ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT SCHWARTZ

Processus de Markov et désintégrations régulières

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 3 (1977), p. 211-277

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_211_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 3 (1977), 211-277

PROCESSUS DE MARKOV ET DÉSINTÉGRATIONS RÉGULIÈRES

par Laurent SCHWARTZ

TABLE DES MATIERES

Introduction.

Un théorème maintenant classique dit que, si E est un espace localement compact polonais, $(P^t)_{t\in \mathbf{R}_+}$ un semi-groupe $(P^{s+t} = P^s P^t)$ d'opérateurs linéaires continus sur $C_0(E)$ (espace des fonctions continues réelles sur E, tendant vers 0 à l'infini), $\geqslant 0$ $(P^t f \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0)$, $P^t(1)$(*) $= 1$, $P^0 = \mathrm{Id}$, $\|P^t\| = 1$, continu pour la convergence simple (pour toute $f \in C_0(E)$, $t \to P^t f$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $C_0(E)$), on peut définir un processus de Markov standard à espace d'état E et probabilités de transition P^t (si μ est la probabilité de répartition à l'instant initial 0, la probabilité de répartition à l'instant t est μP^t, définie par $< \mu P^t, f > = (\mu , P^t f >)$.

Nous étendons ce théorème ici de 3 manières :

1) E est généralisé, c'est ici un sous-espace universellement mesurable d'un espace souslinien complètement régulier ;

2) Le processus devient ici inhomogène dans le temps, les P^t sont remplacés par des $P^{s,t}$, avec $P^{r,s} P^{s,t} = P^{r,t}$, $r \leqslant s \leqslant t$;

3) Le rôle central habituel de la propriété de Markov est remplacé ici par un rôle essentiel joué par les désintégrations régulières $(t , \omega) \to \lambda^t_\omega$, la propriété forte de Markov n'arrivant que comme un sous-produit (10,1). Une seule fois on utilise un temps d'arrêt, pour un nombre fini de valeurs du temps, au lemme (8.1).

L'espace $C_0(E)$ disparaît, il n'existe d'ailleurs pas dans ce cas général. Mais on introduit des hypothèses sur la continuité et l'équiconcentration des probabilités de transition $P(s , t ; x)$ (§§ 2.3 et 7).

Finalement, qu'est-ce exactement qu'un processus fortement markovien ? Chacun a un peu sa conception. Il nous semble qu'un bon processus markovien est l'ensemble des données suivantes :

1) Un espace d'états, espace topologique séparé E, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, et de sa tribu universellement mesurable $\overline{\mathcal{E}}$.

2) Un ensemble d'épreuves Ω, muni d'une tribu $\mathcal{O}$ et d'une famille de tribus $(\mathcal{C}^t)_{t\in \mathbf{R}}$, indexée par $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}_+$), croissante et continue à droite, toutes universellement mesurables $\mathcal{C}^t \subset \overline{\mathcal{O}}$.

(*) $P^t(1) = \operatorname{Sup} P^t(\phi), \phi \in C_0(E), 0 \leqslant \phi \leqslant 1.$

3) Des probabilités de transition $P(s, t; x)$ sur E, $s, t \in \mathbf{R}$, $s \leqslant t$, $x \in E$; on suppose que $x \to P(s, t; x)$, en tant que fonction à valeurs mesures sur $(E, \mathcal{E})$, est universellement mesurable. Cela permet de calculer des intégrales $\int_E \mu(dx)\, P(s, t; x) = P(s, t; \mu)$. On suppose alors la relation de Chapman-Kolmogorov (3.1).

4) Des trajectoires. X sera une application de $\mathbf{R} \times \Omega$ dans E, on posera $X^t(\omega) = X(t, \omega)$. On supposera alors en général que, pour tout ω', $t \to X^t(\omega')$ est réglée et continue à droite. On peut évidemment se contenter de supposer que c'est vrai seulement pour presque tout ω', presque relativement à toutes les mesures $P^{\sigma,\mu}$, $\lambda_\omega^{s\pm}$, qui vont être définies ultérieurement sur Ω ; mais alors on peut toujours supprimer les ω' pour lesquels ce n'est pas vrai. On appellera alors $\mathcal{U}^t$ la tribu engendrée par les X^s, $s \leqslant t$, et $\overline{\mathcal{U}^t}$ sa complétée universelle (**). Le processus sera supposé adapté, X^t $\mathcal{T}^t$-mesurable.

Bien entendu on ne suppose nullement que Ω soit l'espace des trajectoires réglées et continues à droite, il devra pouvoir contenir beaucoup d'autres informations que les trajectoires. De même $\mathcal{T}^t$ est éventuellement beaucoup plus grande que $\mathcal{U}^t$ ou $\overline{\mathcal{U}^{t_+}}$. On appellera ${}^t\mathcal{U}$ la tribu d'avenir du temps t, engendrée par les X^u, $u \geqslant t$.

5) Des probabilités $P^{\sigma, x}$ sur Ω, $\sigma \in \mathbf{R}$, $x \in E$. Les images de $P^{\sigma, x}$ par les $(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})$, $\sigma \leqslant t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant t_n$ seront données, en fonction des probabilités de transition, par (4,1) (sans rien supposer sur les temps $< \sigma$). En particulier, pour $s \leqslant t$, $X^t(P^{s,x}) = P(s, t; x)$. Puisque Ω n'est pas nécessairement l'espace des trajectoires, $P^{\sigma, x}$ n'est nullement déterminée par les images précédentes. On supposera que $x \to P^{\sigma,x}$, en tant que fonction sur E à valeurs mesures sur $(\Omega, \mathcal{O})$ (***), est universellement mesurable. Cela permet de construire des probabilités $P^{\sigma,\mu} = \int_E \mu(dx)\, P^{\sigma, x}$, pour μ probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

6) Des désintégrations, c'est-à-dire des probabilités λ_ω^s sur Ω, $s \in \mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$. On supposera que λ_ω^s est reliée aux probabilités de

(**) Voir note (12), page 234.

(***) Voir note (9), page 222.

transition par ses images $(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(\lambda_\omega^s)$ données par (5.1). On a en particulier $X^t(\lambda_\omega^s) = P(s, t; X^s(\omega))$, $s \leqslant t$. Puisque Ω n'est pas nécessairement l'espace des trajectoires, λ_ω^s n'est pas déterminée par les images précédentes. On constate alors que (proposition évidente (5.4 ter)) λ_ω^s et $P^{s, X^s(\omega)}$ coïncident sur la tribu ${}^s\mathcal{U}$ d'avenir du temps s.

7) On suppose alors des propriétés de désintégration. (4.7) : $P^{\sigma,\mu}$ est désintégrée, relativement à X^σ : $(\Omega, \overline{\mathfrak{S}}) \to (E, \overline{\mathcal{E}})$, par $x \mapsto P^{\sigma, x}$ (ce serait une conséquence automatique des hypothèses, à condition de mettre des hypothèses supplémentaires sur les projections de $P^{\sigma,x}$ pour des temps $< \sigma$). Puis $P^{\sigma,x}$ admet $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ comme désintégration régulière relativement aux tribus $\mathcal{T}^t$, $t \geqslant \sigma$, et λ_ω^s admet $(t, \omega') \to \lambda_{\omega'}^t$ comme désintégration régulière relativement aux tribus $\mathcal{T}^t$, $t \geqslant s$ (théorème (9.1)). Cela ne résulte aucunement des hypothèses antérieures, lorsque Ω n'est pas l'espace des trajectoires, ni $\mathcal{T}^t$ la tribu $\overline{\mathcal{U}^{t_+}}$.

