'une métrique convenable compatible avec sa topologie, par exemple une métrique prolongeant dans Ω la distance (x_1,x_2) définie par $\sup\limits_{y \in \sigma} |K(x_1,y) - K(x_2,y)|$ hors d'un compact $\alpha \subset \Omega$,($y_0 \in \sigma$ ouvert $\subset \bar{\sigma} \subset \dot{\alpha}$). C'est l'espace de Martin, et $\hat{\Omega} - \Omega$ est *la frontière de Martin*, notée Δ.

7. **Représentation intégrale des fonctions harmoniques > 0.** — Pour toute mesure de Radon $\mu > 0$ sur Δ, $\int K(x,y)d\mu(x)$ est une fonction harmonique > 0 de $y \in \Omega$, et l'on peut représenter ainsi toute fonction harmonique > 0 dans Ω.

La question d'unicité d'une telle représentation se traite grâce à l'introduction des fonctions minimales. D'après Martin, on appelle *minimale* dans Ω toute fonction harmonique > 0 telle que toute autre inférieure lui soit proportionnelle. Les fonctions minimales sont à un facteur près les $K(x,y)$ pour x appartenant à une certaine partie non vide Δ_1 de Δ, qui est une intersection dénombrable d'ouverts, et dont les points sont dits *minimaux;* et il existe une représentation unique du type indiqué, dite canonique, pour laquelle la mesure μ, dite aussi *mesure canonique associée*, ne charge que Δ_1. Une inégalité entre deux fonctions harmoniques > 0 entraîne la même inégalité pour les mesures canoniques.

On note Δ_0 l'ensemble des points non minimaux, qui peut être non vide, et pour x quelconque $\in \hat{\Omega}$, il sera commode de noter $K_x(y)$ la fonction surharmonique > 0, $K(x, y)$. Enfin tout point minimal x sera dit *pôle* de la fonction minimale $K(x, y)$. (Voir chapitre v.)

Dans le cas d'un domaine euclidien de frontière assez régulière, la structure uniforme de $\hat{\Omega}$ est dans Ω identique à la structure euclidienne et la frontière de Martin s'identifie à la frontière euclidienne; pour tout point-frontière x, $K(x, y)$ est minimale et proportionnelle au quotient $\frac{dG_y}{dn} \Big/ \frac{dG_{y_0}}{dn}$ des dérivées normales en x des fonctions de Green de pôles y et y_0 respectivement; et pour un domaine circulaire ou sphérique de centre y_0 et rayon R, on retrouve le noyau de Poisson

$$R^{\tau-2} \frac{R^2 - |y - y_0|^2}{|x - y|^\tau}$$

Pour un domaine plan simplement connexe, qui se représente conformément sur le cercle, on sait encore que la structure uniforme de Martin est celle des bouts premiers, d'ailleurs non comparable à la structure euclidienne, mais le cas plan général est beaucoup plus complexe (voir des exemples dans [9]).

8. Le théorème fondamental de Martin a été depuis intégré, comme on le verra, dans la seconde théorie axiomatique du problème de Dirichlet, déjà mentionnée et que l'on va rappeler. D'autre part, selon une remarque immédiate mais essentielle de H. Cartan, les fonctions minimales égales à 1 en y_0 sont les éléments *extrémaux* de l'ensemble convexe des fonctions harmoniques > 0 égales à 1 en y_0, de sorte que la théorie de Martin est maintenant conséquence des derniers résultats de G. Choquet [23] [24] [25] sur l'existence et l'unicité de la représentation intégrale d'un point d'un cône convexe à l'aide des points extrémaux d'une section. Mais ce point de vue ne sera pas utilisé ici.

III. — Étude axiomatique du problème de Dirichlet.

9. Rappel d'une première axiomatique. — Rappelons d'abord les bases d'une forme élargie d'une ancienne axiomatique du problème de Dirichlet, forme développée dans [18] à partir

d'un espace *métrique complet* $\check{\Omega}$ où l'espace de Green Ω est partout dense, donc de frontière $\check{\Omega}-\Omega$.

Soit h une fonction harmonique > 0 fixée dans Ω, le cas $h = 1$ ayant été traité antérieurement [20]. On suppose qu'il existe sur Ω une famille de filtres $\mathcal{F}$ convergeant vers des points-frontière, telle que :

A$_h$) Si u sousharmonique dans Ω satisfait à : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup_{\mathcal{F}} \frac{u}{h} \leqslant 0$ quel que soit $\mathcal{F}$, alors $u \leqslant 0$.

B$_h$) Pour chaque $\mathcal{F}$, il existe un voisinage ouvert $\mathfrak{V}$ du point de convergence x_0 et une fonction surharmonique $v > 0$ dans $\mathfrak{V} \cap \Omega$ tels que $\frac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} 0$ et que $\frac{v}{h}$ admette une borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de x_0. Cette condition équivaut à ce que pour les voisinages ouverts ω assez petits de x_0, $\frac{1}{h} \mathrm{H}_{h}^{\omega \cap \Omega} \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} 0$, et il s'ensuit l'existence d'un v surharmonique > 0 dans tout Ω.

Pour une fonction f réelle sur $\check{\Omega}-\Omega$, $\underline{\mathcal{H}}_{f,h}$ est définie comme l'enveloppe supérieure des fonctions u dans Ω qui sont sousharmoniques ou $-\infty$, et satisfont chacune aux conditions : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup \frac{u}{h} \leqslant f$ en tout point-frontière; elle vaut partout $+\infty$ ou $-\infty$, ou est harmonique. Définition analogue de $\overline{\mathcal{H}}_{f,h}$, égale à $-\underline{\mathcal{H}}_{(-f),h}$, et $\underline{\mathcal{H}}_{f,h} \leqslant \overline{\mathcal{H}}_{f,h}$.

Si $\underline{\mathcal{H}}_{f,h} = \overline{\mathcal{H}}_{f,h}$ fini, on dit que f est $\check{h}$-résolutive, et la valeur commune est la solution $\mathcal{H}_{f,h}$. Les f bornées continues sont $\check{h}$-résolutives, et pour cette famille de fonctions, la fonctionnelle $\mathcal{H}_{f,h}(x)$ définit, pour x fixé, une mesure de Daniell $d\check{\mu}_h^x$ sur $\check{\Omega}-\Omega$, dite $\check{h}$-mesure harmonique en x. La $\check{h}$-résolutivité équivaut à la sommabilité-$d\check{\mu}_h^x$ (pour un ou tout point x), et la solution s'écrit

$$\mathcal{H}_{f,h}(x) = \int f d\check{\mu}_h^x.$$

10. Nouvelle axiomatique. — Une nouvelle axiomatique du problème de Dirichlet a été développée [18] lorsque l'espace $\check{\Omega}$ de l'ancienne axiomatique est compact, autrement dit lorsque l'espace de Green Ω est un sous-espace partout dense d'un espace *compact* métrisable $\overline{\Omega}$, où il a la frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$.

Fixant h harmonique > 0 dans Ω, on considère encore, pour toute f réelle sur Γ, les fonctions u dans Ω qui sont sousharmoniques ou $-\infty$, et satisfont chacune à : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup \frac{u}{h} \leqslant f$ en tout point-frontière; leur enveloppe supérieure est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique, et notée ici $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$. On définit de même $\overline{\mathfrak{D}}_{f,h}$, égale à $-\underline{\mathfrak{D}}_{(-f),h}$; sans aucun axiome, ces enveloppes satisfont à $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h} \leqslant \overline{\mathfrak{D}}_{f,h}$.

Lorsque $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h} = \overline{\mathfrak{D}}_{f,h}$ fini (en un point, donc partout), on dit que f est *h-résolutive*, et la valeur commune notée $\mathfrak{D}_{f,h}$ est la *h-solution.* Ainsi $f = 1$ est h-résolutive, la solution étant h.

Un ensemble-frontière e est dit *h-négligeable* si $\overline{\mathfrak{D}}_{\varphi_e,h} = 0$ (φ_e fonction caractéristique de e). Une condition nécessaire et suffisante est l'existence d'une fonction surharmonique $v > 0$ telle que $\frac{v}{h} \to +\infty$ en tout point de e. Le changement de f sur un ensemble h-négligeable n'altère ni les enveloppes $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$, $\overline{\mathfrak{D}}_{f,h}$, ni la h-résolutivité.

On dit que e est *faiblement h-négligeable* si $\underline{\mathfrak{D}}_{\varphi_e,h} = 0$; cela équivaut à ce que toute fonction u sousharmonique satisfaisant à : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup \frac{u}{h} \leqslant 0$ en tout point-frontière hors de e, soit nécessairement $\leqslant 0$.

Le développement ultérieur de la théorie repose sur l'axiome suivant :

Axiome $\mathfrak{A}_h$: *Toute fonction finie continue sur* Γ *est h-résolutive.*

Alors sous la condition $\mathfrak{A}_h$, la fonctionnelle $\mathfrak{D}_{f,h}(x)$ définit, pour x fixé, une mesure > 0 de Radon $d\mu_h^x$ sur Γ, dite *h-mesure harmonique* en x; la h-résolutivité d'une fonction f équivaut à la sommabilité-$d\mu_h^x$ de f (pour un ou tout point x), et la solution s'écrit

$$\mathfrak{D}_{f,h}(x) = \int f d\mu_h^x.$$

Enfin la condition que e soit h-négligeable (ou faiblement

h-négligeable) signifie que sa h-mesure harmonique extérieure (resp. intérieure) est nulle.

Lorsque l'espace $\check{\Omega}$ de l'ancienne axiomatique (avec A_h et B_h) est compact, la condition $\mathcal{A}_h$ est satisfaite, et les éléments de la nouvelle axiomatique sont les mêmes que dans l'ancienne. S'il n'est pas compact, on peut le compactifier selon $\overline{\Omega}$ métrisable où Ω est partout dense; pour cet espace $\overline{\Omega}$, l'axiome $\mathcal{A}_h$ est vérifié, et la nouvelle axiomatique donne une mesure $d\mu_h^x$ dont la restriction à $\check{\Omega} - \Omega$ est $d\check{\mu}_h^x$, $\overline{\Omega} - \check{\Omega}$ étant de mesure-$d\mu_h^x$ nulle, c'est-à-dire h-négligeable. On peut ainsi dire que la nouvelle axiomatique contient l'ancienne.

On appelle *réduite* v_e d'une fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dans Ω, relativement à un ensemble-frontière e, l'enveloppe inférieure des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dont chacune majore v dans un voisinage de e; c'est aussi l'enveloppe inférieure des extrémales de v sur les complémentaires dans Ω des voisinages de e dans $\overline{\Omega}$ (ou limite selon l'ordonné filtrant des voisinages de e). Elle est harmonique, croît avec v et e, et $0 \leqslant v_e \leqslant v$. Dans le cas particulier d'une fonction harmonique $h > 0$, $h_e = \overline{\mathfrak{D}}_{\varphi_e, h}$.

L'axiome $\mathcal{A}_h$ est alors équivalent à chacune des conditions suivantes :

$\mathcal{A}'_h$: *La fonction caractéristique* φ_A *de tout compact* A *est h-résolutive.*

$\mathcal{A}''_h$: *Les réduites* h_A *de* h *sont additives en* A *compact*, autrement dit, pour tout x fixé, $h_A(x)$ définit une mesure, ou encore $h_e(x) = \overline{\mathfrak{D}}_{\varphi_e, h}(x)$ est une mesure extérieure.

$\mathcal{A}'''_h$: *Quels que soient les compacts disjoints* A *et* B *sur* Γ $(h_A)_B = 0$.

Etant donnée h harmonique > 0 dans Ω, on sait aussi traiter le problème pour un ouvert partiel ω de Ω, de composantes connexes ω_i, et sa frontière $\overset{*}{\omega}$ dans $\overline{\Omega}$. Si f est donnée sur $\overset{*}{\omega}$, la fonction dans ω, égale dans chaque ω_i à $\underline{\mathfrak{D}}^{\omega_i}_{f, h}$ (où f est prise sur $\overset{*}{\omega}_i$) est aussi l'enveloppe supérieure des fonctions u dans ω, sousharmoniques ou $-\infty$ dans chaque ω_i, satisfaisant en tout point-frontière de ω à $\limsup \dfrac{u}{h} \begin{cases} < +\infty \\ \leqslant f \end{cases}$. On la note $\underline{\mathfrak{D}}^{\omega}_{f, h}$.

Introduction analogue de $\overline{\mathfrak{D}}^{\omega}_{f, h} \geqslant \underline{\mathfrak{D}}^{\omega}_{f, h}$; l'égalité avec valeur finie partout caractérise la h-résolutivité de f, qui a lieu pour toute fonction finie continue sur $\overset{*}{\omega}$ dès que la condition $\mathfrak{A}_h$ relative à $\overline{\Omega}$ est satisfaite.

Les ensembles h-négligeables (ou faiblement h-négligeables) sont encore définis par la condition $\overline{\mathfrak{D}}^{\omega}_{\varphi_e, h} = 0$ (resp. $\underline{\mathfrak{D}}^{\omega}_{\varphi_e, h} = 0$), avec même caractérisation que précédemment. Et si f sur Γ est h-résolutive, la solution $\mathfrak{D}_{f, h}$ est égale dans ω à $\mathfrak{D}^{\omega}_{F, h}$, où F sur $\overset{*}{\omega}$ vaut $\frac{1}{h}\mathfrak{D}_{f, h}$ dans Ω et f sur Γ. Noter aussi que pour une fonction f sur $\overset{*}{\omega}$, nulle sur Γ, $\mathfrak{D}^{\omega}_{f, h} = H^{\omega}_{\underset{*}{fh}}$.

Une fonction u harmonique dans Ω est dite *associée à* 0 au voisinage d'un point-frontière x_0 s'il existe un voisinage ouvert δ de x_0 tel que dans $\delta \cap \Omega$ on ait $u = H^{\delta\cap\Omega}_{\underset{*}{u}}$. Si h harmonique > 0 dans Ω satisfait à la condition $\mathfrak{A}_h$, l'ensemble des points-frontière au voisinage desquels h est associée à 0 est h-négligeable.

Dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, pour toute fonction harmonique $h > 0$, la condition $\mathfrak{A}_h$ est satisfaite, et l'ensemble Δ_0 des points non minimaux est h-négligeable. La h-mesure harmonique $d\mu^y_h(z)$ vaut $K(z, y)d\mu^{y_0}_h(z)$, et

$$\mathfrak{D}_{f, h}(y) = \int K(z, y) f(z)\, d\mu^{y_0}_h(z),$$

ce qui pour $f = 1$ inclut la représentation intégrale de Martin

$$h(y) = \int K(z, y)\, d\mu^{y_0}_h(z);$$

la mesure $d\mu^{y_0}_h$, portée par l'ensemble Δ_1 des points minimaux, est précisément la mesure canonique associée à h dont la théorie de Martin avait établi directement l'existence et l'unicité.

CHAPITRE II

LA NOTION D'EFFILEMENT A LA FRONTIÈRE DE MARTIN

I. — Définition et premières propriétés.

Soit Ω un espace de Green, et $\hat{\Omega}$ l'espace de Martin associé. Toutes les notions topologiques seront, sauf au dernier chapitre, relatives à l'espace $\hat{\Omega}$, et l'on supposera le point fixe $y_0 \in \Omega$ distinct d'un point à l'infini de Ω si la dimension τ de Ω est $\geqslant 3$.

11. Les potentiels $U(x) = \int K(x, y)\, dm(y)$. — Partons du *noyau de Martin* $K(x, y)$ $(x \in \hat{\Omega}\text{-}\{y_0\},\ y \in \Omega)$, obtenu pour chaque y par prolongement continu de la fonction de Green « normalisée » $\dfrac{G(x, y)}{G(x, y_0)}$.

Le *potentiel* par rapport à ce noyau d'une mesure m dans Ω, qui sera toujours supposée $\geqslant 0$, est défini dans $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$ par

$$U(x) = \int K(x, y)\, dm(y).$$

Il est en chaque point x, $\geqslant 0$ fini ou $+\infty$, et égal dans $\Omega\text{-}\{y_0\}$ au quotient par $G(x, y_0)$ du potentiel de Green

$$v(x) = \int G(x, y)\, dm(y).$$

On supposera dans toute la suite que $U(x)$ n'est pas partout infini dans $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$; cela équivaut à la même condition pour $v(x)$ dans Ω, car si $\int K(x_0, y)\, dm(y)$ est fini en un point quelconque $x_0 \in \hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$, l'extrémale de K_{x_0} relative au complémentaire d'un compact $\alpha \subset \Omega$ est le potentiel de Green d'une mesure $\nu > 0$ telle que

$$\int v\, d\nu = \int \mathcal{E}_{\mathrm{K}_{x_0}}^{\Omega-\alpha}\, dm < +\infty,$$

ce qui entraîne nécessairement $v \not\equiv \infty$.

Principales propriétés.

1° U(x) *est une fonction semi-continue inférieurement de x dans* $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$.

On le voit d'abord dans le cas où m ne charge qu'un compact α de Ω : U, semi-continu inférieurement dans Ω-$\{y_0\}$, est fini continu en tout point $x_0 \in \Delta$, car la convergence de $\mathrm{K}(x, y)$ vers $\mathrm{K}(x_0, y)$, uniformément en $y \in \alpha$, permet le passage à la limite sous $\int$. On passe au cas général en considérant une suite (α_n) de compacts tendant en croissant vers Ω, et la suite de fonctions semi-continues inférieurement $\mathrm{U}_n(x) = \int_{\alpha_n} \mathrm{K}(x, y)\, dm(y)$, qui est croissante et de limite U.

2° *Si les potentiels de deux mesures* $\geqslant 0$ m_1, m_2, *vérifient l'inégalité* $\mathrm{U}_1 \leqslant \mathrm{U}_2$ *dans* Ω-$\{y_0\}$, *on a* $\mathrm{U}_1 \leqslant \mathrm{U}_2$ *dans* $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$.

L'inégalité dans Ω équivaut à $v_1 \leqslant v_2$ pour les potentiels de Green de m_1, m_2 respectivement, donc, pour $x_0 \in \Delta$ et α compact $\subset \Omega$, la mesure $\nu > 0$ associée à $\mathcal{E}_{\mathrm{K}_{x_0}}^{\Omega-\alpha}$ satisfait à

$$\int v_1\, d\nu \leqslant \int v_2\, d\nu,$$

ce qui s'écrit, par interversion d'intégrations,

$$\int \mathcal{E}_{\mathrm{K}_{x_0}}^{\Omega-\alpha}\, dm_1 \leqslant \int \mathcal{E}_{\mathrm{K}_{x_0}}^{\Omega-\alpha}\, dm_2$$

et le passage à la limite sous $\int$ pour α croissant vers Ω donne l'inégalité cherchée

$$\int \mathrm{K}(x_0, y)\, dm_1(y) \leqslant \int \mathrm{K}(x_0, y)\, dm_2(y).$$

Remarque. — En prenant $\mathrm{K}(x,y)$ égale à 1 pour x et y en y_0, on peut définir le potentiel U au point y_0, où il aura la valeur $m(\{y_0\})$. Ainsi prolongé, U est semi-continu inférieurement au point y_0, car pour le potentiel de Green v de la mesure m, $\liminf\limits_{x \neq y_0,\ x \to y_0} \dfrac{v(x)}{\mathrm{G}(x, y_0)}$ est égale à la mesure de $\{y_0\}$

pour la mesure de Riesz associée à v, c'est-à-dire $m(\{y_0\})$. Mais ce prolongement ne présente guère d'intérêt pour la suite, où l'on n'étudiera les potentiels U que dans l'espace $\hat{\Omega}-\{y_0\}$.

12. La notion d'effilement.

Définition 1. — *Un ensemble* $E \subset \Omega$ *est dit effilé au point* $x_0 \in \hat{\Omega}-\{y_0\}$ *si* x_0 *est isolé de* $\{x_0\} \cup E$, *sinon s'il existe un potentiel* U *précédent (de mesure* > 0) *tel que* $U(x_0) < \liminf_{\substack{x \to x_0,\ x \in E, \\ x \neq x_0}} U(x)$, *en supposant que* $x_0 \notin E$, *si* x_0 *est un point à l'infini de* Ω *et si* $\tau \geqslant 3$.

C'est la notion ordinaire [3] si $x_0 \in \Omega$. Nous rencontrerons plus loin (n^os^ 14, 23) des exemples divers d'ensembles effilés.

Les propriétés de l'effilement à la frontière sont pour la plupart l'extension de propriétés connues de l'effilement ordinaire. Les démonstrations que nous en donnons n'utilisent pas ces dernières propriétés, mais permettent au contraire de les retrouver, car elles sont valables pour l'effilement en un point intérieur, ou bien s'adaptent aussitôt à ce cas.

Propriétés immédiates.

a) La réunion de deux ensembles effilés en x_0 est un ensemble effilé en ce point.

b) Si E est effilé en x_0, il existe un effilé ouvert contenant $E-\{x_0\}$.

c) Tout ensemble polaire est effilé en tout point ([3]).

Noter aussi que l'effilement de E en un point x_0 équivaut à celui de l'intersection de E et d'un voisinage quelconque de x_0.

Théorème 1. — *Pour que l'ensemble* $E \subset \Omega$ *soit effilé au point* x_0 *non isolé de* $\{x_0\} \cup E$ *et n'appartenant pas à* E, *il faut et il suffit qu'il existe un potentiel* U *satisfaisant aux conditions :*

$$U(x_0) \text{ fini}, \quad \text{et} \quad U(x) \to +\infty \ (x \to x_0,\ x \in E,\ x \neq x_0) \ ([4]).$$

([3]) Pour cette dernière propriété, on part d'un potentiel de Green ($\not\equiv \infty$), égal à $+\infty$ sur l'ensemble polaire e ne contenant pas y_0, et on forme, par recouvrement dénombrable de e et sommation, un potentiel U fini en x_0 fixé, et valant $+\infty$ sur $e-\{x_0\}$, d'où le résultat.

([4]) La démonstration est inspirée de celle du cas de l'effilement ordinaire [3].

Soit m une mesure >0 dans Ω, de potentiel U vérifiant l'inégalité $U(x_0) < \liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} U(x)$. Le potentiel de la restriction de m à un compact α de $\Omega - \{x_0\}$ est fini continu au point x_0; celui U_α de la restriction de m à $\Omega - \alpha$ satisfait donc à

$$\liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} U_\alpha(x) - U_\alpha(x_0) = \liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} U(x) - U(x_0) = d > 0,$$

et $U_\alpha(x_0)$ tend vers zéro quand α tend vers $\Omega - \{x_0\}$. On choisit le compact α_n tel que $U_{\alpha_n}(x_0) \leqslant \frac{1}{n^2}$; alors le potentiel $\sum_1^\infty U_{\alpha_n}$ est fini en x_0, et tend vers $+\infty$ quand $x \in E$ tend vers x_0 puisque $\liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} \sum_1^\infty U_{\alpha_n}(x) > \liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} \sum_1^N U_{\alpha_n}(x) > Nd$ arbitrairement grand.

II. — Critères d'effilement.

13. Critères généraux.

Théorème 2. — *Pour que l'ensemble $E \subset \Omega$ soit effilé au point x_0, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage δ de x_0 tel que l'extrémisation de K_{x_0} sur $\Omega - E \cap \delta$ ne conserve pas cette fonction.*

Supposons l'effilement de E, et examinons le cas non immédiat où x_0 n'est pas isolé de $\{x_0\} \cup E$. Soit U un potentiel tel que

$$U(x_0) < \gamma < \liminf_{\substack{x \to x_0,\, x \in E,\\ x \neq x_0}} U(x).$$

On a $U(x) > \gamma$ dans un voisinage δ de x_0 sur $E (y_0 \notin \delta)$, donc le potentiel de Green égal à $G_{y_0}.U$ hors de y_0 majore $\gamma . G_{y_0}$ sur $E \cap \delta$; d'après la propriété minimale de l'extrémale, il majore $\gamma . \mathcal{E}_{G_{y_0}}^{\Omega - E \cap \delta} = \gamma \int G(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y)$ partout dans Ω, (ε'_{y_0} extrémisée de ε_{y_0} sur $\Omega - E \cap \delta$), d'où

$$\int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leqslant \frac{1}{\gamma} U(x) \qquad (x \in \Omega - \{y_0\}).$$

La même inégalité valable dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$ donne au point x_0

$$\int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leqslant \frac{1}{\gamma} U(x_0)$$

ou

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta}(y_0) < K_{x_0}(y_0) = 1.$$

Réciproquement, supposons que pour un certain voisinage δ de x_0, l'extrémisation de K_{x_0} sur $\Omega - E \cap \delta$ ne conserve pas cette fonction. Si l'extrémale est identiquement nulle, on conclut aussitôt à l'effilement de E, car $E \cap \delta$ est alors vide ou polaire. Sinon, on trouvera un point $z \in \Omega$ où

$$K(x_0, z) > \int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_z(y),$$

(ε'_z extrémisée de ε_z sur $\Omega - E \cap \delta$).

Soit $U(x) = \int K(x, y)\, d\varepsilon'_z(y)$, égal dans $\Omega - \{y_0\}$ à $\frac{\mathcal{E}_{G_z}^{\Omega - E\cap\delta}}{G_{y_0}}$, et à $\frac{G(x, z)}{G(x, y_0)}$ ou $K(x, z)$ sur $E \cap \delta$ diminué d'un ensemble e polaire; si x_0 est adhérent à $E \cap \delta - e$, on a

$$\liminf_{\substack{x \to x_0,\ x \in E\cap\delta - e \\ x \neq x_0}} U(x) = K(x_0, z) > \int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_z(y) = U(x_0),$$

d'où l'effilement en x_0 de $E \cap \delta - e$, puis celui de E. Même conclusion si x_0 n'est pas adhérent à $E \cap \delta - e$.

Application. — *Les points d'effilement de* Ω.

Rappelons ([9], [33]) qu'une propriété caractérisant dans Ω les fonctions $K(x_0, y)$ minimales est leur invariance par extrémisation sur tout ensemble de Ω auquel le point x_0 n'est pas adhérent. Le théorème précédent, appliqué à $E = \Omega$, fournit alors une caractérisation nouvelle et importante des points minimaux :

THÉORÈME 3. — *Les points minimaux sont les points de* Δ *où* Ω *n'est pas effilé.*

Ainsi, pour toute mesure $m \geqslant 0$ dans Ω, et tout point x_0 mininal,

$$\int K(x_0, y)\, dm(y) = \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \int K(x, y)\, dm(y).$$

THÉORÈME 4. — *Pour que* E *soit effilé au point* x_0, *il faut et il suffit que pour un voisinage convenable* δ *de* x_0, $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E\cap\delta}(y_0)$ *soit arbitrairement petit.*

La condition est suffisante. Montrons la réciproque dans le cas de x_0 non isolé de $\{x_0\} \cup E$. Soit U un potentiel fini en x_0, tendant vers $+\infty$ quand $x \in E$ tend vers x_0, et soit $\lambda > 0$ tel que $\lambda U(x_0) < \varepsilon(\varepsilon > 0$ arbitraire). On a $\lambda U(x) > 1$ dans un voisinage δ de x_0 sur E, d'où l'on déduit, en raisonnant comme pour le théorème 2,

$$\int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leqslant \lambda U(x) \qquad (x \in \hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}),$$

ε'_{y_0} désignant l'extrémisée de ε_{y_0} sur $\Omega - E \cap \delta$. Au point x_0, il vient donc

$$\int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leqslant \lambda U(x_0)$$

et

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E\cap\delta}(y_0) < \varepsilon.$$

On donnera plus loin (n° 19), pour un point x_0 minimal, une forme améliorée de ce théorème.

