

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENISE CHENAIS

**Sur une famille de variétés à bord lipschitziennes.  
Application à un problème d'identification  
de domaines**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 27, n° 4 (1977), p. 201-231

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1977\\_\\_27\\_4\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_201_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE FAMILLE DE VARIÉTÉS  
A BORD LIPSCHITZIENNES  
APPLICATION A UN PROBLÈME  
D'IDENTIFICATION DE DOMAINES**

**par Denise CHENAIS**

---

TABLE DES MATIÈRES

	page
NOTATIONS .....	202
CHAPITRE I. — Introduction .....	203
CHAPITRE II. — Théorème de prolongement .....	207
1. Transport d'espaces de Sobolev par transformation bilipschitzienne .....	208
2. Théorème de prolongement.....	211
CHAPITRE III. — Compacité de $VL(r, k)$ .....	216
1. Compacité relative de $VL(r, k)$ .....	216
2. Ensembles nets .....	219
3. Fermeture de $VL(r, k)$ .....	225

## NOTATIONS

- $x \in \mathbf{R}^n$ :  $x = (x^1, \dots, x^n)$
- pour  $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ :  $D^j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$
- pour  $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}} \varphi$$

- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
- $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ .  $\varphi|_\Omega =$  restriction de  $\varphi$  à  $\Omega$ .
- $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , ouvert,  $m \in \mathbf{N}$

$$W_p^m(\Omega) = \{\varphi \in L^p(\Omega); D^\alpha \varphi \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$$H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$$

- A et B étant 2 parties de  $\mathbf{R}^n$ :

$$A \setminus B = A \cap (\complement B)$$

- pour  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 
  - $\partial\Omega$  frontière de  $\Omega$
  - $\overset{\circ}{\Omega}$  intérieur de  $\Omega$
  - $\overline{\Omega}$  adhérence de  $\Omega$
- $\chi_\Omega = \omega$  fonction caractéristique de  $\Omega$ .
- $B(x, r)$ : boule ouverte de centre  $x$ , de rayon  $r$ .
- $\mathbf{R}^{n+} = \{x \in \mathbf{R}^n; x^n > 0\}$
- $\mu$  mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^n$
- Étant donné 2 ouverts bornés  $\Omega_0$  et  $D$ , ( $\Omega_0 \subset D$ ), on désignera par  $VL(r, k)$  l'ensemble des ouverts  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  contenant  $\Omega_0$ , contenus dans  $D$  tels que

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad \exists V_x \subset \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad T_x: B(x, r) \rightarrow V_x$$

bijective bilipschitzienne de constante  $k$  telle que

$$T_x(B(x, r) \cap \Omega) = V_x \cap \mathbf{R}^{n+}$$

## CHAPITRE PREMIER

### INTRODUCTION

Dans un article précédent [5], nous donnons un résultat d'existence pour des problèmes d'identification de domaine du type suivant : soient d'une part  $\Omega_0$  et  $D$  2 ouverts bornés réguliers,  $\Omega_0$  étant inclus dans  $D$ , d'autre part  $f \in L^2(D)$  et  $y_d \in L^2(\Omega_0)$  2 fonctions données. On cherche un ouvert  $\Omega^*$ , inclus dans  $D$ , contenant  $\Omega_0$ , et tel que la solution  $y_{\Omega^*}$  du problème de Neuman faible suivant :

$$y_{\Omega^*} \in H^1(\Omega^*) : ((y_{\Omega^*}, \varphi))_{H^1(\Omega^*)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega^*)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega^*)$$

coïncide « au mieux » avec  $y_d$  sur  $\Omega_0$ . On a noté :

$$H^1(\Omega^*) = \{ \varphi \in L^2(\Omega^*) ; D^j \varphi \in L^2(\Omega^*) \quad \forall j = 1 \dots n \}$$
$$((y, \varphi))_{H^1(\Omega^*)} = \int_{\Omega^*} \left[ y(x) \varphi(x) + \sum_{j=1}^n D^j y(x) D^j \varphi(x) \right] dx.$$

Pour traiter ce problème, nous le formulons comme un problème d'optimisation : étant donné un certain ensemble  $\pi$  d'ouverts de  $\mathbf{R}^n$  contenant  $\Omega_0$  et contenus dans  $D$ , pour chaque  $\Omega \in \pi$ , on considère la solution  $y_{\Omega}$  du problème de Neuman

$$y_{\Omega} \in H^1(\Omega) : ((y_{\Omega}, \varphi))_{H^1(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

et on pose :

$$J(\Omega) = \|y_{\Omega} - y_d\|_{L^2(\Omega_0)}.$$

On définit ainsi une fonctionnelle sur  $\pi$  que nous devons minimiser.

*Notre but est de trouver des conditions pour que  $J$  atteigne son minimum, en demandant aux éléments de  $\pi$  le moins de régularité possible.*

Dans [5], on montre que  $J$  atteint son minimum si  $\pi$  satisfait les 2 conditions suivantes :

1.  $\exists K$  tel que  $\forall \Omega \in \pi, \exists p_\Omega: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbf{R}^n)$  opérateur de prolongement linéaire et continu tel que

$$\|p_\Omega\| \leq K$$

2. L'ensemble des fonctions caractéristiques dans  $\mathbf{R}^n$  des éléments de  $\pi$  est un compact de  $L^1(\mathbf{R}^n)$ .

Ces 2 propriétés assurent que  $J$  est continu sur  $\pi$  muni d'une topologie convenable, et que  $\pi$  est compact pour cette topologie. On montre aussi dans [5] que l'ensemble  $\pi$  des ouverts contenant  $\Omega_0$ , contenus dans  $D$ , dont le bord est *localement uniformément graphe d'application lipschitzienne* satisfait ces 2 propriétés.

Toutefois, dans l'approximation du problème de minimisation en particulier pour calculer le gradient des fonctionnelles [6], [9], il est commode de travailler sur un ensemble  $\pi$  d'ouverts qui sont *images d'un ouvert fixé  $B$  par des homéomorphismes uniformément bilipschitziens* définis sur un voisinage de  $B$ . Or de tels ouverts n'ont pas nécessairement un bord localement graphe de fonction lipschitzienne, comme le montre le contre-exemple suivant donné dans [1] :

$T$  est en coordonnées polaires dans  $\mathbf{R}^2$  l'homéomorphisme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T: B = \left\{ 0 < \rho < 1; 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow T(B) \\ T(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta - \log \rho)}. \end{array} \right.$$

$T$  est une bijection bilipschitzienne définie sur  $B$ , prolongeable à un voisinage de  $B$ . Pourtant, le bord de  $T(B)$  n'est pas graphe d'une fonction lipschitzienne au voisinage de l'origine.

*Remarque.* — Le bord de  $T(B)$  n'est même pas graphe d'une fonction continue au voisinage de l'origine. Or on peut montrer que le bord d'un ouvert  $\Omega$  est localement graphe d'une fonction continue si et seulement si cet ouvert possède la propriété de segment, condition couramment utilisée pour assurer la densité de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Ceci nous amène à étudier l'ensemble d'ouverts suivant qui est formé de parties de  $\mathbf{R}^n$  « uniformément localement images d'un demi-espace par des bijections bilipschitziennes » :

DÉFINITION I.1. — Soient  $r$  et  $k$  2 nombres positifs, et  $D$  un ouvert borné régulier de  $\mathbf{R}^n$ . On désigne par  $VL(r, k)$  l'ensemble des ouverts de  $\mathbf{R}^n$  inclus dans  $D$  tels que :

$\forall x \in \partial\Omega, \exists V_x$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $T_x: B(x, r) \rightarrow V_x$  bijective, bilipschitzienne de constante  $k$  telle que :

$$T_x(B(x, r) \cap \Omega) = V_x \cap \mathbf{R}^{n+},$$

où  $B(x, r)$  désigne la boule ouverte centrée en  $x$  de rayon  $r$  et  $\mathbf{R}^{n+}$  le demi espace ouvert de  $\mathbf{R}^n$ .