8) On peut (mais pas forcément) supposer aussi la donnée de probabilités λ_ω^{s-}, $s \in \mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$. Leurs projections

$$(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(\lambda_\omega^{s-})$$

seront alors supposées données par (9.3) ; en particulier

$$X^t(\lambda_\omega^{s-}) = P(s, t; X^{s-}(\omega)),$$

$s \leqslant t$. On supposera alors que, pour la désintégration régulière $(t, \omega') \mapsto \lambda_{\omega'}^t$ de $P^{\sigma,x}$ (pour $t > \sigma$) et de λ_ω^s (pour $t > s$), un système de limites à gauche est donné par $(t, \omega') \mapsto \lambda_{\omega'}^{t-}$; et que λ_ω^{s-} admet aussi pour désintégration régulière, pour les $t \geqslant s$, $(t, \omega') \to \lambda_{\omega'}^t$, avec pour système de limites à gauche, pour $t > s$, $(t, \omega') \to \lambda_{\omega'}^{t-}$ ((9.9) et (9.11)).

9) On peut supposer donnés des opérateurs de translation θ^t : $\Omega \to \Omega$, avec $X^t \circ \theta^s = X^{t+s}$. Mais il n'y a pas de règle de transformation simple des $P^{\sigma,\mu}$ et λ_ω^s par θ^r si le processus n'est pas homogène dans le temps. S'il est homogène dans le temps (§ 11), on a les formules de transformation (11.4), au moins lorsque l'on considère les valeurs des probabilités indiquées sur des évènements de la tribu des trajectoires pour les temps $\geqslant \sigma - r$ ou $s - r$.

10) La propriété forte de Markov est alors un sous-produit des données antérieures. Elle suppose une propriété de mesurabilité supplémentaire. En effet, si E est arbitraire, et si T est un temps d'arrêt, X^T n'appartient pas nécessairement à la tribu universellement mesurable $\overline{\mathcal{O}}$ (c'est vrai dans le présent article et même $X^T \in \mathcal{C}^T$, parce que E est contenu dans un souslinien complètement régulier (0.4), et que X^T est la limite d'X^{T_n}, où les T_n sont des temps d'arrêt $\geqslant T$, ne prenant chacun qu'une infinité dénombrable de valeurs, donc pour lesquelles $X^{T_n} \in \mathcal{C}^{T_n}$). Alors la tribu ${}^T\mathcal{U}$ d'avenir du temps T, engendrée par les X^{T+t}, $t \geqslant 0$, est dans $\overline{\mathcal{O}}$, et on peut prendre l'espérance conditionnelle de $F \circ \theta^T$ par rapport à la tribu $\mathcal{C}^T$; la proposition (10.1) donne alors la propriété forte de Markov, et sa démonstration est triviale.

11) Il reste vrai, sous les hypothèses précédentes, que, pour $P^{\sigma,\mu}$ -presque tout ω' (resp. pour $\lambda_\omega^{s\pm}$ - presque tout ω'), la trajectoire $t \mapsto X^t(\omega')$ reste entièrement dans l'ensemble des points normaux pour $t \geqslant \sigma$ (resp. $t \geqslant s$). On ne peut plus le démontrer comme à (9.13), car l'ensemble des (t, x) normaux n'est plus ici fermé dans $\mathbf{R} \times E$. Mais nous voulons montrer que, pour $P^{\sigma,\mu}$ -presque tout ω', pour tout $t \geqslant \sigma$ $(t, X^t(\omega'))$ est normal, c'est-à-dire $P^{t, X^t(\omega')}$ - presque sûrement $X^t = X^t(\omega')$. Or l'évènement $X^t = X^t(\omega')$ ne dépend que de la tribu d'avenir du temps t et alors sa probabilité pour $P^{t, X^t(\omega')}$ est aussi sa probabilité pour $\lambda^t_{\omega'}$. Et un théorème général sur les désintégrations régulières (****) dit justement que, $P^{\sigma,\mu}$ admettant la désintégration régulière $(t, \omega') \mapsto \lambda^t_{\omega'}$ pour $t \geqslant \sigma$, pour $P^{\sigma,\mu}$ - presque tout ω', pour tout $t \geqslant \sigma$, $\lambda^t_{\omega'}$-presque sûrement $X^t = X^t(\omega')$, cqfd. (Par contre, il n'est plus nécessairement vrai que les points $X^{t-}(\omega')$ soient normaux (9.14), et c'est en effet inexact pour des processus markoviens très courants). De cela on déduit la relation de normalité (3.2) : pour s, t donnés, $s \leqslant t$, x donné $\in E$, pour $P^{s,x}$ -presque tout ω', $(t, X^t(\omega'))$ est normal ; donc, pour $X^t(P^{s,x})$-presque tout y, c'est-à-dire $P(s, t; x)$-presque tout y, (t, y) est normal. Dans le présent article, nous avons *supposé* (3.2) ; c'était nécessaire pour démontrer les propriétés des désintégrations régulières du théorème (9.1), c'est-à-dire le point 7) indiqué ici. Mais si on suppose 7), alors (3.2) s'en déduit.

(****) Schwartz [2], théorème (5.18) page 125.

Le présent article montre alors, que moyennant quelques hypothèses sur E (universellement mesurable dans un souslinien complètement régulier), et sur les $P(s, t; x)$ (K-continuité, (2.1), et fuite à l'infini (7.1)), on peut construire un processus fortement markovien au sens ci-dessus, où Ω est l'espace des trajectoires réglées et continues à droite. Les processus de Markov qu'on rencontre dans la pratique sont en fait presque toujours formés à partir de ce cas simple, par des transformations diverses (mélanges, assassinat par des fonctions multiplicatives, changements de temps, etc.). Il semble que, dans tous ces cas, les processus trouvés possèdent les 11 propriétés ci-dessus indiquées.

0. Préliminaires.

A partir du § 4, E sera un sous-espace topologique universellement mesurable d'un espace souslinien $\widetilde{E}$ complètement régulier. Cela assurera que :

(0.0) la tribu borélienne $\mathcal{E}$ de E est dénombrablement engendrée, et il existe une suite de fonctions continues qui l'engendrent (et qui sont même les restrictions à E de fonctions continues sur $\widetilde{E}$) (1) ;

(0.1) E est radonien : toute probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ est de Radon (2) ;

(0.2) les compacts de E sont métrisables (3) ;

(0.3) la tribu borélienne de $E^{\mathbf{N}}$ est $\otimes^{\mathbf{N}} \mathcal{E}$ (4) ;

(0.4) E admet une topologie moins fine métrisable, séparable, ayant les mêmes parties boréliennes (5), donc le théorème d'Egoroff s'applique : la limite simple d'une suite d'applications mesurables de $(F, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$, est encore mesurable ;

---

(1) Théorème de Fernique ; toute suite de fonctions boréliennes d'un espace souslinien $\widetilde{E}$, séparant les points, engendre la tribu borélienne : Schwartz [1], lemme 18, p. 108. Or les fonctions continues sur $\widetilde{E}$ séparent ses points, puisqu'il est complètement régulier ; une suite d'entre elles les séparent aussi, puisque $\widetilde{E} \times \widetilde{E}$ est souslinien donc Lindelöf (Schwartz [1], proposition 3, p. 104 et proposition 4, p. 105).

