

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL

ARNAUD DE LA PRADELLE

Topologies fines et compactifications associées à certains espaces de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 27, n° 4 (1977), p. 121-146

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_4_121_0

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**TOPOLOGIES FINES
ET COMPACTIFICATIONS ASSOCIÉES
A CERTAINS ESPACES DE DIRICHLET**

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

Nous commençons par définir la notion d'espace $L^1(\gamma)$ où γ est une capacité, ce qui permet d'introduire la notion de mesure d'énergie finie par rapport à γ , et de parler d'espaces de Dirichlet basés sur γ . Comme application, on peut associer un espace de Dirichlet en ce sens à tout espace de Brelot symétrique, ce qui généralise un résultat de Maeda [12].

Soit d'autre part un espace de Dirichlet en ce sens avec potentiels s.c.i. : on étudie les espaces de Dirichlet sur les ouverts fins correspondants à l'aide d'une compactification. On retrouve plus facilement et on généralise les résultats de [9].

CHAPITRE I

ESPACES DE DIRICHLET DE BASE UNE SEMI-NORME

1. Soit Ω un espace localement compact.

On considère une semi-norme N sur l'espace $\mathcal{X}(\Omega)$ (fonctions continues à support compact) qui est croissante sur \mathcal{X}^+ , c'est-à-dire :

$$0 \leq \varphi \leq \psi \implies N(\varphi) \leq N(\psi)$$

et vérifie $N(\varphi) = N(|\varphi|)$. Pour f sci ≥ 0 , on posera

$$N(f) = \sup \{N(\varphi) / 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{X}(\Omega)\}$$

et pour $g \geq 0$ quelconque

$$N(g) = \inf \{N(f) / f \text{ sci } \geq g\}.$$

On sait que N vérifie l'inégalité de convexité dénombrable c'est-à-dire si $f = \sum_{n \geq 0} f_n$, $f_n \geq 0 \implies N(f) \leq \sum_{n \geq 0} N(f_n)$. On note $\mathcal{F}^1(N)$ l'ensemble des $f \in \mathbf{R}^\Omega$ pour lesquelles on a $N(|f|) < \infty$. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{F}^1(N)$.

On note $\mathcal{L}^1(N)$ l'adhérence de \mathcal{A} dans $\mathcal{F}^1(N)$, relativement à la distance $N(|f - g|)$. Ceci a un sens car $N(|f|) < \infty$ entraîne que f est finie N -presque partout. Alors le quotient $\mathbf{L}^1(N)$ de $\mathcal{L}^1(N)$ par les fonctions N -négligeables est un espace de Banach réticulé.

Hypothèse d'adaptation : pour toute $f \in \mathcal{A}$, il existe $g \geq 0$, $N(g) < \infty$ et g dominant f à l'infini, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon g \geq f$ en dehors d'un compact.

2. PROPOSITION. — *L'hypothèse d'adaptation est équivalente à l'hypothèse de densité suivante :*

$$\mathcal{X}(\Omega) \text{ est dense dans } \mathcal{A}.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{A}$, et soit $\varphi \in \mathcal{X}^+(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ au voisinage d'un compact K .

On a $N(f - \varphi f) \leq \varepsilon N(g)$ si K est assez grand.

Donc $\lim_K N(f - \varphi f) = 0$, et $\mathcal{X}(\Omega)$ est dense dans \mathcal{A} .

Inversement supposons que $\mathcal{X}(\Omega)$ soit dense dans \mathcal{A} , et montrons que φf tend vers f quand K augmente indéfiniment : soit $\varphi_n \in \mathcal{X}(\Omega)$, φ_n tendant vers f .

On a :

$$N(f - \varphi f) \leq N(f - \varphi_n) + N(f\varphi - \varphi_n\varphi) + N(\varphi_n - \varphi_n\varphi)$$

les deux premiers termes sont inférieurs à ε donné, indépendamment de φ , quand n est assez grand. Fixons alors n : si K contient le support de φ_n , on a $N(\varphi_n - \varphi_n\varphi) = 0$ d'où $N(f - \varphi f) \leq 2\varepsilon$.

Choisissons alors une suite de fonctions φ , soient φ_n , telles que $N(f - \varphi_n f) \leq 2^{-n}$: la fonction $g = \Sigma(f - \varphi_n f)$ vérifie $N(g) < \infty$ et domine f à l'infini.

On en déduit que $\mathcal{X}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^1(N)$.

3. THÉORÈME. — *Toute forme linéaire $\lambda \geq 0$ sur $\mathbf{L}^1(N)$ est continue. De plus, il existe une mesure $\mu \geq 0$ unique telle que $\mathcal{L}^1(N) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ et telle que pour $f \in \mathcal{L}^1(N)$, on ait :*

$$\int f d\mu = \lambda(\tilde{f}) \quad (\tilde{f} = \text{classe de } f \text{ dans } \mathbf{L}^1(N)).$$

Démonstration. — On montre que λ est continue par un raisonnement classique.

Soit μ la mesure définie par restriction de λ à $\mathcal{X}(\Omega)$. Soit $f \in \mathcal{L}^1(N)$, il existe une série $\varphi_n \in \mathcal{X}(\Omega)$, telle que $\sum_{n \geq 0} N(\varphi_n) < \infty$ et $f = \sum_{n \geq 0} \varphi_n$, N -presque partout. On a

$$\int |\varphi_n| d\mu \leq \|\lambda\| N(\varphi_n),$$

donc la série converge μ -presque partout. Le théorème sera donc démontré si l'on sait que tout ensemble N -négligeable est μ -négligeable : soit A un tel ensemble d'après la pro-

priété 4), il existe g sci ≥ 0 , valant $+\infty$ sur A et telle que $N(g) < \infty$. On a alors

$$\int g d\mu = \sup \left\{ \int \varphi du / \varphi \in \mathcal{X}^+, \varphi \leq g \right\} \leq \|\lambda\| \sup \{N(\varphi) / \varphi \leq g\}$$
 soit $\int g d\mu \leq \|\lambda\| \cdot N(g) < +\infty$. Ainsi g est μ -intégrable, donc A est μ -négligeable.

4. *Remarque.* — Inversement, si $\mu \geq 0$ est continue pour la topologie induite par N sur \mathcal{X} , alors μ s'étend de manière unique en forme linéaire $\lambda \geq 0$ sur $L^1(N)$.

5. *Remarque.* — Le théorème 3 caractérise la condition d'adaptation.

6. THÉORÈME. — Soit T une forme linéaire continue sur $L^1(N)$: alors T est relativement bornée, donc différence de formes linéaires positives.

Démonstration. — En effet, pour $0 \leq |\psi| \leq \varphi$, φ et $\psi \in L^1(N)$, on a

$$N(\psi) = N(|\psi|) \leq N(\varphi)$$

donc

$$|T(\psi)| \leq \|T\| \cdot N(\psi) \leq \|T\| N(\varphi).$$

7. *Remarque.* — On montre facilement que toute $f \in \mathcal{L}^1(N)$ a la propriété de Lusin par rapport à N : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé F , tel que $N(\Omega \setminus F) \leq \varepsilon$ et tel que $f|_F$ soit continue sur F . Une fonction ayant cette propriété est évidemment μ -mesurable pour toute mesure μ continue par rapport à N .

8. THÉORÈME. — Soit $\mu \geq 0$ une mesure de Radon qui néglige les ensembles N -négligeables, alors μ est une somme de mesures continues par rapport à N (*) (i.e. « μ est absolument continue » par rapport à N).

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{L}^1(N)$, posons

$$p(\varphi) = \int \varphi^+ d\mu < +\infty.$$

(*) L'idée de la démonstration nous a été communiquée par Ancona.