Autre forme de ce résultat. Soit $E \subset \Omega$; extrémisons ε_{y_0} sur $\Omega - E$, et considérons le potentiel $U(x) = \int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y)$ de la distribution balayée ε'_{y_0}. Il est partout $\leqslant 1$, égal à 1 quasi-partout sur E (5), et c'est dans $\hat{\Omega} - \{y_0\}$ le plus petit potentiel U égal à 1 quasi-partout sur E. On l'appellera *potentiel capacitaire* de l'ensemble E. Le théorème 4 peut alors s'exprimer sous la forme suivante, qui est à rapprocher d'un critère d'irrégularité donné par de La Vallée Poussin [31]:

Pour que $E \subset \Omega$ *soit effilé au point* x_0, *il faut et il suffit que la valeur en* x_0 *du potentiel capacitaire de* $E \cap \delta$ *soit arbitrairement petite avec le voisinage* δ *de* x_0.

14. Critère fondamental d'effilement en un point minimal.

LEMME 1. — (6) *Soit* u *une fonction minimale dans* Ω. *Toute extrémale de* u *vaut* u *ou un potentiel de Green.*

Car la plus grande minorante harmonique de $\mathcal{E}_u^F(E \subset \Omega)$, moindre que u lui est proportionnelle, et d'après l'invariance

(5) Car $U(x)$ est dans Ω-$\{y\}$ le quotient par G_{y_0} de l'extrémale de G_{y_0} sur $\Omega - E$.
(6) Remarque inédite de M. Brelot.

de l'extrémale par itération, il y a contradiction à la supposer non nulle et distincte de u.

THÉORÈME 5. — *Pour qu'un ensemble* $E \subset \Omega$ *soit effilé au point* x_0 *minimal, il faut et il suffit que l'extrémisation de* K_{x_0} *sur* $\Omega - E$ *ne conserve pas cette fonction.*

La condition est suffisante d'après le théorème 2. Pour la réciproque, on sait déjà [9] — et cela résulte (7) aussi de l'étude axiomatique [18] du problème de Dirichlet — que l'extrémisation de K_{x_0} sur l'intersection de Ω et d'un voisinage quelconque de x_0 ne conserve pas cette fonction, de sorte qu'il suffit d'étudier le cas de x_0 non isolé de $\{x_0\} \cup E$.

Alors, pour un voisinage convenable δ de x_0, $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta}$ n'est pas égale à K_{x_0}; d'après ce qui précède, $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \complement\delta}$ est aussi distincte de K_{x_0}. Ces deux extrémales sont des potentiels de Green, et le théorème se déduit de l'inégalité

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E} \leqslant \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta} + \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \complement\delta},$$

entraînant que le premier membre surharmonique $\geqslant 0$, majoré par un potentiel de Green, est aussi un potentiel nécessairement distinct de K_{x_0}.

Exemple. — Il est immédiat que K_{x_0} n'est pas conservée par extrémisation sur l'ouvert où $K_{x_0} > \lambda > 0$ ($\lambda <$ borne sup de K_{x_0}), donc l'ensemble des points de Ω où $K_{x_0} \leqslant \lambda$ est effilé en x_0.

Dans le cas du cercle, cet ensemble est le complémentaire d'un cercle tangent intérieurement à la circonférence-frontière au point correspondant à x_0 et identifiable à x_0, ce qui donne un exemple d'ensemble effilé en x_0 au sens actuel, mais non effilé au sens ordinaire.

COROLLAIRE 1. — *Les points de* Δ *où un ensemble* $E \subset \Omega$ *est effilé forment une réunion dénombrable de compacts.*

On considère une suite (Ω_n) de domaines relativement compacts tendant en croissant vers Ω, et pour chaque Ω_n, l'ensemble e_n des points x minimaux tels que $\mathcal{E}_{K_x}^{\Omega_n \cup (\Omega - E)}$, qui

(7) Pour une fonction h harmonique > 0 dans Ω, l'ensemble des points de Δ au voisinage desquels h est associée à 0 est h-négligeable. Donc K_{x_0} minimale, associée à 0 au voisinage de tout point-frontière $\neq x_0$ (voir par exemple [9]), ne peut l'être au voisinage de x_0.

est harmonique dans Ω_n, soit $< K_x$ dans Ω_n. Tout point de e_n, s'il est non vide, est un point d'effilement de $E \cap \complement \Omega_n$, donc de E, et comme $K_x(y) - \mathcal{E}_{K_x}^{\Omega_n \cup (\Omega - E)}(y)$, est, pour y fixé, fonction semi-continue supérieurement de x, $e_n \cup \Delta_0$ est réunion dénombrable de compacts. Il en est de même de l'ensemble des points d'effilement de E, qui est réunion des $e_n \cup \Delta_0$ puisque, d'après le théorème, tout point minimal de cet ensemble est dans un certain e_n pour n assez grand.

Corollaire 2. — *Soit ω un ouvert de l'espace de Green Ω. Si $\Omega - \omega$ est effilé en un point minimal x_0, il existe un domaine composant de ω et un seul dont le complémentaire (dans Ω) est effilé en x_0.*

L'extrémale de K_{x_0} relative à ω diffère de K_{x_0} et vaut dans chaque domaine composant ω_i l'extrémale correspondante $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\omega_i}$ d'où au moins un ω_i où $K_{x_0} > \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\omega_i}$, donc de complémentaire effilé en x_0. C'est le seul, car pour tout $\omega_j \neq \omega_i$, $\Omega - \omega_j$ contient ω_i non effilé en x_0, donc ne peut être effilé en ce point.

Remarque. — La démonstration du théorème, à peine retouchée, donne le même critère (déjà connu [5]), pour l'effilement ordinaire en un point de Ω : on obtient encore l'inégalité $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E} \leqslant \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta} + \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \complement \delta}$, et on achève en remarquant que si l'extrémale est distincte de K_{x_0}, la mesure associée ne charge pas le point x_0, et réciproquement. Le corollaire 2 est aussi valable pour $x_0 \in \Omega$ et comme l'effilement de $\Omega - \omega$ équivaut alors à l'irrégularité de x_0 pour ω, il exprime sous une autre forme un résultat connu :

Si $x_0 \in \Omega$ est point-frontière irrégulier pour un ouvert ω, il est point-frontière irrégulier pour un domaine composant de ω et un seul.

III. — Le noyau Θ. Les potentiels-Θ.

15. — Partons de

$$\Theta(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)\, G(y, y_0)},$$

(x et y dans Ω-$\{y_0\}$), et prolongeons-le par continuité dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, pour y fixé, selon

$$\Theta(x, y) = \frac{K(x, y)}{G(y, y_0)}.$$

Le potentiel-Θ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, ne chargeant que Ω([8]), est défini dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$ par

$$U^{\mu}(x) = \int \Theta(x, y)\, d\mu(y),$$

qui est $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$ en chaque point x, et égal dans Ω-$\{y_0\}$ au quotient par $G(x, y_0)$ de la fonction

$$v(x) = \int \frac{G(x, y)}{G(y, y_0)}\, d\mu(y).$$

On le suppose non partout infini, ce qui équivaut à la même condition pour v dans Ω. Alors $\dfrac{d\mu(y)}{G(y, y_0)}$ est la restriction à Ω-$\{y_0\}$ d'une mesure $\geqslant 0$ m dans Ω([9]), qui ne charge pas y_0; $v(x)$ est le potentiel de Green de m, et $U^{\mu}(x)$ peut s'écrire $\int K(x, y)\, dm(y)$.

Inversement, partant d'une mesure $\geqslant 0$ m dans Ω, qui ne charge pas y_0, et de potentiel de Green non partout infini, on peut prolonger la mesure $\geqslant 0$ $d\mu(y) = G(y, y_0)\, dm(y)$ définie dans Ω-$\{y_0\}$ en une mesure $\geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$; le potentiel de Green de m s'écrit $\displaystyle\int \frac{G(x, y)}{G(y, y_0)}\, d\mu(y)$, et $\int K(x, y)\, dm(y)$ est égal à $U^{\mu}(x)$.

D'après cela, les potentiels-Θ que nous venons de définir sont aussi les potentiels $\int K(x, y)\, dm(y)$ pour lesquels m ne charge pas y_0. Outre les propriétés déjà connues de ces derniers, ils possèdent certaines propriétés de « moyenne », que nous allons indiquer rapidement. On les utilisera ensuite pour rechercher un second prolongement du noyau Θ, grâce auquel

([8]) Dans l'hypothèse où U^{μ} n'est pas partout infini, il est équivalent, d'après ce qui suit, de supposer que μ est une mesure dans Ω-$\{y_0\}$.

([9]) Car $\displaystyle\int \frac{d\mu(y)}{G(y, y_0)}$ est alors fini pour la restriction de μ à un voisinage quelconque de y_0.

on pourra définir le potentiel-Θ d'une mesure $\geqslant 0$ quelconque dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$.

16. La mesure $\mu_{x,\lambda}$ et les moyennes (x, λ). — Soit $x \in \hat{\Omega} - \{y_0\}$, et λ fini > 0, avec $\lambda < \dfrac{G(x, x)}{[G(x, y_0)]^2}$ si x est un point à l'infini de Ω. Inf $(K_x, \lambda G_{y_0})$ est un potentiel de Green, que l'on peut écrire $\displaystyle\int \frac{G(y, z)}{G(z, y_0)} d\mu_{x,\lambda}(z)$; $\mu_{x,\lambda}$ est une mesure > 0 dans Ω, portée par l'ensemble des points où $\Theta(x, y) = \lambda$, et de total $\int d\mu_{x,\lambda} = 1$.

Pour une fonction f dans Ω, on dira que $\int f d\mu_{x,\lambda}$ est sa *moyenne* (x, λ).

En raison de la symétrie du noyau Θ, toute moyenne (x, λ) d'un potentiel U^μ s'écrit aussi $\int U^{\mu_{x,\lambda}} d\mu$; sous cette forme on voit qu'elle est finie, $\leqslant U^\mu(x)$, et tend vers $U^\mu(x)$ quand λ tend vers sa borne supérieure ($+\infty$ si x n'est pas un point à l'infini); c'est de plus une fonction concave croissante de λ.

Remarque. — On voit aisément que $\mu_{x,\lambda}$ est aussi la K_x-mesure harmonique en y_0, relative au domaine où $\Theta(x, y) < \lambda$ [10]; $\dfrac{\mu_{x,\lambda}}{\lambda G_{y_0}}$ est la restriction à Ω de la mesure harmonique ordinaire en y_0, relative à ce même domaine.

17. Le prolongement du noyau Θ. — Soit $x \in \hat{\Omega} - y_0$; si l'extrémale de K_x sur un ensemble $E \subset \Omega$ est un potentiel de Green, on notera μ_x^E (et brièvement μ_x) la mesure $\geqslant 0$ telle que $\mathcal{E}_{K_x}^E(y) = \displaystyle\int \frac{G(y, z)}{G(z, y_0)} d\mu_x^E(z)$; lorsque $x \in \Omega$, elle s'exprime en fonction de l'extrémisée ε_x' par $d\mu_x^E(z) = G(z, y_0) \cdot \dfrac{d\varepsilon_x'(z)}{G(x, y_0)}$.

Son potentiel-Θ sera aussi dit *associé* à l'extrémale $\mathcal{E}_{K_x}^E$.

THÉORÈME 6. — *Pour tout point $x \in \Delta$, il existe une fonction > 0 minima de y dans $\hat{\Omega}$, qu'on notera $\Theta(x, y)$, qui est égale à cette fonction dans Ω, est semi-continue inférieurement, et majore en tout x' toutes ses moyennes (x', λ). Elle est symétrique en x et y, et $\Theta(x, x) = +\infty$.*

[10] Le point d'Alexandroff de Ω est de K_x-mesure harmonique nulle pour ce domaine.

Nous allons construire ce noyau Θ de la façon suivante : Extrémisons K_x hors d'un compact α de Ω, et considérons le potentiel-Θ $U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}(y) = \int \Theta(y, z)\, d\mu_x^{\Omega-\alpha}(z)$, qui vaut $\frac{\mathcal{E}_{K_x}^{\Omega-\alpha}}{G_{y_0}}$ dans Ω, et la limite de ce quotient, ou *pente* [9] de $\mathcal{E}_{K_x}^{\Omega-\alpha}$, en tout point $y \in \Delta$. Nous allons voir que sa limite $\Theta(x, y)$ pour α croissant vers Ω satisfait aux conditions de l'énoncé. Cette fonction est évidemment > 0 semi-continue inférieurement dans $\hat{\Omega}$, égale à $\Theta(x, y)$ dans Ω, et l'inégalité de moyenne qui résulte par passage à la limite de l'inégalité analogue vérifiée par $U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}$ entraîne immédiatement $\Theta(x, x) = +\infty$.

La propriété de minima vient de ce que toute moyenne (x', λ) : $\int \Theta(x, z)\, d\mu_{x', \lambda}(z) = U^{\mu_{x', \lambda}}(x)$, tend vers $\Theta(x, x')$ lorsque $\lambda \to +\infty$ $(x' \in \Delta)$. Car si l'on reprend le compact α de Ω, on voit que $U^{\mu_{x', \lambda}}$ majore, pour λ assez grand, le potentiel-Θ $U^{\mu_{x'}^{\Omega-\alpha}}$ associé à l'extrémale de $K_{x'}$ relative à $\Omega - \alpha$, d'où l'on déduit $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} U^{\mu_{x', \lambda}}(x) \geqslant \Theta(x', x)$, puis l'égalité grâce à

$$\lim_{\lambda \to +\infty} U^{\mu_{x', \lambda}}(x) \leqslant \Theta(x, x'),$$

et à la *symétrie* qui résulte du lemme suivant :

LEMME 2. — *Quels que soient les points x, x' de $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, et le compact α de Ω dont la frontière $\overset{*}{\alpha}$ ne contient pas y_0, on a*

$$U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}(x') = U^{\mu_{x'}^{\Omega-\alpha}}(x).$$

Démontrons la propriété dans le seul cas non immédiat où x et $x' \in \Delta$. Soit une suite $y_n \to x'$, $y_n \in \Omega$, pour laquelle on sait que

$$\int \Theta(y_n, z)\, d\mu_x(z) = \int \Theta(x, z)\, d\mu_{y_n}(z).$$

Si ν est une mesure > 0 quelconque sur un compact de Ω, de potentiel de Green φ, on a

$$\int \frac{\varphi}{G_{y_0}}\, d\mu_{y_n} = \int \mathcal{E}_{K_{y_n}}^{\Omega-\alpha}\, d\nu$$

où $\mathcal{E}_{K_{y_n}}^{\Omega-\alpha}$ converge uniformément localement vers $\mathcal{E}_{K_{x'}}^{\Omega-\alpha}$; donc le premier membre tend vers

$$\int \mathcal{E}_{K_{x'}}^{\Omega-\alpha}\, d\nu = \int \frac{\varphi}{G_{y_0}}\, d\mu_{x'},$$

et comme toute fonction finie continue sur $\overset{*}{\alpha}$ peut être approchée uniformément par un quotient $\frac{\varphi}{G_{y_0}}$, on voit que μ_{y_n} converge faiblement (ou vaguement selon H. Cartan-Bourbaki) vers $\mu_{x'}$.

Par suite

$$\int \Theta(x, z)\, d\mu_{y_n}(z) \to \int \Theta(x, z)\, d\mu_{x'}(z),$$

tandis que, par la convergence uniforme de $\Theta(y_n, z)$ vers $\Theta(x', z)$, $z \in \overset{*}{\alpha}$,

$$\int \Theta(y_n, z)\, d\mu_x(z) \to \int \Theta(x', z)\, d\mu_x(z),$$

et on conclut par passage à la limite sur l'inégalité du début.

On donnera plus loin (n° 19) une autre caractérisation de ce noyau Θ.

Remarque. — La démonstration du théorème montre aussi que, pour x fixé $\in \Delta$, le potentiel-Θ $U^{\mu_{x,\lambda}}(y)$ tend vers $\Theta(x, y)$ quand $\lambda \to +\infty$, ce qui complète la propriété analogue immédiate relative à un point $x \in \Omega - \{y_0\}$.

Quelques propriétés de $\Theta(x_0, x)$ pour x_0 minimal.

1° *Si $\Theta(x, y)$ reste borné lorsque x varie au voisinage d'un point $x_1 \in \Delta$, et y dans un voisinage δ de x_0, $\Theta(x_0, x)$ est continu de x au point x_1.*

Soit ω un voisinage ouvert de x_0 complètement intérieur à δ, et soit $U^{\mu_{x_0}}(x) = \int \Theta(x, y)\, d\mu_{x_0}(y)$ le potentiel-Θ associé à l'extrémale de K_{x_0} relative à $\omega \cap \Omega$ (μ_{x_0} mesure > 0 sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$); d'après l'hypothèse, $U^{\mu_{x_0}}(x) = \Theta(x_0, x)$ au voisinage de x_1 dans $\hat{\Omega}$, et on peut choisir le compact α de $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ de façon que le potentiel-Θ de la restriction de μ_{x_0} au complémentaire de α soit arbitrairement petit dans un voisinage convenable de x_1. Comme le potentiel-Θ de la restriction de μ_{x_0} au compact α est fini continu en tout point de Δ, $\Theta(x_0, x)$ est continu de x au point x_1, et même aux points suffisamment voisins.

Il serait intéressant de savoir si la même hypothèse entraîne, au moins lorsque x_1 est aussi minimal, la continuité de Θ par rapport à l'ensemble (x, y) au voisinage des deux points x_0, x_1.

2° *Pour $x_0 \in \hat{\Omega}$-$\{y_0\}$ et $\lambda > 0$ fixés, le potentiel $U^{\mu_{x_0,\lambda}}(x)$ vaut* $\inf(\Theta(x_0, x), \lambda)$ *dans Ω et en tout point minimal.*

Égalité évidente dans Ω; sur Δ,

$$U^{\mu_{x_0},\lambda}(x) \leqslant \inf(\Theta(x_0, x), \lambda) = f(x).$$

f est semi-continue inférieurement dans $\hat{\Omega}$, donc en un point $x_1 \in \Delta$, $f(x_1) \leqslant \liminf_{x \to x_1,\, x \in \Omega} f(x) = \liminf_{x \to x_1,\, x \in \Omega} U^{\mu_{x_0},\lambda}(x)$, et si x_1 est minimal, $\liminf_{x \to x_1,\, x \in \Omega} U^{\mu_{x_0},\lambda}(x) = U^{\mu_{x_0},\lambda}(x_1)$, (th. 3), d'où la propriété.

Corollaire. — $\Theta(x_0, x)$, (x_0 *minimal*), *est invariant par moyenne* (x', λ), *pour* $\lambda > 0$ *assez grand, en tout point* x' *où* $\Theta(x_0, x')$ *est fini.*

Car toute moyenne (x', λ) s'écrit

$$\int \Theta(x_0, z)\, d\mu_{x',\lambda}(z) = U^{\mu_{x'},\lambda}(x_0),$$

qui pour x_0 minimal vaut $\Theta(x_0, x')$ dès que $\lambda \geqslant \Theta(x_0, x')$.

On verra au n° suivant que $\Theta(x_0, x)$ peut être infini en un point x non minimal distinct de x_0. Mais il serait important de savoir si $\Theta(x_0, x)$ est fini en tout point minimal distinct de x_0.

18. Les potentiels-Θ.

Le potentiel-Θ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$ sera défini hors de y_0 par

$$U^{\mu}(x) = \int \Theta(x, y)\, d\mu(y),$$

supposé non partout infini. Cela équivaut à la même condition pour la fonction de x dans Ω, $v(x) = \int K(y, x)\, d\mu(y)$, alors surharmonique $\geqslant 0$ et de mesure associée ne chargeant pas y_0; et $U^{\mu}(x)$ est dans Ω-$\{y_0\}$ égal à $\dfrac{v(x)}{G(x, y_0)}$.

Inversement, toute fonction surharmonique $v \geqslant 0$ dans Ω, dont la mesure associée ne charge pas y_0, admet une représentation $v(x) = \int K(y, x)\, d\mu(y)$, où μ est une mesure $\geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$; elle est donc, hors de y_0, de la forme

$$G(x, y_0) \int \Theta(x, y)\, d\mu(y),$$

c'est-à-dire qu'il existe un potentiel-Θ égal à $\dfrac{v}{G_{y_0}}$ dans Ω-$\{y_0\}$. On le dira *associé* à v.

Ainsi les potentiels-Θ apparaissent comme les prolongements à l'espace $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$ des quotients $\frac{v}{G_{y_0}}$ définis dans Ω-$\{y_0\}$ seulement (et où v est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dont la mesure associée ne charge pas y_0).

Propriétés. — 1° *U^μ est semi-continu inférieurement dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, et déterminé dans cet espace par ses seules valeurs dans Ω.*

Si α est un compact de Ω, on notera $\mu^{\Omega-\alpha}$ la mesure $\geqslant 0$ sur $\overset{*}{\alpha}$ telle que $\int K(y,\, x)\, d\mu^{\Omega-\alpha}(y)$ représente l'extrémale de v relative à $\Omega-\alpha$, $\mu_x^{\Omega-\alpha}$ la mesure analogue relative à K_x. Les propriétés précédentes du potentiel U^μ découlent aisément du lemme suivant, où l'on fera tendre α vers Ω :

Lemme 3. — *Pour tout point $x \in \hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, et tout compact α de Ω, on a*

$$U^{\mu^{\Omega-\alpha}}(x) = \int U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}(y)\, d\mu\,(y),$$

ce qui s'écrit aussi, par interversion d'intégrations

$$U^{\mu^{\Omega-\alpha}}(x) = \int U^{\mu}(y)\, d\mu_x^{\Omega-\alpha}(y).$$

Égalité immédiate si $x \in \Omega$. Soit $x \in \Delta$, et une suite $x_n \to x$, $x_n \in \Omega$, pour laquelle on a donc

$$U^{\mu^{\Omega-\alpha}}(x_n) = \int U^{\mu_{x_n}^{\Omega-\alpha}}(y)\, d\mu\,(y).$$

$U^{\mu^{\Omega-\alpha}}(x_n) \to U^{\mu^{\Omega-\alpha}}(x)$, tandis que $U^{\mu_{x_n}^{\Omega-\alpha}}(y) = U^{\mu_y^{\Omega-\alpha}}(x_n)$ tend vers $U^{\mu_y^{\Omega-\alpha}}(x) = U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}(y)$, en restant borné indépendamment de n et y, d'où, pour un voisinage compact σ de y_0,

$$\int_{\hat{\Omega}-\sigma} U^{\mu_{x_n}^{\Omega-\alpha}}(y)\, d\mu\,(y) \to \int_{\hat{\Omega}-\sigma} U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}(y)\, d\mu\,(y).$$

Comme $\int_\sigma \frac{d\mu}{G_{y_0}}$ est fini, la convergence uniforme locale de $\mathcal{E}_{K_{x_n}}^{\Omega-\alpha}$ vers $\mathcal{E}_{K_x}^{\Omega-\alpha}$ entraîne que $\int_\sigma U^{\mu_{x_n}^{\Omega-\alpha}}\, d\mu = \int_\sigma \mathcal{E}_{K_{x_n}}^{\Omega-\alpha} \frac{d\mu}{G_{y_0}}$ tend vers $\int_\sigma \mathcal{E}_{K_x}^{\Omega-\alpha} \frac{d\mu}{G_{y_0}} = \int_\sigma U^{\mu_x^{\Omega-\alpha}}\, d\mu$, et le résultat s'en déduit.

Remarque. — Si l'on prolonge $\Theta(x, y)$ pour x en y_0 par la condition $\Theta(y_0, y) = 0$ $(y \in \hat{\Omega}\text{-}\{y_0\})$, $U^\mu(x)$ défini selon $\int \Theta(x, y)\, d\mu(y)$ a un sens en y_0, où il est encore semi-continu inférieurement. Car $U^\mu(y_0) = 0$, et pour la fonction surharmonique $\varphi \geqslant 0$ dont la mesure associée ne charge pas y_0, $\liminf_{x \to y_0,\, x \neq y_0} \dfrac{\varphi(x)}{G(x, y_0)} = 0$. Mais on continuera dans la suite à ne considérer les potentiels-Θ que dans l'espace $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$.

2° La donnée de U^μ détermine μ dans Ω, et il existe une seule mesure μ_0 sur $\Omega \cup \Delta_1$ telle que $U^{\mu_0} = U^\mu$: sa restriction à Δ est la mesure canonique associée, par la théorie de Martin, à la plus grande minorante harmonique de la fonction surharmonique $\geqslant 0$ $\int K(y, x)\, d\mu(y)$; on la dira encore *mesure canonique associée à* U^μ.

Deux mesures distinctes sur Δ, dont l'une n'est pas canonique, peuvent donc engendrer le même potentiel-Θ. C'est ainsi que, si ν_{x_0} est la mesure canonique associée à la fonction K_x non minimale, $(x_0 \in \Delta)$,

$$U^{\nu_{x_0}}(x) = \Theta(x_0, x).$$

Donc, au point x_0 non minimal,

$$U^\mu(x_0) = \int U^\mu(x)\, d\nu_{x_0}(x).$$

3° *Propriétés de moyenne.* Par la symétrie du noyau Θ, toute *moyenne* (x_0, λ) *d'un potentiel* U^μ vérifie l'égalité

$$\int U^\mu\, d\mu_{x_0, \lambda} = \int U^{\mu_{x_0}, \lambda}\, d\mu ;$$

elle est finie, $\leqslant U^\mu(x_0)$, et tend vers $U^\mu(x_0)$ quand λ tend vers sa borne supérieure (car d'après la remarque suivant le théorème 6, $U^{\mu_{x_0}, \lambda}(x) \to \Theta(x_0, x)$ dans $\hat{\Omega}$).

$\int U^\mu\, d\mu_{x_0, \lambda}$ est une fonction concave de λ ; donc son quotient par λ, qui est aussi la *moyenne* (x_0, λ) *de* $\dfrac{U^\mu(x)}{\Theta(x_0, x)}$, admet, quand λ tend vers sa borne supérieure, une limite finie $\geqslant 0$ [11], et si $x_0 \in \Delta$, cette limite est égale à la mesure de l'ensemble des

[11] Cette limite est la pente de la direction asymptotique de la courbe représentative, dont on sait déjà qu'elle vaut la mesure de $\{x_0\}$, si $x_0 \in \Omega$.

points où $\Theta(x_0, x) = +\infty$ pour la mesure canonique associée à U^μ.

On voit ainsi que si x_0 n'est pas minimal, la mesure canonique ν_{x_0} ne charge que l'ensemble des points minimaux où $\Theta(x_0, x) = +\infty$, et qu'il existe au moins deux tels points distincts.

19. **Potentiels-Θ et effilement.** — L'introduction des potentiels-Θ permet de donner de nouvelles propriétés de l'effilement à la frontière, et plus particulièrement en un point minimal; elles sont encore l'extension de propriétés connues de l'effilement ordinaire.

En reprenant le raisonnement du théorème 2, on démontre d'abord le

Théorème 7. — *Tout potentiel-Θ d'une mesure $\geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$ vaut au point $x_0 \neq y_0$ sa lim inf quand x tend vers x_0 sur tout ensemble de Ω non effilé en x_0.*

Application. — Ce théorème donne une nouvelle caractérisation du noyau $\Theta(x, y)$ pour $x \in \Delta$: en tout point x' minimal,

$$\Theta(x, x') = \liminf_{y \to x',\, y \in \Omega} \Theta(x, y)$$

et on passe au cas de x' quelconque $\in \Delta$ par

$$\Theta(x, x') = \int \Theta(x, y)\, d\nu_{x'}(y).$$

D'autre part, si x_1 et y_1 sont deux points minimaux, la symétrie entraîne

$$\Theta(x_1, y_1) = \liminf_{y \to y_1,\, y \in \Omega} \Theta(x_1, y) = \liminf_{x \to x_1,\, x \in \Omega} \Theta(x, y_1),$$

et il faudrait bien savoir si cela vaut aussi la $\liminf\limits_{\substack{x \to x_1,\, y \to y_1 \\ x,\, y \in \Omega}} \Theta(x, y)$.