(2) Un espace souslinien est radonien, Schwartz [1], théorème 10, p. 122 (Paul-André Meyer), puis Schwartz [1], proposition 8, p. 118.

(3) Un compact souslinien est métrisable, Schwartz [1], théorème 6, p. 111.

(4) Schwartz [1], remarque p. 105.

(5) Schwartz [1], corollaire 1, p. 105 et lemme 17, p. 108.

(0.5) E^n, $E^{\mathbf{N}}$ ont la même propriété que E. Ils sont contenus dans $\widetilde{E}^n$, $\widetilde{E}^{\mathbf{N}}$ sousliniens. Ils sont radoniens, comme produits dénombrables de Radoniens à compacts métrisables (6), donc universellement mesurables.

Remarque. – E n'est donc pas nécessairement métrisable : par exemple on peut prendre $E = \mathcal{D}'$, espace des distributions.

1. Convergences de fonctions continues et de probabilités.

Dans tout ce paragraphe, E sera un espace topologique séparé arbitraire.

DEFINITION (1.1). L'ESPACE KCB(E). – On dira qu'une application est K-continue (resp. K-sci, sci = semi-continue inférieurement, resp. K-borélienne) si sa restriction à toute partie compacte est continue (resp. sci, resp. borélienne). L'espace vectoriel KCB(E) est l'espace des fonctions sur E à valeurs réelles, bornées, K-continues. Nous ne mettrons pas sur cet espace une topologie, mais une notion de convergence : un ordonné filtrant $(f_i)_{i\in I}$ est dit convergent dans KCB(E), s'il est borné, et s'il converge uniformément sur tout compact de E.

DEFINITION (1.2). L'ESPACE P(E). – P(E) est l'espace des probabilités de Radon sur E.

Une partie M de P(E) est dite équiconcentrée, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K de E tel que $\mu(K) \geqslant 1 - \epsilon$ pour toute $\mu \in M$. Cela entraîne la relative compacité de M pour la topologie étroite, et la réciproque est vraie si E est localement compact ou polonais (7).

L'espace P(E) peut être muni de la topologie étroite, mais nous y mettrons de préférence une notion de convergence : $(\mu_i)_{i\in I}$ converge vers μ si μ_i converge étroitement vers μ, et si en outre les μ_i sont équiconcentrées. Quand nous dirons que μ_i converge étroitement vers μ, nous entendrons exactement la convergence pour la topologie étroite ; quand nous dirons que μ_i converge vers μ dans P(E), ou sim-

---

(6) Schwartz [1], théorème 8, p. 121, proposition 8, p. 118, proposition 9, p. 119.

(7) Schwartz [1], théorème 3, p. 379 et théorème 4, p. 381 (Prokhorov).

plement converge vers μ, nous entendrons que les μ_i convergent étroitement vers μ et sont équiconcentrées.

PROPOSITION (1.3). — *L'application* $(\mu, f) \mapsto \mu(f)$ *est continue pour les convergences définies sur* P(E) *et* KCB(E).

Démonstration. — Supposons que μ_i converge vers μ et f_i vers f ; nous voulons montrer que $\mu_i(f_i)$ converge vers $\mu(f)$. Il suffit de montrer que $\mu_i(f_i - f)$ converge vers 0, et que $\mu_i(f)$ converge vers $\mu(f)$. Quitte à ajouter une constante aux f_i, on peut toujours supposer que $0 \leqslant f_i \leqslant 1$. Soit K un compact tel que $\mu_i(\complement K) \leqslant \epsilon$ pour tout i. Alors $|\mu_i(f_i - f)| \leqslant \sup\limits_{x \in K} |f_i(x) - f(x)| + \epsilon$; donc lim. sup. $|\mu_i(f_i - f)| \leqslant \epsilon$ donc $= 0$. Ensuite, soit f' la fonction égale à f sur K et à 1 sur $\complement K$; f' est sci (semi-continue inférieurement), donc, d'après la définition de la convergence étroite, lim. inf. $\mu_i(f') \geqslant \mu(f')$. Alors

$$\text{lim. inf. } \mu_i(f) \geqslant \text{lim. inf. } \mu_i(f') - \epsilon \geqslant \mu(f') - \epsilon \geqslant \mu(f) - \epsilon .$$

Donc lim. inf. $\mu_i(f) \geqslant \mu(f)$. En utilisant la fonction f'', égale à f sur K et à 0 sur $\complement K$, qui est scs (semi-continue supérieurement), on trouve lim. sup. $\mu_i(f) \leqslant \mu(f)$, cqfd.

Remarque (1.3 bis). — Une partie de l'énoncé ne suppose pas la convergence étroite des μ_i ni la K-continuité des f_i : si les f_i universellement Radon-mesurables convergent uniformément vers f sur tout compact en restant bornées, et si les μ_i sont équiconcentrées, $\mu_i(f_i - f)$ converge vers 0.

Remarque (1.3 ter). — Si f est K-sci (sa restriction à tout compact est sci), bornée ou $\geqslant 0$, et si μ_i converge vers μ dans P(E),

$$\text{lim. inf. } \mu_i(f) \geqslant \mu(f).$$

On utilise en effet la même f' que ci-dessus pour f bornée $\leqslant 1$, et alors lim. inf. $\mu_i(f) \geqslant$ lim. inf. $\mu_i(f') - \epsilon \geqslant \mu(f') - \epsilon \geqslant \mu(f) - \epsilon$, donc $\geqslant \mu(f)$.

Le cas $f \geqslant 0$ non bornée se traite par passage à la limite.

COROLLAIRE (1.4). — *Soit* T *un espace topologique, f une fonction réelle* K-*continue bornée sur* T x E x E, $x \mapsto \mu_x$ *une application* K-*continue de* E *dans* P(E). *Alors* $(t, x) \mapsto \mu_x(f(t, x, \cdot))$ *est dans* KCB(T x E).

Démonstration. — P(E) est, comme toujours, muni de sa notion de convergence : donc la K-continuité de $x \mapsto \mu_x$ veut dire que, si H est un compact de E, la restriction de $x \mapsto \mu_x$ à H est continue pour la topologie étroite de P(E) et que les μ_x, $x \in$ H, sont équiconcentrées.

Prenons $t \in$ A, $x \in$ H compacts. D'une part, si K est un compact de E, f est continue sur A x H x K, donc $(t, x) \mapsto f(t, x, \cdot)$ est continue de A x H dans C(K) ; donc, K étant arbitraire, continue de A x H dans KCB(E). D'autre part, $(t, x) \mapsto \mu_x$ est continue de A x H dans P(E). D'après (1,3), $(t, x) \mapsto \mu_x(f(t, x, \cdot))$ est continue de A x H dans $\mathbf{R}$. Donc, en faisant maintenant varier A et H,

$$(t, x) \mapsto \mu_x(f(t, x, \cdot))$$

est K-continue de T x E dans $\mathbf{R}$, elle est donc élément de KCB(T x E), cqfd.