Si $\varphi = \psi$ N-presque partout, on a $p(\varphi) = p(\psi)$, donc p définit une fonction sous-linéaire $\geq 0, \leq +\infty$ sur $L^1(N)$. p est sci sur $L^1(N)$ grâce au lemme de Fatou. On montre alors à l'aide du théorème de Hahn-Banach géométrique dans $L^1(N) \times \mathbf{R}$ que p est l'enveloppe supérieure des formes linéaires qu'elle majore. Soit σ une telle forme sous-linéaire : on a pour $\varphi \leq 0$ $\sigma(\varphi) \leq \int 0 d\mu = 0$, donc σ est ≥ 0 et est représentable par une mesure N-continue. De plus pour $\varphi \geq 0$, on a $\sigma(\varphi) \leq \int \varphi d\mu$, donc $\sigma \leq \mu$.

On en déduit le résultat par induction transfinie.

9. Exemples :

1) Soit (Ω, \mathcal{H}) un espace harmonique de Brelot avec un potentiel > 0 , et soit σ une mesure continue à support compact (cf [8]). Pour $f \geq 0$: posons $N(f) = \int (Rf) d\sigma$ où Rf est la réduite usuelle de $f (\leq +\infty)$. On vérifie toutes les propriétés, et les ensembles N-négligeables sont les ensembles polaires au sens de Brelot.

2) Soit τ une mesure de Radon ≥ 0 , on pose

$$N(f) = \int^* f d\tau.$$

On trouve $\mathcal{L}^1(N) = \mathcal{L}^1(\tau)$.

10. DÉFINITION. — On appelle espace de Dirichlet de base N, la donnée suivante :

- a) H est un sous-espace vectoriel de $L^1(N)$.
- b) H a une structure hilbertienne pour laquelle l'injection $H \hookrightarrow L^1(N)$ est continue.
- c) La contraction module opère, ie : $u \in H$ entraîne $|u| \in H$ et $|||u||| \leq \|u\|$ (norme dans H). On dira que H est N-régulier s'il vérifie de plus :
- d) tout $f \in L^1(N)$ est majoré par un élément $u \in H$.
- e) H est dense dans $L^1(N)$.

Par exemple, soit H un espace de Dirichlet régulier au sens de [4], posons $\gamma(\varphi) = \text{Inf} \{ \|u\| / u \in H, u \geq \varphi \}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{X}^+(\Omega)$, on vérifie sans difficulté que γ est une 1/2 norme adaptée et que H est γ -régulier.

11. THÉORÈME. — Soit H un espace de Dirichlet N -régulier. Alors toute forme linéaire positive sur H est représentable par une mesure.

Démonstration. — D'après la condition d), elle admet un prolongement linéaire $\lambda \geq 0$ sur $L^1(N)$. Il existe alors une mesure $\mu \geq 0$ telle que $L^1(N) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lambda(f) = \int f d\mu$ pour $f \in L^1(N)$. L'unicité provient de la condition e).

Notons qu'en général un espace de Dirichlet de base N n'est pas N -régulier. On va cependant donner une condition suffisante pour qu'il soit γ -régulier, où γ est la capacité de H .

12. THÉORÈME. — On suppose Ω dénombrable à l'infini. Soit H un espace de Dirichlet de base N . On suppose qu'il vérifie :

α) $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est dense dans H et dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

β) H est adapté, c'est-à-dire : pour tout $u \in H$, il existe $v \in H$ telle que v domine $|u|$ à l'infini.

Alors la capacité γ est adaptée, et H est isomorphe à un espace \tilde{H} qui est γ -régulier.

Démonstration. — Rappelons que pour $\varphi \in \mathcal{X}(\Omega)$, on pose

$$\gamma(\varphi) = \text{Inf} \{ \|u\| / u \in H, u \geq |\varphi|N - pp \}.$$

On a $\gamma(\varphi) < +\infty$ pour $\varphi \in \mathcal{X}(\Omega)$ grâce à la condition α .

Remarquons alors (Ω dénombrable à l'infini) que pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f \geq 0$, on a :

$$\gamma(f) = \text{Inf} \{ \|u\| / u \in H, u \geq fN - pp \}.$$

Soit $\varphi \in L^1(\gamma)$: il existe une suite de Cauchy

$$\varphi_n \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{F}^1(\gamma)$$

qui converge vers φ $\gamma - pp$ partout. Or on a pour $\psi \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{F}^1(\gamma)$

$$N(\psi) \leq N(R\psi) \leq k\|R\psi\| = k\gamma(\psi)$$

donc φ_n est de Cauchy dans $L^1(N)$. Il suffit donc de montrer que tout ensemble γ -négligeable est N -négligeable. Soit P

un tel ensemble : il existe $f \text{ sci} \geq 0$, valant $+\infty$ sur P et telle que $\gamma(f) < \infty$. On a alors

$$N(f) = \sup \{N(\varphi)/0 \leq \varphi \leq f, \varphi \in \mathcal{X}^+(\Omega)\}.$$

Donc $N(f) \leq k\gamma(f) < \infty$.

On en déduit $\mathcal{L}^1(\gamma) \subset \mathcal{L}^1(N)$, et $N(f) \leq k\gamma(f)$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. Tout élément $u \in H$ est égal $N - pp$ à un $\tilde{u} \in \mathcal{L}^1(\gamma)$. C'est évident car $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est dense dans H et $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est inclus dans $\mathcal{L}^1(\gamma) \cap \mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\gamma)$. (Ω dénombrable à l'infini.)

Il est clair que l'on a $\tilde{H} \cap L^1(\gamma)$ et que tout élément de $L^1(\gamma)$ est majoré par un élément de \tilde{H} .

Montrons que $L^1(\gamma)$ est adapté : si $f \in L^1(\gamma) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, il existe $p \in H$ tel que $f \leq p N - pp$, et $q \in H$ dominant p à l'infini. On a alors $f \leq \tilde{p} \gamma - pp$ partout (raisonnement classique) et $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact K hors duquel on a $p \leq \varepsilon q N - pp$, donc $\tilde{p} \leq \varepsilon \tilde{q} \gamma - pp$ (même raisonnement). Autrement dit, f est dominée à l'infini par \tilde{q} , avec

$$\gamma(\tilde{q}) = \|q\| < \infty.$$

Il reste à voir que \tilde{H} est dense dans $L^1(\gamma)$ soient μ et ν deux formes linéaires ≥ 0 sur $L^1(\gamma)$, coïncidant sur \tilde{H} : μ et ν sont représentables par des mesures qui coïncident sur $\tilde{H} \cap \mathcal{C}(\Omega)$.

Pour $\varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{X}(\Omega)$ on a :

$$\varphi = \text{Inf} \{f \in H \cap \mathcal{C}(\Omega) / f \geq \varphi\}$$

d'après l'hypothèse α) et car $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est réticulé. Les fonctions $f \in H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sont μ et ν -intégrables, d'où :

$$\mu(\varphi) = \nu(\varphi) \quad \text{par le théorème de Lebesgue.}$$

Ainsi $\mu = \nu$.

13. PROPOSITION. — Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré, $\mu(X) = 1$, et soit V un opérateur de $L^\infty(\mu)$ vérifiant :

$$\|\lambda V\varphi\| \leq \|\varphi + \lambda V\varphi\| \quad \text{pour tous} \quad \varphi \in L^\infty(\mu), \quad \lambda > 0.$$

Alors si V est hermitien, il est aussi de type positif.

