Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 2 (1978), 145-156.

SUR LA NOTION DE FLUX DE NAKAI DANS UN ESPACE HARMONIQUE SANS POTENTIEL POSITIF

par Jean GUILLERME

1. Introduction.

Soit Ω un espace harmonique sans potentiel strictement positif, les constantes étant harmoniques.

Si u est une fonction harmonique positive, non identiquement nulle, définie hors d'un compact extérieurement régulier K, tendant vers 0 sur la frontière K^* de K et si h est une fonction harmonique définie hors d'un compact, il existe une fonction φ harmonique dans Ω, unique à une constante additive près, et un unique réel λ tels que la fonction

$$|\varphi - (h - \lambda u)|$$

soit bornée hors d'un compact.

Cet énoncé, donné par V. Anandam dans [2] et utilisé très fréquemment par lui, est une conséquence des théorèmes difficiles de Nakaï [4]. Le réel λ est égal au quotient du $N_{L,\omega}$-Flux de Nakaï de h par celui de u (pour L compact extérieurement régulier et ω domaine régulier assez grands).

Est-il nécessaire de disposer de cette notion de Flux pour obtenir le théorème précédent? Nous verrons que non, en en donnant une démonstration directe qui fournira au contraire le flux.

D'autre part, nous nous proposons de définir la mesure ν permettant à M. Nakaï l'introduction de la notion de Flux dans un espace harmonique axiomatique par une méthode ne faisant pas appel à la théorie de Riesz-Schauder. Pour cela, nous démontrons un théorème général sur certains opérateurs compacts dans un espace normé; le théorème fondamental de Nakaï en est alors une conséquence immédiate et la mesure ν est effectivement construite et non plus simplement connue par un théorème d'existence.

Hypothèses et Notations.

Dans ce travail, Ω désigne donc un espace harmonique de Brelot (axiomes 1, 2, 3) (à base dénombrable ou non) sans potentiel strictement positif, les constantes étant harmoniques (Ω est un espace B . S; pour les rappels concernant ces espaces, voir V. Anandam [1]) et K est un compact extérieurement régulier de frontière K^*.

Rappelons que dans un tel espace, une fonction surharmonique admettant une minorante harmonique est elle-même harmonique et qu'une fonction harmonique bornée dans un sens est constante.

Rappelons également que si f est une fonction continue définie sur K^* et $\tilde{f}$ la fonction égale à f sur K^* et à 0 au point à l'infini, $\tilde{f}$ est résolutive pour $\Omega \setminus K$, la fonction égale à $\overline{H}_{\tilde{f}}^{\Omega\setminus K} = \underline{H}_{\tilde{f}}^{\Omega\setminus K}$ est harmonique bornée dans $\Omega \setminus K$, notée $B_K f$ et tend vers f sur K^*. De plus :

$$B_K(1) = 1; \qquad B_K(f) \leqslant B_K(g) \quad (\text{si } f \leqslant g)$$

et

$$B_K(f+g) = B_K(f) + B_K(g)$$

pour tout couple (f,g) de fonctions continues sur K^*; de sorte que si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur K^* convergeant uniformément vers une fonction (continue) f, la suite $(B_K(f_n)_n)$ converge uniformément sur $\Omega \setminus K$ vers $B_K f$.

D'autre part, si f est une fonction définie sur Ω, on note R_f l'enveloppe inférieure des majorantes hyperharmoniques de f. Si f est localement bornée inférieurement et admet une majorante surharmonique, R_f est une fonction surharmonique, continue aux points où f est continue, et harmonique sur tout ouvert où f est soit sous-harmonique, soit continue et strictement inférieure à R_f.

Enfin pour tout compact X on désigne par $\mathscr{C}(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X, muni de la norme de la convergence uniforme.

2. Le flux de h relativement à u.

Dans le théorème ci-dessous, u désigne une fonction harmonique positive sur $\Omega \setminus K$, non bornée, tendant vers 0 sur K^* (pour l'existence d'une telle fonction, voir [1] théorème 1-17), le compact K étant extérieurement régulier.