On sait que pour $x_0 \in \Omega$, $\liminf\limits_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ est égale à la mesure de $\{x_0\}$ pour la mesure associée au potentiel-Θ U; il y a extension à un point minimal selon le

Lemme 4. — *Soit* U *le potentiel-Θ d'une mesure $\geqslant 0$ dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$; si x_0 est minimal, $\liminf\limits_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ est finie $\geqslant 0$, égale* *à la borne inférieure de* $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ *dans* Ω, *et à la mesure de* $\{x_0\}$ *pour la mesure canonique associée à* U.

L'invariance de K_{x_0} par extrémisation sur le complémentaire d'un voisinage quelconque de x_0 entraîne immédiatement l'égalité de $\liminf\limits_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ avec la borne inférieure de $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ dans Ω; cette borne inférieure est nulle si la mesure canonique associée à U ne charge pas $\{x_0\}$, donc égale à la mesure de $\{x_0\}$ dans le cas général.

Remarque. — Il est donc immédiat que l'égalité, pour tout U, de $\liminf\limits_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ avec la limite pour $\lambda \to +\infty$ de la moyenne (x_0, λ) de $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$, équivaut à ce que le noyau $\Theta(x_0, x)$ soit fini en tout minimal distinct de x_0.

En transposant à $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$ l'inégalité de définition de l'effilement, on obtient alors une nouvelle caractérisation de l'effilement en un point minimal, qui est à rapprocher d'un critère connu dans le cas ordinaire [3], le noyau newtonien étant ici remplacé par le noyau $\Theta(x_0, x)$:

THÉORÈME 8. — *Pour qu'un ensemble* $E \subset \Omega$ *soit effilé en un point minimal* x_0 *non isolé de* $\{x_0\} \cup E$, *il faut et il suffit qu'il existe un potentiel-*Θ *d'une mesure* > 0 *dans* $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$, (*et même seulement dans* $\Omega\text{-}\{y_0\}$), *soit* U, *tel que*

$$\liminf_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} < \liminf_{x \to x_0,\, x \in E} \frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} \tag{1}$$

ou, ce qui est équivalent, un potentiel-Θ *tel que*

$$\frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} \to +\infty \; (x \to x_0,\ x \in E). \tag{2}$$

Sans hypothèse d'effilement, on passe directement du potentiel-Θ d'une mesure $\mu > 0$ dans $\Omega\text{-}\{y_0\}$, vérifiant la condition (1), à un autre potentiel-Θ qui vérifie la condition (2) par le raisonnement du théorème 1, en utilisant ici l'invariance en α de $\liminf\limits_{x \to x_0,\ x \in E} \dfrac{U_\alpha(x)}{\Theta(x_0, x)}$ pour le potentiel U_α de la restriction de μ au complémentaire d'un compact $\alpha \subset \Omega$.

Si l'ensemble $E \subset \Omega$ est effilé au point minimal x_0, l'extrémale de K_{x_0} relative à $\Omega - E$ est distincte de K_{x_0}, et le potentiel-Θ associé (potentiel d'une mesure > 0 dans $\Omega\text{-}\{y_0\}$ seulement) vaut $\Theta(x_0, x)$ sur E diminué d'un ensemble e polaire; en lui ajoutant un potentiel-Θ d'une mesure > 0 dans $\Omega\text{-}\{y_0\}$, égal à $+\infty$ sur e, on obtient un nouveau potentiel-Θ, soit U, tel que $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} > 1$ sur E, et $\liminf\limits_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} = 0$.

Réciproquement, partant de la condition (1)

$$\liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} < \gamma < \liminf_{x \to x_0,\ x \in E} \frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)},$$

on voit qu'il existe un voisinage δ de x_0 tel que le potentiel-Θ, soit V, associé à l'extrémale de K_{x_0} relative à $\Omega - E \cap \delta$ vérifie l'inégalité

$$\liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{V(x)}{\Theta(x_0, x)} \leqslant \frac{1}{\gamma} \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} < 1,$$

d'où $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap \delta} \not\equiv K_{x_0}$, et l'effilement de E au point x_0.

En utilisant le noyau Θ, on peut, pour un point minimal, améliorer le critère du théorème 4 de la façon suivante:

THÉORÈME 4'-9. — *Soit* $E_{x_0}^\lambda$ *l'ensemble des points où* $\Theta(x_0, x) > \lambda > 0$. *Pour que* E *soit effilé en* x_0 *minimal, il faut et il suffit que* $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap E_{x_0}^\lambda}(y_0)$ *tende vers zéro quand* $\lambda \to +\infty$.

Les ensembles $E_{x_0}^\lambda$ forment la base d'un filtre $\mathcal{F}$ moins fin que le filtre des voisinages de x_0, et si E effilé en x_0 rencontre tout $E_{x_0}^\lambda$, on peut former un potentiel-Θ, soit U, tel que $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} \to +\infty$ quand $x \in E$ tend vers x_0 selon $\mathcal{F}$, et que la fonction surharmonique > 0 v, égale à $G_{y_0}.U$ hors de y_0, soit finie au point y_0. Soit $k > 0$ tel que $kv(y_0) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitraire); on a $k\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)} > 1$ dans $E \cap E_{x_0}^\lambda$ pour λ assez grand, d'où $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E \cap E_{x_0}^\lambda} \leqslant kv$ dans Ω, et en particulier au point y_0. Réciproque immédiate.

Sous une autre forme, *l'effilement de* E *au point* x_0 *équivaut* *à ce que la valeur en x_0 du potentiel capacitaire de* $E \cap E^{\lambda}_{x_0}$ *tende vers zéro quand* λ *tend vers* $+\infty$.

Remarque. — On voit facilement que cette condition n'est pas vérifiée pour un point non minimal.

Capacité au voisinage de la frontière. Soit dans l'espace de Green Ω un ensemble E auquel y_0 n'est pas adhérent. Extrémisons ε_{y_0} sur $\Omega - E$ et considérons l'énergie de la distribution balayée comme fonctionnelle de E. Prise pour les compacts K de $\Omega\text{-}\{y_0\}$, elle définit une *capacité de Choquet* [22] $\mathcal{C}(K)$ alternée d'ordre infini, et vaut pour l'ensemble E précédent la capacité extérieure $\bar{\mathcal{C}}(E)$. Elle est nulle si et seulement si E est polaire ([12]).

En utilisant cette fonctionnelle et les surfaces de niveau du noyau Θ, on peut songer à rechercher un critère d'effilement sous la forme suivante :

Pour $E \subset \Omega$ et x_0 *minimal*, soit e_n la partie de E dans « l'intersphère » $s^n \leqslant \Theta(x_0, x) \leqslant s^{n+1}$, s constante > 1. L'effilement de E au point x_0 équivaut-il à la convergence de la série $\sum_1^\infty s^n \bar{\mathcal{C}}(e_n)$?

La condition est suffisante, mais on ne sait si elle est nécessaire.

Signalons toutefois que ce critère est valable dans le demi-espace (cf. chapitre III).

Propriété. — *Si* E *est effilé en x_0 minimal, l'ensemble e_λ des points de* E *où* $\Theta(x_0, x) = \lambda$ *a une mesure-$\mu_{x_0,\lambda}$ extérieure qui tend vers zéro quand* $\lambda \to +\infty$.

On se ramène au cas de E ouvert. $\mathcal{E}^{\Omega-E}_{K_{x_0}}$ est un potentiel de Green, donc pour le potentiel-Θ associé, $U^{\mu^{\Omega-E}_{x_0}}$,

$$\int \frac{U^{\mu^{\Omega-E}_{x_0}}(x)}{\Theta(x_0, x)}\, d\mu_{x_0,\lambda}(x)$$

tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$. Or $\dfrac{U^{\mu^{\Omega-E}_{x_0}}(x)}{\Theta(x_0, x)} = 1$ sur E diminué d'un ensemble polaire qui est de mesure-$\mu_{x_0,\lambda}$ nulle, d'où

$$\mu_{x_0,\lambda}(e_\lambda) = \int_{e_\lambda} \frac{U^{\mu^{\Omega-E}_{x_0}}(x)}{\Theta(x_0, x)}\, d\mu_{x_0,\lambda}(x) \to 0, \qquad \lambda \to +\infty.$$

([12]) $\bar{\mathcal{C}}(E)$ n'est autre que la contenance-G_{y_0} définie par M. Brelot dans [5], d'ailleurs égale à $\mathcal{E}^{\Omega-E}_{G_{y_0}}(y_0)$.

Remarque. — Le lemme 4, les théorèmes 8 et 9, et cette dernière propriété sont valables, ainsi que leurs démonstrations, pour un point $x_0 \in \Omega\text{-}\{y_0\}$, à condition toutefois de faire tendre λ vers sa borne supérieure *finie* si x_0 est un point à l'infini de Ω.

20. — Dans le cas simple du cercle ou de la sphère, on connait l'expression du noyau de Poisson et de la fonction de Green, et on voit facilement que sur la frontière $\Theta(x, y)$ vaut $\frac{1}{|x-y|^\tau}$ à un facteur près (τ, dimension de l'espace). C'est dire que le potentiel-Θ d'une mesure > 0 sur la frontière de Martin y est presque partout infini. En fait, dans le cas général, on démontrera (n° 27) que *si* μ *est une mesure canonique sur* Δ, *les points de* Δ *où* $U^\mu(x) < +\infty$ *forment un ensemble de* μ*-mesure nulle*, et c'est peut-être ce qui empêche les potentiels-Θ de jouer tout rôle important.

IV. — Topologie fine et pseudo-limite.

21. — Par définition l'effilement d'un ensemble de $\hat{\Omega}$ en un point x_0 quelconque $\neq y_0$ s'exprime comme au chapitre II en remplaçant les potentiels de noyau K par les potentiels-Θ d'une mesure dans $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$. Pour un ensemble $E \subset \Omega \cup \Delta_1$, on montre que l'effilement en un point x_0 équivaut à l'existence d'un potentiel-Θ, de mesure > 0 dans $\Omega\text{-}\{y_0\}$, tel que $U(x_0) < \liminf\limits_{\substack{x \to x_0,\, x \in E \\ x \neq x_0}} U(x)$, et même à celle d'un potentiel-Θ fini en x_0, et tendant vers $+\infty$ quand $x \in E$ tend vers x_0. Mais on ne sait s'il y a la même équivalence pour les ensembles de Δ_0.

Les ensembles contenant un point x_0 et de complémentaire effilé en x_0 sont les voisinages de ce point dans la topologie $\mathfrak{T}$ la moins fine sur $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$ rendant continus les potentiels-Θ; on l'appellera *topologie fine* parce qu'elle induit sur $\Omega\text{-}\{y_0\}$ la topologie fine de H. Cartan, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les fonctions sousharmoniques. Elle est plus fine que la topologie de Martin, et $\hat{\Omega}\text{-}\{y_0\}$, muni de $\mathfrak{T}$, est un espace régulier.

Les notions prises selon $\mathfrak{T}$ seront qualifiées de l'adjectif *fin* ou de l'adverbe *finement*. Dire qu'un ensemble E est effilé en x_0, c'est dire que x_0 est finement isolé de $\{x_0\} \cup E$, ou qu'il n'appartient pas à l'adhérence fine de E. D'après le théorème 3, les points minimaux sont les points de Δ finement adhérents à Ω; ils constituent la frontière fine de Ω.

Toute limite selon $\mathcal{G}$ sera aussi dite *pseudo-limite.* Nous verrons dans la suite de ce travail l'importance de la notion de pseudo-limite dans l'étude de l'allure à la frontière des fonctions surharmoniques > 0.

Des théorèmes 7 et 8, il résulte que pour tout potentiel-Θ noté U, $U(x)$ et $\dfrac{U(x)}{\Theta(x_0, x)}$, considérés sur Ω seulement, admettent en tout point x_0 minimal des pseudo-limites égales à leurs limites inférieures respectives en ce point.

Soulignons enfin une propriété importante de la pseudo-limite, déjà connue dans le cas ordinaire (voir par exemple [3]) :

THÉORÈME 10. — *Si $f(x)$ définie dans un ensemble quelconque $\omega \subset \Omega$ admet la pseudo-limite l en un point $x_0 \in \Delta_1$ (ou $\in \Omega$ mais $\neq y_0$), et où ω n'est pas effilé, il existe un ensemble* E *effilé fixe tel que $f(x) \to l$ quand $x \in \omega \cap \complement E$ tend vers x_0 au sens de la topologie de Martin.*

Considérons une suite $(\mathcal{V}_n)$ de voisinage de l dans $\overline{R}$, décroissante de limite l, et pour chaque n, un ensemble $E_n \subset \Omega$ effilé en x_0 et un voisinage δ_n de x_0 tels que :

a) $f(x) \in \mathcal{V}_n$ pour $x \in \omega \cap \complement E_n$,

b) $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E_n \cap \delta_n}(y_0) < \varepsilon_n \left(\varepsilon_n > 0,\ \sum_1^\infty \varepsilon_n < 1\right)$.

Soit $E = \bigcup_n (E_n \cap \delta_n)$. L'extrémale $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E}$, majorée par $\sum_1^\infty \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E_n \cap \delta_n}$ est, au point y_0, $< 1 = K_{x_0}(y_0)$, ce qui montre l'effilement de E au point x_0, et on voit que $f(x) \to l$ quand $x \in \omega \cap \complement E$ tend vers x_0 au sens de la topologie de Martin.

V. — Domaines partiels.

Soit ω un sous-domaine de l'espace de Green Ω, et soit $\overset{*}{\omega}$ sa frontière dans $\hat{\Omega}$. La théorie de Martin est applicable à l'espace de Green ω, dont la frontière de Martin sera notée Δ^{ω}, et on peut évidemment définir pour cet espace une notion d'effilement analogue à celle définie pour Ω. Nous allons donner quelques propriétés de Δ^{ω} et de l'effilement relatif à ω.

22. La frontière de Martin de ω.

THÉORÈME 11. — *Soit ω un sous-domaine de Ω, de fonction de Green g, et soit $x_0 \in \overset{*}{\omega}$, minimal ou intérieur à Ω. Pour que $\Omega - \omega$ soit effilé au point x_0, il faut et il suffit que pour un (ou tout) point $y \in \omega$, on ait* $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} \dfrac{g(x, y)}{G(x, y_0)} > 0$.

On sait [20] que pour x et $y \in \omega$,

$$g_y(x) = G_y(x) - \mathcal{E}^{\omega}_{G_y}(x),$$

où $\mathcal{E}^{\omega}_{G_y}(x) = \int G(x, z)\, d\varepsilon'_y(z)$, potentiel de Green de la mesure extrémisée de ε_y sur ω, de sorte que

$$\frac{g(x, y)}{G(x, y_0)} = K(x, y) - \int K(x, z)\, d\varepsilon'_y(z),$$

et $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} \dfrac{g(x, y)}{G(x, y_0)} = K(x_0, y) - \liminf\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} \displaystyle\int K(x, z)\, d\varepsilon'_y(z)$.

L'effilement de $\Omega - \omega$ au point x_0 entraine alors, pour tout $y \in \omega$,

$$K(x_0, y) > \int K(x_0, z)\, d\varepsilon'_y(z) = \liminf_{x \to x_0,\ x \in \omega} \int K(x, z)\, d\varepsilon'_y(z),$$

ω étant non effilé en x_0, d'où $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} \dfrac{g(x, y)}{G(x, y_0)} > 0$.

Réciproquement, si cette inégalité a lieu pour un point $y \in \omega$, la fonction K_{x_0} ne coïncide pas avec son extrémale relative à ω, car à priori

$$K(x_0, y) - \int K(x_0, z)\, d\varepsilon'_y(z) \geqslant \limsup_{x \to x_0,\ x \in \omega} \frac{g(x, y)}{G(x, y_0)},$$

donc $\Omega - \omega$ est effilé au point x_0.

Remarque. — Si $x_0 \in \Omega$, la condition de l'énoncé équivaut évidemment à $\limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} g(x, y) > 0$, forme connue de l'irrégularité du point x_0 pour ω.

THÉORÈME 12 (*). — *Soit x_0 un point de $\overset{*}{\omega}$, minimal ou intérieur à Ω. Si $u = K_{x_0}$ est distincte de $\overset{*}{H}{}^{\omega}_{u}$, la différence $u - \overset{*}{H}{}^{\omega}_{u}$ est une fonction minimale dans ω.*

(*) Théorème inédit de M. Brelot.

Montrons que toute fonction w harmonique > 0 dans ω, moindre que $u - \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}}$, lui est proportionnelle. En prolongeant $w + \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}}$ par u hors de ω, on obtient une fonction quasi-surharmonique dont la régularisée w_1 est dans les deux cas de la forme $w_1 = v + cu$, où c est une constante $(0 < c < 1)$, et v le potentiel de Green d'une mesure > 0, portée par $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ et ne chargeant pas les points d'effilement de $\Omega - \omega$, donc invariante par extrémisation sur ω.

Comme $v = (1-c)u$ quasi-partout sur $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$, on voit que, dans ω,

$$v = (1-c)\overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}},$$

et

$$w = w_1 - \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}} = c(u - \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}}).$$

De plus, en posant toujours $u = \mathrm{K}_{x_0}$, et en prenant $x_0 \in \overset{*}{\omega}$ minimal ou intérieur à Ω, et point d'effilement de $\Omega - \omega$:

Théorème 13. — *Soit x'_0 le point de Δ^ω, pôle de la fonction minimale $u' = u - \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}}$. Toutes les suites $x_n \to x_0$, $x_n \in \omega$, telles que $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{g(x_n, y)}{\mathrm{G}(x_n, y_0)} > 0$ (ce qui est indépendant de y), convergent vers x'_0 dans l'espace de Martin relatif à ω.*

Il revient au même de montrer, en supposant $y_0 \in \omega$, que $\dfrac{g(x_n, y)}{g(x_n, y_0)}$ tend vers la fonction minimale « normalisée » $\dfrac{u'(y)}{u'(y_0)}$.

S'il n'y avait pas convergence, on pourrait trouver une suite extraite $\dfrac{g(x'_n, y)}{g(x'_n, y_0)}$ convergeant vers une fonction w harmonique > 0, distincte de $\dfrac{u'(y)}{u'(y_0)}$; une nouvelle extraction donnerait la suite x''_n telle que $\dfrac{g(x''_n, y)}{\mathrm{G}(x''_n, y_0)}$ converge vers une limite harmonique > 0 [13] moindre que $u - \overset{\omega}{\underset{*}{\mathrm{H}_u}}$, donc proportionnelle, d'où pour $\dfrac{g(x''_n, y)}{g(x''_n, y_0)}$ la limite $\dfrac{u'(y)}{u'(y_0)}$, par ailleurs égale à $w(y)$, et la contradiction cherchée.

Pour $x_0 \in \Omega$, on retrouve un résultat donné par M. Brelot dans [14].

[13] Car les $\dfrac{g(x'_n, y)}{\mathrm{G}(x'_n, y_0)}$ forment une famille normale dont on peut extraire une suite convergeant vers une fonction harmonique > 0.

Lorsque le point x_0 est extérieur à $\Omega - \omega$, on a le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 14. — *Soient ω un ouvert de Ω, et sur $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ un point x_0 minimal extérieur à $\Omega - \omega$. Pour toutes les suites $x_n \to x_0$, $x_n \in \omega$, $\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_n}}$ tend dans ω vers $\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}$; donc si ω est connexe, toutes les suites $x_n \to x_0$ convergent vers le même point minimal x'_0 de la frontière de Martin de ω.*

Dans Ω, $\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_n}}(y) = \int K(x, y) d\mu_n(x)$, où $\mu_n > 0$ ne charge que $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$, et a un total $\int d\mu_n \leqslant 1$. On peut donc en extraire μ'_n convergeant vaguement vers une mesure $\mu > 0$ portée par l'adhérence de $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ dans $\hat{\Omega}$; $v(y) = \int K(x, y)\, d\mu(x)$ est surharmonique > 0 dans Ω, et pour tout point $y \in \omega$,

$$\int K(x, y)\, d\mu'_n(x) \to \int K(x, y)\, d\mu(x),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}^{\omega}{}_{x'_n}(y) \to v(y).$$

Nous allons montrer que $v(y) = \mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}(y)$, d'où l'on déduira aisément la première partie du théorème.

Soit, pour y fixé $\in \Omega$, $\varepsilon_y'^r$ l'extrémisée de ε_y sur un domaine sphérique (ou circulaire) de centre y et rayon $r > 0$; son potentiel

$$U^r(x) = \int K(x, z)\, d\varepsilon_y'^r(z)$$

est fini continu dans $\hat{\Omega}$, donc

$$\int U^r(x)\, d\mu'_n(x) \to \int U^r(x)\, d\mu(x),$$

ce qui s'écrit encore, par interversion d'intégrations,

$$\int \mathcal{E}^{\omega}_{K_{x'_n}}(z)\, d\varepsilon_y'^r(z) \to \int v(z)\, d\varepsilon_y'^r(z).$$

Comme

$$\int \mathcal{E}_{K_{x_0}}(z)\, d\varepsilon_y'^r(z) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \mathcal{E}^{\omega}_{K_{x'_n}}(z)\, d\varepsilon_y'^r(z) \leqslant K_{x_0}(y),$$

on obtient, pour $r \to 0$, la double inégalité valable dans tout Ω :

$$\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}(y) \leqslant v(y) \leqslant K_{x_0}(y).$$

Ainsi la plus grande minorante harmonique v^* de v, égale à $\int_\Delta K(x, y)\,d\mu(x)$, est proportionnelle à K_{x_0}, et comme toute représentation intégrale de K_{x_0} minimale exige, d'après le lemme 1 de Martin [33], que x_0 appartienne au support de la mesure, v^* est nulle. Le potentiel de Green v, localement borné [14], est alors invariant par extrémisation sur ω, et égal à l'extrémale $\mathcal{E}^\omega_{K_{x_0}}$.

Si maintenant ω est connexe, pour toute suite $x_n \to x_0$,

$$\frac{g(x_n, y)}{G(x_n, y_0)} = K_{x_n}(y) - \mathcal{E}^\omega_{K_{x_n}}(y)$$

tend vers

$$K_{x_0}(y) - \mathcal{E}^\omega_{K_{x_0}}(y) = u'(y);$$

donc

$$\frac{g(x_n, y)}{g(x_n, y_0)} \to \frac{u'(y)}{u'(y_0)},$$

et la suite x_n converge vers le point x'_0 dans l'espace de Martin relatif à ω.

Corollaire. — *Pour l'ouvert ω, il existe un domaine composant ω_i, et un seul, dont x_0 est point-frontière extérieur à $\Omega - \omega_i$.*

Si ω_i est *le* domaine composant dont le complémentaire $\Omega - \omega_i$ est effilé en x_0 (coroll. 2 du th. 5), il ne peut exister de suite $x_n \to x_0$, $x_n \in \Omega - \omega_i$, car pour tout point $y \in \omega_i$, $\mathcal{E}^\omega_{K_{x_n}}(y)$ ou $\mathcal{E}^{\omega_i}_{K_{x_n}}(y)$, égale à $K_{x_n}(y)$, tendrait vers $K_{x_0}(y)$, alors qu'elle doit tendre vers $\mathcal{E}^\omega_{K_{x_0}}(y) < K_{x_0}(y)$.

23. L'effilement dans le domaine partiel ω.

Lemme 5. — *Considérons la fonction $u' = u - H^\omega_{u_*}$, et désignons par $(\mathcal{E}^E_{u'})_\omega$, $\mathcal{E}^E_u$ les extrémales, relatives à un ensemble $E \subset \omega$, de u' et u par rapport à ω et Ω respectivement. Elles vérifient dans ω la relation*

$$(\mathcal{E}^E_{u'})_\omega = \mathcal{E}^E_u - H^\omega_{u_*}.$$

Le second membre est dans ω une fonction surharmonique positive égale à u' quasi-partout dans $\omega - E$, donc majorant à priori $(\mathcal{E}^E_{u'})_\omega$. L'égalité est évidente si E est ouvert, car

[14] Cette propriété entraine que la mesure associée ne charge pas les ensembles polaires.

dans E, $\mathcal{E}_u^E = H_{\underset{*}{u}}^E$, tandis que $H_{\underset{*}{u}}^\omega = H_{\underset{*}{\varphi}}^E$, où φ sur $\overset{*}{E}$ vaut $H_{\underset{*}{u}}^\omega$ dans ω, $\underset{*}{u}$ ailleurs. On passe au cas de E *fermé dans* ω en considérant une suite décroissante d'ouverts $E_n \subset \omega$, contenant E, telle que $(\mathcal{E}_{u'}^{E_n})_\omega$ et $\mathcal{E}_u^{E_n}$ tendent respectivement vers $(\mathcal{E}_{u'}^E)_\omega$ et $\mathcal{E}_u^E$ [15]. Enfin pour E quelconque, $(\mathcal{E}_{u'}^E)_\omega$ vaut l'enveloppe inférieure des $(\mathcal{E}_{u'}^F)_\omega$ pour les F fermés dans ω, contenus dans E à un ensemble polaire près [16], d'où $(\mathcal{E}_{u'}^E)_\omega = \text{env inf}\, \mathcal{E}_u^F - H_{\underset{*}{u}}^\omega$, et on conclut à l'égalité annoncée grâce à la remarque du début, et à l'inégalité $\mathcal{E}_u^F = \mathcal{E}_u^{E \cap F} \geqslant \mathcal{E}_u^E$.

Le critère fondamental du théorème 5 nous permet alors d'établir le

THÉORÈME 15. — *Soit toujours $x_0 \in \overset{*}{\omega}$, minimal ou intérieur à Ω, et point d'effilement de $\Omega - \omega$. Soit $u = K_{x_0}$, et x'_0 le pôle sur Δ^ω de la fonction minimale $u' = u - H_{\underset{*}{u}}^\omega$. Pour un ensemble $E \subset \omega$, il est équivalent de dire qu'il est effilé au point x_0 relativement à Ω, ou qu'il est effilé au point x'_0 relativement à ω. Autrement dit, les filtres des voisinages fins de x_0 et x'_0 respectivement induisent le même filtre sur ω.*

$\Omega - \omega$ étant effilé au point x_0, pour que E le soit, il faut et il suffit que $\mathcal{E}_u^{\omega - E}$ soit distincte de u, tandis que l'effilement de E en x'_0, relativement à ω, équivaut à ce que $(\mathcal{E}_{u'}^{\omega - E})_\omega$ diffère de u', et d'après le lemme, ces deux conditions sont équivalentes.

D'après cela, u' est invariante par extrémisation (par rapport à ω) sur tout ensemble de ω auquel le point x_0 n'est pas adhérent, mais n'est pas associée à 0 au voisinage de x_0; on exprime ce fait en disant que x_0 est *pôle unique* [17] de la fonction minimale u'.

Lorsque x_0 est extérieur à $\Omega - \omega$, il résulte du théorème 14 que u' est la seule fonction minimale dans ω admettant le point x_0 pour pôle. Il serait intéressant de savoir si cette propriété est encore vraie dans le cas général.

D'autre part, ce théorème montre que, *pour un point-frontière irrégulier x_0 d'un domaine euclidien, il y a identité de*

[15] Si E est une intersection dénombrable d'ouverts, il existe pour toute v surharmonique >0, E_n ouvert décroissant contenant E tel que $\mathcal{E}_v^{E_n}$ tende en croissant vers $\mathcal{E}_v^E$ (voir [5], p. 22), et on peut ici supposer que E_n appartient à ω.

[16] Propriété de l'extrémale d'une fonction surharmonique > 0 continue.

[17] La notion générale de *pôle* d'une fonction minimale est définie dans [18], et rappelée au chapitre V.

l'effilement ordinaire en x_0 et de l'effilement au point de la frontière de Martin que l'étude précédente associe au point x_0. Le cas particulier du point-frontière isolé est d'ailleurs élémentaire et conséquence immédiate de la définition de l'effilement.