Démonstration. — On sait que la solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad \begin{cases} V_0 = V \\ \frac{d}{d\lambda} V_\lambda = -V_\lambda^2 \end{cases}$$

définit la résolvante sous-markovienne (ie $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$) sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. On a alors $V = \int_0^\infty V_\lambda^2 d\lambda$, d'où pour $\varphi \in L^\infty(\mu)$:

$$\int \varphi V_\lambda^2 d\mu = \int_0^\infty d\lambda \left[\int \varphi V_\lambda^2 \varphi d\mu \right].$$

Or les V_λ sont hermitiens comme V (solution de (E)), d'où :

$$\int (\varphi V \varphi) d\mu = \int_0^\infty d\lambda \left[\int (V_\lambda \varphi)^2 d\mu \right] \geq 0.$$

Les résultats suivants généralisent un théorème de [12] :

14. COROLLAIRE. — Soit Ω localement compact, soit τ une mesure ≥ 0 sur Ω , de support Ω , et soit $G(x, y)$ une fonction : $\Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant :

a) $G(x, y) = G(y, x)$ pour $(x, y) \in \Omega \times \Omega$

b) Pour toute mesure $\mu \geq 0$ telle que G^μ soit continu, et pour toute mesure $\nu \geq 0$: on a

$$G^\mu \leq G^\nu \text{ sur le support de } \mu \implies G^\mu \leq G^\nu \text{ partout.}$$

c) Pour toute $\nu \geq 0$, il existe une famille ν_i telle que les G^{ν_i} soient continus et convergent en croissant vers G^ν .

d) Il existe un potentiel G^μ continu, $G^\mu > 0$.

Alors on a pour toutes mesures μ et $\nu \geq 0$:

$$2 \int G^\mu d\nu \leq \int G^\mu d\mu + \int G^\nu d\nu.$$

Démonstration. — Soit τ une mesure à support compact telle que G^τ soit continu > 0 , soit V l'opérateur de $L^\infty(\tau)$ défini par :

$$V\varphi = \frac{G^{\varphi\tau}}{G^\tau}.$$

D'après b), on a $\|\lambda V_\varphi\| \leq \|\varphi + \lambda V\varphi\|$ pour tous $\varphi \in L^\infty(\tau)$,

$\lambda > 0$ (grâce au principe complet du maximum). D'autre part V est hermitien par rapport à la mesure $\sigma = G^\tau \cdot \tau$.

D'où $\int \varphi G^{\tau} d\tau = \int \varphi V \varphi d\sigma \geq 0$ pour $\varphi \in L^\infty(\tau) = L^\infty(\sigma)$. Soient alors $\mu, \nu \geq 0$ telles que G^μ et G^ν soient continus à support compact : on pose $\tau = \tau_0 + \mu + \nu$ où τ_0 est une mesure à support compact telle que $G^{\tau_0} > 0$ sur Ω . On a alors

$$\mu - \nu = \varphi \tau \quad \text{où} \quad \varphi \in L^\infty(\tau).$$

Ainsi $\int \varphi G^{\tau} d\tau \geq 0$, soit $2 \int G^\mu d\nu \leq \int G^\mu d\mu + \int G^\nu d\nu$.

Grâce à c) on en déduit le même résultat pour $\mu, \nu > 0$ quelconques.

15. *Remarque.* — On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en particulier $G(x, y)^2 \leq G(x, y)G(y, y)$.

16. THÉORÈME. — *Considérons les hypothèses suivantes (cf. [8]).*

a) Ω est localement compact dénombrable à l'infini.

b) $G(x, y)$ est une fonction sci sur $\Omega \times \Omega$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ symétrique, $(G(x, y) = G(y, x))$.

c) La condition de séparation linéaire pour tout $k > 0$, $G^{\varepsilon_b} \equiv kG^{\varepsilon_a}$ implique $k = 1$ et $a = b$.

d) Le principe de domination suivant :

$G^\mu \leq \sup_i G^{\nu_i}$ sauf peut-être en un point au voisinage du support de μ , où les G^{ν_i} vont en croissant, alors $G^\nu \leq \sup_i G^{\nu_i}$ partout.

e) Le cône P_c des potentiels G^μ finis continus est presque adapté.

f) Pour $p, q \in P_c$, il existe $r \in P_c$, $r = R(p - q)$ est le plus petit potentiel majorant $p - q$.

g) $p - R(p - q) \in P_c$ pour tous $p, q \in P_c$.

Alors posons pour toute $\varphi \in \mathcal{X}(\Omega)$:

$$N(\varphi) = \text{Inf} \left\{ \sqrt{\int G^\mu d\mu / G^\mu} \geq |\varphi| \right\}.$$

L'espace $L^1(N)$ est adapté, le complété H des $G^\mu - G^\nu$ où G^μ et G^ν sont finis continus tels que $\int G^\mu d\mu + \int G^\nu d\nu < \infty$

pour la norme $\|G^\mu - G^\nu\|^2 = \int (G^\mu - G^\nu) d(\mu - \nu)$ (≥ 0 d'après le corollaire 14) est un espace de Dirichlet de base N et N -régulier, et ses potentiels sont les G^μ tels que $\int G^\mu d\mu < \infty$.

Démonstration. — On a d'abord pour G^μ quelconque :

$$\begin{aligned} N(G^\mu) &= \text{Sup} \{N(\varphi)/\varphi \in \mathcal{H}(\Omega), 0 \leq \varphi \leq G^\mu\} \\ &\leq \sqrt{\int G^\mu d\mu} = \|G^\mu\|. \end{aligned}$$

D'autre part, chaque φ a une réduite G^{μ_φ} où μ_φ est continue à support compact (cf. [8]), donc $N(\varphi) = \|G^{\mu_\varphi}\|$, et $G^{\mu_\varphi} \uparrow G^\mu$, d'où

$$\begin{aligned} \|G^\mu\| &= \int G^\varphi d\mu = \sup_\varphi \int G^{\mu_\varphi} d\mu = \sup_\varphi \sup_\psi \int G^{\mu_\psi} d\mu_\varphi \\ &= \sup_\varphi \int G^{\mu_\varphi} d\mu_\varphi = \sup_\varphi N(\varphi) = N(G^\mu). \end{aligned}$$

D'autre part, pour θ mesure positive ou non, telle que θ soit continue et $G^{|\theta|}$ d'énergie finie, on a

$$N(G^\theta)^2 = \|R(G^\theta)\|^2 = \|G^\sigma\|^2 = \int G^\theta d\sigma \leq \|G^\theta\| \cdot \|G^\sigma\|$$

où $G^\sigma \in P_c$ est la réduite de $|G^\theta| \in P_c - P_c$, donc : $N(G^\theta) \leq \|G^\theta\|$.

D'où une application linéaire de H dans $L^1(N)$.

C'est une injection, car soit $u \in H$, d'image $\tilde{u} = 0$. On a

$$u = \text{Lim}_m G^{\theta_m} = \text{Lim}_n G^{\mu_n} - G^{\nu_n}$$

Soit

$$\|u\|^2 = \text{Lim}_m \text{Lim}_n \int (G^{\mu_n} - G^{\nu_n}) d(\mu_m - \nu_m).$$

Or, chaque $\mu_m + \nu_m$ est continue sur les potentiels de $P_c \cap L^1(N)$ pour la topologie de $L^1(N)$, car on a

$$\int |G^\theta| d\mu \leq N(G^\theta) \cdot \|G^\mu\|.$$

Ainsi $G^{\mu_n} - G^{\nu_n}$ est de Cauchy dans $L^1(\mu_m + \nu_m)$, d'où :

$$\|u\|^2 = \text{Lim}_m \int 0 \cdot d(\mu_m - \nu_m) = 0.$$

Si $\int G^\mu d\mu < \infty$, G^μ appartient à $H \subset L^1(N)$. En effet, c'est vrai si G^μ est continu. Sinon, il existe une famille μ_i telle que les G^{μ_i} convergent en croissant ponctuellement vers G^μ , où les $G^{\mu_i} \in H \cap P_c$. Or on a

$$\|G^\mu - G^{\mu_i}\|^2 \leq \int G^\mu d\mu - \int G^{\mu_i} d\mu$$

donc les G^{μ_i} convergent au sens de H et de $L^1(N)$. On extrait une sous-suite qui converge partout vers un potentiel $G^\nu \in H$, et pour lequel on a $\|G^\mu - G^\nu\| = 0$, donc $G^\mu = G^\nu$. Ainsi $G^\mu \in H$. Montrons que $L^1(N)$ est adapté: soit G^μ tel que $\int G^\mu d\mu < \infty$, ses réduites $\hat{R}_{G^\mu}^{L^k}$ sur les complémentaires de compacts convergent fortement vers un élément $h \in H$. On a, pour σ continue à support compact

$$\int h d\sigma = \text{Inf} \int \hat{R}_{G^\mu}^{L^k} d\sigma = \text{Inf} \int \hat{R}_{G^\sigma}^{L^k} d\mu \leq \|\hat{R}_{G^\sigma}^{L^k}\| \cdot \|G^\mu\|.$$