Théorème 1. — *Si h est une fonction harmonique définie hors d'un compact X, il existe une fonction v harmonique dans Ω, unique à une constante additive près, et un unique nombre réel λ tels que la fonction $|v - (h - \lambda u)|$ soit bornée hors d'un compact.*

On dit alors que λ est le flux de h relativement à u.

Démonstration. — Soit L un compact extérieurement régulier, $K \cup X \subset \mathring{L} \subset L$ et posons :

$$k = h - B_L h \qquad w = u - B_L u$$

(ces fonctions sont harmoniques dans $\Omega \setminus L$ et tendent vers 0 sur L^*). D'après [1] proposition 3-31, w est positive sur $\Omega \setminus L$ et non identiquement nulle, u ayant cette propriété. On considère alors w et k définies et égales à 0 sur L, de sorte que w est sous-harmonique dans Ω.

Soit Γ_s (resp. Γ_i) l'ensemble des nombres réels λ tels que $k - \lambda w$ soit majorée (resp. minorée) par une fonction surharmonique (resp. sousharmonique).

Si ω est un domaine régulier contenant L, H_w^ω est strictement positive sur L et pour $\lambda \geqslant 0$ assez grand (resp. $\lambda \leqslant 0$ assez petit), on a donc :

$$\lambda H_w^\omega \geqslant H_k^\omega \text{ sur } L \text{ (resp. } \lambda H_w^\omega \leqslant H_k^\omega \text{ sur } L).$$

Sur $\omega \setminus L$, la fonction $k - \lambda w - H_{k-\lambda w}^\omega$ est harmonique et tend vers 0 sur ω^* et vers $- H_{k-\lambda w}^\omega$ sur L^*, fonction positive (resp. négative) d'après ce qui précède. Aussi

$$k - \lambda w \geqslant H_{k-\lambda w}^\omega \quad (\text{resp. } k - \lambda w \leqslant H_{k-\lambda w}^\omega) \text{ sur } \omega \setminus L$$

(principe du minimum (resp. du maximum)) et par suite la fonction Z_λ égale à $H_{k-\lambda w}^\omega$ dans ω et à $k - \lambda w$ dans $\complement \omega$

est surharmonique (resp. sousharmonique) dans Ω. De plus Z_λ majore (resp. minore) $k - \lambda w$ à une constante près et par conséquent $\lambda \in \Gamma_s$ (resp. $\lambda \in \Gamma_i$). On a donc montré que Γ_s et Γ_i sont non vides. Comme il est d'autre part évident que si $\lambda \in \Gamma_s$ (resp. Γ_i) tout réel supérieur (resp. inférieur) à λ appartient aussi à Γ_s (resp. Γ_i), ces ensembles sont des intervalles de $\overline{\mathbf{R}}$ de la forme

$$\Gamma_s = (\alpha, +\infty(\ , \ \Gamma_i =) -\infty, \beta)$$

avec $-\infty \leqslant \alpha$ et $\beta \leqslant +\infty$.

Supposons qu'il existe λ, μ appartenant à $\Gamma_s \cap \Gamma_i$ avec par exemple $\mu \geqslant \lambda$. Comme $\mu \in \Gamma_i$ (resp. $\lambda \in \Gamma_s$), la fonction $-R_{-(k-\mu w)}$ (resp. $R_{k-\lambda w}$) est sousharmonique (resp. surharmonique) et l'on a :

$$-R_{-(k-\mu w)} \leqslant k - \mu w \leqslant k - \lambda w \leqslant R_{k-\lambda w}$$

Il s'en suit que les fonctions $R_{-(k-\mu w)}$ et $R_{k-\lambda w}$ sont harmoniques; de plus :

$$R_{k-\lambda w} + R_{-(k-\mu w)} \geqslant (k - \lambda w) - (k - \mu w) = (\mu - \lambda) w .$$

Ainsi la fonction sousharmonique $(\mu - \lambda) w$ est majorée par une fonction harmonique; elle est donc elle-même harmonique, ce qui implique $\mu = \lambda$.

L'intersection de Γ_s et Γ_i est donc ou bien vide, ou bien réduite à un point, ce qui impose en particulier $\alpha > -\infty$, $\beta < +\infty$.