Nous verrons enfin, au chapitre III, l'importance de ce résultat dans l'étude à la frontière des fonctions surharmoniques > 0. Il nous permettra d'étendre à des fonctions définies seulement au voisinage d'un point minimal x_0, ou dans un ouvert de complémentaire effilé en x_0, des propriétés de pseudo-limites établies pour des fonctions définies dans tout Ω.

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA NOTION D'EFFILEMENT A L'ÉTUDE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES POSITIVES AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE DE MARTIN

I. — Existence et propriétés des pseudo-limites.

24. Allure à la frontière d'une fonction surharmonique > 0.

Soit, dans Ω, une fonction v surharmonique > 0 dont la mesure associée ne charge pas y_0. Elle est, hors de y_0, de la forme $G(x, y_0) \int \Theta(x, y)\, d\mu(y)$, où μ est une mesure > 0 dans $\hat{\Omega}$-$\{y_0\}$, que l'on peut supposer canonique. L'étude des potentiels-Θ, et plus précisément les théorèmes 7 et 8 du chapitre II, fournissent donc des propriétés de pseudo-limites, dont nous allons redonner rapidement des démonstrations directes ne faisant pas usage du noyau Θ.

THÉORÈME 7'-16. — *En tout point minimal x_0, $\dfrac{v(x)}{G(x, y_0)}$ admet une pseudo-limite > 0 finie ou $+\infty$, égale à $\liminf\limits_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \dfrac{v(x)}{G(x, y_0)}$, et à $\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y)$.*

Il suffit d'étudier le cas où $\liminf\limits_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \dfrac{v(x)}{G(x, y_0)} = \Lambda < +\infty$, et de montrer que l'ensemble E_ε des points de Ω où $\dfrac{v}{G_{y_0}} > \Lambda + \varepsilon$ est effilé en x_0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

Soit ε'_{y_0} l'extrémisée de ε_{y_0} relative à $\Omega - E_\varepsilon$. On a $v \geqslant (\Lambda + \varepsilon)\mathcal{E}_{G_{y_0}}^{\Omega - E_\varepsilon}$ dans Ω, donc

$$\int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) \leqslant \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \frac{v(x)}{G(x, y_0)}$$

en tout point $x \in \Omega\text{-}\{y_0\}$; il en résulte

$$\int K(x_0, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y) = \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \int K(x, y)\, d\varepsilon'_{y_0}(y)$$
$$\leqslant \frac{1}{\Lambda + \varepsilon} \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{G(x, y_0)} < 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E_\varepsilon}(y_0) < K_{x_0}(y_0) = 1,$$

d'où l'effilement de E_ε au point x_0.

Soit h une fonction harmonique > 0 dans Ω. Appelons *faiblement h-régulier* un point-frontière $x_0 \in \Delta$ tel que $\frac{G(x, y_0)}{h(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, ce qui est indépendant du pôle y_0 (cf. n° 32 où est étudiée la notion générale de h-régularité faible). Le théorème précédent donne alors de façon immédiate le

Corollaire. — *Soit h une fonction harmonique* > 0 *dans* Ω. *En tout point minimal non faiblement h-régulier,* $\frac{v}{h}$ *admet une pseudo-limite* > 0 *finie ou* $+\infty$.

Théorème 8'-17. — *Pour x_0 minimal,* $\frac{v(x)}{K(x_0, x)}$ *admet en x_0 une pseudo-limite finie* $\geqslant 0$, *égale à* $\liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{K(x_0, x)}$, *à la borne inférieure de* $\frac{v(x)}{K(x_0, x)}$ *dans* Ω, *et à la mesure de* $\{x_0\}$ *pour la mesure* μ *canonique.*

Soit $\Lambda' = \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{K(x_0, x)}$. Grâce au lemme 4, il suffit de voir que l'ensemble E'_ε des points de Ω où $\frac{v}{K_{x_0}} > \Lambda' + \varepsilon$ est effilé en x_0 quel que soit $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété minimale de l'extrémale, on a

$$v \geqslant (\Lambda' + \varepsilon)\, \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E'_\varepsilon}$$

en tout point de Ω, de sorte que

$$\liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E'_\varepsilon}(x)}{K(x_0, x)} \leqslant \frac{1}{\Lambda' + \varepsilon} \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{v(x)}{K(x_0, x)} < 1,$$

ce qui entraîne $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E'_\varepsilon} \not\equiv K_{x_0}$, et l'effilement de E'_ε au point x_0.

COROLLAIRE 1. — *Si pour x_0 minimal et h harmonique > 0 dans Ω, $\limsup_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{K(x_0, x)}{h(x)} < +\infty$, $\frac{v}{h}$ admet en x_0 une pseudo-limite finie $\geqslant 0$.*

COROLLAIRE 2. — *Pour que $\frac{K_{x_0}}{h}$ soit non bornée dans Ω, (K_{x_0} minimale), il faut et il suffit que la mesure canonique associée à h ne charge pas $\{x_0\}$.*

EXTENSION. — *Les propriétés précédentes de pseudo-limites s'étendent à une fonction surharmonique $v > 0$ définie dans un ouvert de complémentaire effilé en x_0 minimal.* $\frac{v}{G_{y_0}}$ admet encore au point x_0 une pseudo-limite > 0 finie ou $+\infty$, et $\frac{v}{K_{x_0}}$ une pseudo-limite finie $\geqslant 0$; et si pour h harmonique > 0 dans Ω, $\limsup_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{G(x, y_0)}{h(x)} > 0$, ou $\limsup_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{K(x_0, x)}{h(x)} < +\infty$, $\frac{v}{h}$ admet une pseudo-limite en x_0.

Pour le montrer, on se ramène au cas d'un domaine ω contenant y_0, et on associe au point x_0 le pôle x_0' sur la frontière de Martin de ω, de la fonction $u' = K_{x_0} - \mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}$, minimale dans ω ([18]). Les filtres des voisinages fins de x_0 et x_0' respectivement induisent le même filtre sur ω (théorème 15), donc $\frac{v}{g_{y_0}}$ (g_{y_0} fonction de Green de ω), et $\frac{v}{u'}$ admettent en x_0 des pseudo-limites égales à leurs pseudo-limites respectives au point x_0', dont on connaît l'existence par l'étude du cas général. Le résultat vient alors de ce que

$$\frac{g_{y_0}}{G_{y_0}} = 1 - \frac{\mathcal{E}^{\omega}_{G_{y_0}}}{G_{y_0}}, \qquad \text{et} \qquad \frac{u'}{K_{x_0}} = 1 - \frac{\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}}{K_{x_0}},$$

considérées sur ω, admettent en x_0 des pseudo-limites finies > 0, égales à leurs limites supérieures respectives en ce point (la seconde étant d'ailleurs égale à 1 ([19])).

Le même raisonnement est applicable à un point irrégulier ($\neq y_0$) de la frontière dans Ω d'un domaine de Ω, et donne

([18]) $\Omega - \omega$ étant effilé en x_0, $\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}$ est distincte de K_{x_0}, et la différence est une fonction minimale dans ω, d'après le théorème 12.

([19]) $\mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}$ est un potentiel de Green, dont le quotient par K_{x_0} admet en x_0 une pseudo-limite nulle.

les mêmes propriétés de pseudo-limites en ce point. Cela permet de retrouver des théorèmes de M. Brelot [8] sur l'allure d'une fonction surharmonique $v > 0$ au voisinage d'un point-frontière irrégulier x_0 d'un ouvert de $\overline{R}^\tau$: existence pour v d'une pseudo-limite ordinaire > 0 finie ou non, et pour $\frac{v(x)}{h(|x-x_0|)}$ ($h(|x-x_0|)$ fonction harmonique fondamentale, égale à $\log \frac{1}{|x-x_0|}$ dans le plan, et à $\frac{1}{|x-x_0|^{\tau-2}}$ dans l'espace à $\tau \geqslant 3$ dimensions) d'une pseudo-limite ordinaire finie $\geqslant 0$.

25. Étude d'une fonction harmonique > 0 au voisinage d'un point minimal non faiblement h-régulier.

Soit h une fonction harmonique > 0 dans Ω, et *soit x_0 un point minimal non faiblement h-régulier*, c'est-à-dire un point mininal où $\limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{G_{y_0}(x)}{h(x)} > 0$.

Nous allons approfondir la pseudo-limite de $\frac{u}{h}$ au point x_0 pour une fonction harmonique $u > 0$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée, en démontrant et améliorant les énoncés suggérés par une étude développée dans un cas particulier (correspondant à un point irrégulier de la frontière euclidienne) (M. Brelot [14]). Etendons la définition de base selon la

Définition 2. — *Un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω convergeant vers un point x_0 minimal non faiblement h-régulier est dit h-maximal si*

$$\frac{G_{y_0}}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{G_{y_0}(x)}{h(x)},$$

valeur de la pseudo-limite en x_0 de $\frac{G_{y_0}}{h}$.

La définition est indépendante du pôle y_0, en raison de la continuité de $G_{y_1}(x)/G_{y_0}(x)$ au point x_0, pour y_1 fixé $\in \Omega$.

Les filtres h-maximaux convergeant vers x_0 sont *tous* les filtres plus fins que le filtre $\mathcal{F}_0$ engendré par les ensembles de la forme $\delta \cap D_{y_0}^{\varepsilon, h}$, où δ est un voisinage de x_0, et $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ le domaine défini par l'inégalité

$$\frac{G_{y_0}}{h} > \varepsilon > 0, \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon < \limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{G_{y_0}(x)}{h(x)}.$$

Noter que ce domaine $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ est de complémentaire effilé en x_0, de sorte que tout ensemble de $\mathcal{F}_0$ est la trace sur Ω d'un voisinage fin de x_0.

Théorème 18. — *Soit x_0 un point minimal non faiblement h-régulier, et soit u harmonique > 0 dans Ω. Si $\frac{u}{h}$ est bornée, elle admet selon tout filtre $\mathcal{F}$ h-maximal convergeant vers x_0 une limite égale à sa pseudo-limite au point x_0.*

En particulier, pour toute suite $x_n \to x_0$, telle que

$$\frac{G_{y_0}(x_n)}{h(x_n)} \to \limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{G_{y_0}(x)}{h(x)}$$

(dite suite h-maximale), $\frac{u(x_n)}{h(x_n)}$ tend vers la pseudo-limite de $\frac{u}{h}$ au point x_0.

Il revient au même de montrer que

$$\frac{u}{G_{y_0}} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{u(x)}{G_{y_0}(x)},$$

valeur de la pseudo-limite de $\frac{u}{G_{y_0}}$ au point x_0, qui est finie d'après l'hypothèse.

On se ramène au cas de $u < h$. Si $\limsup_{\mathcal{F}} \frac{u}{G_{y_0}}$ était $> \liminf_{x \to x_0} \frac{u}{G_{y_0}}$, on aurait, pour la fonction h-u harmonique > 0 dans Ω,

$$\liminf_{\mathcal{F}} \frac{h-u}{G_{y_0}} = \lim_{\mathcal{F}} \frac{h}{G_{y_0}} - \limsup_{\mathcal{F}} \frac{u}{G_{y_0}} < \liminf_{x \to x_0} \frac{h}{G_{y_0}} - \liminf_{x \to x_0} \frac{u}{G_{y_0}}.$$

Chacun de ces derniers termes est une pseudo-limite; et la différence est la pseudo-limite en x_0 de $\frac{h-u}{G_{y_0}}$, égale à

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{h-u}{G_{y_0}} \leqslant \liminf_{\mathcal{F}} \frac{h-u}{G_{y_0}},$$

d'où la contradiction cherchée entraînant le résultat.

On en déduit que pour toute suite h-maximale $x_n \to x_0$,

$$\frac{u(x_n)}{h(x_n)} \to \text{pseudo-limite de } \frac{u}{h} \text{ en } x_0,$$

car cela équivaut à ce que $\frac{u}{h}$ tende vers sa pseudo-limite au point x_0 selon le filtre $\mathcal{F}_0$ h-maximal.

Introduisons la mesure μ canonique associée à h. La condition $\limsup_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{G_{y_0}(x)}{h(x)} > 0$ pour un point x_0 minimal équivaut à $\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y) < +\infty$, et un filtre $\mathcal{F}$ h-maximal convergeant vers x_0 est aussi caractérisé par

$$\int \Theta(x, y)\, d\mu(y) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y).$$

Le théorème précédent montre que pour toute mesure canonique $\nu \leqslant \mu$, et tout filtre $\mathcal{F}$ h-maximal convergeant vers x_0,

$$\int \Theta(x, y)\, d\nu(y) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \int \Theta(x_0, y)\, d\nu(y).$$

En particulier pour tout ensemble borélien $e \subset \Delta$,

$$\int_e \Theta(x, y)\, d\mu(y) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \int_e \Theta(x_0, y)\, d\mu(y),$$

et cela exprime la convergence forte, selon $\mathcal{F}$, de la mesure $\nu^x > 0$ sur Δ définie par $d\nu^x(y) = \Theta(x, y)\, d\mu(y)$, $(x \in \Omega)$ ([20]), vers la mesure ν^{x_0} définie, grâce à la sommabilité-$d\mu$ de $\Theta(x_0, y)$, par $d\nu^{x_0}(y) = \Theta(x_0, y)\, d\mu(y)$.

Extension. — *Le résultat du théorème* 18 *subsiste si u est seulement définie dans un voisinage de x_0, ou dans un domaine* $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ *défini par* $\frac{G_{y_0}}{h} > \varepsilon > 0$, *avec* $\varepsilon < \limsup_{x \to x_0} \frac{G_{y_0}}{h}$.

Supposons d'abord u harmonique > 0 dans un voisinage ouvert de x_0, où $\frac{u}{h}$ est bornée, et soit ω le domaine composant dont x_0 est point-frontière extérieur à $\Omega - \omega$ (coroll. du th. 14). D'après le théorème 14, $\frac{g_{y_0}}{G_{y_0}}$ $(y_0 \in \omega$, g_{y_0} fonction de Green de $\omega)$ admet au point x_0 une limite finie > 0, et le filtre des voisinages de x_0 dans $\hat{\Omega}$ converge, dans l'espace de Martin relatif à ω, vers un point minimal x_0' de la frontière de Martin de ω.

On en déduit facilement que est x_0' est non faiblement h-régu-

([20]) ν^x est le quotient par $G(x, y_0)$ de la h-mesure harmonique en x relative à Ω.

lier pour ω, puis que tout filtre $\mathcal{F}$ h-maximal convergeant vers x_0 converge vers x'_0, et est h-maximal relativement à ω et au point x'_0.

Donc, par le théorème 18, $\frac{u}{h}$ tend selon $\mathcal{F}$ vers sa pseudo-limite au point x'_0, laquelle est égale à sa pseudo-limite au point x_0.

Soit ensuite u harmonique > 0 dans le domaine $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ $\left(\varepsilon < \limsup_{x \to x_0} \frac{G_{y_0}}{h}\right)$, de complémentaire effilé en x_0, et dont $g_{y_0} = G_{y_0} - \varepsilon h$ est fonction de Green de pôle y_0.

Si x'_0 désigne le pôle, sur la frontière de Martin de $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$, de la fonction minimale dans $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$:

$$K_{x_0} - \mathcal{E}_{K_{x_0}}^{D_{y_0}^{\varepsilon, h}},$$

x'_0 est non faiblement h-régulier pour $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$, et toute suite h-maximale $x_n \to x_0$, dont les termes appartiennent nécessairement à $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ pour n assez grand, converge vers le point x'_0 puisque

$$\frac{g_{y_0}(x_n)}{G_{y_0}(x_n)} = 1 - \varepsilon \frac{h(x_n)}{G_{y_0}(x_n)} \to 1 - \frac{\varepsilon}{\limsup\limits_{x \to x_0} \frac{G_{y_0}}{h}} > 0 \quad \text{(th. 13)}.$$

On en déduit que tout filtre $\mathcal{F}$ h-maximal convergeant vers x_0 induit sur $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ un filtre $\mathcal{F}_\varepsilon$ convergeant vers x'_0, et h-maximal pour $D_{y_0}^{\varepsilon, h}$ et le point x'_0, d'où, si $\frac{u}{h}$ est bornée,

$$\frac{u}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}_\varepsilon]{} \text{pseudo-limite de } \frac{u}{h} \text{ en } x'_0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \text{pseudo-limite de } \frac{u}{h} \text{ en } x_0.$$

Un raisonnement analogue permet de retrouver le résultat initial de M. Brelot [14] sur l'allure d'une fonction harmonique bornée u au voisinage d'un point-frontière irrégulier x_0 d'un domaine $\omega \subset \Omega$ $(x_0 \in \overset{*}{\omega} \cap \Omega)$: u admet, selon tout filtre $\mathcal{F}$ sur ω convergeant vers x_0, tel que $g_{y_0} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \limsup\limits_{x \to x_0,\ x \in \omega} g_{y_0}(x) > 0$, $(y_0 \in \omega)$, une limite égale à sa pseudo-limite en x_0.

On introduit comme précédemment le point minimal x'_0 de Δ^ω défini par le théorème 13, et on montre que x'_0 est non faiblement

1-régulier pour ω, puis, en s'appuyant encore sur ce même théorème, que le filtre $\mathcal{F}$ converge vers x'_0, et est 1-maximal pour ω et le point x'_0, d'où la propriété rappelée grâce au théorème 18, et à l'égalité des pseudo-limites en x_0 et x'_0.

On précisera de même la pseudo-limite de $\frac{u}{h}$ en un *point minimal* x_0 *où* $\limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{K(x_0, x)}{h(x)} < +\infty$ par le

THÉORÈME 19. — *Soit sur* Ω *un filtre* $\mathcal{F}$ *convergeant vers* x_0 *tel que*

$$\frac{K_{x_0}}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} \limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} \frac{K_{x_0}(x)}{h(x)}.$$

Soit u *harmonique* > 0 *dans* Ω; *si* $\frac{u}{h}$ *est bornée, elle admet selon* $\mathcal{F}$ *une limite égale à sa pseudo-limite au point* x_0.

Démonstration analogue à celle du théorème 18, et même extension du résultat à une fonction u définie dans un voisinage de x_0.

II. — Extrémisation d'une fonction harmonique > 0.

26. — La notion d'effilement à la frontière de Martin peut être utilisée pour étudier l'extrémisation d'une fonction harmonique > 0 relativement à un ensemble de Ω. Le critère fondamental du théorème 5 traite déjà le cas d'une fonction minimale, et le cas général s'en déduit grâce à la représentation canonique de Martin.

THÉORÈME 20. — *Pour qu'une fonction* h *harmonique* > 0 *soit invariante par extrémisation sur un ensemble* $E \subset \Omega$, *il faut et il suffit que les points d'effilement de* $\Omega - E$ *situés sur* Δ *forment un ensemble* h*-négligeable (c'est-à-dire de* h*-mesure harmonique nulle).*

La condition est suffisante, car la représentation intégrale canonique

$$h(y) = \int K_x(y)\, d\mu(x)$$

entraîne

$$\mathcal{E}_h^E = \int \mathcal{E}_{K_x}^E\, d\mu(x),$$

où $\mathcal{E}_{K_x}^{E} = K_x$ pour tout point x minimal où $\Omega - E$ n'est pas effilé.

Pour établir la réciproque, on part d'une mesure $m > 0$ dans Ω qui soit localement, hors des points à l'infini, la mesure de Lebesgue à un facteur près compris entre deux nombres > 0, et on considère, pour Ω_n ouvert relativement compact tendant en croissant vers Ω, l'ensemble e_n des points x minimaux tels que

$$\int_{\Omega_n} \mathcal{E}_{K_x}^{E}(y)\, dm(y) < \int_{\Omega_n} K_x(y)\, dm(y).$$

Tout $x \in e_n$ est un point d'effilement de $\Omega - E$, et l'ensemble e des points minimaux où $\Omega - E$ est effilé est réunion des e_n. Car si $x \in e$, il existe un point $y_1 \in \Omega$ non à l'infini où $\mathcal{E}_{K_x}^{E}(y_1) < K_x(y_1)$, ce qui entraîne $\mathcal{E}_{K_x}^{E} < K_x$ au voisinage de y_1 dans un ensemble de mesure-dm non nulle, et, pour n assez grand, l'inégalité

$$\int_{\Omega_n} \mathcal{E}_{K_x}^{E}\, dm < \int_{\Omega_n} K_x\, dm,$$

exprimant que $x \in e_n$.

Donc, si l'ensemble e est de mesure-μ non nulle, l'un au moins des e_n, soit e_p, est de mesure > 0, et en intégrant en $d\mu$ sur cet e_p borélien les deux membres de l'inégalité

$$\int_{\Omega_p} \mathcal{E}_{K_x}^{E}\, dm < \int_{\Omega_p} K_x\, dm,$$

il vient, après permutation d'intégrations, l'inégalité stricte

$$\int_{\Omega_p} dm \int_{e_p} \mathcal{E}_{K_x}^{E}\, d\mu(x) < \int_{\Omega_p} dm \int_{e_p} K_x\, d\mu(x),$$

d'après laquelle $\int_{\Omega_p} \mathcal{E}_h^{E} dm$ est $< \int_{\Omega_p} h\, dm$, et $\mathcal{E}_h^{E}$ distincte de h.

Corollaire. — *Pour un ensemble* E *quelconque* $\subset \Omega$, *la plus grande minorante harmonique de* $\mathcal{E}_h^{E}$ *est égale à la* h*-mesure harmonique dans* Ω *de l'ensemble des points de* Δ *où* $\Omega - E$ *n'est pas effilé. Donc pour que* $\mathcal{E}_h^{E}$ *soit un potentiel de Green, il faut et il suffit que les points de non effilement de* $\Omega - E$ *forment un ensemble* h*-négligeable.*

Soit e l'ensemble des points de non effilement de $\Omega - E$. La h-mesure harmonique de e — égale à la réduite h_e — est, d'après le théorème, invariante par extrémisation sur E, d'où $h_e \leqslant \mathcal{E}_h^E$, et $h_e \leqslant h_1$, plus grande minorante harmonique de $\mathcal{E}_h^E$.

Mais, à cause de l'invariance de l'extrémale par itération, $\mathcal{E}_{h_1}^E = h_1$, de sorte que si h_1 n'est pas nulle, $\Delta - e$ est h_1-négligeable, et l'inégalité $h_1 \leqslant h$ entraîne $(h_1)_e = h_1 \leqslant h_e$, d'où $h_1 = h_e$.

III. — Allure à la frontière d'un potentiel de Green.

27. — Dans ce paragraphe, h désignera une fonction harmonique > 0 fixée, et $\mathcal{T}$ la topologie fine introduite au chapitre II.

Théorème 21. — *Soit v le potentiel de Green d'une mesure > 0 dans Ω. Les points minimaux où* $\limsup_{\mathcal{T}} \frac{v}{h} > 0$ *forment un ensemble h-négligeable. Autrement dit,* $\frac{v}{h}$ *admet, à la frontière, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Il suffit de voir que les points minimaux finement adhérents à l'ouvert E_ε où $\frac{v}{h} > \varepsilon > 0$ (points de non effilement) forment un ensemble h-négligeable, ce qui résulte immédiatement du corollaire du théorème 20, puisque l'extrémale de h relative à $\Omega - E_\varepsilon$, majorée par $\frac{v}{\varepsilon}$, est un potentiel de Green.

Corollaire 1. — *Les points minimaux non faiblement h-réguliers forment un ensemble h-négligeable* (Extension du cas $h = 1$ signalé par M. Brelot [18]).

On applique le théorème à la fonction de Green G_{y_0}, en utilisant le fait que $\frac{G_{y_0}}{h}$ admet en tout point minimal une pseudo-limite égale à sa limite supérieure en ce point.

Corollaire 2. — *Soit u harmonique > 0 dans Ω, et soit A le support compact de la mesure canonique associée à u. Les points minimaux de $\Delta - A$ où* $\limsup_{\mathcal{T}} \frac{u}{h} > 0$ *forment un ensemble h-négligeable.*

On considère une suite (ω_n) décroissante de voisinages de A telle que $\bigcap_n \overline{\omega}_n = A$, et pour chaque ω_n, l'extrémale $\mathcal{E}_u^{\omega_n \cap \Omega}$ qui est un potentiel de Green [21] égal à u dans $\Omega \cap \complement \overline{\omega}_n$, et tend en croissant vers u. L'ensemble des points minimaux de $\Delta - A$ où $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{u}{h} > 0$ est réunion des ensembles analogues relatifs aux $\mathcal{E}_u^{\omega_n \cap \Omega}$, qui sont h-négligeables, d'où la propriété.

Donc, *si u harmonique > 0 est associée à 0 au voisinage d'un point $x_0 \in \Delta$, $\frac{u}{h}$ admet, aux points-frontière d'un voisinage de x_0, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Corollaire fondamental 3. — *Soit dans $\hat{\Omega}$ un ouvert δ rencontrant Δ. Les points minimaux de $\delta \cap \Delta$ où* $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{1}{h} \mathrm{H}_{\overset{h}{*}}^{\delta \cap \Omega} > 0$ *forment un ensemble h-négligeable.*

Car l'extrémale $\mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega}$, égale à $\mathrm{H}_{\overset{h}{*}}^{\delta \cap \Omega}$ dans $\delta \cap \Omega$, est la somme d'un potentiel de Green et d'une fonction harmonique $\geqslant 0$ dont la mesure associée ne charge par l'ouvert $\delta \cap \Delta$, auxquels on peut appliquer respectivement le théorème précédent et son corollaire 2.

Exemple. — Il importe de voir que le théorème 21 cesse d'être exact si on y remplace la $\limsup_{\mathfrak{G}}$ par la limite supérieure ordinaire.

Considérons par exemple dans le cercle unité une suite de circonférences de rayon tendant vers 1, et sur chacune un ensemble de points dénombrable partout dense. La réunion forme un ensemble dénombrable (x_i) auquel tout point de la circonférence unité est adhérent. On peut déterminer des nombres $m_i > 0$ de façon que le potentiel de Green de la mesure $\sum_i m_i \varepsilon_{x_i}$ soit fini au centre. Ce potentiel, infini en chaque point x_i, a alors une $\limsup > 0$ en tout point de Δ, et par enveloppe inférieure avec une constante > 0, donne un autre exemple de potentiel borné possédant la même propriété.

Un exemple non publié de G. Choquet montre de même que le corollaire 2 devient inexact si la $\limsup_{\mathfrak{G}}$ y est remplacée par la limite supérieure selon la topologie de Martin.

[21] Car la mesure canonique associée à u ne charge pas l'adhérence de $\Omega \cap \complement \omega_n$.

Applications. — 1. Il est facile de voir que les ensembles $E \subset \Omega$ tels que l'extrémale de h relative à E soit un potentiel de Green — c'est-à-dire tels que les points de non effilement de $\Omega - E$ forment un ensemble h-négligeable — forment un filtre $\mathcal{F}_h$. D'après le théorème 21, ce filtre est plus fin que le filtre $\mathcal{G}_h$ engendré par les ensembles où $\frac{G_{y_0}}{h} \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ variable), et jouit de la propriété que $\frac{v}{h} \underset{\mathcal{F}_h}{\to} 0$ pour tout potentiel de Green v de mesure > 0 dans Ω.

2. Si μ est la mesure canonique associée à h, la condition $\limsup\limits_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \frac{G_{y_0}}{h} > 0$ en x_0 minimal équivaut à $\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y) < +\infty$, donc le corollaire 1 montre bien, ainsi qu'on l'avait annoncé au n° 20, que le potentiel-Θ d'une mesure μ canonique sur Δ est infini presque partout-$d\mu$.