Or $\hat{R}_{G^\sigma}^{L^k}$ tend vers 0 ponctuellement, donc $\|\hat{R}_{G^\sigma}^{L^k}\|^2 \leq \int \hat{R}_{G^\sigma}^{L^k} d\sigma$ tend vers 0 ($\int G^\sigma d\sigma < \infty$). On en déduit $(h, G^\sigma) = 0$ pour tout G^σ , σ continue à support compact, d'où $\|h\|^2 = 0$ par densité, soit $h = 0$. Il existe alors une suite K_n telle que $\sum_n \|\hat{R}_{G^\mu}^{L^{K_n}}\| < \infty$. Si l'on pose $G^\nu = \sum \hat{R}_{G^\mu}^{L^{K_n}}$, on a $\int G^\nu d\nu < \infty$ donc $G^\nu \in H$ est G^ν domine G^μ à l'infini.

Si $f \in L^1(N) \cap \mathcal{C}(\Omega)$, il existe G^μ tel que $f \leq G^\mu$ et $\int G^\nu d\mu < \infty$, donc f est dominée par un G^ν à l'infini et $\int G^\mu d\nu < \infty$.

On vérifie facilement la densité de $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ dans H et $\mathcal{C}(\Omega)$, la propriété *d*) du 6^o) et la propriété *e*) en remarquant que toute forme linéaire continue sur $L^1(N)$, nulle sur H est identiquement nulle.

On vérifie facilement que toute forme linéaire ≥ 0 sur H se prolonge en forme linéaire positive sur $L^1(N)$: elle définit alors une mesure μ dont le potentiel G^μ est d'énergie finie et coïncide avec le potentiel donné.

Alors la contraction module opère sur H car le cône des potentiels est stable par enveloppes inférieures finies (cf [4]).

17. THÉORÈME. — Soit Ω localement compact, dénombrable à l'infini, soit \mathcal{F} un préfaisceau de cônes convexes de fonction sci $> -\infty$ maximal pour le principe du minimum sur les ouverts relativement compacts.

On suppose que $\mathcal{F}^+(\Omega)$ sépare linéairement les points de Ω , on suppose que pour toute $f \in \mathcal{F}(\bar{\omega})$, f bornée (cf [10]), on a

$$R_f^{\partial\omega} = \text{Inf} \{g \in \mathcal{F}(\bar{\omega}) / g \geq f \text{ sur } \partial\omega\}$$

est finie continue dans ω .

On suppose enfin que tous les potentiels sont de la forme G^μ , avec μ mesure ≥ 0 où G est une fonction de Green symétrique sur $\Omega \times \Omega$. Alors les potentiels vérifiant $\int G^\mu d\mu < \infty$ sont les potentiels d'un espace de Dirichlet régulier H , et \mathcal{F} est en fait le faisceau des fonctions hyperharmoniques associées à un espace harmonique de Brelot. Enfin, pour $u \in H$, on a

$$\| |u| \| = \|u\| \quad (\text{type local})$$

Démonstration. — L'existence de H résulte du théorème 16 : en effet G est > 0 sur la diagonale de Ω d'après la remarque 15.

Le principe de domination de Cartan est alors vérifié. On sait alors que pour toute mesure μ d'énergie finie, et pour tout ensemble E μ -négligeable, la balayée μ^E de μ sur E est portée par la frontière finie de E (topologie fine associée au cône des potentiels). On en déduit d'après un raisonnement de [6] la forme locale de la norme de H

$$(\| |u| \| = \|u\|).$$

On sait alors (cf. [7]) associée à H un unique préfaisceau maximal \mathcal{G} dont les fonctions sont les fonctions hyperharmoniques d'une théorie de Brelot. Par unicité (cf. [7]) on voit facilement que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

CHAPITRE II

ESPACES DE DIRICHLET RÉGULIERS A POTENTIELS CONTINUS

18. PROPOSITION. — Soit Ω localement compact dénombrable à l'infini. Soit N une semi-norme adaptée sur $\mathcal{X}(\Omega)$ telle que $N(\varphi) = 0$ entraîne $\varphi = 0$. Soit d'autre part H un espace de Dirichlet de base N . On suppose que H est adapté et que les potentiels de H ont des représentants continus à valeurs dans $[0, +\infty]$ et séparant les points de Ω . Dans tout le chapitre, on suppose que la contraction unité opère sur H . Alors H est un espace de Dirichlet régulier par rapport à sa propre capacité γ (cf. déf. 10).

Démonstration. — On voit d'abord que les éléments de H n'ont qu'un seul représentant continu, car N est une norme sur $\mathcal{X}(\Omega)$. Grâce au théorème 12, il suffit de vérifier que $H \cap \mathcal{C}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$ et dans H : c'est évident car la contraction unité opère et car les potentiels continus séparent linéairement Ω .

19. PROPOSITION. — Soit ω un ouvert,

$$\text{cap } \omega = \gamma(\chi_\omega)^2 = \text{Inf } \{ \|u\|^2 / u \in H, u \geq \chi_\omega N - pp \}$$

alors $\text{cap } \omega = \text{cap } \bar{\omega}$. De plus P est polaire ($\text{cap}^* P = 0$) si et seulement si \bar{P} est polaire. Enfin tout élément γ quasi-continu est continu en quasi tout point de Ω .

Démonstration. — Soit p_ω le potentiel d'équilibre de ω , continu: on a $p_\omega \geq 1$ partout sur $\bar{\omega}$, car les ensembles N -négligeables sont sans point intérieur, donc $\text{cap}^* \bar{\omega} \leq \text{cap } \omega$, d'où l'égalité. Si P est polaire, il existe ω_n ouvert tel que $P \subset \omega_n$ et $\text{cap } \omega_n \leq 1/n$, d'où $\bar{P} \subset \bar{\omega}_n$ et

$$\text{cap}^* P \leq \text{cap } \bar{\omega}_n \leq 1/n,$$

donc \bar{P} est polaire. Enfin, si u est γ -quasi continu, soit F_n un fermé sur lequel u est continu et tel que $\text{cap}(\Omega \setminus F_n) \leq 1/n$. Posons $\omega_n = \dot{F}_n$: on a $\text{cap}(\Omega \setminus \omega_n) \leq 1/n$. Donc u est continu sur $\omega = \bigcup_n \omega_n$ et $\text{cap}^*(\Omega \setminus \omega) \leq 1/n$ pour tout n , et $\Omega \setminus \omega$ est polaire.

20. DÉFINITION. — Soit ω ouvert dans Ω , on pose

$$H(\omega) = \{u \in H / u = 0 \text{ qp hors de } \omega \text{ (} u \text{ quasi continu)}\}.$$

21. PROPOSITION. — $H(\omega)$ est un espace de Dirichlet régulier de base N sur ω .

Démonstration. — D'abord $H(\omega) \cap \mathcal{X}(\omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\omega)$ (évident). Soit $h \in H(\omega)$, h orthogonale à $H(\omega) \cap \mathcal{X}(\omega)$ et soit μ une mesure ≥ 0 à support compact K dans ω et telle que son potentiel \mathcal{U}^μ dans H soit fini continu sur Ω . Soit μ^{ℓ^α} la balayée de μ sur $\int \alpha$ où α est un ouvert relativement compact $K \subset \alpha \subset \bar{\alpha} \subset \epsilon$.

$$\mathcal{U}^\mu - \mathcal{U}^{\mu^{\ell^\alpha}} \in H(\omega) \cap \mathcal{X}(\omega),$$

donc $\int h d\mu = \int h d\mu^{\ell^\alpha}$. Quand α tend vers ω , μ^{ℓ^α} converge en énergie vers μ^{ℓ^ω} , d'où $\int h d\mu = \int h d\mu^{\ell^\omega} = 0$ car $h \in H(\omega)$.