Montrons maintenant que Γ_s est un intervalle semi-fermé, c'est-à-dire que $\alpha \in \Gamma_s$.

Soit $(\lambda_n)_n$ une suite strictement décroissante ($\lambda_{n+1} < \lambda_n$ pour tout n) d'éléments de Γ_s convergeant vers α. Comme $R_{k-\alpha w} = \sup_n R_{k-\lambda_n w}$, pour montrer que $R_{k-\alpha w}$ est surharmonique, nous allons montrer l'existence d'un point x_0 tel que, pour tout n, $R_{k-\lambda_n w}(x_0) = 0$.

S'il existait un entier n tel que $R_{k-\lambda_n w}$ soit strictement positif sur L^*, donc tel que

$$R_{k-\lambda_n w} > k - \lambda_n w \quad \text{sur} \quad L^*$$

on aurait aussi, a fortiori, $R_{k-\lambda_{n+1} w} > 0$ sur L^*, c'est-à-dire

$$R_{k-\lambda_{n+1} w} > k - \lambda_{n+1} w \quad \text{sur} \quad L^* .$$

Ces inégalités auraient alors également lieu dans un voisinage ouvert de L^* et les fonctions $R_{k-\lambda_n w}$ et $R_{k-\lambda_{n+1} w}$ seraient donc harmoniques dans ce voisinage; étant harmoniques dans $\mathring{L} \cup (\Omega \setminus L)$, elles seraient harmoniques dans Ω tout entier. Comme la fonction $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)w$ est surharmonique et

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)w + R_{k-\lambda_{n+1}w} \geqslant (\lambda_{n+1} - \lambda_n)w + (k - \lambda_{n+1})w = k - \lambda_n w$$

il vient :

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n)w + R_{k-\lambda_{n+1}w} \geqslant R_{k-\lambda_n w}\,.$$

Ainsi la fonction surharmonique $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)w$ serait minorée par une fonction harmonique; elle serait donc harmonique ce qui suppose $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, pour tout n, l'ensemble

$$L_n = \{R_{k-\lambda_n w} = 0\} \cap L^*$$

est non vide; de plus $L_{n+1} \subset L_n$ puisque

$$R_{k-\lambda_{n+1}w} \geqslant R_{k-\lambda_n w} \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad L^*;$$

alors si on pose $L_\infty = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} L_n$, les ensembles L_n étant compacts, L_∞ est non vide et par suite si $x_0 \in L_\infty$, on a bien $R_{k-\lambda_n w}(x_0) = 0$ pour tout n comme on désirait le montrer.

On sait donc maintenant que $\alpha \in \Gamma_s$ (on verrait de même que $\beta \in \Gamma_i$) et la fonction $z = R_{k-\alpha w}$ est surharmonique. Supposons que z ne soit pas harmonique; alors pour un domaine régulier ω assez grand et contenant L on a :

$$H_z^\omega < 0 \quad \text{sur } L \quad \text{et a fortiori} \quad H_{k-\alpha w}^\omega < 0 \text{ sur } L.$$

Si $(\lambda_p)_p$ est une suite croissante de réels strictement inférieurs à α et convergeant vers α, la suite des fonctions harmoniques $(H_{k-\lambda_p w}^\omega)_p$ converge localement uniformément (en décroissant) sur ω vers $H_{k-\alpha w}^\omega$; il existe donc un entier p_0 tel que pour tout $p \geqslant p_0$ on ait $H_{k-\lambda_p w}^\omega < 0$ sur L.

On voit alors, comme dans la démonstration du fait que Γ_s est non vide, que $\lambda_p \in \Gamma_s$ pour tout $p \geqslant p_0$ ce qui est absurde d'après la définition de α. Ainsi la fonction z est harmonique dans Ω.