Par bijection bilipschitzienne de constante  $k$ , on entend que  $T_x$  et son inverse sont lipschitziennes de constante  $k$  :

$$\frac{1}{k} \|y - z\| \leq \|T_x y - T_x z\| \leq k \|y - z\|.$$

Ces ensembles  $VL(r, k)$  sont évidemment plus généraux que l'ensemble des images d'un ouvert fixe par des bijections bilipschitziennes.

On peut montrer que l'ensemble des ouverts inclus dans  $D$  possédant la propriété uniforme de cône étudiée dans [5] est une partie de  $VL(r, k)$  pour des valeurs de  $r$  et  $k$  bien choisies.

*Topologie sur  $VL(r, k)$  :*

La topologie que nous utiliserons est la même que celle utilisée dans [5], c'est-à-dire la topologie  $L^1(D)$  des fonctions caractéristiques de ses éléments : on dira que  $\Omega'$  tend vers  $\Omega$  dans  $VL(r, k)$  si et seulement si :

$$\omega' \rightarrow \omega \quad \text{dans} \quad L^1(D) \text{ fort,}$$

où  $\omega$  et  $\omega'$  désignent respectivement les fonctions caractéristiques de  $\Omega$  et  $\Omega'$ . On définit ainsi une topologie métrique sur  $VL(r, k)$  car :

PROPOSITION I.1. — Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux éléments de  $VL(r, k)$ . Alors :  $\omega_1 = \omega_2$  presque partout  $\iff \omega_1 = \omega_2$  partout.

Nous donnerons la démonstration de cette proposition au chapitre III (corollaire III.2).

La distance entre 2 éléments  $\Omega$  et  $\Omega'$  est donnée par :

$$d(\Omega, \Omega') = \int_{\mathbb{D}} |\omega(x) - \omega'(x)| dx = \mu(\Omega \Delta \Omega')$$

où  $\Omega \Delta \Omega'$  désigne la différence symétrique entre  $\Omega$  et  $\Omega'$  :

$$\Omega \Delta \Omega' = (\Omega \cup \Omega') \setminus (\Omega \cap \Omega').$$

On peut remarquer qu'on obtient la même topologie en munissant l'ensemble des fonctions caractéristiques des éléments de  $VL(r, k)$  de la topologie  $L^p(\mathbb{D})$  pour  $p$  quelconque supérieur ou égal à 1. En effet

$$\|\omega - \omega'\|_{L^p(\mathbb{D})} = [\|\omega - \omega'\|_{L^1(\mathbb{D})}]^{\frac{1}{p}}.$$

Nous montrons dans le chapitre II que  $VL(r, k)$  possède une propriété de prolongement uniforme dans les espaces  $W_p^1(\Omega)$ . Cette propriété assure la continuité de la fonctionnelle  $J$ .

Dans le chapitre III, nous montrons que  $VL(r, k)$  est un espace compact.

## CHAPITRE II

### THÉORÈME DE PROLONGEMENT

Le but de ce chapitre est de montrer que pour tout  $p(p \geq 1)$ , les espaces  $W_p^1(\Omega)^{(1)}$  possèdent la propriété de prolongement uniforme sur  $VL(r, k)$  suivante :

$$\exists M(r, k) \quad \text{tel que :} \quad \forall \Omega \in VL(r, k),$$

$\exists p_\Omega : W_p^1(\Omega) \rightarrow W_p^1(\mathbf{R}^n)$ , opérateur de prolongement linéaire continu, tel que

$$\|p_\Omega\| \leq M(r, k).$$

Des résultats de prolongement sur certaines variétés à bord lipschitziennes ont été montrés dans [1], [3]. Nous utilisons ici une méthode proche basée sur le prolongement par réflexion. Le principe en est le suivant : étant donné un élément

$$u \in W_p^1(\Omega) \quad (\Omega \in VL(r, k)),$$

pour le prolonger, on commence par localiser le problème, de façon à se ramener au cas où le support de  $u$  est inclus dans une seule boule de rayon  $\frac{r}{2}$  centrée au bord de  $\Omega$ .

Puis, par changement de variable bilipschitzien, on se ramène à prolonger une fonction définie sur un morceau de demi-espace, ce que l'on fait par réflexion. On revient à  $u$  par changement de variable inverse du précédent.

Les propriétés des changements de variable bilipschitziens dans les espaces de Sobolev sont étudiées dans le § 1.

Dans le § 2, on démontre le théorème de prolongement. A la fin du paragraphe, nous faisons quelques remarques sur cette méthode comparée à celle de Calderon [2].

(1) On définit :  $W_p^1(\Omega) = \{\varphi \in L^p(\Omega); D^j\varphi \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, n\}$ .

### 1. Transport d'espaces de Sobolev par transformation bilipschitzienne.

Considérons 2 ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbf{R}^n$  et une application  $T$  bijective bilipschitzienne de constante  $k$  entre  $U$  et  $V$ :

$$T: U \rightarrow V: x \mapsto y.$$

Étant donné un élément  $\varphi \in W_p^1(V)$  ( $p \geq 1$ ), Nečas [10] a montré que :

$$u = \varphi \circ T$$

est un élément de  $W_p^1(U)$  et qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|u\|_{W_p^1(U)} \leq C \|\varphi\|_{W_p^1(V)}.$$

Nous donnons ici une évaluation de la constante  $C$ .

Étudions d'abord le transport des espaces  $L^p$  :

**PROPOSITION II.1.** — Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$ ,  $T$  une bijection bilipschitzienne de constante  $k$  entre  $U$  et  $V$ , et un élément  $\varphi \in L^p(V)$ . Alors  $u = \varphi \circ T$  appartient à  $L^p(U)$ . De plus

$$\forall \varphi \in L^p(V): \|u\|_{L^p(U)} \leq K \|\varphi\|_{L^p(V)}$$

où

$$K = [n! k^n]^{\frac{1}{p}}$$

*Démonstration.* — Soit  $\varphi \in L^p(V)$  et  $u = \varphi \circ T$ . Rappelons le résultat suivant [11]:  $T$  étant bijective bilipschitzienne entre  $U$  et  $V$ ,  $T$  et  $T^{-1}$  possèdent des dérivées partielles d'ordre 1 respectivement dans  $L^\infty(U)$  et  $L^\infty(V)$ . De plus, pour toute fonction  $g \in L^1(V)$ , la fonction  $f = g \circ T$  est dans  $L^1(U)$  et :

$$\int_U |f(x)| dx = \int_V |g(y)| |DT^{-1}(y)| dy$$

où  $DT^{-1}$  désigne le jacobien de  $T^{-1}$ .

En appliquant ce résultat à  $|\varphi|^p$  et  $|u|^p = |\varphi|^p \circ T$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_U |u(x)|^p dx &= \int_V |\varphi(y)|^p |DT^{-1}(y)| dy \\ &\Rightarrow \|u\|_{L^p(U)}^p \leq \| |DT^{-1}(y)| \|_{L^\infty(V)} \|\varphi\|_{L^p(V)}^p \end{aligned}$$

D'autre part,  $T^{-1}$  étant lipschitzienne de constante  $k$ , on a :

$$\left\| \frac{\partial T_i^{-1}}{\partial x^j} \right\|_{L^\infty(V)} \leq k \quad \forall i, j \in \{1 \dots n\}.$$

Par suite :

$$\|DT^{-1}\|_{L^\infty(V)} \leq n! k^n$$

et

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq [n! k^n]^{\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(V)}.$$

La constante  $K = [n! k^n]^{\frac{1}{p}}$  répond à la question.