Supposons maintenant μ à support compact dans α et d'énergie fine: $\int \mathcal{U}^\mu d\mu < \infty$, donc (théorème de Lusin), $\mu = \sum_n \mu_n$ où les \mathcal{U}^{μ_n} sont finis continus sur leur support donc dans tout Ω car la contraction unité opère (d'où le principe complet du maximum). On a alors

$$\int h d\mu = \sum_n \int h d\mu_n = 0.$$

Ainsi h vaut 0 quasi partout dans ω , i.e. $h = 0$ qp dans Ω .

Il reste à voir que $H(\omega)$ est adapté: soit p un potentiel de $H(\omega)$, et soit α ouvert relativement compact, $\bar{\alpha} \subset \omega$: $R_p^{\ell^\alpha}$ tend vers 0 quand α tend vers ω , car $H(\omega) \cap \mathcal{X}(\omega)$ est dense dans $H(\omega)$.
c.q.f.d.

22. COROLLAIRE. — P est polaire si et seulement si

$$H(\Omega \setminus \overline{P}) = H(\Omega).$$

Démonstration. — C'est évident (considérer le potentiel capacitaire de \overline{P}).

23. PROPOSITION. — Si H est de type dénombrable, tout ouvert ω est un ouvert de type K_σ réuni à un polaire.

Démonstration. — Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ la famille des ouverts de type K_σ contenus dans ω . On a $H(\omega) = \overline{UH(\omega_i)}$ (évident d'après la proposition 20). Il existe une suite croissante i_n telle que

$$H(\omega) = \overline{\bigcup_n H(\omega_{i_n})}.$$

On pose alors $\alpha = \bigcup_n \omega_{i_n}$, d'où le résultat.

24. THÉORÈME. — On suppose que les potentiels finis continus forment un cône C adapté. Soit p potentiel fini continu : le support fin $\delta(p)$ de p i.e. la frontière de Choquet de $C - \mathbf{R}^+p$ (cf. [14]) est dense dans le support de la mesure associée à p .

De plus les potentiels de $H(\omega)$ sont continus et $H(\omega)$ vérifie ainsi les mêmes hypothèses que H .

Démonstration. — Soit μ la mesure associée à p : elle est minimale pour le balayage défini par le cône $C - \mathbf{R}^+p$. En effet, soit ν balayée de μ on a $\mathcal{U}^\nu \leq \mathcal{U}^\mu = p$ (potentiels engendrés) et $\int \mathcal{U}^\mu d\nu = \int \mathcal{U}^\mu d\mu$ d'où $\|\mathcal{U}^\mu - \mathcal{U}^\nu\| = 0$, d'après Cauchy-Schwarz et $\nu = \mu$. Le support de μ est donc contenu dans $\overline{\delta(p)}$. Posons alors $\mu = \mu' + \mu''$ avec $\mu' = \chi_{\overline{\delta(p)}} \cdot \mu$, $\mu'' = \mu - \mu'$: μ'' a une balayée portée par $\overline{\delta(p)}$. Comme μ est minimale, on en déduit $\mu'' = 0$. Ainsi $\overline{\delta(p)} = \text{Supp } \mu$. Soit $a \in \omega$. Il existe un potentiel q sur Ω tel que $0 < \hat{R}_q^\Omega(a) < q(a) < \infty$. Soit p un potentiel de $H(\omega)$, p est le potentiel d'une mesure $\mu \geq 0$ dans ω , ne chargeant pas les polaires. D'où $\mu = \sum \mu_\alpha$ où les μ_α sont des mesures à support compact dans ω , et dont les potentiels q_α dans Ω sont finis continus partout (théorème 8 et théo-

rème de Lusin). Ainsi $p = \sum_{\alpha} p_{\alpha}$ où les p_{α} sont de la forme $q_{\alpha} - R_{q_{\alpha}}^{\Omega}$, donc les p_{α} sont tous nuls sauf une infinité dénombrable : leur somme ponctuelle est sci et est un représentant quasi-continu de p . Posons alors $\rho = \lim_{\substack{y \rightarrow a \\ y \neq a}} p(y)$ (on peut supposer que p est borné). Si $\rho = 0$, p est continu en a , sinon, soit

$$\lambda < \frac{q(a) - \hat{R}_q^{\omega}(a)}{\rho}$$

La fonction $u = q \wedge (\lambda p + \hat{R}_q^{\omega})$ est un potentiel de Ω qui vaut q hors de ω .

En effet, on a, en notant Ru la réduite de u :

$$\begin{aligned} (u - Ru, u - Ru) &= (u, u - Ru) \\ &= (R_q^{\omega}, u - Ru) + (u - R_q^{\omega}, u - Ru). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \|u - Ru\|^2 &\leq (u - R_q^{\omega}, u - Ru) \\ &= ((q - R_q^{\omega} \wedge \lambda p), u - Ru). \end{aligned}$$

Or, $u - Ru \in H(\omega)$, $u - Ru \leq 0$ et $(q - R_q^{\omega}) \wedge \lambda p$ est un potentiel dans ω : on en déduit $\|u - Ru\| = 0$, ainsi u est un potentiel dans Ω .

Or, au voisinage de a , λp vaut $u - \hat{R}_q^{\omega}$ et est donc fini continu en a : d'où $\rho = \lim_{\substack{y \rightarrow a \\ y \neq a}} p(y)$.

CHAPITRE III

ESPACES DE DIRICHLET RÉGULIERS A POTENTIELS S.C.I. COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DE BASE

25. *Hypothèses.* — Soit Ω localement compact dénombrable à l'infini. Soit N une norme (i.e. $N(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$) adaptée sur $\mathcal{X}(\Omega)$. Soit enfin H un espace de Dirichlet régulier adapté de base N où la contraction unité opère.

Posons pour tout p potentiel :

$$\hat{p} = \sup \{ \varphi \in \mathcal{X}(\Omega) / 0 \leq \varphi \leq p N - p p \}.$$

On suppose que les \hat{p} (qui sont sci $\leq +\infty$) sont quasi-continus (par rapport à la capacité de H), dépendant linéairement de p ($\widehat{p+q} = \hat{p} + \hat{q}$) et $\hat{p} = p \underline{N - p p}$.

On suppose que le cône P_0 des \hat{p} sépare linéairement les points de Ω et, que pour toute $\varphi \in \mathcal{X}(\Omega)$, la réduite R_φ a un représentant continu (qui vaut donc $\widehat{R_\varphi}$) et que le cône P_1 des éléments localement bornés de P_0 est adapté.

26. THÉORÈME (cf [11]). — *Il existe un espace localement compact $\tilde{\Omega}$, unique à un isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes :*

- a) Ω est un sous-ensemble dense dans $\tilde{\Omega}$.
- b) $\tilde{\Omega}$ induit sur Ω la topologie fine associée au cône P_0 : elle est plus fine que la topologie initiale de Ω , et tout potentiel $p \in P_0$ se prolonge par continuité sur $\tilde{\Omega}$.
- c) Le cône P des potentiels prolongés sépare linéairement les points de P .
- d) Il existe une application propre $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ et une seule telle que pour tout $p \in P_0$, p continu sur Ω , on ait :

$$\tilde{p} = p \circ \pi.$$

Démonstration. — Soit χ le spectre de l'algèbre fermée engendrée par les potentiels bornés de P_0 . Cette algèbre contient $\mathcal{C}_0(\Omega)$ (car P_0 sépare linéairement les points de Ω), d'où une application continue π de X sur $\Omega \cup \{\infty\}$. On pose $\tilde{\Omega} = \pi^{-1}(\Omega)$. On vérifie alors facilement les propriétés annoncées ainsi que l'unicité. On remarque que $\tilde{\Omega}$ est dénombrable à l'infini.