2. Les probabilités de transition, propriétés topologiques.

Dans tout ce paragraphe, E sera un espace topologique séparé dont les parties compactes sont métrisables, de manière que toute probabilité portée par une réunion dénombrable de compacts soit de Radon.

DEFINITION (2.1). — *Pour s, t réels, $s \leqslant t$, et $x \in$ E, $P(s, t; x)$ sera une probabilité de Radon sur* E, *appelée probabilité de transition de l'instant s à l'instant t, avec départ en x à l'instant s. On devra imaginer, pour* B *borélien dans* E, $P(s, t; x)$ (B) *comme la probabilité qu'une particule soit dans* B *à l'instant t, sachant qu'elle est au point x à l'instant s. Par abus d'écriture, dans la suite, nous écrirons*

$$(s, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

alors que l'on devrait ajouter $s \leqslant t$; ce sera sous-entendu. On se borne souvent à prendre des temps $\geqslant 0$ ou $\geqslant \sigma$ donné ; toute la théorie est évidemment la même. On supposera $(s, t, x) \mapsto P(s, t, x)$ K-*continue,* *relativement à la convergence dans* P(E). *Cela veut dire que, si* H *est un compact de* E, (s, t, x) *est continue sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times$ H *pour la topologie étroite, et que les* $\mathrm{P}(s, t, x)$, *pour* s, t *bornés et* $x \in$ H, *sont équiconcentrées. On définit alors, pour f universellement Radon mesurable, bornée ou* $\geqslant 0$, $\mathrm{P}^{s,t}(f)$ *comme la fonction* $x \mapsto \mathrm{P}(s, t; x)(f)$.

PROPOSITION (2.2). — $\mathrm{P}^{s,t} f \geqslant 0$ *si* $f \geqslant 0$; $\mathrm{P}^{s,t}\, 1 = 1$;

$$\|\mathrm{P}^{s,t} f\| \leqslant \|f\|$$

pour la norme sup. du module. Pour $f \in$ KCB(E), $\mathrm{P}^{s,t} f \in$ KCB(E). *L'application* $(s, t, f) \to \mathrm{P}^{s,t} f$ *est continue de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times$ KCB(E) *dans* KCB(E). *Si x décrit un compact* H *de* E,

$$(s, t, f, x) \to \mathrm{P}^{s,t} f(x) = \mathrm{P}(s, t; x)(f)$$

est continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times$ KCB(E) $\times$ H *dans* $\mathbf{R}$.

Démonstration. — Le début est évident.

Puisque $f \in$ KCB(E), $x \to \mathrm{P}(s, t; x)(f)$ est K-continue d'après la proposition (1,3), donc $\mathrm{P}^{s,t} f \in$ KCB(E). Ensuite, la première continuité indiquée veut dire : si s_i converge vers s, t_i vers t, f_i vers f pour la convergence de KCB(E), c'est-à-dire uniformément sur tout compact en restant bornée, alors $\mathrm{P}^{s_i, t_i} f_i$ converge vers $\mathrm{P}^{s,t} f$ uniformément sur tout compact en restant bornée ; la deuxième continuité veut dire que, si x_i converge vers x en restant sur un compact H, $\mathrm{P}(s_i, t_i; x_i)(f_i)$ converge vers $\mathrm{P}(s, t; x)(f)$.

La deuxième continuité résulte alors aussitôt de (1.3). Mais alors elle entraîne aussitôt que $\mathrm{P}^{s_i, t_i} f_i$ converge vers $\mathrm{P}^{s,t} f$ dans C(H) et évidemment en restant bornée sur E, donc dans KCB(E).

Remarque (2.2 bis). — Sans hypothèse d'équiconcentration, mais en supposant $x \mapsto \mathrm{P}(s, t; x)$ continue pour la topologie étroite, $\mathrm{P}^{s,t} f$ est continue bornée pour f continue bornée.

PROPOSITION (2.3). — *Si* f_i *converge uniformément vers* 0 *sur tout compact en restant bornée,* $\mathrm{P}^{s,t} f_i$ *converge vers* 0 *uniformément sur tout compact en restant bornée, uniformément pour s, t bornés.*

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite convergeant simplement vers* 0 *en restant bornée,* $(\mathrm{P}^{s,t} f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge simplement vers* 0 *en restant bornée.*

Démonstration. – La deuxième propriété résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue, la première de (1.3 bis).

PROPOSITION (2.4). – *Si f est* K-sci (resp. K-*borélienne*), *bornée ou* $\geqslant 0$, *il en est de même de* $P^{s,t}f$, *et de la fonction*

$$(s, t, x) \mapsto P^{s,t}f(x) = P(s, t; x)(f).$$

Démonstration. – Le cas sci résulte de (1.3 ter).

L'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions boréliennes bornées pour lesquelles $P^{s,t} f$ est K-borélienne, est un espace vectoriel, stable par passage à la limite des suites bornées, et il contient les fonctions sci bornées. Par le théorème des classes monotones([8]), il contient donc toute la tribu des parties boréliennes, donc toutes les fonctions boréliennes bornées par approximation uniforme par des fonctions étagées.

Soit maintenant f K-borélienne bornée. Lorsque s, t, x parcourent des compacts, il existe un compact K de E tel que $P(s, t; x)(\complement K) \leqslant \epsilon$; la fonction $f\, 1_K$ est borélienne, donc $P^{s,t}(f\, 1_K)$ est K-borélienne ; mais $|P^{s,t}(f - f\, 1_K)| \leqslant \epsilon \operatorname{Sup} |f|$; donc $P^{s,t}f$, limite uniforme de fonctions K-boréliennes est K-borélienne. Le cas f K-borélienne $\geqslant 0$ non bornée se traite en prenant la limite croissante des $P^{s,t}(\mathrm{Inf.}(f, n))$, $n \in \mathbf{N}$. Raisonnement analogue pour la fonction $(s, t, x) \mapsto P^{s,t}f(x)$.

Remarque (2.4 bis). – Sans hypothèse d'équiconcentration, si $x \mapsto P(s, t; x)$ est continue pour la topologie étroite, alors, pour f sci ou borélienne, bornée ou $\geqslant 0$, $P^{s,t}f$ est sci ou borélienne.