3. *Allure à la frontière d'une fonction minimale.* Le support de la mesure canonique associée à une fonction K_{x_0} minimale est réduit au point x_0, donc $\frac{K_{x_0}}{h}$ *admet, hors de x_0, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.* Dans le cas $h = 1$, ce résultat généralise la propriété, pour le noyau de Poisson, de s'annuler en tout point-frontière distinct du pôle.

La restriction de l'ensemble exceptionnel h-négligeable est inévitable puisque $\frac{K_{x_0}}{h}$ admet une pseudo-limite > 0 en tout point minimal non faiblement h-régulier, et qu'il peut exister effectivement de tels points distincts de x_0.

IV. — Exemple du demi-espace.

28. — Nous allons étudier en détail le cas particulier où Ω est le demi-espace de R^τ formé des points d'abscisse $\xi > 0$, dont la frontière euclidienne est la réunion de l'hyperplan H d'équation $\xi = 0$ et du point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$.

La frontière de Martin Δ de Ω est homéomorphe à la frontière de Ω dans $\overline{R^\tau}$, et lui est identifiée. Les points-frontière sont tous minimaux, et nous verrons qu'il est facile d'expliciter les fonctions minimales et le noyau Θ relatifs à Ω.

Nous verrons aussi que, par adaptation des raisonnements du cas ordinaire, on peut établir pour ce demi-espace le critère d'effilement du type de Wiener dont nous avons posé la question de validité dans le cas général (nº 19). Il en résulte l'équivalence de notre effilement relatif au demi-espace avec la notion d'effilement introduite par Mme Lelong [32] dans ce cas particulier pour étudier l'allure à la frontière des fonctions surharmoniques > 0. Les résultats de Mme Lelong peuvent ainsi être comparés à ceux que fournit l'étude générale des paragraphes précédents, et l'on montre qu'ils sont pour la plupart contenus dans cette étude générale.

1º *Les fonctions minimales et le noyau* Θ. — Soit $h(|x-y|)$ la fonction harmonique fondamentale, égale à $\log\frac{1}{|x-y|}$ dans le plan, à $\frac{1}{|x-y|^{\tau-2}}$ dans l'espace à $\tau \geqslant 3$ dimensions, et soit y_0 un point fixé $\in \Omega$, d'abscisse η_0.

Pour x et y dans Ω, d'abscisses respectives ξ et η, la fonction de Green a pour expression

$$G(x, y) = h(|x-y|) - h(|x-y'|),$$

où y' désigne le symétrique de y par rapport à l'hyperplan H, et il est immédiat que

$$\alpha_\tau \frac{\xi\eta}{|x-y'|^\tau} \leqslant G(x, y) \leqslant \alpha_\tau \frac{\xi\eta}{|x-y|^\tau}$$

avec
$$\alpha_\tau = \begin{cases} 2 & \text{si } \tau = 2 \\ 2(\tau-2) & \text{si } \tau \geqslant 3. \end{cases}$$

Il en résulte que les fonctions minimales égales à 1 au point y_0 ont pour expression

$$K(x_0, y) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{|x_0-y|^\tau} \Big/ \dfrac{\eta_0}{|x_0-y_0|^\tau} & \text{si } x_0 \in H \\ \eta/\eta_0 & \text{si } x_0 = \mathcal{R}_\tau, \end{cases}$$

et que, pour x et y dans Ω,

$$\frac{1}{\alpha_\tau\eta_0^2} \cdot \frac{|x-y_0|^\tau \cdot |y-y_0|^\tau}{|x-y'|^\tau} \leqslant \Theta(x, y) \leqslant \frac{1}{\alpha_\tau\eta_0^2} \frac{|x-y_0'|^\tau \cdot |y-y_0'|^\tau}{|x-y|^\tau}.$$

On explicite ainsi aisément le noyau $\Theta(x, y)$, et l'on voit en particulier que *pour* $x \in \mathrm{H}$ *et* $y \in \Delta$,

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_\tau \eta_0^2} \dfrac{|x - y_0|^\tau . |y - y_0|^\tau}{|x - y|^\tau} & \text{si} \quad y \in \mathrm{H} \\ \dfrac{|x - y_0|^\tau}{\alpha_\tau \eta_0^2} & \text{si} \quad y = \mathcal{R}_\tau. \end{cases}$$

Au voisinage du point-frontière x_0, $\Theta(x_0, y)$ est *équivalent* à

$$\begin{cases} \dfrac{|x_0 - y_0|^{2\tau}}{\alpha_\tau \eta_0^2} . \dfrac{1}{|x_0 - y|^\tau} & \text{si} \quad x_0 \in \mathrm{H} \\ \dfrac{|y - y_0|^\tau}{\alpha_\tau \eta_0^2} & \text{si} \quad x_0 = \mathcal{R}_\tau, \end{cases}$$

et les ensembles où $\Theta(x_0, y) > \lambda > 0$ forment un système fondamental de voisinages de x_0 dans $\hat{\Omega}$.

2° *L'effilement dans le demi-espace* Ω.

Des calculs élémentaires montrent que pour x et y variables dans un voisinage assez petit du point-frontière x_0, et satisfaisant aux conditions

$$s^n \leqslant \Theta(x_0, x) \leqslant s^{n+1}$$

et

$$\Theta(x_0, y) \leqslant s^{n-1} \qquad \text{ou} \qquad \Theta(x_0, y) \geqslant s^{n+2} \qquad (s \text{ constante} > 1),$$

le rapport $\dfrac{\Theta(x, y)}{\Theta(x_0, y)}$ reste borné supérieurement indépendamment de n.

Cela suffit pour pouvoir adapter le raisonnement du cas ordinaire [5], et établir pour le demi-espace Ω le

Critère d'effilement du type de Wiener. — Considérons un point-frontière x_0 *et un ensemble* $\mathrm{E} \subset \Omega$, *et désignons par* e_n *l'intersection de* E *avec « l'intersphère »*

$$s^n \leqslant \Theta(x_0, y) \leqslant s^{n+1}, \qquad (s \text{ constante} > 1).$$

L'effilement de E *au point* x_0 *équivaut à la convergence de la série* $\sum_1^\infty s^n \overline{\mathcal{C}}(e_n)$.

Montrons d'abord que la convergence de la série entraîne l'effilement de E, ce qui est d'ailleurs valable pour un Ω quelconque comme nous l'avons signalé au n° 19.

Soit m_n la mesure $\geqslant 0$ obtenue par extrémisation de ε_{y_0} sur $\Omega - e_n$. Son potentiel $U_n(x) = \int K(x, y)\, dm_n(y)$, ou *potentiel capacitaire* de e_n (défini au n° 13), est, au point x_0, moindre que

$$s^{n+1}\int G(y, y_0)\, dm_n(y) = s^{n+1}\overline{\mathcal{C}}(e_n).$$

Le potentiel $\int K(x, y)\, dm(y)$ de la somme des m_n à partir d'un certain rang est donc arbitrairement petit en x_0, mais majore 1 quasi-partout sur E au voisinage de x_0, d'où l'effilement de E diminué d'un ensemble polaire, et par suite celui de E.

Réciproquement, supposons l'effilement de E, et soit m une mesure > 0 dans Ω telle que $U(x) = \int K(x, y)\, dm(y)$ soit fini en x_0 et tende vers $+\infty$ quand $x \to x_0$, $x \in E$. Soit $E' = \bigcup_{p=1}^{\infty} e_{2p}$. L'extrémisation de m sur $\Omega - E'$ donne une mesure $m' \geqslant 0$ dont le potentiel $U'(x) = \int K(x, y)\, dm'(y)$ minore $U(x)$ et l'égale quasi-partout sur E', donc tend vers $+\infty$ quand $x \in E'$ tend vers x_0 hors d'un certain ensemble polaire.

D'après la propriété indiquée plus haut, pour p suffisamment grand le potentiel $\int_{\bar{e}_{2p}} K(x, y)\, dm'(y)$ majore quasi-partout sur e_{2p} un nombre $k > 0$ fixe indépendant de p. Il en résulte que

$$\int_{\bar{e}_{2p}} G(x, y)\, dm'(y) \geqslant k\mathcal{E}_{G_{y_0}}^{\Omega - e_{2p}}(x)$$

en tout point $x \in \Omega$; en particulier

$$\int_{\bar{e}_{2p}} G(y, y_0)\, dm'(y) \geqslant k\mathcal{E}_{G_{y_0}}^{\Omega - e_{2p}}(y_0) = k\overline{\mathcal{C}}(e_{2p}),$$

ce qui montre la convergence de la série $\sum_{p=1}^{\infty} s^{2p}\overline{\mathcal{C}}(e_{2p})$, puisque

$$\sum_{p=1}^{\infty} s^{2p}\int_{\bar{e}_{2p}} G(y, y_0)\, dm'(y) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}\int_{\bar{e}_{2p}} K(x_0, y)\, dm'(y) = U'(x_0) < +\infty.$$

On montrerait de même la convergence de la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} s^{2p+1}\overline{\mathcal{C}}(e_{2p+1}),$$

d'où le résultat cherché.

Forme équivalente de ce résultat. Considérons dans Ω un ensemble E auquel le point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$ n'est pas adhérent, autrement dit un ensemble *borné*. L'extrémisation de la fonction minimale de pôle $x_0 = \mathcal{R}_\tau$ relativement à $\Omega - E$ ne conserve pas cette fonction, et l'extrémale $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E}$ est le potentiel de Green d'une mesure $m \geqslant 0$ dont l'énergie, égale à $\int K(x_0, y)\, dm(y)$, est nécessairement finie ([22]). On peut considérer cette énergie comme fonctionnelle de E; pour les compacts $K \subset \Omega$, elle définit une capacité de Choquet $\gamma(K)$ alternée d'ordre infini, et vaut, pour l'ensemble E précédent, la capacité extérieure $\bar{\gamma}(E)$. On voit que $\bar{\gamma}(E)$ est facilement comparable à $\bar{\mathcal{C}}(E)$, lorsque celle-ci est définie, et que les deux sont simultanément nulles.

Remarque. — Pour un ensemble E *non borné*, la condition que $\mathcal{E}_{K_{x_0}}^{\Omega - E}$ $(x_0 = \mathcal{R}_\tau)$ soit un potentiel de Green équivaut, d'après le critère fondamental du théorème 5, à l'effilement de E au point x_0, mais l'énergie de la mesure associée peut être infinie, comme on le voit en prenant pour E l'ensemble des points où $K_{x_0} \leqslant \lambda$ (λ fini > 0).

En utilisant cette fonctionnelle $\bar{\gamma}(E)$, on peut alors donner du critère précédent la forme équivalente que voici :

Soient un point-frontière x_0, *et un ensemble* $E \subset \Omega$.

a) Si $x_0 \in H$, *et si* e'_n *désigne l'intersection de* E *avec l'intersphère*

$$s^n \leqslant \frac{1}{|x_0 - y|^\tau} \leqslant s^{n+1} \qquad (s > 1),$$

l'effilement de E *au point* x_0 *équivaut à la convergence de la série* $\sum_1^\infty s^n \bar{\gamma}(e'_n)$.

b) Si $x_0 = \mathcal{R}_\tau$, *et si* e''_n *désigne l'intersection de* E *avec l'intersphère*

$$s^n \leqslant |y - y_0|^\tau \leqslant s^{n+1} \qquad (s > 1),$$

l'effilement de E *au point* x_0 *équivaut à la convergence de la série* $\sum_1^\infty \frac{\bar{\gamma}(e''_n)}{s^n}$.

([22]) Car $\frac{K(x_0, y)}{G(y, y_0)}$ est borné hors de tout voisinage de x_0.

Sans l'hypothèse d'effilement, l'allure de $\Theta(x_0, y)$ au voisinage du point-frontière x_0 montre que la convergence de la série $\sum_1^\infty s^n \overline{\mathcal{C}}(e_n)$ équivaut à celle de $\sum_1^\infty s^n \overline{\mathcal{C}}(e'_n)$ $\left[\text{resp. } \sum_1^\infty s^n \overline{\mathcal{C}}(e''_n)\right]$.

Mais, d'après l'allure de $G(x, y_0)$ au voisinage de x_0, $\dfrac{\overline{\mathcal{C}}(e'_n)}{\overline{\gamma}(e'_n)}$ $\left[\text{resp. } s^{2n}\dfrac{\overline{\mathcal{C}}(e''_n)}{\overline{\gamma}(e''_n)}\right]$ (lorsque cette expression a un sens), reste, pour n assez grand, compris entre deux nombres >0 fixes indépendants de n, ce qui permet de conclure.

3° *Allure à la frontière d'une fonction surharmonique* $v > 0$. — Il est intéressant d'expliciter dans ce cas particulier du demi-espace les résultats des théorèmes 16-17, et d'en donner des formes équivalentes.

a) *Pseudo-limite de* $\dfrac{v}{G_{y_0}}$ *en un point-frontière* x_0.

Si v est le potentiel de Green d'une mesure $m > 0$ dans Ω, cette pseudo-limite peut s'écrire

$$\int K(x_0, y)\, dm(y) = \begin{cases} \dfrac{|x_0 - y_0|^\tau}{\eta_0} \displaystyle\int \dfrac{\eta}{|x_0 - y|^\tau}\, dm(y) & \text{pour} \quad x_0 \in H \\ \dfrac{1}{\eta_0} \displaystyle\int \eta\, dm(y) & \text{pour} \quad x_0 = \mathcal{R}_\tau. \end{cases}$$

Dans le cas d'une fonction harmonique > 0 de mesure canonique associée μ, elle a pour expression

$$\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y) = \begin{cases} \dfrac{|x_0 - y_0|^\tau}{\alpha_\tau \eta_0^2}\left[\mu(\{\mathcal{R}_\tau\}) + \displaystyle\int_H \dfrac{|y - y_0|^\tau}{|y - x_0|^\tau}\, d\mu(y)\right] \\ \qquad \text{pour} \quad x_0 \in H \\ \dfrac{1}{\alpha_\tau \eta_0^2} \displaystyle\int_H |y - y_0|^\tau . d\mu(y) \\ \qquad \text{pour} \quad x_0 = \mathcal{R}_\tau \quad \text{et} \quad \mu(\{\mathcal{R}_\tau\}) = 0. \\ \left(\text{car si } \mu(\{\mathcal{R}_\tau\}) > 0,\ \dfrac{v}{G_{y_0}} \xrightarrow[x \to \mathcal{R}_\tau]{} + \infty\right). \end{cases}$$

Mais, au voisinage de x_0, $G(x, y_0)$ est équivalent à

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_\tau \eta_0}{|x_0 - y_0|^\tau} \cdot \xi & \text{si} \quad x_0 \in H \\ \alpha_\tau \eta_0 \cdot \dfrac{\xi}{|x - y_0|^\tau} & \text{si} \quad x_0 = \mathcal{R}_\tau, \end{cases}$$

donc $\frac{v(x)}{\xi}$ et $v(x)\frac{|x-y_0|^\tau}{\xi}$ admettent, aux points $x_0 \in H$ et $\mathfrak{R}_\tau$ respectivement, des pseudo-limites > 0 finies ou non, égales à leurs limites inférieures respectives en ces points, et dont les valeurs se déduisent aussitôt de ce qui précède.

b) Pseudo-limite de $\frac{v(x)}{K(x_0, x)}$ *au point-frontière* x_0. — En explicitant $K(x_0, x)$, on voit que pour $x_0 \in H$, $v(x)\frac{|x-x_0|^\tau}{\xi}$ admet en x_0 une pseudo-limite finie $\geqslant 0$, égale à sa $\liminf\limits_{x \to x_0}$, et à sa borne inférieure dans Ω; on a un résultat analogue pour $x_0 = \mathfrak{R}_\tau$ et $\frac{v(x)}{\xi}$, et ces pseudo-limites sont nulles si v est un potentiel de Green.

4° *Comparaison avec les résultats de Mme Lelong.* — La fonctionnelle $\bar{\gamma}(E)$ coïncide, à un facteur près, avec la « puissance extérieure » de E, introduite (autrement) par Mme Lelong et utilisée par elle pour définir l'effilement à la frontière d'un ensemble de Ω.

La définition de l'effilement donnée par Mme Lelong s'exprime par la seconde forme du critère démontré au 2°), d'où l'identité avec notre effilement relatif au demi-espace. Ses résultats sur l'allure de $\frac{v(x)}{\xi}$ et $\frac{v(x)|x-x_0|^\tau}{\xi}$ au voisinage du point $x_0 \in H$ et au voisinage de $\mathfrak{R}_\tau$ sont inclus dans les propriétés explicitées au 3°). Les analogues du théorème 21 et du corollaire du théorème 20, démontrés pour $h = 1$, et s'exprimant à l'aide d'une notion nouvelle de « raréfaction » qui remplace l'effilement et ne lui est pas comparable, ne peuvent être déduits de nos résultats généraux; mais la comparaison des deux montre que pour un ensemble $E \subset \Omega$, les points d'effilement de E et ceux de raréfaction forment deux ensembles qui coïncident à un ensemble de mesure harmonique nulle près.

CHAPITRE IV

ALLURE A LA FRONTIÈRE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET-MARTIN

I. — Principe du maximum dans $\hat{\Omega}$.

Dans tout ce chapitre, h désigne une fonction harmonique > 0 fixée dans Ω, et toutes les notions relatives au problème de Dirichlet sont, sauf au début du n° 31 et au n° 32, prises dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$.

29. Principe général pour l'espace de Green Ω et sa frontière de Martin Δ.

THÉORÈME 22. — *Soit dans l'espace de Green Ω, une fonction u sousharmonique. On suppose que $\dfrac{u}{h}$ est bornée supérieurement, et que pour tout point minimal x hors d'un ensemble e faiblement h-négligeable (c'est-à-dire de h-mesure harmonique intérieure nulle), il existe un ensemble E_x non effilé en x tel que $\limsup\limits_{y \to x,\ y \in E_x} \dfrac{u(y)}{h(y)} \leqslant 0$. Alors u est $\leqslant 0$.*

Considérons u^+, et supposons-le non nul, ce qui revient à supposer que sa plus petite majorante harmonique u_1 est > 0. D'après l'hypothèse, l'ensemble E_ε des points de Ω où $u^+ \leqslant \varepsilon h$ ($\varepsilon > 0$ fixé) est non effilé en tout point minimal hors de e. Ses points d'effilement forment donc un ensemble h-négligeable, et comme $\dfrac{u_1}{h}$ est bornée, cet ensemble est aussi u_1-négligeable,

d'où résulte l'invariance de u_1 par extrémisation sur $\Omega - E_\varepsilon$.
Mais par la décomposition de u^+ en $u^+ = -v + u_1$, où v est le potentiel de Green d'une mesure $\geqslant 0$ dans Ω, on a

$$u_1 \leqslant \varepsilon h + v \quad \text{dans } E_\varepsilon,$$

donc

$$u_1 = \mathcal{E}_{u_1}^{\Omega - E_\varepsilon} \leqslant \varepsilon h + v \quad \text{dans } \Omega,$$

et comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient une contradiction entraînant nécessairement $u^+ = 0$.

Applications.

THÉORÈME 23. — *Pour toute fonction f réelle sur Δ, considérons les fonctions u dans Ω, qui sont sousharmoniques ou $-\infty$, satisfont chacune à la condition: $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement, et telles que pour chaque u, il existe, pour tout point x minimal, un ensemble E_x^u non effilé en x tel que $\limsup\limits_{y \to x,\ y \in E_x^u} \frac{u(y)}{h(y)} \leqslant f(x)$. L'enveloppe supérieure des u est encore $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$, et minore donc l'enveloppe analogue définie à partir des v surharmoniques ou $+\infty$.*

On adapte la démonstration d'un cas antérieur analogue [20]. L'enveloppe supérieure des u majore à priori $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$. L'égalité est évidente si $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h} = +\infty$. Si $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$ est fini, il existe sur Δ une fonction φ borélienne $\leqslant f$ et h-résolutive, telle que $\mathfrak{D}_{\varphi,h} = \underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$, et φ ne diffère de f que sur un ensemble faiblement h-négligeable. Si v surharmonique ou $+\infty$ satisfait aux conditions : $\frac{v}{h}$ bornée inférieurement, et $\liminf \frac{v}{h} \geqslant \varphi$ en tout point-frontière, on voit que $u - v$ est $\leqslant 0$, d'où $u \leqslant \overline{\mathfrak{D}}_{\varphi,h} = \underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$. Enfin, si $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h} = -\infty$, on montre que toute u vaut $-\infty$ en introduisant encore φ borélienne $\leqslant f$ (d'où $\underline{\mathfrak{D}}_{\varphi,h} = \overline{\mathfrak{D}}_{\varphi,h} = -\infty$), qui ne diffère de f que sur un ensemble faiblement h-négligeable, et en raisonnant comme précédemment.

Un autre exemple d'application est une caractérisation nouvelle de certaines fonctions harmoniques positives qui s'introduisent dans une décomposition canonique du type de F. Riesz des fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

On sait [18] que dans Ω, les fonctions $\mathfrak{D}_{f,h}(f \geqslant 0$ sur $\Delta)$ sont toutes les fonctions harmoniques $\geqslant 0$ qui sont limites de suites croissantes de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ dont chacune est majorée par une fonction $Kh(K = C^{te} \geqslant 0)$. Les u harmoniques $\geqslant 0$ qui ne sont pas du type $\mathfrak{D}_{f,h}$ sont aisément caractérisées par la condition que $\inf(u, h)$ soit un potentiel de Green, et l'enveloppe inférieure d'une telle u et d'un $\mathfrak{D}_{f,h} \geqslant 0$ quelconque est aussi un potentiel. Il en résulte, par application d'un théorème de F. Riesz ([23]) à l'espace vectoriel formé par les différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$, que toute fonction harmonique $\geqslant 0$ dans Ω se décompose, et d'une manière unique, en la somme d'un $\mathfrak{D}_{f,h} \geqslant 0$ et d'une fonction u harmonique $\geqslant 0$ telle que $\inf(u, h)$ soit un potentiel de Green (Extension du cas $h = 1$ de Parreau [40]).

Grâce au théorème 22, ces dernières fonctions u peuvent encore être caractérisées de la façon suivante :

Théorème 24. — *Soit u harmonique > 0 dans Ω. Pour que* $\inf(u, h)$ *soit un potentiel de Green, il faut et il suffit que* $\frac{u}{h}$ *admette, à la frontière de Martin, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Supposons d'abord que $\inf(u, h)$ soit un potentiel de Green. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'extrémale de h relative à l'ensemble des points de Ω où $\frac{u}{h} \leqslant \varepsilon$ est aussi un potentiel, donc les points de non effilement du complémentaire forment un ensemble h-négligeable, et de même les points de Δ où $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{u}{h} > 0$.

Réciproquement, si cette dernière propriété a lieu pour u, elle a aussi lieu pour la plus grande minorante harmonique u_1 de $\inf(u, h)$. Comme $\frac{u_1}{h}$ est bornée, le théorème 22 entraîne $u_1 = 0$, et l'on voit que cela subsiste si l'on suppose seulement l'existence, pour tout point minimal x hors d'un ensemble faiblement h-négligeable, d'un ensemble E_x non effilé en x tel que $\frac{u(y)}{h(y)} \underset{y \to x,\ y \in E_x}{\longrightarrow} 0$.

([23]) Voir Bourbaki, Intégration, Chapitre II.

30. Extension à un ouvert de Ω et sa frontière dans $\hat{\Omega}$.

Comme conséquence immédiate du théorème 22, on obtient d'abord le

THÉORÈME 25. — *Soient ω un ouvert de Ω, et $\overset{*}{\omega}$ sa frontière dans l'espace $\hat{\Omega}$. Les points de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ où $\Omega - \omega$ n'est pas effilé forment un ensemble e qui est h-négligeable pour ω.*

Comme cet ensemble est la trace sur $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ d'une intersection dénombrable d'ouverts (coroll. 1 du th. 5), il suffit de voir qu'il est faiblement h-négligeable pour ω, c'est-à-dire que toute fonction u sousharmonique dans ω, satisfaisant aux conditions : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup \frac{u}{h} \leqslant 0$ en tout point-frontière hors de e, est nécessairement $\leqslant 0$.

Considérons u^+ et son prolongement par 0 hors de ω, qui est une fonction sousharmonique $w \geqslant 0$, puisque $\frac{u^+}{h} \to 0$ en tout point de $\overset{*}{\omega}$ hors de e. $\frac{w}{h}$ est bornée supérieurement, et, en chaque point minimal x, tend vers 0 sur un ensemble non effilé en x; donc, par le théorème 22, $w = 0$, et $u \leqslant 0$.

COROLLAIRE. — *Les points de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ où ω est effilé forment un ensemble h-négligeable pour ω*, ce qui complète la propriété de mesure harmonique nulle pour l'ensemble des points de $\omega \cap \Omega$ où ω est effilé [31] [2].

LEMME 6. — *Sur l'ensemble des points de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ où $\Omega - \omega$ est effilé, les ensembles faiblement h-négligeables pour ω et Ω sont les mêmes (donc aussi les ensembles h-négligeables).*

Montrons que tout compact A de cet ensemble, h-négligeable pour ω, est aussi h-négligeable pour Ω. Soit $\mathfrak{D}_{\varphi_A, h}$, égale à la réduite h_A de h relative à A. On sait que dans ω, $\mathfrak{D}_{\varphi_A, h} = \mathfrak{D}^{\omega}_{F, h}$ où F sur $\overset{*}{\omega}$ vaut $\frac{h_A}{h}$ dans Ω, φ_A ailleurs, de sorte que

$$h_A = \mathfrak{D}^{\omega}_{\varphi_A, h} + H^{\omega}_{h_{*A}},$$

et la nullité de $\mathfrak{D}^{\omega}_{\varphi_A, h}$ entraîne $h_A = H^{\omega}_{h_{*A}}$, donc $h_A = \mathcal{E}^{\omega}_{h_A}$.

Mais par le choix du compact A et le corollaire du théorème 20, $\mathcal{E}^{\omega}_{h_A}$ doit être un potentiel de Green, ce qui implique $h_A = 0$.

Remarque. — Le résultat précédent contient évidemment le résultat analogue [18] relatif à l'ensemble des points de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ extérieurs à $\Omega - \omega$.

L'extension du théorème 22 à l'ouvert ω et sa frontière $\overset{*}{\omega}$ dans $\hat{\Omega}$ s'exprime alors par le

THÉORÈME 26. — *Soit u sousharmonique dans l'ouvert $\omega \subset \Omega$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée supérieurement, et soit sur $\overset{*}{\omega}$ un ensemble e faiblement h-négligeable pour ω, contenant les points de $\overset{*}{\omega}$ où ω est effilé. On suppose que pour tout point $x \in \overset{*}{\omega} \cap \Omega - e$, $\limsup_{y \to x,\ y \in \omega}{}_{\mathfrak{G}} \frac{u}{h} \leqslant 0$, et que pour tout $x \in \overset{*}{\omega} \cap \Delta - e$, il existe dans ω un ensemble E_x non effilé en x tel que $\limsup_{y \to x,\ y \in E_x} \frac{u}{h} \leqslant 0$. Alors u est $\leqslant 0$.*

En utilisant un résultat local sur la topologie fine dans Ω ([24]) [10], on voit d'abord que $\limsup u \leqslant 0$ en tout point de $\overset{*}{\omega} \cap \Omega$ régulier pour ω, de sorte que le prolongement de u^+ par 0 hors de ω est une fonction quasi-sousharmonique dont la régularisée $w \geqslant 0$ est nulle quasi-partout dans $\Omega - \omega$, et satisfait à la condition : $\frac{w}{h}$ bornée supérieurement.

Soit e_1 l'intersection de e avec l'ensemble des points de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ où $\Omega - \omega$ est effilé. En chaque point minimal $x \notin e_1$, $\frac{w}{h}$ tend vers 0 sur un ensemble non effilé en x : c'est évident si $\Omega - \omega$ n'est pas effilé en x puisque $\frac{w}{h} = 0$ quasi-partout dans $\Omega - \omega$; et si x est un point d'effilement de $\Omega - \omega$, donc de non effilement de ω, il existe dans ω un ensemble non effilé en x sur lequel $\frac{u^+}{h} \xrightarrow[y \to x]{} 0$, donc aussi $\frac{w}{h}$. Comme, d'après le lemme précédent, e_1 est aussi faiblement h-négligeable pour Ω, on en déduit $w = 0$, et $u \leqslant 0$.