27. THÉORÈME. — Soit $\varphi \in \mathcal{X}(\tilde{\Omega})$, alors la restriction à Ω , soit $\varphi|_{\Omega}$ appartient à $L^1(\gamma)$, on peut alors poser :

$$\tilde{\gamma}(\varphi) = \gamma(\varphi|_{\Omega}).$$

Alors $\tilde{\gamma}$ vaut $\|R\varphi\|$ où $R\varphi$ est le plus petit élément de \tilde{P} majorant φ . De plus $L^1(\tilde{\gamma})$ est isomorphe à $L^1(\gamma)$ par l'application

$$f \longrightarrow f|_{\Omega}.$$

Soit \tilde{H} l'image réciproque de H par cet isomorphisme : \tilde{H} est un espace de Dirichlet régulier de base $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ régulier, vérifiant les hypothèses du chapitre II, et pour lequel \tilde{P} est le cône des potentiels.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{X}(\tilde{\Omega})$, $\varphi \geq 0$ et soit

$$\theta \in H \cap \mathcal{X}(\Omega), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \theta = 1$$

au voisinage du support de $\varphi|_{\Omega}$. Soit enfin $\hat{p}_n - \hat{q}_n$ tendant vers φ uniformément sur tout compact : pour n et m assez grands, on a

$$\theta \times |\hat{p}_n - \hat{q}_n - \hat{p}_m + \hat{q}_m| \leq \varepsilon \theta \text{ sur } \Omega$$

donc

$$\gamma[\theta|\hat{p}_n - \hat{q}_n - \hat{p}_m + \hat{q}_m] \leq \varepsilon \gamma(\theta).$$

Ainsi $\theta|\hat{p}_n - \hat{q}_n| \in H$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\gamma)$ on peut en extraire une suite qui converge $\gamma - pp$ vers $\varphi|_{\Omega}$: ainsi $\varphi|_{\Omega} \in L^1(\gamma)$.

La deuxième assertion est évidente.

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}(\tilde{\Omega})$, $f \geq 0$, $\tilde{p}(f) < \infty$. On a

$$\tilde{\gamma}(f) = \sup \{ \tilde{\gamma}(\varphi f) / 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi \in \mathcal{X}^+(\tilde{\Omega}) \}.$$

D'après ce qui précède, $\tilde{\gamma}(\varphi f) = \|R(\varphi f)\|$. Quand $\varphi \uparrow 1$,

$R(\varphi f)|_{\Omega}$ tend vers un potentiel p dans H , d'où :

$$f|_{\Omega} \leq \hat{p}|_{\Omega} \quad \gamma - qp \quad \text{sur } \Omega.$$

Comme $f|_{\Omega}$ et $\hat{p}|_{\Omega}$ sont finement continus sur Ω , on a

$$f|_{\Omega} \leq \hat{p}|_{\Omega} \quad \text{partout sur } \Omega.$$

d'où $f \leq \tilde{p}$ partout sur $\tilde{\Omega}$.

Soit alors q un potentiel dominant p à l'infini dans Ω : \tilde{q} domine f à l'infini dans $\tilde{\Omega}$. Il s'ensuit que $\{\varphi f\}_{\varphi}$ est un filtre de Cauchy dans $L^1(\tilde{\gamma})$ et par suite f appartient à $L^1(\tilde{\gamma})$, et $\tilde{\gamma}$ est adaptée.

Il est alors facile de voir que $L^1(\tilde{\gamma})$ est isomorphe à $L^1(\gamma)$. Remarquons qu'un ouvert de $\tilde{\Omega}$ a la même capacité $\tilde{\gamma}$ que sa trace sur Ω . Il reste donc seulement à voir que les ouverts fins dans Ω sont de capacité γ positive. Soit ω un tel ouvert fin $\neq \emptyset$: il existe $p \in P$, tel que $\hat{p} \neq \hat{R}_p^{\omega}$, donc ω contient à un γ -polaire près un ensemble non N-négligeable, par suite ω n'est pas γ -polaire.

28. COROLLAIRE. — $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ est intérieurement polaire.

Démonstration. — Soit K compact inclus dans $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$, on a :

$$\hat{H}(\tilde{\Omega} \setminus K) = i^{-1}[H(\Omega \setminus K)] = i^{-1}[H(\Omega)] = \hat{H}(\tilde{\Omega})$$

donc K est polaire d'après le corollaire 22.

29. THÉORÈME. — Soit ω ouvert fin dans Ω , on note $\bar{\omega}'$ son adhérence fine dans Ω , $\tilde{\omega}$ le plus grand ouvert de $\tilde{\Omega}$ tel que $\omega = \tilde{\omega} \cap \Omega$, et $\bar{\omega}$ son adhérence dans $\tilde{\Omega}$. Alors on a :

$$\text{cap}^*(\omega) = \text{cap}^*(\bar{\omega}') = \tilde{\text{cap}}(\tilde{\omega}) = \tilde{\text{cap}}^*(\bar{\omega}).$$

Et pour tout ensemble $A \subset \Omega$:

$$\text{cap}^*(A) = \text{cap}^*(\bar{A}') = \tilde{\text{cap}}^*(\bar{A})$$

où \bar{A} est l'adhérence de A dans $\tilde{\Omega}$.

Démonstration. — Il suffit de considérer le potentiel capacitaire de ω (il en résulte d'ailleurs que p_{ω} vaut 1 partout sur ω).

30. THÉORÈME. — Soit μ une mesure d'énergie finie sur $\tilde{\Omega}$, posons pour tout $A \subset \Omega$:

$$m(A) = \mu^*(A)$$

ceci définit une mesure extérieure m sur Ω au sens de Carathéodory, m est une mesure de Radon sur Ω , c'est la mesure $\pi(\mu)$, les ensembles m -mesurables sont les traces des ensembles μ -mesurables. En particulier tous les ouverts fins sont m -mesurables, et l'on a :

$$m\left(\bigcup_1 \omega_i\right) = \text{Sup}_i m(\omega_i)$$

pour tout ensemble filtrant croissant d'ouverts fins. De plus, le support fin de m (qui existe donc) est partout dense dans le support de μ . Le potentiel de m est la trace du potentiel de μ .

Démonstration. — $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ est intérieurement polaire, donc intérieurement μ -négligeable, d'où l'assertion relative aux ensembles m -mesurables. Pour tout potentiel p sur Ω , on a alors $\int \tilde{p} d\mu = \int \hat{p} dm$. On en déduit que m est la mesure de Radon $\pi(\mu)$ sur Ω .

Soit $\omega = \bigcup_i \omega_i$, $\alpha = \bigcup_i \tilde{\omega}_i$ dans $\tilde{\Omega}$: on a

$$\mu(\alpha) = \sup_i \mu(\tilde{\omega}_i)$$

d'où

$$m(\omega) = \text{Sup}_i m(\omega_i)$$

puisque $m(\omega) = m^*(\omega) = \mu^*(\omega) \leq \mu(\alpha) \leq \mu(\tilde{\omega})$ les inégalités sont en fait des égalités car $\tilde{\omega} \setminus \alpha$ est μ -négligeable.

On en déduit l'existence du support fin F de m . Son complémentaire ω est m -négligeable, et $\tilde{\omega}$ est μ -négligeable. Alors \bar{F} contient le support de μ . \bar{F} est exactement le support de μ puisque $\tilde{\omega}$ est le plus grand ouvert μ -négligeable.