PROPOSITION (2.5). – *L'application* $(s, t, x) \mapsto P(s, t; x)$, *en tant que fonction sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times E$ *à valeurs mesures sur* E *muni de sa tribu borélienne, est* K-*borélienne. Si* μ *est une probabilité de Radon*

---

(8) Le théorème des classes monotones dit que, si $\mathcal{B}$ est un ensemble de parties d'un ensemble X, $X \in \mathcal{B}$, stable par intersections finies, et $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ un ensemble de parties, stable par différence ($A, B \in \mathcal{A}$, $A \supset B$, implique $A - B \in \mathcal{A}$) et par réunion des suites croissantes, alors $\mathcal{A}$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{B}$. Il existe un énoncé analogue pour les ensembles de fonctions bornées. Si $\mathcal{B}$ est un ensemble de fonctions réelles bornées, $1 \in \mathcal{B}$, stable par multiplication, $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ un ensemble de fonctions réelles, qui est un espace vectoriel, stable par passage à la limite des suites bornées, alors $\mathcal{A}$ contient toute la tribu engendrée par $\mathcal{B}$.

sur E, $\mu P^{s,t} = \int_E P(s,t;x)\,\mu(dx)$ *est aussi une probabilité de Radon sur* E. *Pour f bornée universellement Radon-mesurable,* $P^{s,t}f$ *l'est aussi ainsi que* $(s,t,x) \to P(s,t;x)(f)$; *et* $< \mu P^{s,t}, f > = < \mu, P^{s,t}f >$. *Si* μ_i *converge vers* μ *dans* P(E), $\mu_i P^{s,t}$ *converge vers* $\mu P^{s,t}$.

Démonstration. – Dire que $(s,t,x) \mapsto P(s,t;x)$ est K-borélienne, en tant que fonction à valeurs mesures (9), c'est exactement dire que, pour toute f borélienne bornée, $(s,t,x) \mapsto P(s,t;x)(f)$ est K-borélienne. On peut alors considérer l'intégrale

$$\mu P^{s,t} = \int_E P(s,t;x)\,\mu(dx).$$

Par définition de cette intégrale, si f est borélienne bornée,

$$< \mu P^{s,t}, f > = < \mu, P^{s,t}f > .$$

Montrons que $\mu P^{s,t}$ est une probabilité de Radon. Il existe un compact H de E sur lequel μ est concentrée à ϵ près ; alors, lorsque x décrit H, $P(s,t;x)$ est concentrée à ϵ près sur un compact K. Alors

$$\mu P^{s,t}(K) = \int_E \mu(dx)\,P(s,t,x)(K) \geqslant \int_H \geqslant (1-\epsilon)^2 .$$

Donc $\mu P^{s,t}$ est concentrée sur une réunion dénombrable de compacts, qui sont tous métrisables par hypothèse, donc elle est de Radon. Supposons que f soit universellement Radon-mesurable. Elle est en particulier $\mu P^{s,t}$-mesurable. Elle est alors comprise entre deux fonctions f', f'', boréliennes, dont la différence est $\mu P^{s,t}$-négligeable. Mais alors $P^{s,t}f'$ et $P^{s,t}f''$ sont K-boréliennes, et leur différence est μ-négligeable, donc $P^{s,t}f$ est μ-mesurable, donc universellement Radon-mesurable, et on a encore $< \mu P^{s,t}, f > = < \mu, P^{s,t}f >$. La mesurabilité universelle de $(s,t,x) \mapsto P(s,t;x)f$ s'obtiendrait en prenant une probabilité de Radon sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times E$ au lieu d'une probabilité de Radon sur E.

Il reste à voir la convergence. Supposons que μ_i converge vers μ, c'est-à-dire converge étroitement en restant équiconcentrée. Comme plus haut, il existe un compact H sur lequel les μ_i sont concentrées à

---

(9) Soit $x \to \lambda_x$ une fonction à valeurs mesure $\geqslant 0$ sur un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{O}$. Elle est dite appartenir à une tribu $\mathcal{X}$ sur X, si, pour tout $B \in \mathcal{O}$, $x \to \lambda_x(B)$ appartient à $\mathcal{X}$. Pour ces propriétés et les intégrales de mesures, voir Schwartz [2].

ϵ près, puis K sur lequel les $P(s, t, x)$ sont concentrées à ϵ près pour $x \in H$ (et même pour s, t bornés) ; alors, comme plus haut,

$$\mu_i P^{s,t}(K) \geqslant (1 - \epsilon)^2 ;$$

donc les $\mu_i P^{s,t}$ sont équiconcentrées, pour s, t bornés. Ensuite soit f bornée sci ;

$$\text{lim. inf.} < \mu_i P^{s,t}, f > = \text{lim. inf.} < \mu_i, P^{s,t} f > \ \geqslant \ < \mu, P^{s,t} f >$$

(parce que $P^{s,t} f$ est K-sci, (2.4), puis (1.3 ter)) $= < \mu P^{s,t}, f >$. Donc $\mu_i P^{s,t}$ converge vers $\mu P^{s,t}$ dans P(E).

Remarque (2.5 bis). – On ne peut pas parler de convergence étroite uniformément pour s, t bornés, car, si E n'est pas complétement régulier, la topologie étroite de P(E) n'est pas uniformisable. Mais supposons E complétement régulier ; alors, si μ_i converge vers μ dans P(E), $\mu_i P^{s,t}$ converge vers $\mu P^{s,t}$ dans P(E), uniformément pour s, t bornés. En effet, si s_i converge vers s, t_i vers t, et si f est une fonction continue bornée, $< \mu_i, P^{s_i,t_i} f >$ converge vers $< \mu, P^{s,t} f >$; cela prouve que $< \mu_i, P^{s,t} f >$ converge vers $< \mu, P^{s,t} f >$ uniformément pour s, t bornés.

Remarque (2.5 ter). – Si $x \mapsto P(s, t ; x)$ est continue pour la topologie étroite, elle est évidemment borélienne en tant que fonction à valeurs mesures, d'après (2.4 bis).

3. Les relations de Chapman-Kolmogorov et de normalité.

E sera un espace topologique dont les parties compactes sont métrisables. On suppose données des $P(s, t ; x)$ vérifiant les propriétés du paragraphe précédent. On supposera en outre qu'elles vérifient les deux relations suivantes :

Relation (3.1) de Chapman-Kolmogorov.

Pour $r \leqslant s \leqslant t, x \in E$:

$$P(r, t ; x) = \int_E P(r, s ; x)(dy)\, P(s, t ; y)$$

(intégrale de mesures) (10).

(10) Schwartz [2], p. 15.

Relation (3.2) de normalité.

Pour $s \leqslant t, x \in \mathrm{E}$, pour $\mathrm{P}(s, t; x)$ – presque tout y,

$$\mathrm{P}(t, t; y) = \delta_y .$$

Un point (t, y) est dit normal, ou y est dit normal à l'instant t, si $\mathrm{P}(t, t; y) = \delta_y$. Puisque $(t, y) \mapsto \mathrm{P}(t, t; y)$ est K-continue, ainsi que $y \mapsto \delta_y$, l'ensemble des points normaux de $\mathbf{R} \times \mathrm{E}$ est K-fermé (son intersection avec tout compact est fermée). La relation (3.2) exprime que $\mathrm{P}(s, t; x)$-presque tout point y est normal à l'instant t.