([24]) Soit u sousharmonique bornée supérieurement dans un ouvert ω_0 relativement compact dans Ω, et soit sur $\overset{*}{\omega}_0$ un ensemble E faiblement 1-négligeable contenant les points d'effilement de ω_0. En tout point-frontière régulier x_0, on a

$$\limsup_{y \to x_0} u(y) = \lim_{x \to x_0} \sup_{x \in \overset{*}{\omega}_0 - E} \left(\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{G}} u(y) \right).$$

Application. — *Notons e l'ensemble des points de $\overset{*}{\omega}$ où ω est effilé. Pour toute fonction f réelle sur $\overset{*}{\omega}$, considérons les fonctions u dans ω qui sont sousharmoniques ou $-\infty$, satisfont chacune à la condition: $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement, et telles que pour tout point $x \in \overset{*}{\omega} \cap \Omega - e$, on ait $\limsup_{y \to x,\ y \in \omega} \overline{\mathfrak{C}} \frac{u}{h} \leqslant f(x)$, et que pour tout $x \in \overset{*}{\omega} \cap \Delta - e$, il existe pour chaque u un ensemble E_x^u non effilé en x tel que* $\limsup_{y \to x,\ y \in E_x^u} \frac{u}{h} \leqslant f(x)$. *L'enveloppe supérieure des u est encore $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}^{\omega}$.*

II. — Allure à la frontière de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$.

31. Les points pseudo-fortement h-réguliers.

Rappelons quelques définitions et propriétés [18], pour aborder l'étude de l'allure à la frontière des enveloppes et de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$. Ces notions sont d'ailleurs valables dans le cas de la frontière générale de la deuxième axiomatique, que nous examinerons au chapitre v.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω convergeant vers un point-frontière x_0 est dit *fortement h-régulier* s'il existe un voisinage ouvert δ de x_0 et une fonction surharmonique $v > 0$ sur $\delta \cap \Omega$ tels que $\frac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$ et que $\frac{v}{h}$ admette une borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de x_0. Cela équivaut à ce que pour les voisinages ouverts δ assez petits de x_0, $\frac{1}{h} H_{\overset{h}{*}}^{\delta \cap \Omega} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$, et il s'ensuit l'existence dans tout Ω d'une fonction surharmonique $v > 0$ satisfaisant aux conditions locales précédentes.

Un filtre $\mathcal{F}$ convergeant vers x_0 est dit *h-régulier* si pour tout compact A sur la frontière, ne contenant pas x_0, $\frac{h_A}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$. Pour que $\mathcal{F}$ soit h-régulier, il faut et il suffit que pour toute fonction f bornée supérieurement,

$$\limsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{h} \overline{\mathfrak{D}}_{f,h} \leqslant \limsup \text{ de } f \text{ en } x_0,$$

ou encore [25], que pour toute f finie continue,

$$\frac{1}{h}\mathfrak{D}_{f,h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} f(x_0).$$

Il est immédiat que la h-régularité forte entraîne la h-régularité.

Un *point-frontière* x_0 est dit *fortement h-régulier* ou *h-régulier* s'il en est ainsi de la trace sur Ω du filtre des voisinages de x_0.

L'analogie des notions précédentes avec la notion classique de régularité pose la question de savoir si l'ensemble des points-frontière non fortement h-réguliers — ou même seulement non h-réguliers — est h-négligeable. On ne sait si la réponse est affirmative, mais si l'on remplace la topologie de Martin par la topologie fine, donc la limite ordinaire par la notion de pseudo-limite, on obtient un résultat analogue au résultat classique sur les points irréguliers, ce qui approfondit de façon importante l'allure à la frontière de la solution, et permet de plus, comme on va voir, d'intégrer dans l'ancienne axiomatique le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin.

On dira qu'un point minimal x_0 est *pseudo-fortement h-régulier* si le filtre, trace sur Ω du filtre des voisinages fins de x_0, est fortement h-régulier. Alors :

THÉORÈME 27. — *Les points minimaux non pseudo-fortement h-réguliers forment un ensemble h-négligeable.*

Notons σ_ρ^x la boule ouverte de centre x et rayon $\rho > 0$ (avec la métrique de Martin), et soit E_ρ l'ensemble des points x minimaux tels que $\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{G}} \frac{1}{h} \mathrm{H}_*^{\sigma_\rho^x \cap \Omega} > 0$. L'ensemble des points x minimaux non pseudo-fortement h-réguliers est réunion des $E_{\frac{1}{n}}$, donc il suffit de montrer que E_ρ est h-négligeable.

Considérons pour cela un recouvrement fini de Δ par des ouverts de $\hat{\Omega}$ de diamètre $\leqslant \rho$. Si δ désigne l'un de ces ouverts, $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{1}{h} \mathrm{H}_{h\,*}^{\delta \cap \Omega}$ est > 0 en chaque point $x \in E_\rho \cap \delta$ (car $\sigma_\rho^x \supset \delta$), donc $E_\rho \cap \delta$ est h-négligeable (coroll. 3 du th. 21), et de même E_ρ.

[25] Dans le cas général considéré au chapitre v, il faudra de plus supposer la condition $\mathfrak{A}_h$ satisfaite.

Grâce au principe du maximum établi plus haut, on obtient alors le

Corollaire. — *Les filtres, traces sur* Ω *des filtres des voisinages fins des points pseudo-fortement h-réguliers, satisfont aux conditions* A_h *et* B_h *de l'ancienne axiomatique.*

Conséquences. — Si f est finie continue sur Δ :

1. La solution $\mathfrak{D}_{f,h}$ est l'unique fonction u harmonique dans Ω, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée et admette, en tout point pseudo-fortement h-régulier, ou même seulement hors d'un ensemble faiblement h-négligeable, une pseudo-limite égale à f.

2. Soit $\mathcal{F}_h$ le filtre formé des ensembles $E \subset \Omega$ tels que l'extrémale de h relative à E soit un potentiel de Green. Si F définie dans Ω admet la pseudo-limite f en tout point-frontière, sauf sur un ensemble faiblement h-négligeable, $\mathfrak{D}_{f,h}$ est aussi la seule fonction u harmonique dans Ω, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée et que $\frac{u}{h} - F$ tende vers zéro selon $\mathcal{F}_h$.

Car pour une fonction φ dans Ω, la propriété de tendre vers 0 selon $\mathcal{F}_h$ équivaut à ce que φ admette, à la frontière, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.

En effet, si $\varphi \xrightarrow[\mathcal{F}_h]{} 0$, l'ensemble où $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ appartient à $\mathcal{F}_h$ quel que soit $\varepsilon > 0$, de sorte que les points de non effilement du complémentaire forment un ensemble h-négligeable, et de même les points de Δ où $\limsup_{\mathfrak{G}} |\varphi| > 0$.

Inversement, cette dernière propriété montre que les points de Δ finement adhérents à l'ensemble où $|\varphi| > \varepsilon$ forment un ensemble h-négligeable, donc que l'ensemble où $|\varphi| \leqslant \varepsilon$ appartient à $\mathcal{F}_h$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

32. Les filtres faiblement h-réguliers dans l'espace de Green Ω. A côté des notions de h-régularité et de h-régularité forte utilisées dans l'étude de l'allure à la frontière des enveloppes et de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$, la théorie ordinaire du problème de Dirichlet conduit à introduire la notion suivante de ***h*-*régularité faible***, qui dans le cas particulier $h = 1$, coïncide avec la notion de régularité considérée dans [20] :

Définition 3. — *Un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* Ω *est dit faiblement* h*-régulier si* $\dfrac{G_{y_0}}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} 0$, ce qui est indépendant du pôle y_0.

Il revient au même de dire que $\mathcal{F}$ est plus fin que le filtre $\mathcal{G}_h$ (indépendant de y_0) engendré par les ensembles de Ω où $\dfrac{G_{y_0}}{h} \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ variable).

Exemples. — Le filtre $\mathcal{F}_h$ formé par les ensembles $E \subset \Omega$ tels que $\mathcal{E}_h^E$ soit un potentiel de Green est plus fin que $\mathcal{F}_h$ (n° 27), donc faiblement h-régulier.

Un *point-frontière* $x_0 \in \Delta$ déjà appelé *faiblement* h*-régulier* (n° 24) est caractérisé par la h-régularité faible de la trace sur Ω du filtre des voisinages de x_0 ([26]).

La deuxième axiomatique du problème de Dirichlet introduit des frontières générales sur lesquelles on définira de même la notion de point faiblement h-régulier.

Théorème 28. — *Pour qu'un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* Ω *soit faiblement* h*-régulier, il faut et il suffit qu'il existe une fonction surharmonique* $v > 0$ *dans* Ω *telle que* $\dfrac{v}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} 0$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car si l'on considère un voisinage compact σ de y_0, G_{y_0} est majorée, dans $\Omega - \sigma$, par $k\overset{*}{H}{}_v^{\Omega-\sigma} \leqslant kv$ ($k = C^{te} > 0$ convenable), d'où $\dfrac{G_{y_0}}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} 0$.

Comparaison avec la h*-régularité.* — Soit sur la frontière de Martin Δ — ou plus généralement sur la frontière Γ de la deuxième axiomatique — un point x_0 où converge un filtre $\mathcal{F}$ h-régulier. S'il existe sur la frontière un compact A, ne contenant pas x_0, et tel que $h_A > 0$, $\mathcal{F}$ est aussi faiblement h-régulier. Si le complémentaire de $\{x_0\}$ est h-négligeable, cette propriété subsiste pour la frontière de Martin, car x_0 est alors nécessairement minimal, et h égale à un facteur près à la fonction minimale de pôle x_0, dont le quotient par G_{y_0} tend vers $+\infty$ au point x_0; mais elle peut ne plus avoir lieu pour la frontière Γ, comme dans le cas où Γ est réduite au point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ et h égale à 1.

([26]) Si x_0 est *minimal*, cette condition équivaut à la h-régularité faible de la trace sur Ω du filtre des voisinages *fins* de x_0.

Inversement, la h-régularité faible n'entraîne pas en général la h-régularité. Ainsi tout point x_0 non minimal est faiblement K_x-régulier pour tout point x minimal tel que $\Theta(x_0, x) = +\infty$ (et il existe au moins deux tels points distincts (n° 18)), mais non K_x-régulier.

Approfondissons maintenant les filtres faiblement h-réguliers convergents dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$:

THÉORÈME 29. — *Pour qu'un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω, convergeant vers un point x_0 minimal, soit faiblement h-régulier, il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de x_0 sur Ω une fonction surharmonique $v > 0$ telle que $\dfrac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$.*

Soit v surharmonique > 0 sur l'intersection de Ω et d'un voisinage ouvert δ de x_0, telle que $\dfrac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$, et soit ω le domaine composant de $\delta \cap \Omega$ qui admet x_0 pour point-frontière extérieur à $\Omega - \omega$ (coroll. du th. 14). Le filtre $\mathcal{F}$ est faiblement h-régulier pour ω, et comme $\dfrac{g_{y_0}}{G_{y_0}}$ ($y_0 \in \omega$, g_{y_0} fonction de Green de ω) admet au point x_0 une limite > 0 (th. 14), $\mathcal{F}$ est aussi faiblement h-régulier pour Ω.

On verra aussi, grâce au théorème 11, que la h-régularité faible pour Ω d'un point x_0 minimal équivaut à la h-régularité faible de x_0 pour un domaine quelconque $\omega \subset \Omega$, dont x_0 est point-frontière, et tel que $\Omega - \omega$ soit effilé en x_0; et si l'on introduit le pôle x'_0, sur la frontière de Martin d'un tel ω, de la fonction $K_{x_0} - \mathcal{E}^{\omega}_{K_{x_0}}$, minimale dans ω (th. 12), la h-régularité faible de x_0 pour Ω équivaut aussi à celle de x'_0 pour ω.

33. Allure de la solution en un point minimal non faiblement h-régulier.

Les résultats du n° 25 sont évidemment applicables à toute solution $\mathfrak{D}_{f,h}$ correspondant à une donnée $f \geqslant 0$, mais la forme particulière de la mesure canonique associée à $\mathfrak{D}_{f,h}$ donne de plus le théorème suivant :

THÉORÈME 30. — *Soit x_0 un point minimal non faiblement h-régulier. Si f sur Δ est $\geqslant 0$ et h-résolutive, $\dfrac{\mathfrak{D}_{f,h}}{h}$ admet en x_0 une pseudo-limite $\geqslant 0$ finie ou non, égale à $\int f d\mu^{x_0}$, où μ^{x_0} est* *une mesure de Radon* >0 *sur* Δ, *indépendante de* f. *Il y a identité des ensembles de mesure nulle pour* μ^{x_0} *et pour la mesure* μ *canonique associée à* h, *et identité de la mesurabilité-*$d\mu^{x_0}$ *et de la mesurabilité-*$d\mu$.

La première partie vient de la représentation intégrale

$$\mathfrak{D}_{f,h}(x) = \int \mathrm{K}(y, x) f(y)\, d\mu(y),$$

d'après laquelle la pseudo-limite au point x_0 de $\frac{\mathfrak{D}_{f,h}}{h}$, égale à

$$\frac{\int \Theta(x_0, y) f(y)\, d\mu(y)}{\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y),},$$

peut s'écrire $\int f d\mu^{x_0}$, avec

$$d\mu^{x_0}(y) = \frac{\Theta(x_0, y)\, d\mu(y)}{\int \Theta(x_0, y)\, d\mu(y)},$$

mesure >0 indépendante de f. Il y a évidemennt identité des ensembles de mesure nulle pour μ^{x_0} et pour μ; et si $f \geqslant 0$ sur Δ est sommable-$d\mu^{x_0}$ (resp. $d\mu$), elle est sommable-$d\mu$ (resp. $d\mu^{x_0}$) au sens large, d'où l'identité sur Δ de la mesurabilité-$d\mu^{x_0}$ et de la mesurabilité-$d\mu$.

Extension. — *Si* f *est* h*-résolutive et sommable-*$d\mu^{x_0}$ *au sens large,* $\frac{\mathfrak{D}_{f,h}}{h}$ *admet en* x_0 *une pseudo-limite finie ou non, égale* $\int f d\mu^{x_0}$.

34. Exemple d'application. — Le théorème 23 permet d'améliorer assez largement un résultat de M. Brelot [18] sur l'allure d'une fonction sousharmonique au voisinage d'un point-frontière h-régulier.

Théorème 31. — *Soit* u *sousharmonique dans l'espace de Green* Ω, *telle que* $\frac{u}{h}$ *soit bornée supérieurement. Soient sur* Δ *un point* x_0 h*-régulier et un ensemble* E *faiblement* h*-négligeable* *contenant* x_0 *et l'ensemble* Δ_0 *des points non minimaux* [27]. *Alors :*

$$1) \qquad \limsup_{y \to x_0} \frac{u(y)}{h(y)} = \lim_{x \to x_0,\ x \in \Delta - E} \sup \left(\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{C}} \frac{u(y)}{h(y)} \right).$$

2) *Si* E *est h-négligeable, et si* E_x *désigne un ensemble quelconque de* Ω *non effilé en* x,

$$\limsup_{y \to x_0} \frac{u(y)}{h(y)} = \lim_{x \to x_0,\ x \in \Delta - E} \sup \left(\lim_{y \to x,\ y \in E_x} \sup \frac{u(y)}{h(y)} \right).$$

Le progrès sur le résultat de [18] est que $\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{C}} \dfrac{u}{h}$ ou $\limsup_{y \to x,\ y \in E_x} \dfrac{u}{h}$ remplacent la lim sup ordinaire qu'elles minorent. La démonstration est adaptée de ce cas initial.

Supposons d'abord E h-négligeable. Alors, par le théorème 23, $u \leqslant \mathfrak{D}_{f,h}$, où f vaut $-\infty$ sur E et $\limsup_{y \to x,\ y \in E_x} \dfrac{u}{h}$ en tout $x \notin E$, de sorte que, en x_0 h-régulier,

$$\limsup_{y \to x_0} \frac{u}{h} \leqslant \text{lim sup de } f \text{ en } x_0, \quad \text{donc} \leqslant \lim_{x \to x_0,\ x \in \Delta - E} \sup \left(\lim_{y \to x,\ y \in E_x} \sup \frac{u}{h} \right).$$

L'inégalité contraire évidente permet de conclure au 2).

Le 1) s'en déduit dans le cas de E h-négligeable, puisque $\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{C}} \dfrac{u}{h}$ est égale à $\limsup \dfrac{u}{h}$ en x prise sur un ensemble convenable de complémentaire effilé en x.

Dans l'hypothèse de E faiblement h-négligeable, supposons

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in \Delta - E} \sup \left(\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{C}} \frac{u}{h} \right) < \gamma < \limsup_{y \to x_0} \frac{u}{h},$$

et considérons l'ensemble $e \subset \Delta$ où $\limsup_{\mathfrak{C}} \dfrac{u}{h} \geqslant \gamma$; il est borélien et son intersection e_1 avec un voisinage ouvert assez petit de x_0 appartient à E; donc e_1 est h-négligeable, et

$$\limsup_{y \to x_0} \frac{u}{h} = \lim_{x \to x_0,\ x \in \Delta - (e_1 \cup \Delta_0)} \sup \left(\limsup_{y \to x}{}_{\mathfrak{C}} \frac{u}{h} \right) > \gamma,$$

ce qui est contradictoire avec l'inégalité $\limsup_{\mathfrak{C}} \dfrac{u}{h} < \gamma$ au voisinage de x_0.

[27] Remarquer essentiellement que x_0 est adhérent à $\Delta - E$ (voir [18]).

CHAPITRE V

APPLICATION DE LA FRONTIÈRE DE MARTIN A L'ÉTUDE AXIOMATIQUE DU PROBLÈME DE DIRICHLET

1. — Allure à la frontière de la solution et comparaison de deux axiomatiques.

35. — Soit dans l'espace de Green Ω une fonction harmonique $h > 0$. Nous avons rappelé au chapitre I les bases d'une nouvelle axiomatique du problème de Dirichlet, développée à partir de tout espace *compact métrisable* $\overline{\Omega}$ dont Ω est un sous-espace partout dense, de frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$. La théorie repose sur l'axiome suivant :

Axiome $\mathfrak{A}_h$: *Toute fonction finie continue sur* Γ *est h-résolutive.*

Elle s'applique en particulier à l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, c'est-à-dire l'espace pourvu de la frontière de Martin Δ, pour lequel l'axiome $\mathfrak{A}_h$ est vérifié quel que soit h, et, en utilisant la notion d'effilement, nous avons étudié dans ce cas particulier l'allure à la frontière des enveloppes et de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$.

Nous poursuivons ici cette étude pour l'espace $\overline{\Omega}$ général.

36. **Les fonctions minimales et leurs pôles.**

Soit K_x une fonction minimale dans Ω (x minimal $\in \Delta$). D'après M. Brelot [18], toute réduite $(K_x)_e$ de K_x relative à un ensemble-frontière $e \subset \Gamma$ est nulle ou égale à K_x, et il existe au moins un point $z \in \Gamma$ tel que $(\underline{K}_x)_{\{z\}} = K_x$.

Un tel point z est dit *pôle* dans $\overline{\Omega}$ (ou sur Γ) de la fonction minimale K_x, et *pôle unique* de K_x dans le cas d'unicité.

Dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, toute fonction minimale K_x admet le pôle unique x.

Principales propriétés de la notion de pôle.

1° *Pour que la fonction minimale* K_x *ait un pôle unique sur* Γ, *il faut et il suffit qu'elle vérifie l'axiome* $\mathfrak{A}_K$ *relatif à* $\overline{\Omega}$ [18].

2° *Pour qu'un point* $z \in \Gamma$ *soit pôle de la fonction minimale* K_x, *il faut et il suffit que* K_x *soit invariante par extrémisation sur tout ensemble de* Ω *auquel* z *n'est pas adhérent (dans* $\overline{\Omega}$*).*

La définition des réduites montre que la condition est suffisante, et la nécessité vient de la propriété [18], pour toute réduite relative à un ensemble-frontière e, d'être invariante par extrémisation sur tout ensemble de Ω dont l'adhérence dans $\overline{\Omega}$ ne rencontre pas e.

Corollaire. — *Si* $z \in \Gamma$ *est pôle de la fonction minimale* K_x, *cette fonction est associée à* 0 *au voisinage de tout point-frontière distinct de* z.

3° *Pour qu'un point* $z \in \Gamma$ *soit pôle unique de la fonction minimale* K_x, *il faut et il suffit que* K_x *ne soit pas associée à* 0 *au voisinage de* z.

Si K_x admet z pour pôle unique dans $\overline{\Omega}$, elle vérifie l'axiome $\mathfrak{A}_{K_x}$, et l'ensemble des points-frontière au voisinage desquels elle est associée à 0 est K_x-négligeable. Donc K_x, associée à 0 au voisinage de tout point-frontière distinct du pôle z, ne peut l'être au voisinage de z.

Réciproquement si K_x n'est pas associée à 0 au voisinage de z, aucun point distinct de z ne peut être pôle, et K_x admet z pour pôle nécessairement unique.

4° *Soit* A *un compact sur* Γ. *Pour que la fonction minimale* K_x *ait un pôle dans* A, *il faut et il suffit que* $(K_x)_A = K_x$, *ou encore que* $(K_x)_A$ *soit non nulle.*

Si $z \in A$ est pôle de K_x, on a $(K_x)_A \geqslant (K_x)_{\{z\}} = K_x$, d'où $(K_x)_A = K_x$. Inversement, partant de cette égalité, on peut former une suite décroissante de compacts $A_n \subset A$, d'intersection réduite à un point $z \in A$, et tels que $(K_x)_{A_n} \neq 0$, donc $(K_x)_{A_n} = K_x$. Comme les réduites relatives aux ensembles compacts définissent une fonctionnelle continue à droite, $(K_x)_{A_n} \to (K_x)_{\{z\}}$, d'où $(K_x)_{\{z\}} = K_x$, c'est-à-dire que z est pôle de K_x.

Le raisonnement du 2° montre encore que la condition $(K_x)_A = K_x$ équivaut à l'invariance de K_x par extrémisation sur tout ensemble de Ω dont l'adhérence dans $\overline{\Omega}$ ne rencontre pas A.

Corollaire. — *Soient* A *et* B *deux compacts sur* Γ. *Pour que la fonction minimale* K_x *ait un pôle dans* A *et un pôle dans* B, *il faut et il suffit que* $[(K_x)_A]_B$ *soit non nulle.*

5° Transformons par le critère d'effilement du théorème 5 les propriétés caractéristiques 2° et 3° ci-dessus. Nous en obtenons aussitôt des formes équivalentes qu'il est important d'expliciter :

Soit K_x *une fonction minimale dans* Ω $(x \in \Delta_1)$:

a) *Pour qu'un point* $z \in \Gamma$ *soit pôle de* K_x, *il faut et il suffit que pour tout voisinage* α *de* z *dans* $\overline{\Omega}$, $\alpha \cap \Omega$ *soit non effilé au point* x.

b) *Pour qu'un point* $z \in \Gamma$ *soit pôle unique de* K_x, *il faut et il suffit que pour tout voisinage* α *de* z *dans* $\overline{\Omega}$, $\Omega \cap \complement \alpha$ *soit effilé au point* x.

Il résulte de là que si $z \in \Gamma$ est pôle unique de la fonction minimale K_x, z est adhérent (dans $\overline{\Omega}$) à tout ensemble de Ω non effilé en x.

6° La propriété 4° ci-dessus et le théorème 5 montrent de même que, si A est un compact sur Γ, la condition que K_x ait un pôle dans A équivaut à ce que, pour tout voisinage α de A dans $\overline{\Omega}$, $\alpha \cap \Omega$ soit non effilé au point x.

37. Autres propriétés des pôles des fonctions minimales.

On notera Δ'_1 *le sous-ensemble de* Δ *formé des points minimaux* x *pour lesquels* K_x *possède un pôle unique sur* Γ, ou encore vérifie l'axiome $\mathfrak{A}_{K_x}$ relatif à l'espace $\overline{\Omega}$. En faisant correspondre à chaque point $x \in \Delta'_1$ le pôle de K_x sur Γ, on définit une *application* Φ *de* Δ'_1 *dans* Γ, *sur un sous-ensemble de* Γ *noté* Γ_1.

Lemme 7. — *Soit A un compact sur* Γ. *L'ensemble* A_1 *des points* x *minimaux pour lesquels* K_x *a un pôle dans* A *est un* G_δ (*intersection dénombrable d'ouverts*).

D'après la propriété 6° du n° 36, l'ensemble A_1 est identique à l'adhérence, dans la topologie fine sur l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, de la trace sur Ω du filtre des voisinages de A dans $\overline{\Omega}$, et si (α_n) est une suite décroissante de voisinages de A, telle que $\bigcap_n \alpha_n = A$,

A_1 est aussi l'intersection des adhérences fines des ensembles $\alpha_n \cap \Omega$. Le lemme vient donc de ce que les points de Δ finement adhérents à un ensemble de Ω, ou points de non effilement, forment une intersection dénombrable d'ouverts (coroll. 1 du th. 5).

THÉORÈME 32. — *L'ensemble* Δ_1' *est un* $K_{\sigma\delta}$.

Considérons, pour chaque entier n, un recouvrement fini $\mathfrak{R}_n$ de Γ par des compacts de diamètre $\leqslant \frac{1}{n}$, et pour chaque compact $A \in \mathfrak{R}_n$, l'ensemble des points x minimaux tels que K_x ait un pôle dans A et un pôle hors de A. La réunion des ensembles analogues relatifs aux compacts de tous les recouvrements $\mathfrak{R}_n$ est $\Delta_1 - \Delta_1'$, et comme Δ_1 est un G_δ, il suffit de montrer que chacun de ces ensembles est un $G_{\delta\sigma}$.

Or, si B est un compact de Γ disjoint du compact A, il résulte du lemme précédent que les points x minimaux tels que K_x ait un pôle dans A et un pôle dans B forment un G_δ, et le résultat cherché s'en déduit, en considérant une suite de compacts sur Γ dont la réunion est le complémentaire de A.

COROLLAIRE. — *L'application* Φ *est borélienne.*

Car l'image réciproque par Φ d'un compact de Γ est un $K_{\sigma\delta}$, comme trace sur Δ_1' d'une intersection dénombrable d'ouverts.

Remarque. — Il convient de remarquer que l'application Φ n'est pas nécessairement biunivoque. On le voit en examinant, comme M. Brelot [18], l'exemple d'un domaine circulaire diminué d'un rayon, avec sa frontière euclidienne; tout point du rayon est pôle de deux fonctions minimales distinctes qui vérifient l'axiome fondamental relatif à cet $\overline{\Omega}$ particulier (pour lequel $\mathfrak{A}_h$ est d'ailleurs vérifié quel que soit h). On aura un autre exemple, dans l'espace, en considérant le domaine compris entre deux sphères tangentes intérieurement, et le point de contact, qui est pôle unique d'une infinité de fonctions minimales distinctes.

Remarquons aussi que cette application Φ n'est pas en général continue.

38. Équivalence de l'axiome $\mathfrak{A}_h$.