La fonction égale à $\inf(z, k - \alpha w + B_L(z))$ sur $\Omega \setminus L$ et à z sur L est surharmonique dans Ω puisque $k - \alpha w + B_L(z)$ tend vers z sur L^*; de plus elle majore $k - \alpha w$; elle majore donc aussi z et en particulier :

$$k - \alpha w + B_L(z) \geqslant z \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus L .$$

Par suite, la fonction $|z - (k - \alpha w)|$ est bornée sur Ω, et la fonction harmonique z minore $k - \alpha w$ à une constante additive près, ce qui montre en particulier que $\alpha \in \Gamma_i$. L'intersection de Γ_s et Γ_i est donc réduite à un point et il existe ainsi un unique réel α et une fonction z harmonique dans Ω tels que la fonction $|z - (k - \alpha w)|$ soit bornée.

Si z' est une autre fonction harmonique dans Ω ayant la propriété précédente, la fonction harmonique $z - z'$ est bornée et par suite constante, ce qui prouve l'unicité de z à une constante additive près. Les fonctions $|w - u|$ et $|k - h|$ étant bornées hors d'un compact, le théorème est démontré.

Remarque. — On peut donc grâce au théorème précédent définir le flux d'une fonction surharmonique admissible relativement à u comme étant le flux de sa plus grande minorante harmonique hors d'un compact. Pour arriver à ce résultat, sans les théorèmes de Nakaï, V. Anandam suppose dans [2] l'espace harmonique Ω de dimension un, ce qui n'est donc pas nécessaire; mais ceci lui permet de donner directement un théorème de prolongement surharmonique que nous n'obtenons pas ici.

Corollaire 2. — *Si p est une fonction surharmonique dans Ω, de support réduit à un point x_0, et h une fonction harmonique définie hors d'un compact de Ω, il existe un unique réel λ et une fonction harmonique v dans Ω, unique à une constante additive près tels que la fonction $|s - h|$ soit bornée hors d'un compact, si l'on a posé $s = \lambda p + v$.*

Notons que cet énoncé est le théorème fondamental d'Anandam [1] (permettant de définir le Flux_p de h à l'infini comme étant le réel λ), sous réserve que p soit le prolongement surharmonique à Ω d'un potentiel P de support $\{x_0\}$ défini dans un voisinage de x_0.

Démonstration. — Soit $\alpha = \mathrm{Flux}_u\, p$ (resp. $\alpha' = \mathrm{Flux}_u\, h$) et k (resp. k') une fonction harmonique dans Ω tels que

$$|k - (p - \alpha u)| \text{ (resp. } |k' - (h - \alpha' u)|)$$

soit une fonction bornée hors d'un compact.

On vérifie immédiatement que α ne peut pas être nul sinon p serait harmonique dans Ω tout entier. Alors $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha}$ et $v = k' - \frac{\alpha'}{\alpha} k$ répondent aux conditions du corollaire.

L'unicité est pour ainsi dire triviale.

3. La mesure ν de Nakaï.

Établissons maintenant un théorème qui nous permettra de retrouver les résultats fondamentaux de M. Nakaï.

Théorème 3. — *Soient* E *un espace normé et* T *un opérateur compact de* E *dans lui-même. On suppose que* $\|\mathrm{T}x\| < \|x\|$ *pour tout point* x *n'appartenant pas au noyau* $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{I} - \mathrm{T})$ *de* $\mathrm{I} - \mathrm{T}$ (I *désignant l'opérateur identité*).

a) Pour tout y *de* E, *la suite des itérées* $(\mathrm{T}^n y)_n$ *converge dans* E.

b) La série $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{T}^n y$ *converge dans* E *si et seulement si la suite* $(\mathrm{T}^n y)_n$ *converge vers* 0.

c) L'équation en x $(\mathrm{I} - \mathrm{T})\, x = y$ *n'admet de solution que si et seulement si la suite* $(\mathrm{T}^n y)_n$ *tend vers* 0, *une solution particulière étant alors la somme de la série* $\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{T}^n y$.