La relation de Chapman-Kolmogorov entraîne immédiatement :

PROPOSITION (3.3). – *Pour $r \leqslant s \leqslant t$, f universellement Radon-mesurable sur* E, *bornée ou* $\geqslant 0$, *et μ probabilité de Radon sur* E :

$$\mathrm{P}^{r,s}(\mathrm{P}^{s,t} f) = \mathrm{P}^{r,t} f$$

$$(\mu \mathrm{P}^{r,s})\, \mathrm{P}^{s,t} = \mu\, \mathrm{P}^{r,t}$$

Mais on n'a pas nécessairement $\mathrm{P}^{s,s} f = f$ *ni* $\mu \mathrm{P}^{s,s} = \mu$ *(non normalité).*

4. Construction du processus.

A partir de maintenant, E sera un sous-espace universellement mesurable d'un espace topologique $\widetilde{\mathrm{E}}$ souslinien complètement régulier. Nous appellerons Ω l'ensemble $\mathrm{E}^{\mathbf{R}}$ des trajectoires $\mathbf{R} \to \mathrm{E}$, muni de la tribu produit tensoriel $\mathcal{O} = \otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne de E. Nous choisirons une fois pour toutes un "point de naissance" ∇ dans E, et nous construirons une probabilité $\mathrm{P}^{\sigma, x}$, $x \in \mathrm{E}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, utilisant les probabilités de transition, et pour laquelle, extérieurement presque sûrement, la trajectoire sera au point ∇ aux temps $< \sigma$ (*) ; intuitivement,

(*) On peut adopter diverses attitudes, en ce qui concerne la position de la trajectoire aux temps $< \sigma$:

1) l'attitude actuelle ; $\mathrm{P}^{\sigma, x}$-extérieurement presque sûrement, la trajectoire est en aux temps $< \sigma$; le choix du point est totalement indifférent ; on peut même rajouter pour cela un point ∇ à l'espace E, avec $\{\nabla\}$ ouvert dans $\mathrm{E} \cup \{\nabla\}$, et poser $\mathrm{P}(s, t; \nabla) = \delta_\nabla$;

(Voir suite page ci-après).

ensuite, elle partira de x, encore que la trajectoire ne soit pas nécessairement au point x à l'instant σ (non normalité). Il sera commode d'appeler X^t la projection à l'instant t : $E^{\mathbf{R}} \to E^{\{t\}}$ sur le facteur $E^{\{t\}} = E$, et on posera :

$$(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(P^{\sigma,x}) \tag{4.1}$$
$$= \delta_\nabla(dx_1)\,\delta_\nabla(dx_2)\ldots\delta_\nabla(dx_{k-1})\,P(\sigma, t_k; x)(dx_k)$$
$$P(t_k, t_{k+1}; x_k)(dx_{k+1})\cdots P(t_{n-1}, t_n; x_{n-1})(dx_n),$$

pour $t_1 < t_2 \ldots < t_{k-1} < \sigma \leqslant t_k < t_{k+1} \ldots < t_n$; c'est une probabilité sur $E^{\{t_1,\ldots t_n\}} = E^n$. Détaillons un peu cette probabilité. Soit f K-borélienne, bornée ou $\geqslant 0$ sur E^n. Alors :

$$(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(P^{\sigma,x})(f) \tag{4.1 bis}$$
$$= \int_E P(\sigma, t_k; x)(dx_k) \int_E P(t_k, t_{k+1}; x_k)(dx_{k+1})\ldots$$
$$\ldots \int_E P(t_{n-1}, t_n; x_{n-1})(dx_n)\, f(\nabla\ldots, \nabla, x_k, \ldots x_{n-1}, x_n).$$

Tout d'abord considérons :

$$g(x_k, \ldots x_{n-1}) = \int_E P(t_{n-1}, t_n; x_{n-1})(dx_n) \tag{4.1 ter}$$
$$f(\nabla, \ldots, \nabla, x_k, \ldots x_{n-1}, x_n)$$

Cette fonction est K-borélienne sur E^{n-k}. Elle est en effet K-continue si f est K-continue bornée, d'après le corollaire (1.4) où $T = E^{\{t_k,\ldots,t_{n-2}\}}$. L'ensemble $\mathcal{B}$ des f bornées pour lesquelles elle est K-borélienne est un espace vectoriel, stable par passage à la limite des suites bornées ; donc, d'après le théorème des classes monotones

---

2) on pourra décider que, $P^{\sigma,x}$-extérieurement presque sûrement, la trajectoire est en x aux temps $< \sigma$; mais la proposition (4.7) n'est alors plus vraie si le processus n'est pas normal ni l'égalité $P^{\sigma,\mu^{\natural}} = P^{\sigma,\mu}$ de (4.6). On le pourra toujours si tous les points sont normaux, $P(t, t; x) = \delta_x$ pour tous t et x.

3) On pourra décider que $P^{\sigma,\mu}$ est seulement une probabilité sur l'espace $E^{[\sigma,+\infty[}$ des trajectoires aux temps $\geqslant \sigma$, muni de la tribu $\otimes^{[\sigma,+\infty[}\mathcal{E}$. C'est ce qui sera le cas à (4.8) pour $P(\sigma, [\sigma, +\infty[; \mu)$. L'attitude 2) est impossible sans hypothèse de normalité ; nous souhaiterons, dans bien des cas, que toutes les $P^{\sigma,\mu}$ soient sur le même espace Ω ; il ne reste que l'attitude 1).

$\mathcal{B}$ contient le tribu engendrée par les fonctions continues, qui est la tribu borélienne bornée puisque E^{n-k} est contenu dans un souslinien complètement régulier (0.0). Mais, si f est K-borélienne, bornée, et si $x, x_k, \ldots, x_{n-1}$ restent dans un compact H de E, il existe un compact $K \supset H \cup \{\nabla\}$ de E tel que $P(t_{n-1}, t_n ; x_{n-1})$ $(\complement K) \leqslant \epsilon$, et alors

$$\int |P(t_{n-1}, t_n ; x_{n-1})(dx_n)$$
$$[f(\nabla, \ldots, x_n) - f(\nabla, \ldots x_n)\ 1_{(\nabla, \ldots x_n) \in K^n}]| \leqslant \epsilon \|f\|,$$

donc l'intégrale (4.1 ter) est limite K-uniforme de fonctions K-boréliennes bornées, donc est K-borélienne bornée. Alors on peut calculer

$$\int P(t_{n-2}, t_{n-1} ; x_{n-2})(dx_{n-1})\, g(x_k, \ldots x_{n-1}),$$

qui est encore K-borélienne bornée ; et ainsi de suite. On a donc bien ainsi défini $(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n})(P^{\sigma, x})$ comme une probabilité sur $E^{\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}} = E^n$ muni de sa tribu borélienne, qui est le produit tensoriel des tribus boréliennes d'après (0.3). A noter la forme particulière que prend cette intégrale lorsque f est de la forme

$$(x_1, \ldots x_n) \mapsto f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n),\ f_i$$

fonctions boréliennes, bornées ou $\geqslant 0$, sur E. C'est

$$((X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n})(P^{\sigma, x}))(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) = \tag{4.2}$$
$$= f_1(\nabla) f_2(\nabla) \ldots f_{k-1}(\nabla)\, g_k(x)$$

où

$$g_k = P^{\sigma, t_k}(f_k P^{t_k, t_{k+1}}(\ldots(f_{n-2} P^{t_{n-2}, t_{n-1}}(f_{n-1} P^{t_{n-1}, t_n}(f_n)))\ldots))$$

La probabilité ainsi trouvée sur E^n est de Radon, puisque E^n est radonien. Lorsque $t_1, \ldots t_n$ varient, les projections obtenues sont cohérentes, par la relation de Chapman-Kolmogorov, donc définissent bien par le théorème de Kolmogorov une probabilité $P^{\sigma, x}$ sur $\Omega = E^{\mathbf{R}}$, muni de la tribu $\otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E}$.