On déduit de cette proposition le corollaire suivant qui nous sera utile dans le chapitre III :

**COROLLAIRE II.1.** — Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$ ,  $T$  une bijection entre  $U$  et  $V$ , et  $M$  une partie mesurable de  $U$ . Alors  $N = T(M)$  est mesurable. De plus, il existe  $K$  ne dépendant que de  $n$  et  $k$  tel que :

$$\frac{1}{K} \mu(M) \leq \mu(N) \leq K\mu(M).$$

*Démonstration.* — La fonction  $\chi_M$  caractéristique de  $M$  dans  $U$  est dans  $L^1(U)$  et :

$$\mu(M) = \int_U \chi_M(x) dx.$$

De plus, si on note  $\chi_N$  la fonction caractéristique de  $N$  dans  $V$ , on a :

$$\chi_N = \chi_M \circ T^{-1}.$$

Par suite, d'après la proposition II.1,  $\chi_N$  est dans  $L^1(V)$ , et il existe une constante  $K$  ne dépendant que de  $n$  et  $k$  telle que :

$$\int_V \chi_N(y) dy \leq K \int_U \chi_M(x) dx$$

soit encore :

$$\mu(N) \leq K\mu(M).$$

En raisonnant de même sur  $T^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{1}{K} \mu(M) \leq \mu(N) \leq K\mu(M).$$

Étudions maintenant le transport des espaces  $W_p^1$  par changement de variable bilipschitzien :

**PROPOSITION II.2.** — Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$ ,  $T$  une bijection bilipschitzienne de constante  $k$  entre  $U$  et  $V$ , et  $\nu$  un élément de  $W_p^1(V)$  ( $p \geq 1$ ). Alors  $u = \nu \circ T$  appartient à  $W_p^1(U)$ . De plus, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $n, k$  et  $p$  telle que :

$$\forall \nu \in W_p^1(V) : \|u\|_{W_k^1(U)} \leq C \|\nu\|_{W_k^1(V)}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\nu$  un élément de  $W_p^1(V)$  et  $u = \nu \circ T$ . D'après la proposition II.1, on sait que  $u$  appartient à  $L^p(U)$  et que

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq K \|\nu\|_{L^p(V)}$$

où  $K$  ne dépend que de  $n, k$  et  $p$ .

Étudions maintenant les dérivées de  $u$ . Nečas [10] a montré que les dérivées partielles de  $u$  sont des éléments de  $L^p(U)$  et que :

$$\forall x \in U : \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu}{\partial y^j}(Tx) \frac{\partial T^j}{\partial x^i}(x).$$

D'après la proposition II.1,  $\frac{\partial \nu}{\partial y^j} \circ T$  appartient à  $L^p(U)$  et

$$\left\| \frac{\partial \nu}{\partial y^j} \circ T \right\|_{L^p(U)} \leq K \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y^j} \right\|_{L^p(V)}.$$

Par suite :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_{L^p(U)} \leq K \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial T^j}{\partial x^i} \right\|_{L^\infty(U)} \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y^j} \right\|_{L^p(V)},$$

et du fait que  $T$  est lipschitzienne de constante  $k$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_{L^p(U)} \leq K \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial \nu}{\partial y^j} \right\|_{L^p(V)}.$$

On en déduit que :

$$\|u\|_{W_k^1(U)} \leq C \|\nu\|_{W_k^1(V)}$$

où  $C$  ne dépend que de  $n, k$  et  $p$ .  $\square$

Montrons maintenant le théorème de prolongement :

## 2. Théorème de prolongement.

Dans toute la suite, on supposera  $n$  et  $p$  fixés ( $p \geq 1$ ). On notera  $K(., .)$  toutes les constantes intervenant, les arguments désignant les paramètres dont elles dépendent.

Pour trouver l'opérateur de prolongement cherché, pour  $\Omega \in \text{VL}(r, k)$  et  $u \in W_p^1(\Omega)$  donné, nous construisons un élément  $\bar{u} \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$  qui prolonge  $u$ . Nous montrons que l'application

$$u \rightarrow \bar{u} : W_p^1(\Omega) \rightarrow W_p^1(\mathbf{R}^n)$$

est un opérateur linéaire continu dont la norme est majorée uniformément sur  $\text{VL}(r, k)$ .

Commençons par prolonger un élément  $u \in W_p^1(\Omega)$  dont le support est inclus dans une seule boule de rayon  $\frac{r}{2}$  centrée sur  $\partial\Omega$ . Nous montrerons ensuite le résultat général.

**PROPOSITION II.3.** — Soit  $\Omega$  un élément de  $\text{VL}(r, k)$ ,  $x \in \partial\Omega$  et  $u \in W_p^1(\Omega)$  de support inclus dans  $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ . Il existe un élément  $\bar{u} \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$  qui prolonge  $u$  et une constante  $K(r, k)$  tels que :

$$\|\bar{u}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq K(r, k) \|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

*Démonstration.* — On notera  $B$  la boule  $B(x, r)$  et  $B'$  la boule  $B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ . Étant donné que  $\Omega \in \text{VL}(r, k)$ , il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$  et une bijection bilipschitzienne  $T$  de  $B$  sur  $V$  tels que :

$$T(\Omega \cap B) = V \cap \mathbf{R}^{n+}.$$

D'après la proposition II.2, la fonction :

$$v = u|_{B \cap \Omega} \circ T^{-1}$$

est un élément de  $W_p^1(V \cap \mathbf{R}^{n+})$ , et il existe une constante

$K(k)$  telle que :

$$\begin{aligned} \|\nu\|_{W^1_b(V \cap \mathbf{R}^{n+})} &\leq K(k) \|u\|_{W^1_b(\Omega \cap B)} \\ &= K(k) \|u\|_{W^1_b(\Omega)}. \end{aligned}$$

Construisons un prolongement de  $\nu$  : le support de  $u$  est un compact inclus dans  $B'$ , donc celui de  $\nu$  est un compact inclus dans  $V' = T(B')$ , et la fonction

$$\hat{\nu}(y) = \begin{cases} \nu(y) & \forall y \in V \cap \mathbf{R}^{n+} \\ 0 & \forall y \in \mathbf{R}^{n+}, \quad y \notin V \end{cases}$$

est un élément de  $W^1_b(\mathbf{R}^{n+})$  de norme égale à  $\|\nu\|_{W^1_b(V \cap \mathbf{R}^{n+})}$ .  $\hat{\nu}$  peut à son tour être prolongée par réflexion en  $\hat{\hat{\nu}} \in W^1_b(\mathbf{R}^n)$  (cf. [8]) et :

$$\|\hat{\hat{\nu}}\|_{W^1_b(\mathbf{R}^n)} \leq K(k) \|\hat{\nu}\|_{W^1_b(\mathbf{R}^{n+})}.$$

Nous allons maintenant tronquer cette fonction  $\hat{\hat{\nu}}$  afin de ramener son support dans  $V$ . Pour ceci, considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$  telle que :

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = 1 & \forall \xi \in B\left(0, \frac{r}{2}\right) \\ \text{supp } \varphi \subset B(0, r) \end{cases}$$

et notons :

$$\Psi(y) = \varphi(T^{-1}(y) - x) \quad \forall y \in V.$$

Cette fonction est un élément de  $L^\infty(V)$  de norme égale à  $\|\varphi\|_{L^\infty(B(0, r))}$ , qui est une constante ne dépendant que de  $r$ .

De plus, les dérivées de  $\Psi$  sont aussi des éléments de  $L^\infty(V)$  et :

$$\|D^j \Psi\|_{L^\infty(V)} \leq nk \underset{i}{\text{Max}} \|D^i \varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = K(r, k).$$

Enfin on a :

$$\begin{cases} \Psi(y) = 1 & \forall y \in V'. \\ \text{supp } \Psi \subset V \end{cases}$$

Si on considère la fonction :

$$\bar{\nu} = \hat{\hat{\nu}} \cdot \Psi$$

c'est un élément de  $W^1_b(V)$  qui prolonge  $\nu$ , de support inclus dans  $V$  et :

$$\|\bar{\nu}\|_{W^1_b(V)} \leq K(r, k) \|\hat{\hat{\nu}}\|_{W^1_b(\mathbf{R}^n)}.$$

On en déduit à l'aide de la proposition II.2 que :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \bar{\varphi} \circ T(x) & \forall x \in B \\ 0 & \forall x \notin B \end{cases}$$

est un élément de  $W_p^1(\mathbf{R}^n)$  qui coïncide avec  $u$  sur  $B$  et tel que

$$\|\bar{u}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq K(k) \|\bar{\varphi}\|_{W_p^1(V)},$$

d'où :

$$\|\bar{u}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq K(r, k) \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.  $\square$

Montrons maintenant le théorème général de prolongement :