Démonstration. — Soit y un point de E; l'opérateur T étant de norme $\leqslant 1$ la suite $(\mathrm{T}^n y)_n$ est bornée en norme et T étant compact, si l'on écrit $\mathrm{T}^n y = \mathrm{T}(\mathrm{T}^{n-1} y)$, on voit que l'on peut trouver une suite infinie d'entiers a_k ($k \in \mathbf{N}$) telle que la suite $(\mathrm{T}^{a_k} y)_k$ converge vers un point z de E. Ainsi :

$$\forall n \quad \exists \alpha(n) \quad \forall k \geqslant \alpha(n) \quad \|\mathrm{T}^{a_k} y - z\| \leqslant \frac{1}{n} \tag{1}$$

en particulier

$$\|\mathrm{T}^{a_{\alpha(n)}} y - z\| \leqslant \frac{1}{n} \tag{1'}$$

et aussi, puisque $\|T\| \leqslant 1$, on a pour tout $l \in \mathbf{N}$:

$$\|T^{a_{\alpha(n)}+l}y - T^l z\| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Pour n fixé quelconque, soit a^n la suite dont le $h^{\text{ième}}$ terme a^n_h vaut $a_{\alpha(n)+h} - a_{\alpha(n)}$ (quand $h \to +\infty$, $a^n_h \to +\infty$). Appliquons (2) en donnant à l les valeurs a^n_h ; on obtient :

$$\|T^{a_{\alpha(n)+h}}y - T^{a^n_h}z\| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comparant avec (1) il vient :

$$\|T^{a^n_h}z - z\| \leqslant \frac{2}{n} \tag{3}$$

et ceci pour tout h et tout n. Soit alors b la suite dont le premier terme b_1 est égal à a^1_1 et dont le $n^{\text{ième}}$ terme b_n est le premier terme de la suite a^n strictement supérieur à b_{n-1} (la suite b est définie par récurrence). On a donc d'après (3) :

$$\|T^{b_n}z - z\| \leqslant \frac{2}{n} \quad \text{pour tout} \quad n$$

d'où l'on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^{b_n}z\| = \|z\|$.

Mais $\|T^{b_n}z\| \leqslant \|Tz\|$ T étant de norme $\leqslant 1$; par suite $\|z\| = \|Tz\|$ et z appartient au noyau de $I - T$ d'après l'hypothèse et l'on a donc $T^l z = z$ pour tout l et les relations (1) et (2) exprime la convergence de la suite $(T^n y)_n$ vers z. Le (a) du théorème est démontré.

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} T^n y$ converge, il est clair que $(T^n y)_n$ converge vers 0. Si il existe x tel que $(I - T)\,x = y$, on a pour tout n :

$$T^n x = T^{n+1}x + T^n y$$

et la suite $(T^n x)_n$ convergeant, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n y = 0$.

Intéressons-nous donc aux réciproques en choisissant y dans E tel que la suite $(T^n y)_n$ converge vers 0.

Pour tout n, posons $x_n = \sum\limits_{p=0}^{n} T^p y$

$$(I - T)x_n = y - T^{n+1}y$$

donc $\|(\mathrm{I}-\mathrm{T})x_n - y\| = \|\mathrm{T}^{n+1}y\|$ et $(\mathrm{I}-\mathrm{T})x_n$ converge vers y dans E; l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(\mathrm{I}-\mathrm{T})$ étant fermé (voir par exemple [3]), y appartient à cet espace et il existe donc x dans E tel que $(\mathrm{I}-\mathrm{T})x = y$ et on a aussi alors $(\mathrm{I}-\mathrm{T})\,\mathrm{T}^{n+1}x = \mathrm{T}^{n+1}y$; par suite

$$(\mathrm{I}-\mathrm{T})\,(\mathrm{T}^{n+1}x + x_n - x) = 0$$

c'est-à-dire $\mathrm{T}^{n+1}x + x_n - x = \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}-\mathrm{T})$ et on a donc aussi pour tout k :

$$\mathrm{T}^{n+k+1}x - \mathrm{T}^k x = \alpha_n - \mathrm{T}^k x_n$$

d'où $$\|\alpha_n\| \leqslant \|\mathrm{T}^{n+k+1}x - \mathrm{T}^k x\| + \|\mathrm{T}^k x_n\|.$$