Il résulte trivialement de la définition que, pour tout temps $t < \sigma$, la trajectoire est $P^{\sigma, x}$ presque sûrement en ∇. Comme tout ensemble de $\mathcal{O} = \otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E}$, contenant l'ensemble des trajectoires qui sont en ∇ aux temps $< \sigma$, contient un produit $\{\nabla\}^{D} \times E^{\mathbf{R} \setminus D}$, D dénombrable $< \sigma$, il est de $P^{\sigma, x}$-mesure 1 ; donc l'ensemble des trajectoires qui sont en ∇ aux temps $< \sigma$ est de $P^{\sigma, x}$-mesure extérieure 1. Par ailleurs

$$X^t(P^{\sigma,x}) = P(\sigma, t; x) \tag{4.3}$$

pour $t \geqslant \sigma$, $= \delta_\nabla$ pour $t < \sigma$. En particulier $X^t(P^{\sigma,x}) = P(\sigma, \sigma; x)$; donc il est vrai que $P^{\sigma,x}$-presque sûrement la trajectoire est en x à l'instant σ, si et seulement si (σ, x) est normal. Bien évidemment (4.1) est aussi la valeur de $P^{\sigma,x}(f \circ (X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n}))$, donc (4.2) est la valeur de $P^{\sigma,x}((f_1 \circ X^{t_1})(f_2 \circ X^{t_2}) \ldots (f_n \circ X^{t_n}))$.

On voit alors que $(\sigma, x) \mapsto P^{\sigma,x}(f \circ (X^{t_1}, \ldots X^{t_n}))$ est K-borélienne ; comme les fonctions de la forme $f \circ (X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})$, f borélienne bornée sur E^n, engendrent la tribu $\otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E}$, lorsque n et les t_i varient, on en déduit que pour toute fonction $F \in \otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E}$, bornée ou $\geqslant 0$, $(\sigma, x) \mapsto P^{\sigma,x}(F)$ est K-borélienne ; donc, en tant que fonction sur E à valeurs mesurés sur $(\Omega, \mathfrak{O})$, $(\sigma, x) \to P^{\sigma,x}$ est K-borélienne, donc universellement mesurable. On peut donc calculer, si μ est une probabilité de Radon sur E :

$$P^{\sigma,\mu} = \int_E P^{\sigma,x} \mu(dx) \quad (\text{donc } P^{\sigma,x} = P^{\sigma,\delta_x}), \tag{4.4}$$

avec

$$(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})(P^{\sigma,\mu}) = \int_{x \in E} \mu(dx)\, \delta_\nabla(dx_1) \ldots \delta_\nabla(dx_{k-1})$$

$$P(\sigma, t_k; x)(dx_k) \ldots P(t_{n-1}, t_n; x_{n-1})(dx_n) \tag{4.5}$$

Remarque (4.5 bis). – Si $x \mapsto P(s, t; x)$ est continue pour la topologie étroite, alors $x \mapsto P^{\sigma,x}$, en tant que fonction sur E à valeurs mesures sur $(\Omega, \mathfrak{O})$, est borélienne. Il suffit en effet de remarquer que, pour des f_i boréliennes,

$$x \mapsto P^{\sigma,x}(f_1 \circ X^{t_1})(f_2 \circ X^{t_2})(f_n \circ X^{t_n}),$$

donnée par (4.2), est borélienne.

Remarque (4.5 ter). – La formule (4.1 bis) subsiste sans modification si certains des t_i sont égaux. Soient

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} < \sigma \leqslant t_k \leqslant t_{k+1} \ldots \leqslant t_n .$$

Alors $(X^{t_1}, X^{t_2} \ldots, X^{t_n})$ est une application de Ω dans

$$E^{(t_1, t_2, \ldots, t_n)} \simeq E^n .$$

Pour avoir l'image de $P^{\sigma,\mu}$, on devra appliquer (4.1), en remplaçant $P(t_\ell, t_{\ell+1} ; x_\ell)(dx_{\ell+1})$ par $\delta_{x_\ell}(dx_{\ell+1})$ pour tout ℓ tel que

$$t_{\ell+1} = t_\ell \geqslant \sigma .$$

Mais le résultat est le même si on laisse $P(t_\ell, t_{\ell+1} ; x_\ell)(dx_{\ell+1})$; en effet, par la normalité (3.2), $P(t_\ell, t_{\ell+1} ; x_\ell) = P(t_\ell, t_\ell ; x_\ell) = \delta_{x_\ell}$ pour $P(t_{\ell-1}, t_\ell ; x_{\ell-1})$ – presque tout x_ℓ, si $\ell - 1 \geqslant k$, pour $P(\sigma, t_\ell ; x)$ – presque tout x_ℓ si $\ell = k$.

PROPOSITION (4.6). – *Fixons σ une fois pour toutes. Posons* $\mu^{\natural} = \mu P^{\sigma,\sigma} = \int \mu(dx) P(\sigma, \sigma ; x)$, *de sorte que* $\delta^{\natural} = P(\sigma, \sigma ; x)$. *Alors* $\mu^{\natural\natural} = \mu^{\natural}$, $\mu \longrightarrow \mu^{\natural}$ *est une projection de* $P(E)$ *sur le sous-ensemble des probabilités portées par l'ensemble des points σ-normaux de* E. *Enfin* $X^\sigma(P^{\sigma,\mu}) = \mu^{\natural}$ et $P^{\sigma,\mu^{\natural}} = P^{\sigma,\mu}$.

Posons $f^{\natural} = P^{\sigma,\sigma} f$, *pour f borélienne, bornée ou* $\geqslant 0$. *Alors* $f \longrightarrow f^{\natural}$ *est une projection sur l'ensemble des fonctions qui vérifient pour tout* x : $f(x) = \delta_x^{\natural}(f)$; *le noyau de cette projection est l'ensemble des fonctions portées par le complémentaire de l'ensemble des points σ-normaux. On a* $< \mu^{\natural}, f > = < \mu, f^{\natural} >$.

Démonstration. – Si μ est portée par l'espace (K-fermé) de l'ensemble des points σ-normaux, on aura, pour μ-presque tout x,

$$P(\sigma, \sigma ; x) = \delta_x ,$$

donc $\mu^{\natural} = \mu$. Ensuite $\mu^{\natural}$-presque tout point y est σ-normal ; cela résulte de la définition de $\mu^{\natural}$ et de ce que $P(\sigma, \sigma ; x)$ – presque tout point y est σ-normal (relation (3.2)) ; donc $\mu^{\natural}$ est portée par l'ensemble des points σ-normaux. Alors $\mu^{\natural\natural} = \mu^{\natural}$, ce qui résulte d'ailleurs de Chapman-Kolmogorov, $\mu P^{\sigma,\sigma} P^{\sigma,\sigma} = \mu P^{\sigma,\sigma}$. On a

$$X^\sigma(P^{\sigma,x}) = P(\sigma, \sigma ; x)$$

donc $X^\sigma(P^{\sigma,\mu}) = \int \mu(dx) P(\sigma, \sigma ; x) = \mu^{\natural}$. Enfin les projections sur les produits finis de $P^{\sigma,\mu}$ et de $P^{\sigma,\mu^\natural}$ sont données par (4.5)([10 bis]), et comme

$$\int \mu^\natural(dy)\, P(\sigma\,,\, t_k\ ;\, y) = \int\!\!\int \mu(dx)\, P(\sigma\,,\,\sigma\ ;\, x)\,(dy)\, P(\sigma\,,\, t_k\ ;\, y)$$
$$= \int \mu(dx)\, P(\sigma\,,\, t_k\ ;\, x)$$

(par Chapman-Kolmogorov), ces projections sont bien égales.