31. Remarque. — Le théorème précédent est vrai pour $\mu \geq 0$ de Radon sur un ouvert \mathcal{U} de $\tilde{\Omega}$ qui ne charge pas les polaires (théorème 8).

32. *Remarque.* — Si H est à base dénombrable on a le théorème de Gettoor: si $\omega = \bigcup_i \omega_i$, ω_i ouverts fins, alors $\omega = \bigcup_n \omega_{i_n}$ à un polaire près: en effet, c'est vrai dans $\tilde{\Omega}$.

33. *COROLLAIRE.* — Soit ω un ouvert fin dans Ω , et soit λ une forme linéaire ≥ 0 sur $H(\omega)$. Il existe une famille μ_α de mesure de Radon sur Ω , concentrée sur ω , d'énergies finies dans Ω , et telles que pour $f \geq 0$, $f \in H(\omega)$, on ait:

$$\lambda(f) = \sum_\alpha \int f d\mu_\alpha.$$

Démonstration. — Soit $\tilde{\lambda}$ la forme linéaire correspondante sur $\tilde{H}(\tilde{\omega})$: Considérons la mesure ν qu'elle définit sur $\tilde{\omega}$: on applique le théorème de Lusin à son potentiel dans $\tilde{\omega}$: on en déduit les mesures ν_n de Radon à support compact dans $\tilde{\omega}$, telles que $\nu = \sum \nu_n$. Ces ν_n sont des mesures de Radon sur $\tilde{\Omega}$ qui ne chargent pas les polaires et vérifient donc les conditions de la remarque 31 et le théorème 8, d'où $\nu_n = \sum_i \nu_{n,i}$. On pose alors

$$\mu_{n,i} = (\nu_{n,i}), \quad \text{d'où} \quad \lambda(f) = \sum_{n,i} \int f d\mu_{n,i}$$

pour $f \geq 0$, $f \in H(\omega)$.

34. *Remarque.* — Si H est de type dénombrable, la famille de mesures $\mu_{n,i}$ peut être choisie dénombrable.

35. *THÉORÈME.* — Soit T une forme linéaire sur $H(\omega)$, ω ouvert fin, alors T possède un support fin dans ω , c'est-à-dire qu'il existe un plus grand ouvert fin $\alpha \subset \omega$ sur lequel T induit 0 (T vaut 0 sur $H(\alpha)$).

Démonstration. — Soit \tilde{T} la forme linéaire correspondante sur $\tilde{H}(\tilde{\omega})$: on sait que \tilde{T} possède un support dans $\tilde{\omega}$ (cf [4]), d'où le résultat. On montre comme pour les mesures que le support fin de T est partout dense dans le support de \tilde{T} .

36. *THÉORÈME (synthèse spectrale fine).* — Soit F un fermé fin relatif à un ouvert fin ω de Ω . Notons $\mathcal{H}(\omega \setminus F)$

l'ensemble des éléments « harmoniques » dans $\omega \setminus F$ (i.e. $u \in H(\omega)$) et u est le potentiel d'une forme linéaire continue à support fin dans F). Alors on a :

$$H(\omega) = H(\omega \setminus F) \oplus \mathcal{H}(\omega \setminus F).$$

De plus des différences de potentiels de mesures d'énergies finies à supports fins dans F sont denses dans $\mathcal{H}(\Omega \setminus F)$.

Démonstration. — Le résultat est classique sur $\tilde{\Omega}$ (cf [4]) : on obtient alors le théorème grâce à l'isomorphisme de restriction.

37. COROLLAIRE. — F est polaire si, et seulement s'il ne porte aucune forme linéaire continue sur $H(\omega)$.

38. COROLLAIRE. — Si $u \in H(\omega)$ s'annule quasi-partout sur le support fin d'une forme linéaire continue T sur $H(\omega)$, on a $T(u) = 0$.

Démonstration. — En effet : $T(u) = (\mathcal{U}^T, u) = 0$ où \mathcal{U}^T est le potentiel de T dans $H(\omega)$.

39. THÉORÈME (Principe complet du maximum fin). — Soit T une forme linéaire continue sur $H(\omega)$, ω ouvert fin, et soit μ une forme linéaire ≥ 0 sur $H(\omega)$:

Si l'on a $1 + \mathcal{U}^\mu \geq \mathcal{U}^T q.p$ sur le support fin de T on a aussi $1 + \mathcal{U}^\mu \geq \mathcal{U}^T q.p$ sur ω .

Démonstration. — On connaît le théorème sur $\tilde{\omega}$ (cf [4]) : il suffit alors d'utiliser l'isomorphisme de restriction en remarquant que le support fin de T est dense dans le support de \tilde{T} .

Cas de la base dénombrable.

40. THÉORÈME. — Si Ω est à base dénombrable, on peut fabriquer une mesure τ , dite « mesure de base » ayant les propriétés suivantes :

a) $\int d\tau = 1$.

b) $H \subset L^2(\tau)$ (i.e. H est de base τ).

c) Le potentiel \mathcal{U}^τ de τ est continu et borné.

Démonstration. — Soit τ_n une suite de mesures à support compact telles que leurs potentiels \mathcal{U}^{τ_n} soient finis continus et bornés, et telles que les différences $\mathcal{U}^{\tau_n} - \mathcal{U}^{\tau_m}$ soient denses dans $\mathcal{C}(\Omega)$. Il existe une suite $\alpha_n > 0, 0 < \alpha_n \leq 1$ telle que $\tau = \Sigma \alpha_n \tau_n$ vérifie $\int d\tau = 1$ et \mathcal{U}^τ continu ≤ 1 .

Pour $\varphi \in L^\infty(\tau)$, posons $V_\varphi = \mathcal{U}^{\varphi\tau}$: on déduit un noyau vérifiant le principe complet du maximum et appliquant $L^\infty(\tau)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ (fonctions continues et bornées). V est hermitien et applique $L^1(\tau)$ dans $L^1(\tau)$ et $L^2(\tau)$ dans $L^2(\tau)$. Soit H' l'espace de Dirichlet associé à V (V est de type positif). On vérifie facilement à l'aide de la résolvante de V que $H' = H$ en remarquant que toute différence de potentiels nulle $\tau - pp$ est nulle. Ainsi $H \subset \mathbb{L}^2(\tau)$.

41. PROPOSITION. — L'espace \tilde{H} sur $\tilde{\Omega}$ est de base $\tilde{\tau}$ où $\tilde{\tau}$ est la seule mesure d'énergie finie dont la projection est τ .

Démonstration. — Le potentiel \mathcal{U}^τ est la restriction d'un potentiel $\tilde{\mathcal{U}}^{\tilde{\tau}} \in \tilde{H}$.

42. THÉORÈME. — Soit V le noyau de H , la résolvante V_λ . On pose $V_\lambda \varphi = V[\varphi - \lambda V_\lambda \varphi]$ pour $\varphi \in L^\infty(\tau)$, donc $V_\lambda \varphi$ est continue bornée. Alors $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille résolvente de noyaux. On suppose que $V(L^\infty)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$.

Posons pour $\varphi \in L^\infty(\tilde{\tau})$, $\tilde{V}_\varphi = \tilde{\mathcal{U}}^{\varphi\tilde{\tau}}$ continu et

$$\tilde{V}_\lambda \varphi = \tilde{V}[\varphi - \lambda \tilde{V}_\lambda \varphi].$$

Alors $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda > 0}$ est une famille résolvente de noyaux sur $\tilde{\Omega}$, et c'est une résolvente de Ray, dont les points de branchement (cf [13]) sont les points de $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Démonstration. — On vérifie sans peine que les V_λ (resp. \tilde{V}_λ) s'obtiennent par prolongement de Lebesgue de leurs restrictions à $\mathcal{X}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{X}(\tilde{\Omega})$). Dans les deux cas, les fonctions surmédianes continues séparent les points de Ω (resp. $\tilde{\Omega}$): ce sont deux résolvantes de Ray.