Or la suite $(\mathrm{T}x^p)_p$ convergeant dans E d'après le (a) est de Cauchy et la suite $(\mathrm{T}^k x_n)_k$ converge vers 0, pour tout n fixé, puisque $\mathrm{T}^k x_n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{T}^{p+k}y$. Il s'en suit que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n on a : $\|\alpha_n\| \leqslant \varepsilon$ et par conséquent $\alpha_n = 0$ pour tout n. Il vient alors :

$$x_n = x - \mathrm{T}^{n+1}x$$

et $(\mathrm{T}^{n+1}x)_n$ convergeant dans E, la suite $(x_n)_n$ converge dans E c'est-à-dire la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{T}^n y$ converge dans E et l'on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}-\mathrm{T})\Big(\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{T}^n y\Big) &= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{I}-\mathrm{T})x_n \\ &= \lim_{n\to\infty}(y - \mathrm{T}^{n+1}y) = y\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Soient maintenant ω un domaine régulier, K un compact extérieurement régulier, $\mathrm{K} \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, et T l'opérateur de $\mathscr{C}(\omega^*)$ dans lui-même défini par :

$$\mathrm{T}\varphi = \mathrm{B}_{\mathrm{K}}(\mathrm{H}_\varphi^\omega)_{|\omega^*} \qquad \text{pour tout} \qquad \varphi \in \mathscr{C}(\omega^*).$$

Pour pouvoir appliquer le théorème précédent à cet opérateur, montrons le lemme suivant :

LEMME 4. — *L'opérateur* T *ci-dessus est compact* ($\mathscr{C}(\omega^*)$ *étant muni de la norme de la convergence uniforme*)*; le noyau de* $\mathrm{I}-\mathrm{T}$ *est formé des fonctions constantes et* $\|\mathrm{T}\varphi\| < \|\varphi\|$, *si* φ *n'est pas constante.*

Démonstration. — Si $(\varphi_p)_p$ est une suite de fonctions uniformément bornées de $\mathscr{C}(\omega^*)$, l'axiome 3 montre que l'on peut trouver une sous-suite $(\varphi_{p_k})_{p_k}$ telle que $(H^\omega_{\varphi_{p_k}})_{p_k}$ converge localement uniformément, donc en particulier sur K^*, vers une fonction ψ ; par suite $(B_K(H^\omega_{\varphi_{p_k}}))_{p_k}$ converge uniformément sur $\Omega \setminus K$, donc sur ω^*, vers $B_K\psi$; ceci montre la compacité de l'opérateur T.

On a évidemment $\varphi = T\varphi$ si φ est constante.

Supposons φ non constante. Alors $\|\varphi\| - H^\omega_\varphi$ est une fonction harmonique strictement positive sur le domaine ω et par conséquent :

$$\|\varphi\| > \alpha(\varphi) = \sup_{x\in K^*} H^\omega_\varphi \geqslant H^\omega_\varphi \quad \text{sur} \quad K^*$$

d'où

$$\|\varphi\| > \alpha(\varphi) \geqslant B_K(H^\omega_\varphi) \quad \text{sur} \quad \Omega\setminus K$$

soit

$$\|\varphi\| > \alpha(\varphi) \geqslant T\varphi \quad \text{sur} \quad \omega^*.$$

En remplaçant φ par $-\varphi$ dans ce qui précède, on obtient

$$\|\varphi\| > \alpha(-\varphi) \geqslant -T\varphi \quad \text{sur} \quad \omega^*$$

d'où l'on déduit $\|\varphi\| > \alpha \geqslant \|T\varphi\|$ avec $\alpha = \sup(\alpha(\varphi), \alpha(-\varphi))$ et le lemme est démontré.

Théorème 5 (M. Nakaï [4]). — *Il existe une unique mesure de Radon unitaire positive ν sur ω^* telle que $\nu(f) = \nu(Tf)$ pour toute fonction f de $\mathscr{C}(\omega^*)$; elle est définie par la relation :*

$$\nu(f) = \lim_{n\to\infty} T^n f \quad (f \in \mathscr{C}(\omega^*)).$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}(\omega^*)$, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}(\omega^*)$, unique à une constante additive près, telle que $(I - T)\, g = f$ si et seulement si $\nu(f) = 0$, on a alors $g = \sum_{n\geqslant 0} T^n f +$ constante.