**THÉORÈME II.1.** — Soient  $k$  et  $r$  deux nombres positifs donnés. Il existe une constante  $K(r, k)$  telle que pour tout  $p \geq 1$  :

$$\forall \Omega \in VL(r, k), \quad \exists p_\Omega : W_p^1(\Omega) \rightarrow W_p^1(\mathbf{R}^n)$$

opérateur de prolongement linéaire continu tel que :

$$\|p_\Omega\| \leq K(r, k).$$

*Démonstration.* — Nous nous ramenons au résultat local de la proposition II.3 à l'aide d'une partition de l'unité possédant certaines propriétés d'uniformité : rappelons (cf. [5]) qu'il existe un entier  $N$  et un réel  $M(r)$  fonction de  $r$  seulement tel que pour tout  $\Omega \in VL(r, k)$  il existe  $\nu \leq N$ , un recouvrement  $(B'_i, i = 0, \dots, \nu)$  de  $\Omega$  et une partition de l'unité  $(\zeta_i, i = 0, \dots, \nu)$  subordonnée aux  $B'_i$  telle que :

i)  $B'_0 = \Omega$

ii)  $B'_i = B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)$  où  $x_i \in \partial\Omega$  pour  $i = 1, \dots, \nu$

iii)  $\sup_{x \in \mathbf{R}^n} D^j \zeta_i(x) \leq M(r) \begin{cases} \forall i = 1, \dots, \nu \\ \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$

Considérons un élément  $\Omega$  de  $VL(r, k)$ , un tel recouvrement et la partition de l'unité associée.

Pour un élément  $u \in W_p^1(\Omega)$ , notons

$$u_i = u \circ \zeta_i \quad i = 0, \dots, \nu$$

$u_0$  se prolonge trivialement en :

$$\bar{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & \{\forall x \in \Omega \\ 0 & \{\forall x \notin \Omega \end{cases}$$

qui est un élément de  $W_p^1(\mathbf{R}^n)$  de norme égale à  $\|u_0\|_{W_p^1(\Omega)}$ .

Pour  $i \neq 0$ , on peut appliquer la proposition II.3 : il existe une constante  $K(r, k)$ , et pour chaque  $i$  un élément  $\bar{u}_i \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$  qui prolonge  $u_i$  tel que :

$$\|\bar{u}_i\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq K(r, k) \|u_i\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Posons alors

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^v \bar{u}_i.$$

C'est un élément de  $W_p^1(\mathbf{R}^n)$  qui prolonge  $u$ . De plus, du fait que les dérivées de  $\zeta_i$  sont uniformément majorées, on a :

$$\|u_i\|_{W_p^1(\Omega)} \leq K(r, k) \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

et :

$$\|\bar{u}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq K(r, k) \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Remarques.* — Une autre méthode couramment utilisée pour obtenir des théorèmes de prolongement dans les espaces de Sobolev est celle de Calderon, par laquelle nous avons obtenu les résultats de [5] et dont le principe consiste à prolonger un élément de  $W_p^1(\Omega)$  en effectuant un produit de convolution entre ses dérivées et une fonction à support dans un cône.

Si on s'intéresse à un ouvert  $\Omega$  fixé borné, sans se préoccuper de questions d'uniformité de l'opérateur de prolongement par rapport à  $\Omega$ , dans quel cas une méthode donne-t-elle de meilleurs résultats que l'autre?

Rappelons que la méthode de Calderon permet de démontrer que les ouverts bornés dont le bord est localement graphe d'application lipschitzienne, ont la propriété de prolongement pour les espaces  $W_p^m$ , pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , et pour

$$1 < p < +\infty \quad [2], [10].$$

Mais cette méthode ne donne aucun résultat pour le cas  $p = 1$ .

Pour ce qui est de la méthode des réflexions utilisée ici, on peut remarquer qu'elle permet de démontrer que les variétés à bord de classe  $\mathcal{C}^{m-1,1}$  (les cartes locales sont  $m - 1$  fois différentiables, à dérivées d'ordre  $m - 1$  lipschitzienne) ont la propriété de prolongement pour les espaces  $W_p^m$  pour tout  $m$ , et cette fois-ci pour tout  $p$ , y compris  $p = 1$ .

Pour le cas  $p = 1$ , jusqu'ici, la méthode des réflexions permet seule d'obtenir des résultats.

Pour  $p \neq 1, m \geq 2$ , les résultats de Calderon sont meilleurs. En effet, une variété à bord  $\mathcal{C}^1$  a son bord localement graphe d'application  $\mathcal{C}^1$ , donc a fortiori d'une fonction lipschitzienne. Par contre, pour  $m = 1$ , nous avons vu qu'il n'en est rien. Au contraire, un ouvert dont le bord est localement graphe d'application lipschitzienne est une variété à bord  $\mathcal{C}^{0,1}$ . Par réflexion, on obtient donc des résultats plus généraux.

On peut remarquer aussi que le théorème de prolongement entraîne la densité de  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  dans  $W_p^1(\Omega)$  lorsque  $\Omega$  est une variété à bord lipschitzienne, même si  $\Omega$  ne possède pas la propriété du segment.

Tableau récapitulatif pour les théorèmes de prolongement de  $W_p^m(\Omega)$  dans  $W_p^m(\mathbf{R}^n)$  suivant les valeurs de  $m$  et  $p$ , donnant

- 1) la meilleure méthode
- 2) la régularité minimum demandée à  $\Omega$  :

	$m = 1$	$m > 1$
$p = 1$	méthode des réflexions $\Omega =$ variété à bord lipschitzienne	méthode des réflexions $\Omega =$ variété à bord de classe $\mathcal{C}^{m-1,1}$
$p > 1$	méthode des réflexions $\Omega =$ variété à bord lipschitzienne	méthode de Calderon. $\Omega$ de bord localement graphe de fonction lipschitzienne

## CHAPITRE III

### COMPACITÉ DE $VL(r, k)$ .

Rappelons (cf Ch. I) que  $VL(r, k)$ , dont tous les éléments sont inclus dans l'ouvert  $D$  de  $\mathbf{R}^n$ , est muni de la topologie  $L^1(D)$  des fonctions caractéristiques de ses éléments.

Nous montrons ici que pour cette topologie,  $VL(r, k)$  est un espace compact. Nous montrons d'abord (§ 1) qu'il est relativement compact, en utilisant la caractérisation de Rellich [7] des parties relativement compactes de  $L^p(\mathbf{R}^n)$ . Dans le § 2, nous étudions des sous-ensembles particuliers de  $\mathbf{R}^n$  appelés « ensembles nets ». Dans le § 3, nous montrerons que  $VL(r, k)$  est fermé.

#### 1. Compacité relative de $VL(r, k)$ .

Nous montrons que l'ensemble des fonctions caractéristiques des éléments de  $VL(r, k)$  est une partie relativement compacte de  $L^1(D)$ . Pour ceci, nous utilisons la caractérisation de Rellich des parties relativement compactes de  $L^p(\mathbf{R}^n)$ , c'est-à-dire [7] :

une partie  $\Phi$  de  $L^p(\mathbf{R}^n)$  dont tous les éléments ont leur support inclus dans un même compact de  $\mathbf{R}^n$ , est relativement compacte si et seulement si :

i)  $\Phi$  est bornée

ii)  $\forall f \in \Phi : \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^p dx \rightarrow 0$   
uniformément sur  $\Phi$  lorsque  $\|t\| \rightarrow 0$ .

i) est ici trivialement vérifiée. Il nous suffit pour montrer ii) d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION III.1. —  $\forall r, k > 0, \exists M > 0$  tel que :  
 $\forall \Omega \in \text{VL}(r, k)$  de fonction caractéristique  $\omega$ , et  $t$  tel que  
 $\|t\| < \frac{r}{2}$  :

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\omega(x + t) - \omega(x)| dx \leq M \|t\|.$$

*Démonstration.* — Étant donné  $\omega$ , fonction caractéristique d'un élément  $\Omega$  de  $\text{VL}(r, k)$ , et  $t \in \mathbf{R}^n$ , évaluons :

$$I(t) = \int_{\mathbf{R}^n} |\omega(x + t) - \omega(x)| dx.$$

Nous remarquons que :

$$I(t) = \mu(\Delta_t(\Omega))$$

où :

$$\Delta_t(\Omega) = (\Omega \cup (t + \Omega)) \setminus (\Omega \cap (t + \Omega))$$

$\mu$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^n$ .