Soit $a \in \Omega$: de la définition même de V , on voit que a est un point de non branchement pour $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ dans Ω .

On voit aussi que c'est un point de non branchement pour $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda \geq 0}$. Soit alors $b \in \tilde{\Omega} \setminus \Omega$, et soit $a = \pi(b)$. Il existe p potentiel sci de $H(\Omega)$, tel que $\tilde{p}(b) > \tilde{p}(a) = p(a)$, d'où $\sup_\lambda (\lambda \tilde{V}_\lambda \tilde{p})(b) = \tilde{p}(a) < \tilde{p}(b)$, et b est un point de branchement.

43. LEMME. — Soit p un potentiel de $H(\Omega)$. Alors

$$\hat{p} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda p.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \sup \{R\varphi/0 \leq \varphi \leq p\varphi \in \mathcal{X}(\Omega) \text{ N} - p\varphi\} \\ &= \sup \{R\varphi/0 \leq \varphi \leq p\varphi \in \mathcal{X}(\Omega) \gamma - p\varphi\}. \end{aligned}$$

Or $R\varphi$ est surmédiane continue, donc excessive pour $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$. Ainsi \hat{p} est excessive : c'est la régularisée excessive de p car elle vaut p quasi-partout.

44. COROLLAIRE. — Toute fonction $f(V_\lambda)$ -excessive est finement continue sur Ω .

Démonstration. — Soit p un potentiel continu : $f \wedge p$ est un potentiel égal quasi-partout à sa régularisée excessive $\widehat{f \wedge p}$, laquelle est finement continue. D'une part

$$\widehat{f \wedge p} \leq f \wedge p$$

car $f \wedge p$ est surmédiane d'autre part $f \wedge p \leq \widehat{f \wedge p}$ car $f \wedge p$ est finement sci et vaut $\widehat{f \wedge p}$ quasi-partout. On en déduit, en faisant croître p que f est finement continue.

45. THÉORÈME. — Soit ω un ouvert de $\tilde{\Omega}$. L'espace de Dirichlet $\tilde{H}(\omega)$ définit de la même manière une résolvante sous markovienne sur ω : la mesure de base est $\tilde{\tau}|_\omega$, de potentiel $\tilde{q}^{\tilde{\tau}} - \tilde{R}_{\tilde{q}^{\tilde{\tau}}}^\omega$. On la note \tilde{W}_λ . Alors \tilde{W}_λ est une résolvante de Ray sur ω et les points de branchement sont les points de $\omega \setminus \Omega$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que tout p potentiel continu de $\tilde{H}(\tilde{\Omega})$ est une fonction (\tilde{W}_λ) -surmédiane dans ω . Soit $\varphi \in \mathcal{K}(\omega)$, $0 \leq \varphi \leq p$, et soit u la fonction :

$$u = \begin{cases} R\varphi & \text{dans } \omega \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

u est un élément de $\tilde{H}(\tilde{\Omega})$; c'est le potentiel d'une forme linéaire continue T qui induit une mesure $\mu \geq 0$ dans ω , et μ est portée par l'ensemble des points où $R\varphi = \varphi$. Ainsi on a $p \geq u$ sur le support de T (car $p \geq 0$ hors de ω) donc $p \geq u$ partout dans Ω , soit $p \geq R\varphi$ dans ω . Il s'ensuit que p est (\tilde{W}_λ) -surmédiane continue et \tilde{W}_λ est donc une résolvante de Ray.

Soit f une fonction (\tilde{W}_λ) -excessive : supposons f bornée, alors la fonction $u = q \wedge (\lambda + \hat{R}_q^{(\omega)})$ (notations de la proposition 21) est (\tilde{V}_λ) -excessive sur $\tilde{\Omega}$: sa trace sur Ω est donc finement continue : ainsi $f|_{\Omega \cap \omega}$ est finement continue dans ω .

Soit alors f (\tilde{W}_λ) -surmédiane continue, de régularisée excessive $\tilde{f} : \tilde{f}|_{\omega \cap \Omega}$ et $f|_{\omega \cap \Omega}$ sont finement continues dans $\Omega \cap \omega$ et égales quasi-partout : elles coïncident donc dans $\omega \cap \Omega$, ce qui prouve que tout point de $\omega \cap \Omega$ est un point de non branchement.

Montrons maintenant que les points de $\omega \setminus \Omega$ sont des points de branchement : soit d'abord $b \in \omega$ et soit $a = \pi(b)$ il existe p potentiel continu de $\tilde{H}(\tilde{\Omega})$ tel que sa régularisée (\tilde{V}_λ) -excessive \tilde{p} vale $\tilde{p}(b) \neq p(b) = p(a)$.

La fonction \tilde{p} est (\tilde{W}_λ) -surmédiane et donc majore sa régularisée $\tilde{\tilde{p}}$ (\tilde{W}_λ) -excessive : ainsi $\tilde{\tilde{p}}(b) \leq \tilde{p}(b) < p(b)$ et le point b est un point de branchement. c.q.f.d.

46. COROLLAIRE. — Soit $(W_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ définie de la manière suivante, pour ω ouvert fin de Ω :

Pour $\varphi \in L^\infty(\tau)$, on pose $W_\lambda \varphi = \text{Trace sur } \omega \text{ de } \tilde{W}_\lambda \tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}$ est un prolongement quelconque de φ en fonction $\in L^\infty(\tilde{\tau})$ sur $\tilde{\omega}$, et où \tilde{W}_λ est la résolvante associée à $\tilde{\omega}$.

Alors $W_\lambda \varphi$ est une fonction finement continue et bornée sur ω . De plus $(W_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille résolvante de noyaux, dont les fonctions excessives sont finement continues.

En particulier, pour tout potentiel $p \in H(\omega)$, p finement continue, alors p est une fonction (W_λ) -excessive.

Démonstration. — Évidente d'après le théorème précédent.

47. *Remarque.* — On retrouve ainsi les résultats de [9].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BAUER, Harmonische Räume und ihre Potential Theorie, *Lectures Notes*, 22.
- [2] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques, Cours d'été 1965, Montréal. Presses de l'Université.
- [3] G. CHOQUET, Le problème des moments. Séminaire d'initiation à l'analyse I.H.P. Paris 1962.
- [4] J. DENY, Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, CIME Stresa 1969.
- [5] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Sur le rôle des espaces adaptés en théorie de l'énergie, *C.R.A.S. Paris* t. 282, Série A, p. 153.
- [6] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Régularisation de noyaux-fonctions symétriques *C.R. de l'Acad. Royale de Belgique*, (1976) (à paraître).
- [7] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Construction d'un espace harmonique de Brelot associé à un espace de Dirichlet de type local vérifiant une hypothèse d'hypoellipticité, (à paraître).
- [8] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Cônes en dualité. Applications aux fonctions de Green (à paraître), *Lectures Notes*.
- [9] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Le rôle des espaces de Sobolev en topologie fine (à paraître), *Lectures Notes*.
- [10] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Principes du minimum et préfaïceaux maximaux, *Annales de l'Inst. Fourier*, 24, fasc. 1 (1974).
- [11] D. FEYEL et A. de LA PRADELLE, Espaces localement compacts associés aux fonctions hyperharmoniques de la théorie de B. Fuglede, *C.R.A.S.*, Paris, t. 280, Série A, p. 33.
- [12] F. Y. MAEDA, On the Green function on a self-adjoint harmonic space, *Hiroshima Math. J.*, vol 3, n° 2 (1973).
- [13] P. A. MEYER, Probabilités et potentiel, Paris, Hermann 1966.
- [14] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY, Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel. Séminaire Choquet 1966-67, n° 5, I.H.P. Paris.

Manuscrit reçu le 29 septembre 1976
Proposé par M. Brelot.

D. FEYEL et A. de LA PRADELLE,
Équipe d'Analyse
Université Pierre et Marie Curie
Tour 46 - 4^e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.