Démonstration. — D'après le lemme et le théorème précédents pour tout $f \in \mathscr{C}(\omega^*)$ la suite $(T^n f)_n$ converge vers une fonction de $\mathscr{C}(\omega^*)$ appartenant nécessairement au noyau de $I - T$, c'est-à-dire une constante. On peut donc définir une application ν de $\mathscr{C}(\omega^*)$ dans $\mathbf{R}$ en posant :

$$\nu(f) = \lim_{n\to\infty} T^n f \quad (f \in \mathscr{C}(\omega^*)).$$

Il est alors évident que ν est une mesure de Radon unitaire positive sur ω^* telle que $\nu(f) = \nu(Tf)$ pour toute fonction f de $\mathscr{C}(\omega^*)$. Si μ est une autre mesure ayant les propriétés précédentes, on a alors nécessairement, pour f dans $\mathscr{C}(\omega^*)$:

$$\mu(f) = \mu(T^n f) \quad \text{pour tout} \quad n$$

d'où en passant à la limite par le théorème de Lebesgue :

$$\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \mu(T^n f) = \mu(\lim_{n\to\infty} T^n f) = \mu(\nu(f)) = \nu(f)$$

ce qui prouve l'unicité de la mesure.

Connaissant ainsi la mesure ν, la deuxième partie de l'énoncé est alors évidente, vu le théorème 3.

Rappelons que le Flux de Nakaï, relatif au couple (K,ω), d'une fonction harmonique h dans $\Omega\setminus K$ et continue dans $\Omega\setminus\mathring{K}$ est le réel

$$N_{K,\omega}(h) = \int_{\omega^*} (h - B_K h)\, d\nu_{K,\omega}$$

si on précise que la mesure $\nu = \nu_{K,\omega}$ est associée à (K,ω).

Concluons en faisant la liaison, indiquée en introduction entre le théorème 1 et le Flux de Nakaï.

Corollaire 6. — *Soient h une fonction harmonique hors de K continue sur $\Omega\setminus\mathring{K}$ et u la fonction du théorème* 1.

1) $$\mathrm{Flux}_u(h) = \frac{N_{K,\omega}(h)}{N_{K,\omega}(u)}.$$

2) *Si K_1 et K_2* (resp. ω_1 *et* ω_2) *sont des compacts extérieurement réguliers (resp. des ouverts réguliers) tels que* $K \subset K_1 \cap K_2$ *et* $K_1 \subset \omega_1$, $L_2 \subset \omega_2$,

$$N_{K_1,\omega_1}(h) = \alpha N_{K_2,\omega_2}(h)$$

où α est une constante réelle ne dépendant que de K_1, K_2, ω_1 et ω_2.

Démonstration. — Nous montrons que $\mathrm{Flux}_u\, h = \dfrac{N_{K_i,\omega_i}(h)}{N_{K_i,\omega_i}(u)}$ $(i = 1,2)$ résultat contenant entièrement le corollaire. $N_{K_i,\omega_i}(u)$ est non nul [1] lemme 3.3) : soit alors

$$\lambda = \frac{N_{K_i,\omega}(h)}{N_{K_i,\omega_i}(u)};$$

on a donc :

$$N_{K_i, \omega_i}(h - \lambda u) = 0.$$

D'après le second théorème fondamental de Nakaï ([4] ou [1] th. 24) il existe donc une fonction ν harmonique dans ω telle que $|\nu - (h - \lambda u)|$ soit bornée hors d'un compact. Le théorème 1 montre que nécessairement $\lambda = \mathrm{Flux}_u\, h$; d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Anandam, Espaces harmoniques sans potentiel positif, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22, 4 (1972), 97-160.

[2] V. Anandam, Superharmonic bounds in a harmonic space. *Acad. Roy. Belgique*, *Bull.* Cl. Sci V Ser 61 (1975), 872-880 (1976).

[3] J. Dieudonné, Éléments d'Analyse, tome 1, Gauthier-Villars, Paris 1969.

[4] B. Rodin and L. Sario, Principal functions, Van Nostrand (1968).

Manuscrit reçu le 1er février 1977
Proposé par M. Brelot.

Jean Guillerme,
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences
123, rue A. Thomas
87000 Limoges.