D'autre part :

$$\Delta_t(\Omega) \subset \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \|t\|)}.$$

Il nous suffit donc d'évaluer  $\mu \left( \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \|t\|)} \right)$ .

Pour ceci, localisons le problème : on sait [5], qu'il existe un entier  $N$  ne dépendant que de  $r$ , tel que pour tout  $\Omega \in \text{VL}(r, k)$ ,  $\partial\Omega$  puisse être recouvert par un nombre  $\nu \leq N$  de boules  $B\left(x_j, \frac{r}{2}\right)$ , ( $j = 1, \dots, \nu$ ), de rayon  $\frac{r}{2}$ , centrées sur  $\partial\Omega$ . Un tel recouvrement étant donné, on a :

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} B\left(x_j, \frac{r}{2}\right)$$

donc

$$\bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \|t\|)} \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} S_j(t)$$

où :

$$S_j(t) = \bigcup_{x \in \partial\Omega \cap B(x_j, \frac{r}{2})} \overline{B(x, \|t\|)}.$$

Par suite :

$$\mu \left[ \bigcup_{x \in \partial\Omega} \overline{B(x, \|t\|)} \right] \leq \sum_{j=1}^v \mu(S_j(t)).$$

Évaluons maintenant  $\mu(S_j(t))$ .

Pour chaque indice  $j$ , il existe un ouvert  $V_j$  de  $\mathbf{R}^n$  et une application bilipschitzienne  $T_j$  telle que :

$$\begin{cases} T_j(B(x_j, r)) = V_j \\ T_j(B(x_j, r) \cap \Omega) = V_j \cap \mathbf{R}^{n+}. \end{cases}$$

D'autre part, dès que  $\|t\| < \frac{r}{2}$ ,  $S_j(t)$  est inclus dans  $B(x_j, r)$ .  $T_j$  est donc définie sur  $S_j(t)$ . Nous évaluons d'abord  $\mu[T_j(S_j(t))]$ .

Étant donné un élément  $x \in S_j(t)$ , par définition de  $S_j(t)$ , il existe un élément  $\xi \in \partial\Omega \cap B(x_j, \frac{r}{2})$  tel que :

$$\|x - \xi\| \leq \|t\|.$$

Or, du fait que  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $T_j\xi$  a pour dernière coordonnée 0.

De plus :

$$\|T_jx - T_j\xi\| \leq k\|x - \xi\| \leq k\|t\|.$$

Par suite :

$$T_j(S_j(t)) \subset \bigcup_{\substack{y \in V_j \\ y^n = 0}} B(y, \|t\|).$$

Si  $\mathcal{V}_t$  désigne le volume dans  $\mathbf{R}^{n-1}$  de la boule de rayon  $k(r + \|t\|)$ , on a alors :

$$\mu[T_j(S_j(t))] \leq k\mathcal{V}_t\|t\|.$$

Enfin, du fait que  $\|t\| < \frac{r}{2}$ , si  $\mathcal{V}$  désigne le volume de la boule de  $\mathbf{R}^{n-1}$  de rayon  $3k\frac{r}{2}$ , on a :

$$\mu[T_j(S_j(t))] \leq k\mathcal{V}\|t\|.$$

Pour conclure, il nous suffit maintenant d'appliquer le corollaire II.1 : il existe  $K$  ne dépendant que de  $k$  tel que :

$$\mu[S_j(t)] \leq K\mu[T_j(S_j(t))].$$

On en déduit :

$$\mu[\Delta_t(\Omega)] \leq \sum_{j=1}^v \mu[S_j(t)] \leq KNk\mathcal{V}\|t\|,$$

soit encore :

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\omega(x+t) - \omega(x)| dx \leq M\|t\|$$

où  $M$  ne dépend que de  $k$  et  $r$ .  $\square$

$VL(r, k)$  est donc relativement compact.

### 2. Ensembles nets.

Nous étudions maintenant les ensembles « nets » que nous utiliserons par la suite. Rappelons la définition [5] :

DÉFINITION III.1. — Une partie  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  est dite « nette » si elle est mesurable et si de plus

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \mu[B(x, \varepsilon) \cap \Omega] &\neq 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \int \Omega, \quad \mu[B(x, \varepsilon) \cap \int \Omega] &\neq 0. \end{aligned}$$

On peut montrer que cette définition est équivalente à :

DÉFINITION III.2. — Une partie de  $\mathbf{R}^n$  est dite « nette » si elle est mesurable et si de plus :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \left\{ \begin{aligned} \mu[B(x, \varepsilon) \cap \Omega] &\neq 0 \\ \mu[B(x, \varepsilon) \cap \int \Omega] &\neq 0. \end{aligned} \right.$$

Ces ensembles nous seront utiles dans le § 3. Nous utiliserons en particulier les propriétés suivantes :

LEMME III.1. — Les éléments de  $VL(r, k)$  sont nets.

Démonstration. — Nous utilisons la définition III.2.

Soit  $\Omega$  un élément de  $VL(r, k)$ . C'est un ouvert, donc une partie mesurable de  $\mathbf{R}^n$ .

Considérons un point  $x$  de  $\partial\Omega$  et un réel positif  $\varepsilon$  que nous supposons inférieur à  $r$ . Montrons que :

$$\begin{cases} \mu[B(x, \varepsilon) \cap \Omega] \neq 0 \\ \mu[B(x, \varepsilon) \cap \bar{\Omega}] \neq 0. \end{cases}$$

On sait qu'il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$  et une application  $T$  bijective entre  $B(x, r)$  et  $V$ , lipschitzienne de constante  $k$  telle que  $T(B(x, r) \cap \Omega) = V \cap \mathbf{R}^{n+}$ .  $T$  transforme  $B(x, \varepsilon)$  en un ouvert  $V_\varepsilon$  inclus dans  $V$ . D'après le corollaire II.1, on a :

$$\mu[B(x, \varepsilon) \cap \Omega] \geq \frac{1}{K} \mu[V_\varepsilon \cap \mathbf{R}^{n+}].$$

Or  $V_\varepsilon$  contient la boule  $B\left(Tx, \frac{\varepsilon}{k}\right)$ . Par suite :

$$\mu[V_\varepsilon \cap \mathbf{R}^{n+}] \geq \frac{1}{2} \mu\left[B\left(Tx, \frac{\varepsilon}{k}\right)\right],$$

ce qui prouve que  $B(x, \varepsilon) \cap \Omega$  est de mesure non nulle. De la même façon, on a

$$\mu[B(x, \varepsilon) \cap \bar{\Omega}] \geq \frac{1}{K} \mu[V_\varepsilon \cap \overline{\mathbf{R}^{n-}}] \geq \frac{1}{2} \mu\left[B\left(Tx, \frac{\varepsilon}{k}\right)\right].$$

$\Omega$  est donc un ensemble net.  $\square$

LEMME III.2. — Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux parties nettes de  $\mathbf{R}^n$ , et  $\chi_1$  et  $\chi_2$  leurs fonctions caractéristiques. Alors :

$$\chi_1 = \chi_2 \quad p.p. \implies \dot{U}_1 = \dot{U}_2$$

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que  $\dot{U}_1 \subset \dot{U}_2$  : soit  $x \in \dot{U}_1$  :  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset U_1$ .

On en déduit que

$$\chi_1(y) = 1 \quad \forall y \in B(x, \varepsilon)$$

et :

$$\chi_2(y) = 1 \quad \text{presque partout sur } B(x, \varepsilon).$$

Montrons qu'on a  $\chi_2(y) = 1$  partout sur  $B(x, \varepsilon)$ . S'il n'en était pas ainsi, il existerait un élément  $y$  de  $B(x, \varepsilon)$  appartenant au complémentaire de  $U_2$ . De plus, étant donné que

$B(x, \varepsilon)$  est ouvert,  $y$  serait centre d'une boule de rayon  $\delta$  incluse dans  $B(x, \varepsilon)$ . On aurait alors :

$$\chi_2(z) = 1 \quad \text{presque partout sur} \quad B(y, \delta)$$

soit encore :

$$y \in \int U_2 \quad \text{et} \quad \mu [B(y, \delta) \cap \int U_2] = 0$$

ce qui contredit le fait que  $U_2$  est net.