Théorème 33. — *Pour qu'une fonction harmonique $h > 0$ dans Ω satisfasse à l'axiome $\mathfrak{A}_h$ relatif à l'espace $\overline{\Omega}$, il faut et il suffit que $\Delta - \Delta'_1$ soit h-négligeable, c'est-à-dire que les points x minimaux pour lesquels K_x n'a pas un pôle unique sur Γ forment un ensemble h-négligeable.*

Partons d'une forme équivalente de l'axiome $\mathfrak{A}_h$:

$\mathfrak{A}''''_h$: Quels que soient les compacts disjoints A et B sur Γ, $(h_A)_B = 0$, et utilisons la représentation intégrale canonique

$$h = \int K_x \, d\mu(x)$$

qui entraîne, pour les *compacts* A et B sur Γ,

$$(h_A)_B = \int [(K_x)_A]_B \, d\mu(x).$$

Supposons A et B disjoints. On a $[(K_x)_A]_B = 0$ pour tout $x \in \Delta'_1$ (puisque $\mathfrak{A}_{K_x}$ relatif à $\overline{\Omega}$ est vérifié), donc $(h_A)_B = 0$ dès que $\Delta - \Delta'_1$ est h-négligeable.

Réciproquement, si $(h_A)_B = 0$, l'ensemble des points x minimaux pour lesquels $[(K_x)_A]_B > 0$, c'est-à-dire pour lesquels K_x a un pôle dans A et un pôle dans B, est h-négligeable, et il en est de même de $\Delta_1 - \Delta'_1$ qui est réunion dénombrable d'ensembles de ce type d'après la démonstration du théorème 32.

Corollaire. — *Si $\mathfrak{A}_h$ est vérifié, l'ensemble $\Gamma - \Gamma_1$ est h-négligeable relativement à $\overline{\Omega}$.*

Pour tout compact $A \subset \Gamma - \Gamma_1$, $(K_x)_A = 0$ pour tout $x \in \Delta'_1$, donc l'hypothèse $\mathfrak{A}_h$ entraîne la nullité de la réduite

$$h_A = \int (K_x)_A \, d\mu(x).$$

Il en résulte $\mathfrak{D}_{\varphi_{\Gamma-\Gamma_1}, h} = 0$, et le corollaire s'en déduit grâce à la mesurabilité de $\Gamma - \Gamma_1$, qui vient de ce que Γ_1 est analytique, comme image de Δ'_1 par l'application borélienne Φ [28].

39. Les filtres $\mathcal{F}$ dans Ω.

Soit x un point *minimal* $\in \Delta$ et soit $\mathcal{F}_x$ (et brièvement $\mathcal{F}$) la trace sur Ω du filtre des voisinages fins de x, c'est-à-dire le

[28] Le graphe de Φ dans l'espace produit (Δ, Γ) est borélien, donc sa projection Γ_1 sur Γ est analytique (voir par exemple Kuratowski, Topologie).

filtre sur Ω formé des ensembles de complémentaire effilé en x, ou encore, d'après le critère d'effilement du théorème 5, des ensembles sur lesquels l'extrémisation de K_x ne conserve pas cette fonction. La propriété 5° du n° 36 donne aussitôt le

THÉORÈME 34. — *L'adhérence du filtre* $\dot{\mathfrak{F}}_x$ *dans l'espace compact* $\overline{\Omega}$ *est identique à l'ensemble des pôles de la fonction minimale* K_x. *La convergence de* $\dot{\mathfrak{F}}_x$ *dans* $\overline{\Omega}$ *équivaut donc à l'unicité du pôle, lequel est alors point limite de* $\dot{\mathfrak{F}}_x$.

Un point x minimal et le filtre $\dot{\mathfrak{F}}_x$ qu'il définit seront dits *associés.* Les filtres $\dot{\mathfrak{F}}_x$ convergents dans $\overline{\Omega}$ sont ceux associés aux points $x \in \Delta_1'$; leurs points de convergence dans $\overline{\Omega}$ forment le sous-ensemble Γ_1 de Γ, défini au n° 37 comme image de Δ_1' par l'application Φ, c'est-à-dire comme ensemble des pôles des fonctions minimales qui possèdent un pôle unique sur Γ. En chaque point $z \in \Gamma_1$ convergent tous les filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ associés aux fonctions minimales qui admettent z pour pôle unique. Enfin :

THÉORÈME 33'. — *L'axiome* $\mathcal{A}_h$ *relatif à* $\overline{\overline{\Omega}}$ *équivaut à ce que les points minimaux associés aux filtres* $\dot{\mathfrak{F}}$ *non convergents dans* $\overline{\Omega}$ *forment un ensemble h-négligeable.*

REMARQUE FONDAMENTALE (Principe de maximum). — *Pour qu'un ensemble* $\mathcal{E}_{\dot{\mathfrak{F}}}$ *de filtres* $\dot{\mathfrak{F}}$ *précédents satisfasse à la condition :*

A_h). *Si u sousharmonique dans* Ω *satisfait à :* $\dfrac{u}{h}$ *bornée supérieurement et* $\limsup\limits_{\dot{\mathfrak{F}}} \dfrac{u}{h} \leqslant 0$ *quel que soit* $\dot{\mathfrak{F}} \in \mathcal{E}_{\dot{\mathfrak{F}}}$, *alors* $u \leqslant 0$,

il faut et il suffit que les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ *qui n'appartiennent pas à* $\mathcal{E}_{\dot{\mathfrak{F}}}$ *forment un ensemble faiblement h-négligeable.*

Conséquence immédiate des théorèmes 22 et 23.

Application.

LEMME 8. — *Dans l'hypothèse* $\mathcal{A}_h$, *l'image réciproque par l'application* Φ *de tout ensemble faiblement h-négligeable relativement à* $\overline{\Omega}$ *est un ensemble faiblement h-négligeable relativement à* $\hat{\Omega}$.

Soit d'abord A un compact *h-négligeable* relativement à Ω. Sans hypothèse $\mathfrak{A}_h$, l'ensemble des points x minimaux tels que K_x ait un pôle dans A — ce qui équivaut à la condition $(K_x)_A > 0$ — est h-négligeable relativement à $\hat{\Omega}$, car la nullité de la réduite

$$h_A = \int (K_x)_A \, d\mu(x)$$

entraîne que la fonction $(K_x)_A$ de x soit nulle presque partout-$d\mu$; donc l'image réciproque $\Phi^{-1}(A)$ est aussi h-négligeable.

Passons au cas d'un ensemble e quelconque faiblement h-négligeable relativement à $\overline{\Omega}$, et montrons que tout compact $\sigma \subset \Phi^{-1}(e)$ est h-négligeable. Comme la restriction à σ de l'application Φ est borélienne, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un compact $\sigma_1 \subset \sigma$ tel que $\mu(\sigma \cap \complement \sigma_1) \leqslant \varepsilon$, et que la restriction de Φ à σ_1 soit continue ([29]). L'image $\Phi(\sigma_1)$ est un compact contenu dans e, donc faiblement h-négligeable, et l'axiome $\mathfrak{A}_h$ sous la forme équivalente $\mathfrak{A}'_h$ montre que $\Phi(\sigma_1)$ est aussi h-négligeable. Il en est donc de même de $\sigma_1 \subset \Phi^{-1}(\Phi(\sigma_1))$. Ainsi $\mu(\sigma) \leqslant \varepsilon$, et comme ε est arbitraire, on conclut $\mu(\sigma) = 0$.

THÉORÈME 35. — *Supposons l'axiome $\mathfrak{A}_h$ vérifié, et considérons pour toute fonction f réelle sur Γ, les fonctions u dans Ω qui sont sousharmoniques ou $-\infty$, et satisfont chacune aux conditions : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup_{\dot{\mathfrak{F}}} \frac{u}{h} \leqslant f(z)$ pour tout point $z \in \Gamma_1$ et tout filtre $\dot{\mathfrak{F}}$ convergeant vers z. L'enveloppe supérieure des u est encore $\mathfrak{D}_{f,h}$.*

En reprenant la démonstration du théorème 23, on est ramené à voir que si $e \subset \Gamma_1$ est faiblement h-négligeable relativement à $\overline{\Omega}$, l'ensemble des filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ qui convergent vers des points de $\Gamma_1 - e$ satisfait à la condition A_h. Cela résulte de ce que les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ qui n'appartiennent pas à la famille considérée forment l'ensemble $(\Delta_1 - \Delta'_1) \cup \Phi^{-1}(e)$, qui est faiblement h-négligeable d'après le théorème 33′ et le lemme 8.

([29]) Pour cette propriété des fonctions mesurables, voir par exemple Bourbaki, Intégration, chapitre IV.

40. Allure à la frontière des fonctions surharmoniques > 0.

Avant d'aborder l'étude de l'allure à la frontière Γ de la solution du problème de Dirichlet, nous allons donner quelques résultats préalables, qui généralisent certains des résultats obtenus au chapitre III dans le cas particulier de la frontière de Martin.

Nous utiliserons essentiellement les filtres $\dot{\mathcal{F}}$ définis au n° précédent, et le théorème 21, qui exprime que pour tout potentiel de Green v d'une mesure > 0 dans Ω, les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ pour lesquels $\limsup_{\dot{\mathcal{F}}} \frac{v}{h} > 0$ forment un ensemble h-négligeable.

Rappelons [18] que si u et u_1 sont deux fonctions harmoniques > 0 dans Ω telles que $u_1 \leqslant u$:

a) l'invariance de u par extrémisation sur un ensemble de Ω entraîne la même propriété pour u_1;

b) la condition $\mathcal{A}_u$ relative à $\overline{\Omega}$ entraîne la condition $\mathcal{A}_{u_1}$, propriétés qui se déduisent aussi des théorèmes 20 et 33 respectivement. Alors :

LEMME 9. — *Si u harmonique > 0 dans Ω est associée à 0 au voisinage d'un point-frontière z_0 et vérifie l'axiome $\mathcal{A}_u$ relatif à $\overline{\Omega}$, il existe un voisinage ouvert δ_0 de z_0 tel que $\mathcal{E}_u^{\Omega \cap \complement \delta_0}$ soit un potentiel de Green.*

Soit δ un voisinage ouvert de z_0 tel que l'on ait $u = \overset{*}{H}{}_u^{\delta \cap \Omega}$ dans $\delta \cap \Omega$. Si δ_0 est un voisinage ouvert de z_0 tel que $\overline{\delta}_0 \subset \delta$, l'extrémale $\mathcal{E}_u^{\Omega \cap \complement \delta_0}$ est un potentiel de Green, sinon la plus grande minorante harmonique u_1 serait une fonction harmonique > 0, associée à 0 au voisinage de tout point-frontière, et vérifiant l'axiome $\mathcal{A}_{u_1}$ relatif à $\overline{\Omega}$ (parce que $u_1 \leqslant u$).

THÉORÈME 36. — *Soit u harmonique > 0 dans Ω, vérifiant l'axiome $\mathcal{A}_u$ relatif à $\overline{\Omega}$, et soit* A *le support compact de la u-mesure harmonique sur Γ. Les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ qui convergent vers des points de $\Gamma - A$, et pour lesquels $\limsup_{\dot{\mathcal{F}}} \frac{u}{h} > 0$, forment un ensemble h-négligeable.*

Comme $\Gamma - A$ est aussi l'ensemble des points-frontière au voisinage desquels u est associée à 0, il existe, pour tout point $z \in \Gamma - A$, un voisinage ouvert δ de z et un potentiel de Green v

tels que $v = u$ dans $\delta \cap \Omega$. Le théorème s'en déduit en considérant un recouvrement dénombrable de $\Gamma - A$ par de tels ouverts δ.

Extension. — *Dans l'hypothèse $\mathcal{A}_h$, le résultat s'étend à u harmonique > 0 quelconque, en prenant pour A l'ensemble (compact) des points-frontière au voisinage desquels u n'est pas associée à* 0.

Il suffit de remarquer que u peut s'écrire sous la forme

$$u = u_{\Delta'_1} + u_{\Delta - \Delta'_1},$$

(à cause de l'additivité, sur Δ, des réduites pour ensembles disjoints mesurables), et d'établir la propriété pour chacun des termes du second membre.

Pour $u_{\Delta'_1}$, si cette fonction n'est pas nulle, la propriété se déduit du théorème, car $u_{\Delta'_1}$, dont la mesure associée ne charge que Δ'_1, vérifie l'axiome $\mathcal{A}_{u_{\Delta'_1}}$ relatif à $\overline{\Omega}$ (th. 33) et est associée à 0 au voisinage de tout point de $\Gamma - A (u_{\Delta'_1} \leq u)$, de sorte que le support de la $u_{\Delta'_1}$-mesure harmonique est contenu dans A; et pour $u_{\Delta - \Delta'_1}$, elle vient de l'hypothèse $\mathcal{A}_h$, sous la forme équivalente du théorème 33, qui entraîne que inf $(u_{\Delta - \Delta'_1}, h)$ est un potentiel de Green [30], donc (th. 24) que $\frac{u_{\Delta - \Delta'_1}}{h}$ admet sur Δ une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.

Corollaire. — *Soit dans $\overline{\Omega}$ un ouvert δ rencontrant Γ. Sous la condition $\mathcal{A}_h$, les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ qui convergent vers des points de $\delta \cap \Gamma$ et pour lesquels $\limsup\limits_{\dot{\mathcal{F}}} \frac{1}{h} \mathrm{H}_{\underset{*}{h}}^{\delta \cap \Omega} > 0$, forment un ensemble h-négligeable.*

Il suffit de considérer l'extrémale $\mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega}$, qui est égale à $\mathrm{H}_{\underset{*}{h}}^{\delta \cap \Omega}$ dans $\delta \cap \Omega$ et vaut dans Ω la somme du potentiel de Green d'une mesure ≥ 0 et d'une fonction harmonique $h_1 \geq 0$, qui, si elle est non nulle, satisfait à la condition $\mathcal{A}_{h_1}$ (parce que $h_1 \leq h$), et définit une h_1-mesure harmonique de support contenu dans $\Gamma \cap \complement \delta$.

[30] L'enveloppe inférieure de deux fonctions harmoniques > 0 dont les mesures associées sont portées par deux ensembles disjoints est un potentiel de Green.

41. Allure à la frontière de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$.

Ce qui précède permet d'approfondir l'allure à la frontière des enveloppes et de la solution $\mathfrak{D}_{f,h}$ dans le cas d'un $\overline{\Omega}$ général, en utilisant les notions de h-régularité et de h-régularité forte, dont la définition est rappelée au chapitre IV. Là encore, on ne sait si l'axiome $\mathcal{A}_h$ entraîne, comme dans le cas classique de frontière euclidienne avec $h = 1$, que l'ensemble des points-frontière non fortement h-réguliers — ou seulement non h-réguliers — est h-négligeable. Mais les résultats obtenus pour l'espace de Martin peuvent s'étendre de la façon suivante :

THÉORÈME 37. — *Si h harmonique > 0 dans Ω satisfait à l'axiome $\mathcal{A}_h$ relatif à $\overline{\Omega}$, les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ convergents dans $\overline{\Omega}$ et non fortement h-réguliers pour $\overline{\Omega}$ forment un ensemble h-négligeable.*

La démonstration est adaptée de celle du théorème 27. Notons σ_ρ^z la boule ouverte de centre $z \in \Gamma$ et rayon $\rho > 0$ (avec la métrique de $\overline{\Omega}$), et soit E_ρ l'ensemble des points minimaux $x \in \Delta_1'$ tels que l'on ait $\limsup_{\dot{\mathcal{F}}_x} \frac{1}{h} H_{h^*}^{\sigma_\rho^z \cap \Omega} > 0$ pour le filtre $\dot{\mathcal{F}}_x$ associé à x et le pôle z de K_x, qui est point limite de $\dot{\mathcal{F}}_x$. L'ensemble des points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ convergents dans $\overline{\Omega}$ et non fortement h-réguliers pour $\overline{\Omega}$ est réunion des $E_{\frac{1}{n}}$, donc il suffit de montrer que E_ρ est h-négligeable.

Considérons pour cela un recouvrement fini de Γ par des ouverts de $\overline{\Omega}$ de diamètre $\leqslant \rho$. Soit δ l'un de ces ouverts, et soit δ_1 l'image réciproque $\Phi^{-1}(\delta \cap \Gamma)$. Pour chaque point $x \in E_\rho \cap \delta_1$, le filtre $\dot{\mathcal{F}}_x$ associé à x converge vers un point $z \in \delta \cap \Gamma$, et $\limsup_{\dot{\mathcal{F}}_x} \frac{1}{h} H_{h^*}^{\delta \cap \Omega}$ est > 0 (car $\sigma_\rho^z \supset \delta$), donc $E_\rho \cap \delta_1$ est h-négligeable (coroll. du th. 36), et de même E_ρ puisque les ensembles δ_1 forment un recouvrement de Δ_1'.

COROLLAIRE 1. — *Dans l'hypothèse $\mathcal{A}_h$, les filtres $\dot{\mathcal{F}}$ convergents dans $\overline{\Omega}$ et fortement h-réguliers pour $\overline{\Omega}$ satisfont aux conditions A_h et B_h de l'ancienne axiomatique étendue, ce qui complète la comparaison des deux axiomatiques et en établit l'équivalence.*

La condition B_h résulte du choix même de ces filtres. A_h

vient de ce que les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathcal{F}}$ qui ne font pas partie de la famille considérée forment un ensemble h-négligeable (th. 33′ et 37), et de la remarque fondamentale du n° 39.

COROLLAIRE 2. — *Sous la condition* $\mathcal{A}_h$, *les points de* Γ *où ne converge aucun filtre* $\dot{\mathcal{F}}$ *fortement h-régulier pour* $\overline{\Omega}$ *forment un ensemble e h-négligeable relativement à* $\overline{\Omega}$.

D'après le théorème, $\Phi^{-1}(e)$ est h-négligeable relativement à $\hat{\Omega}$, donc il existe une fonction surharmonique $\varphi > 0$ telle que $\frac{\varphi}{h} \to +\infty$ en tout point $x \in \Phi^{-1}(e)$, et à fortiori selon le filtre $\dot{\mathcal{F}}_x$ associé à chacun de ces x. Autrement dit $\frac{\varphi}{h} \to +\infty$ selon tout filtre $\dot{\mathcal{F}}$ convergeant dans $\overline{\Omega}$ vers un point de e, d'où le corollaire puisque les enveloppes relatives à Γ restent les mêmes quand les conditions-frontière sont prises selon les filtres $\dot{\mathcal{F}}$ convergents dans $\overline{\Omega}$ (th. 35).

Conséquences. — Si f est finie continue sur Γ :

1. La solution $\mathfrak{D}_{f,h}$ est l'unique fonction u harmonique dans Ω, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée et admette, selon tout filtre $\dot{\mathcal{F}}$ fortement h-régulier pour $\overline{\Omega}$, convergeant vers $z \in \Gamma_1$, une limite égale à $f(z)$.

2. Soit $\mathcal{F}_h$ le filtre formé par les ensembles $E \subset \Omega$ tels que l'extrémale de h relative à E soit un potentiel de Green. Si F définie dans Ω tend vers f selon tout filtre $\dot{\mathcal{F}}$ convergeant dans $\overline{\Omega}$, exceptés certains filtres $\dot{\mathcal{F}}$ dont les points de convergence sur Γ forment un ensemble faiblement h-négligeable, $\mathfrak{D}_{f,h}$ est aussi la seule fonction u harmonique dans Ω telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée, et que $\frac{u}{h} - F$ tende vers zéro selon $\mathcal{F}_h$.

Cas particulier : F prolongement continu de f dans Ω.

Cela résulte encore de l'équivalence, pour une fonction φ dans Ω, de la condition $\varphi \underset{\mathcal{F}_h}{\to} 0$ avec l'existence, sur Δ, d'une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable (n° 31).

2. — Comparaison des problèmes correspondant à $\overline{\Omega}$ et à l'espace de Martin.

42. Considérons toujours l'espace compact métrisable $\overline{\Omega}$ dont Ω est un sous-espace partout dense, de frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$, et soit h harmonique > 0 dans Ω.

On a vu que la notion de pôle d'une fonction minimale permet de définir une application Φ d'une partie Δ'_1 de la frontière de Martin sur un sous-ensemble Γ_1 et Γ, et que si la condition $\mathfrak{A}_h$ relative à $\overline{\Omega}$ est satisfaite, les complémentaires respectifs $\Delta - \Delta'_1$, $\Gamma - \Gamma_1$, sont h-négligeables, donc inutiles pour les problèmes de Dirichlet correspondant respectivement aux frontières Δ et Γ.

D'autre part, si l'on introduit les filtres $\mathcal{F}$ (n° 39) convergents dans $\overline{\Omega}$, leurs points limites dans $\hat{\Omega}$ et $\overline{\Omega}$, qui sont précisément en correspondance selon Φ, forment respectivement les ensembles Δ'_1 et Γ_1, et pour chacun de ces espaces, moyennant $\mathfrak{A}_h$, les enveloppes fondamentales de la théorie du problème de Dirichlet restent les mêmes quand les conditions-frontière sont prises selon ces filtres $\dot{\mathcal{F}}$.

Grâce à ces résultats, il va être possible de ramener tout problème de Dirichlet relatif à $\overline{\Omega}$ à un problème analogue relatif à l'espace de Martin. De façon précise :

THÉORÈME 38. — *Soit f une fonction réelle sur Γ et soit f_1 sur Δ égale en chaque point $x \in \Delta'_1$ à la valeur de f au point $\Phi(x)$ (pôle unique de K_x) et définie de façon quelconque ailleurs.*

Alors, sous la condition $\mathfrak{A}_h$, en introduisant l'indice (Δ) pour les notions relatives à Δ, c'est-à-dire l'espace $\hat{\Omega}$,

$$\underline{\mathfrak{D}}_{f,h} = \underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{D}}_{f,h} = \overline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}.$$

Donc, dans le cas le plus général d'un $\overline{\Omega}$ satisfaisant à $\mathfrak{A}_h$, la solution générale $\mathfrak{D}_{f,h}$ est égale à la solution correspondante $\mathfrak{D}^{(\Delta)}_{f_1,h}$ du problème relatif à la frontière de Martin.

D'après $\mathcal{A}_h$, l'ensemble $\Delta - \Delta'_1$ est h-négligeable, donc le changement de f_1, sur cet ensemble n'altère pas les enveloppes $\underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$, $\overline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$ qui se trouvent déterminées par la seule connaissance de f_1 sur Δ'_1.

Alors toute fonction u sousharmonique ou égale à $-\infty$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée supérieurement et que, dans $\overline{\Omega}$, $\limsup \frac{u}{h} \leqslant f$ en tout point de Γ (ou même seulement de Γ_1), satisfait, pour tout $x \in \Delta'_1$, à la condition $\limsup\limits_{\dot{\mathcal{F}}_x} \frac{u}{h} \leqslant f_1(x)$, donc minore $\underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$ (th. 23), d'où $\underline{\mathfrak{D}}_{f, h} \leqslant \underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$.

De même, toute fonction u sousharmonique ou égale à $-\infty$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée supérieurement et que, dans $\hat{\Omega}$, $\limsup \frac{u}{h} \leqslant f_1$ en tout point de Δ (ou même seulement de Δ'_1), satisfait à la condition $\limsup\limits_{\dot{\mathcal{F}}} {}^{u} \leqslant f(z)$ pour tout point $z \in \Gamma_1$ et tout filtre $\dot{\mathcal{F}}$ convergeant vers z, donc minore $\underline{\mathfrak{D}}_{f, h}$ (th. 35), d'où $\underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h} \leqslant \underline{\mathfrak{D}}_{f, h}$.

On en déduit l'égalité $\underline{\mathfrak{D}}_{f, h} = \underline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$, entraînant $\overline{\mathfrak{D}}_{f, h} = \overline{\mathfrak{D}}^{(\Delta)}_{f_1, h}$, que l'on peut aussi établir directement de façon analogue. Et si l'une des fonctions f, f_1, est h-résolutive, il en est de même de l'autre, avec égalité des solutions correspondantes $\mathfrak{D}_{f, h}$, $\mathfrak{D}^{(\Delta)}_{f_1, h}$.

Cas particulier. — Si e est un ensemble de Γ, sa h-mesure harmonique intérieure (resp. extérieure) relative à $\overline{\Omega}$ est égale à la h-mesure harmonique analogue, relative à $\hat{\Omega}$, de son image réciproque par l'application Φ.

Remarque. — Comme l'application Φ n'est pas nécessairement biunivoque, on voit que la frontière de Martin affine le problème de Dirichlet par décomposition effective de certains points-frontière. Il serait donc important de savoir si l'espace de Martin est, à un homéomorphisme près, le seul $\overline{\Omega}$ où $\mathcal{A}_h$ est vérifié quel que soit h, et pour lequel il y a correspondance biunivoque entre les fonctions minimales et leurs pôles.

3. — Exemples d'application.

43. Nous allons donner deux exemples d'application de la correspondance établie entre la frontière de Martin et toute frontière Γ au moyen de la notion de pôle d'une fonction minimale.

La simple définition du pôle donne d'abord une propriété nouvelle des fonctions minimales :

Théorème 39. — *Si l'espace de Green Ω est partout dense dans un espace compact métrisable où tout point-frontière de Ω forme un ensemble h-négligeable, alors (sans supposer $\mathfrak{A}_h$), les quotients par h des fonctions minimales dans Ω sont nécessairement non bornés.*

En particulier, si Ω est un domaine euclidien borné, ou dont le point à l'infini est un point-frontière formant un ensemble 1-négligeable, les fonctions minimales dans Ω sont nécessairement non bornées.

On sait en effet (coroll. du th. 17) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{K_x}{h}$ soit non bornée dans Ω (pour K_x minimale) est que la mesure canonique associée à h ne charge pas $\{x\}$, de sorte que si la réduite

$$h_{\{z\}} = \int (K_x)_{\{z\}}\, d\mu(x)$$

relative à l'ensemble-frontière réduit à un point $z \in \Gamma$ est nulle, $\frac{K_x}{h}$ est non bornée pour toute fonction minimale K_x admettant z pour pôle.

Le théorème général en résulte, et le cas particulier vient de ce que, pour un domaine euclidien, tout point non à l'infini de sa frontière ordinaire forme un ensemble de mesure harmonique ordinaire nulle, c'est-à-dire 1-négligeable.

Dans le même ordre d'idées, on retrouve un résultat obtenu par M. Brelot [18] par une toute autre voie :

Théorème 40. — *Le pôle sur Γ de toute fonction minimale admettant un pôle unique dans $\overline{\Omega}$ est un point accessible.*

Soit $z \in \Gamma_1$, pôle unique de la fonction minimale $K_x(x \in \Delta_1')$. Soit σ_1 une boule ouverte de centre z et rayon < 1 (avec la métrique de $\overline{\Omega}$); d'après la propriété 5° du n° 36, $\Omega \cap \complement \sigma_1$ est effilé au point x, donc il existe un domaine composant ω_1 de l'ouvert $\sigma_1 \cap \Omega$ tel que $\Omega - \omega_1$ soit effilé en x (coroll. 2 du th. 5), et z est adhérent à ω_1. Soit σ_2 une boule ouverte de centre z et rayon $< \frac{1}{2}$; pour l'ouvert $\sigma_2 \cap \omega_1$, dont le complémentaire dans Ω est effilé au point x, il existe encore un domaine composant ω_2 tel que $\Omega - \omega_2$ soit effilé en x, et z est adhérent à ω_2. On forme ainsi une suite décroissante de domaines $\omega_n \subset \Omega$, de diamètre $\leqslant \frac{2}{n}$, admettant z pour point-frontière et tel que $\bigcap_n \omega_n = \{z\}$, d'où l'accessibilité de ce point.

Corollaire. — *Pour l'espace Ω, moyennant $\mathfrak{A}_h$, l'ensemble des points-frontière inaccessibles est h-négligeable.*

Car tout point inaccessible appartient nécessairement à $\Gamma - \Gamma_1$, qui est h-négligeable dès que la condition $\mathfrak{A}_h$ est satisfaite (coroll. du th. 33).

4. — « Action à distance » et filtres complètement *h*-réguliers.