On en déduit donc que  $\dot{U}_1 \subset \dot{U}_2$ . On montrerait de même que  $\dot{U}_2 \subset \dot{U}_1$ . Donc :

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2. \quad \square$$

**COROLLAIRE III.2.** — Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux éléments de  $VL(r, k)$ . Alors  $\omega_1 = \omega_2$  p.p.  $\iff \omega_1 = \omega_2$  partout.

Ce corollaire, utilisé dans l'introduction (proposition I.4) est une conséquence directe des lemmes III.1 et III.2.

**LEMME III.3.** — Soit  $U_1$  un ensemble net et  $U_2$  un ouvert net. Alors :

$$U = U_1 \cap U_2$$

est net.

*Remarque.* — Cette propriété est fautive si on ne fait pas l'hypothèse que l'un des 2 ensembles est ouvert. En effet, si on considère :

$$U_1 = [0, 1], \quad U_2 = [1, 2]$$

$U_1$  et  $U_2$  sont nets. Pourtant  $U_1 \cap U_2$  ne l'est pas.

*Démonstration.* —  $U$  est évidemment mesurable.

Soit  $x \in U_1 \cap U_2$ . Du fait que  $U_2$  est ouvert, il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$B(x, \delta) \subset U_2.$$

Pour  $\varepsilon > \delta$ , on a alors

$$\mu[B(x, \varepsilon) \cap U] = \mu[B(x, \varepsilon) \cap U_2] \neq 0.$$

Soit maintenant  $x \notin U$ .  $\varepsilon$  étant fixé, évaluons  $\mu[B(x, \varepsilon) \cap \int U]$  :

$$B(x, \varepsilon) \cap \int U = [B(x, \varepsilon) \cap \int U_1] \cup [B(x, \varepsilon) \cap \int U_2].$$

$x$  étant dans  $\int U$ , il est soit dans  $\int U_1$ , soit dans  $\int U_2$ .  
Supposons qu'il soit dans  $\int U_1$ .  $U_1$  étant net, on a :

$$\mu[B(x, \varepsilon) \cap \int U_1] \neq 0$$

par suite

$$\mu[B(x, \varepsilon) \cap \int U] \geq \mu[B(x, \varepsilon) \cap \int U_1] \neq 0 \quad \square$$

LEMME III.4. — Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$ , d'adhérence  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$ , et  $T$  une bijection bilipschitzienne entre  $U$  et  $V$ . Alors  $T$  est prolongeable en  $\hat{T} : \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  bijective, bilipschitzienne de même constante.

*Démonstration.* —  $T$  étant uniformément continue est évidemment prolongeable en  $\hat{T}$  définie sur  $\bar{U}$ . On peut montrer que  $\hat{T}$  est lipschitzienne de même constante que  $T$ . Montrons que  $\hat{T}$  est bijective entre  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  : pour ceci, nous considérons l'application  $S = T^{-1}$  qui est définie sur  $V$ . Elle est aussi prolongeable en  $\tilde{S}$  définie sur  $\bar{V}$ , lipschitzienne de même constante que  $S$ . Il nous suffit de montrer que  $\tilde{S}$  est l'inverse de  $\hat{T}$ , et pour ceci que  $\tilde{S} \circ \hat{T} = \hat{T} \circ \tilde{S} = \text{Id}$ .

On a évidemment :

$$\hat{T}(\bar{U}) \subset \overline{T(U)} = \bar{V}.$$

$\tilde{S}$  est donc définie sur  $\hat{T}(\bar{U})$ .

Soit  $x \in \bar{U}$ . Calculons  $\tilde{S} \circ \hat{T}(x)$  :  $x$  est limite d'une suite  $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $U$ , et :

$$\begin{aligned} y &= \hat{T}x = \lim_{p \rightarrow \infty} Tx_p \\ z &= \tilde{S}y = \lim_{p \rightarrow \infty} S(Tx_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} T^{-1}(Tx_p) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} x_p. \end{aligned}$$

Par suite,  $z = x \cdot \tilde{S} \circ \hat{T}$  est donc l'identité.

On montrerait de même que  $\hat{T} \circ \tilde{S}$  est aussi l'identité. Ainsi,  $\tilde{S}$  et  $\hat{T}$  sont inverses l'un de l'autre. Par suite  $\hat{T}$  est bijective bilipschitzienne entre  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$ .  $\square$

LEMME III.5. — Soit  $K$  un compact de  $\mathbf{R}^n$  et  $(T_p)_{p \in N}$  une suite d'applications bijectives bilipschitziennes de constante  $k$  entre  $K$  et  $T_p(K) \subset \mathbf{R}^n$ , convergeant uniformément vers une application  $T$ . Alors  $T$  est aussi bijective bilipschitzienne de même constante entre  $K$  et  $T(K)$ .

*Démonstration.* —  $T$  est lipschitzienne de constante  $k$ , car :

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx'\| &\leq \|Tx - T_p x\| + \|T_p x - T_p x'\| + \|T_p x' - Tx'\| \\ &\leq 2\|T - T_p\|_\infty + k\|x - x'\| \end{aligned}$$

et  $\|T - T_p\| \rightarrow 0$ .

$T$  est injective et  $T^{-1}$  est lipschitzienne de constante  $k$  car :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\|x - x'\| &\leq \|T_p x - T_p x'\| \\ &\leq \|T_p x - Tx\| + \|Tx - Tx'\| + \|Tx' - T_p x'\| \\ &\Rightarrow \frac{1}{k}\|x - x'\| \leq \|Tx - Tx'\|. \quad \square \end{aligned}$$

LEMME III.6. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $T$  une bijection bilipschitzienne de constante  $k$  entre  $U$  et  $V \subset \mathbf{R}^n$ , et  $M$  une partie nette de  $U$ . Alors  $N = T(M)$  est nette.

*Démonstration.* — Montrons d'abord que nous pouvons nous ramener au cas où  $U$  est tel que  $\overset{\circ}{U} = U$  : au cas où cette propriété ne serait pas vérifiée, d'après le lemme III.4, on pourrait prolonger  $T$  à  $\bar{U}$  en une application bijective entre  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$ , bilipschitzienne de constante  $k$ . Par suite,  $T$  peut être prolongée à  $\overset{\circ}{U} = \tilde{U}$  en  $\tilde{T}$  bijective, bilipschitzienne de même constante. Et on a :

$$M \subset \tilde{U}, \quad N = \tilde{T}(M).$$

Par ailleurs, on sait [4] que  $\overset{\circ}{U} = \tilde{U}$ .

Étudions maintenant le cas où  $\overset{\circ}{U} = U$  :

Tout d'abord, d'après le corollaire II.1,  $N$  est mesurable. Considérons un point  $y \in N$ , et montrons que :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap N] \neq 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$y$  est image par  $T$  d'un élément  $x$  de  $M$ . En supposant  $\varepsilon$  assez petit pour que  $B(y, \varepsilon)$  soit inclus dans  $V$ ,  $T^{-1}$  est définie sur  $B(y, \varepsilon)$ . D'après le corollaire II.1, on sait qu'il existe  $K$  tel que :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap N] \geq \frac{1}{K} \mu[T^{-1}(B(y, \varepsilon) \cap N)].$$

Par ailleurs, on a :

$$M \cap B\left(x, \frac{\varepsilon}{k}\right) \subset T^{-1}(B(y, \varepsilon) \cap N).$$

Donc :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap N] \geq \frac{1}{K} \mu\left[B\left(x, \frac{\varepsilon}{k}\right) \cap M\right]$$

quantité qui est non nulle puisque  $M$  est net.

*Soit maintenant  $y$  un élément n'appartenant pas à  $N$ .*

a) Tout d'abord, si  $y \in V$ , pour  $\varepsilon$  assez petit,  $B(y, \varepsilon)$  est inclus dans  $V$ . On a alors de même que précédemment :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap [N]] \geq \frac{1}{K} \mu\left[B\left(x, \frac{\varepsilon}{k}\right) \cap [M]\right]$$

où  $x = T^{-1}(y)$ . Cette quantité est non nulle puisque  $M$  est net.

b) Si  $y \notin \bar{V}$ , on a évidemment pour  $\varepsilon$  assez petit :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap [N]] = \mu[B(y, \varepsilon)] \neq 0.$$

c) Soit maintenant  $y \in \partial V$ ,  $y \notin N$ . Supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap [N]] = 0$$

On aurait alors :

$$\begin{aligned} & \overbrace{B(y, \varepsilon) \cap [N]} = \emptyset \\ \Rightarrow & B(y, \varepsilon) \cap \widehat{[N]} = \emptyset \\ \Rightarrow & B(y, \varepsilon) \cap \widehat{[\bar{N}]} = \emptyset \\ \Rightarrow & B(y, \varepsilon) \subset \bar{N} \subset \bar{V} \\ \Rightarrow & y \in \bar{V} \end{aligned}$$

Or  $\overset{\circ}{U} = U$  et  $T$  est bicontinue. Par suite  $\overset{\circ}{V} = V$ . Un tel  $y$  serait donc un élément de  $V$ , ce qui est contraire à l'hypothèse  $y \in \partial V$ . Il est donc impossible d'avoir

$$\mu[B(y, \varepsilon) \cap N] = 0 \quad \text{si} \quad y \notin N.$$

$N$  est donc net.  $\square$

### 3. Fermeture de $VL(r, k)$ .

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant :

**THÉORÈME III.1.** —  *$r$  et  $k$  étant donnés,  $VL(r, k)$  est fermé pour la topologie  $L^1(D)$  des fonctions caractéristiques de ses éléments.*

Nous montrons ce théorème de la façon suivante : nous considérons une suite  $(\Omega_p)_{p \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $VL(r, k)$  dont les fonctions caractéristiques  $(\omega_p)_{p \in \mathbf{N}}$  convergent dans  $L^1(D)$  vers un élément  $\omega$ . Nous construisons un élément  $\Omega \in VL(r, k)$  dont la fonction caractéristique est presque partout égale à  $\omega$ .

Nous utilisons pour ceci une méthode analogue à celle utilisée dans [5]. Rappelons que :

$$\hat{G} = \bigcap_{q \in \mathbf{N}} G_q \quad \text{où} \quad G_q = \bigcup_{p \geq q} \Omega_p$$

est une partie de  $D$ , de fonction caractéristique presque partout égale à  $\omega$ . D'autre part, il existe un ensemble  $G \subset D$  différant de  $\hat{G}$  d'un ensemble de mesure nulle, qui est net (cf. définitions III.1, III.2).  $G$  est donc limite de la suite  $\Omega_p$ .

Nous montrons dans la suite que  $\Omega = \hat{G}$  répond à la question. La démonstration se décompose de la façon suivante : nous nous intéressons d'abord à  $G$  pour lequel nous montrons que :  $\forall x \in \partial G, \exists V_x$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et  $T_x : B(x, r) \rightarrow V_x$  bijective bilipschitzienne de constante  $k$  telle que :

$$T_x(B(x, r) \cap G) = V_x \cap \mathbf{R}^{n+}$$

à un ensemble de mesure nulle près.  $x \in \partial G$  ayant été fixé, nous construisons  $T_x$  dans 1). Dans 2) nous montrons que

$T_x(B(x, r) \cap G) = V_x \cap \mathbf{R}^{n+}$  à un ensemble de mesure nulle près.

Nous nous intéressons ensuite à  $\mathring{G}$ . Dans 3) nous montrons que :

$$T_x(\mathring{G} \cap B(x, r)) = V_x \cap \mathbf{R}^{n+}$$

et que :

$$\chi_{\mathring{G}} = \omega \text{ p.p.}$$

On en déduira alors que  $\mathring{G}$ , limite de la suite  $(\Omega_p)$  appartient à  $VL(r, k)$ .

*Démonstration du théorème III.1.* — Soit  $x$  un élément de  $\partial G$ .

1) *Construction de T :*

On sait d'après [5] qu'il existe une sous-suite encore notée  $(\Omega_p)_{p \in \mathbf{N}}$  de la suite  $(\Omega_p)$  et des éléments  $x_p \in \partial \Omega_p$  tels que :

$$x_p \rightarrow x \quad \text{lorsque} \quad p \rightarrow \infty.$$

D'autre part, étant donné que  $\Omega_p \in VL(r, k)$  :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \exists V_p \subset \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad T_p : B(x_p, r) \rightarrow V_p \text{ bijective}$$

bilipschitzienne de constante  $k$  telle que :

$$T_p(B(x_p, r) \cap \Omega_p) = V_p \cap \mathbf{R}^{n+}.$$

De plus, d'après le lemme III.4, chaque bijection  $T_p$  peut être prolongée en une bijection bilipschitzienne  $\hat{T}_p$  appliquant  $\overline{B(x_p, r)}$  sur  $\overline{V_p}$ .

Soit  $\tau_p$  la translation  $x \mapsto x_p$ . Posons

$$\theta_p = \hat{T}_p \circ \tau_p.$$

Cette application est une bijection bilipschitzienne entre  $\overline{B(x, r)}$  et  $\overline{V_p}$ . La suite  $(\theta_p)_{p \in \mathbf{N}}$  est alors une famille équi-continue de fonctions définies sur un compact. D'après le théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite encore notée  $(\theta_p)_{p \in \mathbf{N}}$  convergeant uniformément vers une application  $\hat{T}$  définie sur  $\overline{B(x, r)}$ . Et d'après le lemme III.5,  $\hat{T}$  est une bijection entre  $\overline{B(x, r)}$  et  $\hat{T}(\overline{B(x, r)})$  bilipschitzienne de constante  $k$ . Nous étudions par la suite l'application :

$$T = \hat{T}|_{B(x, r)}$$

On notera :

$$V = T(B(x, r)).$$

Montrons maintenant que :

2)  $T(G \cap B(x, r)) = V \cap \mathbf{R}^{n+}$  à un ensemble de mesure nulle près : Nous savons que  $G$  est limite de la suite  $\Omega_p$  :

$$\omega_p \rightarrow \chi_G \quad \text{dans} \quad L^1(D).$$

Du fait que  $x_p$  converge vers  $x$ , on peut aussi montrer que la fonction caractéristique de  $\Omega_p \cap B(x_p, r)$  converge dans  $L^1(D)$  vers celle de  $G \cap B(x, r)$ .

Il nous suffit alors de montrer que cette suite converge aussi, dans  $L^1(D)$ , vers la fonction caractéristique de  $T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$ .

Pour ceci, notons :

$$U_p = \Omega_p \cap B(x_p, r) = T_p^{-1}(V_p \cap \mathbf{R}^{n+})$$

$$U = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

$\Delta$  : différence symétrique de 2 ensembles.

Nous avons à démontrer que :

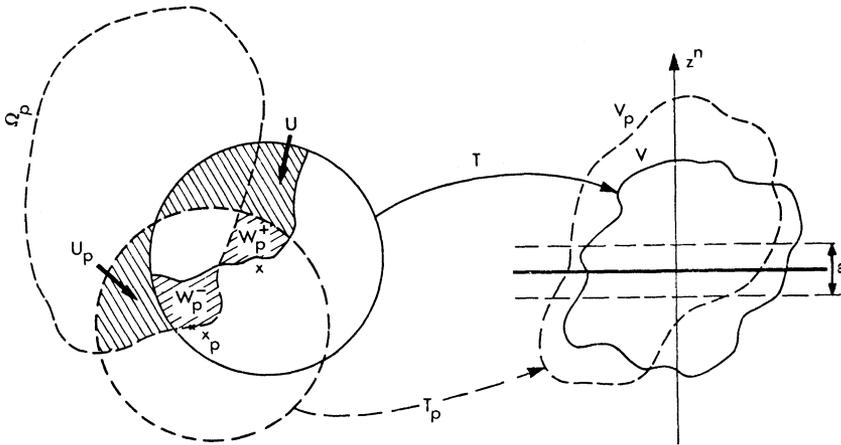
$$\mu(U_p \Delta U) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad p \rightarrow \infty.$$

Notons aussi :

$$W_p^+ = \{y \in B(x_p, r) \cap B(x, r); y \in U, y \notin U_p\}$$

$$W_p^- = \{y \in B(x_p, r) \cap B(x, r); y \notin U, y \in U_p\}.$$

(voir figure).