44. — Nous abordons ici l'étude d'un phénomène « *d'action à distance* » dans le problème de Dirichlet, mis en évidence par R. S. Martin [33] et M. Brelot [6]. Sans prétendre élucider complètement la question, nous donnerons quelques résultats assez généraux.

Soit l'espace de Green Ω partout dense dans un espace compact métrisable $\overline{\Omega}$, et de frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$; fixons h harmonique > 0 dans Ω.

Si un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω, convergeant vers un point-frontière z_0, est *h-régulier*, on sait que pour toute fonction f *bornée supérieurement sur* Γ,

$$\limsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{h} \overline{\mathfrak{D}}_{f,h} \leqslant \limsup \text{ de } f \text{ en } z_0.$$

Mais cette inégalité peut ne plus avoir lieu si f n'est bornée supérieurement qu'au voisinage de z_0, car les valeurs de f hors d'un tel voisinage peuvent aussi influer sur l'allure en z_0 de $\frac{\overline{\mathfrak{D}}_{f,h}}{h}$. C'est cette « action à distance » que mettent en relief les exemples de M. Brelot et R. S. Martin, donnés dans le cas $h = 1$ pour un domaine de R^{τ} et sa frontière euclidienne. Ces exemples montrent même que f h-résolutive sur Γ peut être bornée au voisinage d'un point-frontière z_0 sans qu'il en soit nécessairement de même pour $\frac{\mathfrak{D}_{f,h}}{h}$.

On est ainsi conduit aux notions suivantes :

45. Filtres h-indépendants et filtres complètement h-réguliers [31].

DÉFINITION 4. — *Un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω convergeant vers un point-frontière z_0 est dit complètement h-régulier si pour toute fonction f sur Γ, bornée supérieurement dans un voisinage de z_0 et telle que $\overline{\mathfrak{D}}_{f,h} < +\infty$, on a*

$$\limsup_{\mathcal{F}} \frac{1}{h} \overline{\mathfrak{D}}_{f,h} \leqslant \limsup \text{ de } f \text{ en } z_0.$$

Cela entraîne évidemment la h-régularité du filtre $\mathcal{F}$, et dans l'hypothèse $\mathfrak{A}_h$, *équivaut* à ce que pour toute f h-résolutive, *finie et continue au point* z_0,

$$\frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h} \xrightarrow[\mathcal{F}]{} f(z_0).$$

Un *point-frontière* z_0 est dit *complètement h-régulier* s'il en est ainsi de la trace sur Ω du filtre des voisinages de z_0.

En s'inspirant d'un Mémoire de M. Brelot [11] où est étudiée une certaine notion « d'activité », on introduira également la

DÉFINITION 5. — *Un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω convergeant vers un point-frontière z_0 est dit h-indépendant si pour tout voisinage ouvert δ de z_0, il existe un ensemble* $E \in \mathcal{F}$, *tel que* $\frac{G(x, y)}{h(y) G(x, y_0)}$ *reste borné pour x et y variant respectivement dans* $\Omega \cap \complement \delta$ *et* E.

Un *point-frontière* z_0 est dit *h-indépendant* s'il en est ainsi de la trace sur Ω du filtre des voisinages de z_0.

[31] Nous changeons la terminologie de [38].

Renvoyons à [11] pour des exemples divers de 1-indépendance : de façon générale, si Ω est un domaine de R^{τ} muni de sa frontière euclidienne, une certaine régularité locale de cette frontière au voisinage d'un point z_0 entraîne que z_0 est 1-indépendant.

LEMME 10. — *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur Ω, convergeant vers un point-frontière z_0, et à la fois faiblement h-régulier et h-indépendant. Pour tout potentiel de Green v d'une mesure > 0 dans Ω, qui ne charge pas un voisinage de z_0, $\dfrac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 0$.*

Soit $v(y) = \int G(x, y)\, dm(x)$, où m est une mesure > 0 dans Ω, hors d'un voisinage ouvert δ de z_0, et supposons $v(y_0)$ fini. Selon une idée de M. Brelot, on peut choisir un compact $\alpha \subset \Omega \cap \complement \delta$ de façon que $\dfrac{1}{h(y)} \displaystyle\int_{\Omega - \alpha} G(x, y)\, dm(x)$, qui est majoré par $K \displaystyle\int_{\Omega - \alpha} G(x, y_0)\, dm(x)$ $(K = C^{te} > 0)$ sur un ensemble $E \in \mathcal{F}$, soit, sur cet ensemble, moindre qu'un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. La restriction de m au compact α donne alors un potentiel de Green dont le quotient par h tend vers 0 selon $\mathcal{F}$, comme $\dfrac{G_{y_0}}{h}$, d'où le lemme.

LEMME 11. — *Si un filtre $\mathcal{F}$ sur Ω, convergeant vers un point-frontière z_0, est faiblement h-régulier et h-indépendant, toute fonction harmonique $u > 0$ dans Ω, associée à 0 au voisinage de z_0 et satisfaisant à l'axiome $\mathfrak{A}_u$ [32] relatif à $\overline{\Omega}$, jouit de la propriété que $\dfrac{u}{h} \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 0$.*

[32] Sans supposer $\mathfrak{A}_u$, on peut voir que $\limsup\limits_{\mathcal{F}} \dfrac{u}{h} < +\infty$ (ce qui n'entraîne pas nécessairement $\dfrac{u}{h} \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} 0$). Car si u est invariante par extrémisation sur $\delta \cap \Omega$, δ voisinage de z_0, la mesure canonique associée à u ne charge que l'ensemble des points de non effilement de $\Omega \cap \complement \delta$, qui sont limites, au sens de la topologie de Martin de points de $\Omega \cap \complement \delta$, de sorte que dans la représentation intégrale

$$\frac{u(y)}{h(y)} = \int \frac{K(x, y)}{h(y)}\, dv(x),$$

les $\dfrac{K(x, y)}{h(y)}$ sont uniformément bornées sur un ensemble $E \in \mathcal{F}$, et $\dfrac{u(y)}{h(y)}$ est borné dans E.

Il existe en effet, d'après le lemme 9, un potentiel de Green égal à u dans un voisinage de z_0 et dont la mesure > 0 associée ne charge pas un voisinage de z_0, d'où la propriété $\frac{u}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$.

Conséquence. — Si h est associée à 0 au voisinage d'un point-frontière z_0 et vérifie $\mathfrak{A}_h$, il n'existe aucun filtre convergeant vers z_0, qui soit à la fois faiblement h-régulier et h-indépendant.

THÉORÈME 41. — *Sous la condition $\mathfrak{A}_h$, tout filtre $\mathcal{F}$ sur Ω, convergeant vers un point-frontière z_0, et à la fois faiblement h-régulier et h-indépendant, est fortement et complètement h-régulier.*

Montrons d'abord que pour tout voisinage ouvert δ de z_0, $\frac{1}{h} \mathrm{H}_{\overset{h}{\bullet}}^{\delta \cap \Omega} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$, ce qui équivaut à la h-régularité forte de $\mathcal{F}$. Considérons l'extrémale $\mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega}$, égale à $\mathrm{H}_{\overset{h}{\bullet}}^{\delta \cap \Omega}$ dans $\delta \cap \Omega$, et nécessairement distincte de h. Elle vaut dans Ω la somme d'un potentiel de Green v dont la mesure > 0 associée ne charge pas δ, donc tel que $\frac{v}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$, et d'une fonction harmonique $h_1 \geqslant 0$ qui, si elle est non nulle, est associée à 0 au voisinage de z_0 et satisfait à l'axiome $\mathfrak{A}_{h_1}$ relatif à $\overline{\Omega}$ (parce que $h_1 < h$), de sorte que $\frac{h_1}{h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$. Il en résulte bien que $\frac{1}{h} \mathrm{H}_{\overset{h}{\bullet}}^{\delta \cap \Omega} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0$.

Pour voir que $\mathcal{F}$ est complètement h-régulier, on remarque que toute fonction f h-résolutive, finie continue au point z_0, est la somme d'une fonction f_1 h-résolutive bornée, égale à f dans un voisinage δ de z_0, et d'une fonction f_2 h-résolutive nulle sur δ, de telle sorte que $\mathfrak{D}_{f,h} = \mathfrak{D}_{f_1,h} + \mathfrak{D}_{f_2,h}$; et comme la h-régularité forte de $\mathcal{F}$ entraîne

$$\frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f_1,h} \underset{\mathcal{F}}{\to} f_1(z_0) = f(z_0),$$

il suffit de montrer que

$$\frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f_2,h} \underset{\mathcal{F}}{\to} 0.$$

On se ramène au cas de $f_2 \geqslant 0$; alors, si $\mathfrak{D}_{f_2, h}$ est non nulle, elle est harmonique > 0, associée à 0 au voisinage de z_0, et vérifie l'axiome $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}_{f_2, h}}$ (33) relatif à $\overline{\Omega}$, d'où la propriété cherchée grâce au lemme 11.

Cas particulier. — S oit z_0 un *point-frontière* à la fois *faile-ment h-régulier et h-indépendant* et supposons la condition $\mathfrak{A}_h$ *satisfaite.* Alors (sans la condition $\mathfrak{A}_u$), toute fonction harmonique $u > 0$ associée à 0 au voisinage de z_0 jouit de la propriété que $\frac{u}{h}$ tend vers 0 au point z_0.

Car $\frac{u}{h}$ étant alors bornée *dans un voisinage* de z_0, il existe un voisinage ouvert δ_0 de z_0 tel que dans $\delta_0 \cap \Omega$ on ait

$$u = \mathrm{H}_{\underset{*}{u}}^{\delta_0 \cap \Omega} \leqslant k\mathrm{H}_{\underset{*}{h}}^{\delta_0 \cap \Omega}, \qquad (k = \mathrm{C}^{te} > 0).$$

On voit de même que pour tout voisinage ouvert δ de z_0, il existe un voisinage ouvert δ_0 de z_0, avec $\overline{\delta}_0 \subset \delta$, tel que l'on ait

$$\frac{\mathrm{G}(x,\ y)}{\mathrm{G}(x,\ y_0)} \leqslant k\mathrm{H}_{\underset{*}{h}}^{\delta_0 \cap \Omega}(y), \qquad (k = \mathrm{C}^{te} > 0)$$

quels que soient $x \in \Omega \cap \complement\delta$ et $y \in \delta_0$, de sorte que $\frac{\mathrm{G}(x,\ y)}{h(y)\mathrm{G}(x,\ y_0)}$ tend vers 0 quand $y \in \Omega$ tend vers z_0, uniformément en $x \in \Omega \cap \complement\delta$.

46. Exemple.

Pour l'espace $\overline{\Omega}$, l'ensemble des points-frontière non complètement h-réguliers n'est pas en général h-négligeable, même si $\mathfrak{A}_h$ est satisfaite, comme le montre l'exemple suivant dû à G. Choquet :

On considère dans le plan le domaine rectangulaire ayant pour sommets les points

$$a(0,\ 0), \qquad b(2,\ 0), \qquad c(0,\ 1), \qquad d(2,\ 1),$$

(33) Si $\mathfrak{A}_h$ est satisfaite, toute solution $\mathfrak{D}_{\varphi, h} > 0$ correspondant à $\varphi \geqslant 0$ h-résolutive sur Γ vérifie $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}_{\varphi, h}}$ pour Ω, comme limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques > 0 dont chacune est majorée par une fonction Kh ($\mathrm{K} = \mathrm{C}^{te} > 0$), et parce que l'axiome fondamental se conserve par passage à la limite sur une suite croissante de fonctions harmoniques > 0.

et les rectangles

$$D_n \left\{ 0 < \xi < 2, \qquad 1 - \frac{1}{n} < \eta < 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad n \geqslant 1 \right\},$$

dont la réunion forme un ouvert ω. Soit f la fonction égale à 0 partout sauf sur chaque segment

$$\delta_n \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n} < \eta < 1 - \dfrac{1}{n+1}, \end{array} \right. \qquad (n \geqslant 1)$$

où on la prend égale à une constante > 0 choisie de façon que $H_f^{D_n}$ (ou $\mathfrak{D}_{f,1}^{D_n}$) soit $> n$ sur le segment fermé

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{n} \leqslant \xi \leqslant \dfrac{1}{n+1} \\ \eta = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right). \end{array} \right.$$

Introduisant ensuite le rectangle D de sommets les points

$$a(0,\ 0), \qquad b'(3,\ 0), \qquad c'\left(0,\ \frac{3}{2}\right), \qquad d'\left(3,\ \frac{3}{2}\right),$$

on considère l'ouvert $(D - \overline{\omega}) \cup \omega$, et on le rend connexe en l'augmentant de petits segments ouverts α_n, chacun d'eux porté par le côté d'abscisse 2 du rectangle D_n. Si α_n est assez petit, f est résolutive pour le domaine obtenu Ω, et H_f^Ω (ou $\mathfrak{D}_{f,1}^\Omega$), qui majore $H_f^{D_n}$ dans chaque D_n, est non bornée au voisinage de tout point du côté cd, ce qui fournit l'exemple cherché puisque cet ensemble est de mesure harmonique > 0 relativement à Ω.

On va donc chercher à satisfaire à la condition A_h de l'ancienne axiomatique (n° 9) avec des filtres convenables complètement h-réguliers, au lieu des traces sur Ω des filtres des voisinages des points complètement h-réguliers.

47. Une famille remarquable de filtres complètement h-réguliers dans $\overline{\Omega}$.

THÉORÈME 42. — *L'hypothèse $\mathfrak{A}_h$ relative à $\overline{\Omega}$ entraîne l'existence dans Ω d'une famille de filtres complètement h-réguliers vérifiant les conditions A_h et B_h de la première axiomatique élargie (n° 9).*

Ce sera la conclusion de l'étude qui va suivre.

Reprenons le *filtre* $\mathcal{F}_h$ (n° 27) formé par les ensembles $E \subset \Omega$ tels que l'extrémale de h relative à E soit un potentiel de Green, condition qui équivaut (coroll. du th. 20) à ce que les points de non effilement de $\Omega - E$ forment, sur la frontière de Martin, un ensemble h-négligeable.

On sait (n° 27) que $\mathcal{F}_h$ est plus fin que le filtre $\mathcal{G}_h$ engendré par les ensembles de Ω où $\frac{G_{y_0}}{h} \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ variable), et que pour tout potentiel de Green v d'une mesure > 0 dans Ω, $\frac{v}{h} \underset{\mathcal{F}_h}{\rightarrow} 0$; et pour une fonction φ définie dans Ω, la condition $\varphi \underset{\mathcal{F}_h}{\rightarrow} 0$ équivaut à ce que φ admette, aux points de Δ, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable (n° 31).

Ajoutons que si $E \in \mathcal{F}_h$, les points d'effilement de E situés sur la frontière de Martin forment un ensemble h-négligeable, de sorte que h est invariante par extrémisation relative à $\Omega - E$ (th. 20). Alors :

THÉORÈME 43. — *Si la condition* $\mathfrak{A}_h$ *relative à* $\overline{\Omega}$ *est satisfaite, l'adhérence de* $\mathcal{F}_h$ *dans* $\overline{\Omega}$ *est identique à l'ensemble des points-frontière au voisinage desquels h n'est pas associée à* 0 (*support compact de la h-mesure harmonique sur* Γ).

Le lemme 9 montre d'abord que tout point $z \in \Gamma$ au voisinage duquel h est associée à 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{F}_h$.

Réciproquement, soit $z \in \Gamma$ non adhérent à $\mathcal{F}_h$, et soit δ un voisinage ouvert de z disjoint d'un ensemble $E \in \mathcal{F}_h$. La fonction h est invariante par extrémisation relativement à $\Omega - E$, donc aussi relativement à $\delta \cap \Omega$ contenu, ce qui signifie que h est associée à 0 au voisinage de z.

Les filtres $\mathcal{F}'_h$. — Dans toute la suite, *nous supposerons l'axiome* $\mathfrak{A}_h$ *vérifié.*

A chaque point $z \in \Gamma$ au voisinage duquel h n'est pas associée à 0, on peut alors faire correspondre un filtre, *noté* $\mathcal{F}'_{h,z}$ (et brièvement $\mathcal{F}'_h$), défini comme la borne supérieure, dans l'ensemble des filtres sur Ω, du filtre $\mathcal{F}_h$ et de la trace sur Ω du filtre des voisinages de z dans $\overline{\Omega}$. Plus fin que $\mathcal{F}_h$ et convergeant vers z, $\mathcal{F}'_{h,z}$ est formé des ensembles $\alpha \cap E$, où α est un voisinage de z, et E un élément de $\mathcal{F}_h$.

L'intérêt de ces filtres vient de ce que, tout $\mathcal{F}'_h$ étant plus fin que $\mathcal{F}_h$, $\frac{v}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}'_h]{} 0$ pour tout potentiel de Green v d'une mesure > 0 dans Ω. On en déduit le

THÉORÈME 44. — *Soit, sous l'hypothèse* $\mathfrak{A}_h$, *un filtre* $\mathcal{F}'_{h,z}$ (*convergeant vers le point-frontière* z). *Si* u *harmonique* > 0 *dans* Ω *est associée à* 0 *au voisinage de* z, $\frac{u}{h}$ *tend vers* 0 *selon* $\mathcal{F}'_{h,z}$.

Si l'axiome $\mathfrak{A}_u$ relatif à $\overline{\Omega}$ est vérifié, le lemme 9 montre qu'il existe un potentiel de Green égal à u dans un voisinage de z, d'où la propriété $\frac{u}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}'_{h,z}]{} 0$.

On passe au cas de u quelconque en la décomposant en la somme de réduites relatives à $\hat{\Omega}$ selon

$$u = u_{\Delta'_1} + u_{\Delta - \Delta'_1},$$

(Δ'_1 partie de Δ définie n° 37) et en reprenant le raisonnement du théorème 36 (extension). Si $u_{\Delta'_1}$ est > 0, elle est associée à 0 au voisinage de z (parce que $u_{\Delta'_1} \leqslant u$), et satisfait à la condition $\mathfrak{A}_{u_{\Delta'_1}}$ relative à $\overline{\Omega}$ (th. 33), donc $\frac{u_{\Delta'_1}}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}'_{h,z}]{} 0$.

Puis $\mathfrak{A}_h$, sous la forme équivalente du théorème 33, entraîne que $\inf(u_{\Delta-\Delta'_1}, h)$ est un potentiel de Green, de sorte que $\frac{u_{\Delta-\Delta'_1}}{h}$ admet, aux points de Δ, une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable (th. 24). Il en résulte que $\frac{u_{\Delta-\Delta'_1}}{h}$ tend vers 0 selon $\mathcal{F}_h$, donc à fortiori selon $\mathcal{F}'_{h,z}$ plus fin que $\mathcal{F}_h$.

COROLLAIRE. — *Tout filtre* $\mathcal{F}'_h$ *est fortement et complètement* h*-régulier.*

Soit $z \in \Gamma$ où converge un filtre $\mathcal{F}'_{h,z}$. Pour tout voisinage ouvert δ de z, $\frac{\mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega}}{h} \xrightarrow[\mathcal{F}'_{h,z}]{} 0$, car $\mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega}$ est la somme d'un potentiel de Green et d'une fonction harmonique $\geqslant 0$ associée à 0 au voisinage de z, d'où la h-régularité forte de $\mathcal{F}'_{h,z}$. La h-régularité complète se démontre comme pour le théorème 41.

Ainsi la condition B_h est satisfaite, et A_h va résulter du théorème suivant :

Théorème 45. — *Si dans l'hypothèse* $\mathfrak{a}_h$, *u sousharmonique dans* Ω *satisfait aux conditions :* $\frac{u}{h}$ *bornée supérieurement et* $\limsup_{\mathcal{F}'_h} \frac{u}{h} \leqslant 0$ *pour tout filtre* $\mathcal{F}'_h$, *alors u est* $\leqslant 0$.

Soit A l'adhérence de $\mathcal{F}_h$ dans $\overline{\Omega}$. D'après l'hypothèse et la compacité de A, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement ouvert *fini* (α_i) de A et un nombre fini d'ensembles $E_i \in \mathcal{F}_h$ tels que l'on ait $\frac{u}{h} \leqslant \varepsilon$ sur $\alpha_i \cap E_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Comme les points d'effilement de chaque E_i forment un ensemble h-négligeable, il existe sur la frontière de Martin un ensemble e_0 h-négligeable tel que tout point de $\Delta - e_0$ soit finement adhérent à tous les E_i.

Considérons alors l'image réciproque $A_1 = \Phi^{-1}(A)$ (v. n° 37), dont le complémentaire $\Delta - A_1$ est h-négligeable comme $\Gamma - A$ (n° 38 lemme 8). Soit $x \in A_1 \cap \complement e_0$; le pôle unique de K_x sur Γ (ou image de x par Φ) est un point de A dont un certain α_i est voisinage; cela implique que $\Omega \cap \complement \alpha_i$ soit effilé en x (propriété 5° du n° 36), donc que $\alpha_i \cap E_i$ soit, comme E_i, non effilé en ce point. On voit ainsi que, pour tout $x \in A_1 \cap \complement e_0$, il existe un ensemble non effilé en x sur lequel $\frac{u}{h} \leqslant \varepsilon$; le complémentaire sur Δ de $A_1 \cap \complement e_0$ étant h-négligeable, on en conclut, par le théorème 22, $\frac{u}{h} \leqslant \varepsilon$ en tout point de Ω, puis, ε pouvant être choisi arbitrairement petit, $u \leqslant 0$.

Extension. — *Le résultat subsiste si l'on excepte des filtres* $\mathcal{F}'_h$ *dont les points de convergence sur* Γ *forment un ensemble e faiblement h-négligeable relativement à* $\overline{\Omega}$.

On adapte le raisonnement qui précède, en considérant ici un recouvrement *dénombrable de* $A - e$, et en remplaçant l'ensemble A_1 par l'ensemble $A_1 - e_1 = \Phi^{-1}(A - e)$, où $e_1 = \Phi^{-1}(e)$ est faiblement h-négligeable relativement à $\hat{\Omega}$ (lemme 8).

Corollaire. — *Dans l'hypothèse* $\mathfrak{a}_h$, *pour toute fonction f réelle sur* Γ, $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$ *est encore l'enveloppe supérieure des fonctions u dans* Ω *qui sont sousharmoniques ou* $-\infty$ *et satisfont chacune aux conditions :* $\frac{u}{h}$ *bornée supérieurement et* $\limsup_{\mathcal{F}'_{h,z}} \frac{u}{h} \leqslant f(z)$ *pour tout point z où converge un filtre* $\mathcal{F}'_{h,z}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. Brelot, Familles de Perron et problème de Dirichlet. *Acta de Szeged*, 9, 1939, p. 133-153.

[2] M. Brelot, Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques, ou holomorphes. *Bull. Soc. Royale des Sc. de Liège*, n° 8-9-10, 1939, p. 468-477.

[3] M. Brelot, Sur les ensembles effilés. *Bull. Sc. Math.*, 68, 1944, p. 12-36.

[4] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. *Annales Ecole Norm. Sup.*, 61, 1944, p. 301-332.

[5] M. Brelot, Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités. *Journal de Math.*, 24, 1945, p. 1-32.

[6] M. Brelot, Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet *Bull. Sc. Math.*, 79, 1945, p. 153.

[7] M. Brelot, Le problème de Dirichlet ramifié. *Annales Univ. Grenoble*, *Math. Phys.*, 22, 1946, p. 167-200.

[8] M. Brelot, Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. *Annales Univ. Grenoble*, *Math. Phys.*, 22, 1946, p. 205-219.

[9] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin. *Annales Univ. Grenoble*, *Math. Phys.*, 23, 1948, p. 113-138.

[10] M. Brelot, Sur l'allure des fonctions harmoniques et sousharmoniques à la frontière. *Math. Nach.*, 4, 1950, p. 298-307.

[11] M. Brelot, Remarque sur la variation des fonctions sousharmoniques et les masses associées. Application. *Annales Institut Fourier*, 2, 1950, p. 101-112.

[12] M. Brelot, La théorie moderne du potentiel. *Annales Institut Fourier*, 4, 1952, p. 113-140.

[13] M. Brelot, Majorantes harmoniques et principe du maximum. *Archiv. der Math.*, 5, 1954, p. 429-440.

[14] M. Brelot, On the behaviour of harmonic functions in the neighborhood of an irregular boundary point. *Journal d'Analyse Math. de Jérusalem*, 4, 1954-56, p. 209-221.

[15] M. Brelot, Topologies on the boundary and harmonic measure. *Lectures on functions of a complex variable*, *Univ. of Michigan Press*, 1955, p. 85-103.

[16] M. Brelot, Topology of R. S. Martin and Green lines. *Lectures on functions of a complex variable*, *Univ. of Michigan Press*, 1955, p. 105-121.

[17] M. Brelot, Le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin *C. R. Ac. Sc.*, 240, 1955, p. 142.

[18] M. Brelot, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin. *Journal de Math.*, 35, 1956, p. 297-335.

[19] M. Brelot, Axiomatique du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts. *Séminaire de Théorie du Potentiel*, 1957. *Institut H. Poincaré. Université de Paris.*

[20] M. Brelot et G. Choquet, Espaces et lignes de Green. *Annales Institut Fourier*, 3, 1951, p. 199-263.

[21] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Annales Univ. Grenoble, Math. Phys.*, 22, 1946, p. 221-280.

[22] G. Choquet, Theory of capacities. *Annales Institut Fourier*, 5, 1954, p. 131-295.

[23] G. Choquet, Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés. *C. R. Ac. Sc.*, 243, 1956, p. 555.

[24] G. Choquet, Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *C. R. Ac. Sc.*, 243, 1956, p. 699.

[25] G. Choquet, Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes. *C. R. Ac. Sc.*, 243, 1956, p. 736.

[26] J. Deny, Le principe des singularités positives et la représentation des fonctions harmoniques positives dans un domaine. *Revue Scientifique*, 1947, *fasc.* 14, p. 866-872.

[27] J. L. Doob, Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 77, 1954, p. 86-121.

[28] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem. *Proc. of the Third Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability*, 2, 1954-55, p. 49-80 publié en 1956.

[29] K. Endl, Sur des problèmes du type de Dirichlet utilisant les lignes de Green. *C. R. Ac. Sc.*, 244, 1957, p. 1705.

[30] Z. Kuramochi, Dirichlet problem for Riemann surfaces, I-II-III-IV-V. *Proc. of the Japan Acad.*, *Vol.* 30, 1954, n° 8-9-10 et *Vol.* 31, 1955, n° 1.

[31] C. de La Vallée Poussin, Points irréguliers, détermination des masses par les potentiels. *Bull. Acad. Royale Sc. Belgique*, 1938, p. 368-384 et 672-689.

[32] Mme J. Lelong-Ferrand, Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace. *Annales Ecole Norm. Sup.*, 66, 1949, p. 125-159.

[33] R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49, 1941, p. 137-172.

[34] C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. *Ergebnisse der Math.*, *Heft* 2, *Nouvelle Série*, 1955, *Springer*, *Berlin.*

[35] L. Naïm, Sur l'allure des fonctions surharmoniques positives à la frontière de Martin. *C. R. Ac. Sc.*, 241, 1955, p. 1907.

[36] L. Naïm, Etude et applications de la notion d'effilement à la frontière de Martin. *C. R. Ac. Sc.*, 242, 1956, p. 1107.

[37] L. Naïm, Propriétés et applications de la frontière de R. S. Martin. *C. R. Ac. Sc.*, 242, 1956, p. 2695.

[38] L. Naïm, Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques positives. *C. R. Ac. Sc.*, 243, 1956, p. 1266.

[39] M. Ohtsuka, Dirichlet problem for Riemann surfaces and conformal mappings. *Nagoya Math. Journal*, 3, 1951, p. 91-137.

[40] M. Parreau, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. *Annales Institu Fourier*, 3, 1952, p. 103-197.

[41] G. Tautz, Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe. *Math. Nach.*, 2, 1949, p. 279-303.