On a :

$$U_p \Delta U = \{(U_p \Delta U) \cap [B(x_p, r) \Delta B(x, r)]\} \cup W_p^+ \cup W_p^-.$$

Étant donné que  $\mu[B(x_p, r) \Delta B(x, r)]$  tend vers 0, il nous suffit de montrer que  $\mu[W_p^+]$  et  $\mu[W_p^-]$  tendent vers 0.

Montrons que  $\mu[W_p^+] \rightarrow 0$  :

Évaluons d'abord  $\mu[T(W_p^+)]$ . Pour ceci, étudions  $\|T_p y - Ty\|$  pour  $y \in W_p^+$  : nous remarquons que pour chaque  $p$  et pour chaque  $y \in W_p^+$ , l'élément  $y + x_p - x$  appartient à  $B(x_p, r)$ . En effet :

$$\|y + x_p - x - x_p\| = \|y - x\| < r \quad \text{car} \quad y \in B(x, r).$$

Par suite,  $T_p$  est définie au point  $y + x_p - x$ . De plus :

$$\begin{aligned} \|T_p y - Ty\| &\leq \|T_p y - T_p(y + x_p - x)\| + \|T_p(y + x_p - x) - Ty\| \\ &\leq k\|x_p - x\| + \|\theta_p y - Ty\|. \end{aligned}$$

Et, comme  $\theta_p \rightarrow T$  uniformément,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P : p > P \implies \|\theta_p y - Ty\| < \varepsilon \quad \forall y \in B(x, r).$$

On en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P : \left\{ \begin{array}{l} p > P \\ y \in W_p^+ \end{array} \right\} \implies \|T_p y - Ty\| < \varepsilon.$$

Considérons alors l'ensemble  $T(W_p^+)$ . D'après le corollaire II.1, il est mesurable. Et si on note  $(T_p y)^n$  et  $(Ty)^n$  les dernières coordonnées de  $T_p y$  et  $Ty$ , on a

$$\left. \begin{array}{l} \forall p > P \\ \forall y \in W_p^+ \end{array} \right\} \quad |(T_p y)^n - (Ty)^n| \leq \|T_p y - Ty\| < \varepsilon.$$

Or, du fait que :

- $y \in U$ , on a :  $(Ty)^n \geq 0$
- $y \notin U_p$ , on a :  $(T_p y)^n \leq 0$ .

On en déduit que pour  $p > P$  :

$$T(W_p^+) \subset \{z \in V; |z^n| < \varepsilon\}.$$

Et de plus, comme  $T$  est lipschitzienne

$$V \subset B(Tx, kr).$$

Il existe donc une constante  $C$  ne dépendant que de  $k$  et  $r$  telle que :

$$\forall p > P : \mu[T(W_p^+)] \leq \mu[\{z \in V, |z^n| < \varepsilon\}] \leq C\varepsilon.$$

Enfin, d'après le corollaire II.4, il existe  $K$  tel que

$$\mu[W_p^+] \leq K\mu[T(W_p^+)].$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P : p > P \implies \mu[W_p^+] < \varepsilon.$$

Ceci montre que  $W_p^+ \rightarrow 0$  lorsque  $p \rightarrow \infty$ . On montrerait de même que  $\mu[W_p^-] \rightarrow 0$ .

Nous avons ainsi démontré que

$$G \cap B(x, r) \quad \text{et} \quad T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

sont tous deux limites  $L^1(D)$  de la suite  $B(x_p, r) \cap \Omega_p$ . Ils sont donc égaux à un ensemble de mesure nulle près.

Montrons maintenant que :

3)  $\overset{\circ}{G} \cap B(x, r) = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$  et  $\chi_{\overset{\circ}{G}} = \omega$  p.p.

La boule  $B(x, r)$  est un ensemble net. Par suite, d'après le lemme III.6,  $V = T[B(x, r)]$  est aussi net. D'autre part,  $V$  étant net, d'après le lemme III.3,  $V \cap \mathbf{R}^{n+}$  est aussi net. Enfin, d'après le lemme III.6,  $T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$  est net.

Par ailleurs,  $G$  est net par construction.  $B(x, r)$  étant ouvert, d'après le lemme III.3,  $G \cap B(x, r)$  est net.

$G \cap B(x, r)$  et  $T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$  sont donc 2 ensembles nets ne différant que d'un ensemble de mesure nulle. Par suite, d'après le lemme III.2, ils ont même intérieur

$$\overset{\circ}{G} \cap B(x, r) = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

soit encore

$$\overset{\circ}{G} \cap B(x, r) = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+}).$$

Nous avons donc démontré que pour chaque  $x \in \partial G$ , on peut construire une bijection bilipschitzienne  $T$  appliquant  $B(x, r)$

sur un ouvert  $V$  de  $\mathbf{R}^n$  telle que :

$$\dot{G} \cap B(x, r) = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

Comme  $\partial(\dot{G}) \subset \partial G$ , ceci démontre que  $\dot{G}$  appartient à  $VL(r, k)$ .

Il nous suffit maintenant pour conclure, de montrer que  $\mu[G \setminus \dot{G}] = 0$ . Nous avons vu que :

$$B(x, r) \cap \dot{G} = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

$$B(x, r) \cap G = T^{-1}(V \cap \mathbf{R}^{n+})$$

à un ensemble de mesure nulle près.

On en déduit que :

$$\mu[(G \setminus \dot{G}) \cap B(x, r)] = 0.$$

Comme  $G \setminus \dot{G}$  est une partie de  $\partial G$  qui est compact, en recouvrant  $\partial G$  par un nombre fini de boules centrées sur  $\partial G$  et de rayon  $r$ , on montre que  $G \setminus \dot{G}$  est de mesure nulle.

Nous avons donc démontré que  $\Omega = \dot{G}$  est un ouvert dont la fonction caractéristique est égale presque partout à  $\omega$ , et tel que :

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad \exists V_x \subset \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad T_x: B(x, r) \rightarrow V_x$$

bijective bilipschitzienne de constante  $k$ , telle que

$$T_x[B(x, r) \cap \Omega] = V_x \cap \mathbf{R}^{n+}.$$

Ceci montre que  $VL(r, k)$  est fermé.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS-ARONSZAJN-SMITH, Theory of Bessel potentials, part II, *Annales de l'Institut Fourier*, 17 (1967).
- [2] AGMON, Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Company inc. (1965).
- [3] ARONSZAJN-MULLA-SZEPTYCKI, On space of potentials connected with  $L^p$  classes, *Annales de l'Institut Fourier*, 13 (1963).
- [4] BOURBAKI, Topologie Générale, Ch. I, exercices, Hermann (1961).
- [5] CHENAIS, On the existence of a solution in a domain identification problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Nov., (1975).

- [6] DERVIEUX-PALMERIO, Identification de domaines et problèmes de frontières libres, Thèse de l'Université de Nice (1974).
- [7] GRISVARD, Séminaire Cartan-Schwarz de l'Université de Paris 1963-64, Exposé n° 12.
- [8] LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, (1<sup>re</sup> session, été 62), Presses de l'Université de Montréal, 2<sup>e</sup> éd., (1965).
- [9] MURAT-SIMON, Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique, *Publications de l'IRIA*, n° 74 003.
- [10] NĚČAS, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson et Cie (1967).
- [11] RADEMACHER, Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale, *Math. Annalen*, 79 (1918).

Manuscrit reçu le 15 décembre 1976

Proposé par B. Malgrange.

Denise CHENAIS,

Département de Mathématiques

I.M.S.P.

Parc Valrose

06034 Nice Cedex.

---