$P^{\sigma,\sigma}\, P^{\sigma,\sigma} f = P^{\sigma,\sigma} f$ donc $f^{\natural\natural} = f^\natural$, donc $f \longrightarrow f^\natural$ est une projection. L'image est l'ensemble des f telles que $f = f^\natural$, c'est-à-dire $f(x) = \delta_x(f)$ pour tout x. Le noyau est l'ensemble des f telles que $\delta_x^\natural(f) = 0$ pour tout x ; cela entraîne que $f(x) = 0$ si x est σ-normal, et inversement, si cette propriété est réalisée, $\delta_x^\natural(f) = 0$ pour tout x, puisque $\delta_x^\natural$ est portée par l'ensemble des points σ-normaux. Enfin

$$< \mu^\natural, f > = \int \mu(dx)\ P(\sigma\,,\sigma\ ;\, x)\ (f) = \int \mu(dx)\, f^\natural(x)$$
$$= < \mu\,,\, f^\natural > .$$

PROPOSITION (4.7). – *Pour toute probabilité μ sur* E , $P^{\sigma,\mu}$ *est strictement désintégrée* ([11]), *relativement à l'application* X^σ *de* Ω *dans l'espace* E *muni de sa tribu universellement mesurable* $\overline{\mathcal{E}}$, *par*

$$x \longrightarrow P^{\sigma,x} .$$

Donc la famille $x \longrightarrow P^{\sigma,x}$ *est autodésintégrante : chaque* $P^{\sigma,x}$ *est désintégrée relativement à* X^σ *par* $y \longrightarrow P^{\sigma,y}$. *On peut remplacer* $\overline{\mathcal{E}}$ *par la tribu borélienne* $\mathcal{E}$ *de* E, *si* $x \longrightarrow P(s\,,\, t\ ;\, x)$ *est continue pour la topologie étroite.*

Démonstration. – Il suffit de vérifier les 3 conditions habituelles de la désintégration stricte :

a) $x \longrightarrow P^{\sigma,x}$ appartient à la tribu universellement mesurable ;

(10 bis) Ceci ne serait plus vrai si on avait mis δ_x au lieu de δ_∇, voir Note (*) page 224 (4.7) qui s'en déduit, ne serait pas vrai non plus.

(11) Désintégration : voir Schwartz [2], (2.10) page 35. Désintégration stricte : loc. cit. théorème (2.20) page 39 ; on appelle désintégration stricte une désintégration ayant la propriété indiquée dans ce théorème.

b) $P^{\sigma,\mu}$ est l'intégrale des $P^{\sigma,x}$ par rapport à la mesure image $X^\sigma(P^{\sigma,\mu}) = \mu^{\natural}$. En effet, $P^{\sigma,\mu} = P^{\sigma,\mu^{\natural}}$ (d'après (4.6))

$$= \int \mu^{\natural}(dx)\, P^{\sigma,x}$$

par définition de $P^{\sigma,\mu^{\natural}}$;

c) Pour $\mu^{\natural}$-presque tout x, $X^\sigma(P^{\sigma,x}) = P(\sigma,\sigma\ ;x) = \delta_x$ par (4.6).

Remarque (4.7 bis). – Les désintégrations permettent de parler de lois conditionnelles ; lorsqu'on donne l'information supplémentaire $X^\sigma = x$, la loi conditionnelle, partant de $P^{\sigma,\mu}$, est $P^{\sigma,x}$ [La normalité n'est pas nécessaire pour cela ; dans les désintégrations ou lois conditionnelles, on ne s'intéresse qu'à $X^\sigma(P^{\sigma,\mu}) = \mu^{\natural}$-presque tous les x, et $\mu^{\natural}$-presque tout x est σ-normal]. Et alors la loi conditionnelle de X^t, $t \geqslant \sigma$, sera $X^t(P^{\sigma,x}) = P(\sigma, t\ ;x)$. La probabilité de transition est donc bien ce qu'on pense ; avec l'information supplémentaire $X^\sigma = x$, à partir de $P^{\sigma,\mu}$, la loi conditionnelle de X^t est $P(\sigma, t\ ;x)$.

(4.8) *Extensions et nouvelles écritures.*

On peut se borner à considérer les temps $t \in \mathrm{R}$, sous-ensemble arbitraire de $\mathbf{R}$, et construire alors une probabilité de même nature sur $(E^{\mathrm{R}}, \otimes^{\mathrm{R}} \mathscr{E})$; elle n'est autre que la projection de $P^{\sigma,\mu}$ sur cet espace, par la projection naturelle $E^{\mathbf{R}} \longrightarrow E^{\mathrm{R}}$. On est alors amené à de nouvelles notations. D'abord on posera $P(s, \{t\}\ ;\mu)$ ou

$$P(s, t\ ;\mu) = \int \mu(dx)\, P(s, t\ ;x)\ ;$$

alors $X^t(P^{\sigma,\mu}) = P(\sigma, t\ ;\mu)$. Puis, pour $\mathrm{R} \subset \mathbf{R}$ quelconque, on notera $P(\sigma, \mathrm{R}\ ;\mu)$ la probabilité analogue à $P^{\sigma,\mu}$, construite sur E^{R}, $\otimes^{\mathrm{R}} \mathscr{E}$; $P^{\sigma,\mu} = P(\sigma, \mathbf{R}\ ;\mu)$. X^t étant la projection sur $E^{\{t\}} = E$, on pourra noter X^{R} la projection sur E^{R}, alors

$$X^{\mathrm{R}}\, P(\sigma, \mathbf{R}\ ;\mu) = P(\sigma, \mathrm{R}\ ;\mu)\,.$$

On pourra alors généraliser (4.5) comme suit :

PROPOSITION (4.8). – *Soient*

$$]s_1, t_1],\ ]s_2, t_2] \ldots,\ ]s_{n-1}, t_{n-1}],\ ]s_n, t_n[$$

une suite d'intervalles de $\mathbf{R}$; $|$ *veut dire* $]$ *ou* $[$, *l'intervalle contient ou non son extrémité gauche ; tous les intervalles contiennent leur extrémité droite, sauf peut-être le dernier ;* $t_i < s_{i+1}$ *si* $|s_{i+1}, t_{i+1}]$ *contient son extrémité gauche,* $t_i \leqslant s_{i+1}$ *s'il ne la contient pas (autrement dit les intervalles sont disjoints et vont en croissant). On suppose que* $s_k = \sigma$. *Alors, si l'on appelle* ω_i *la projection de* $\omega \in E^{\mathbf{R}}$ *sur* $E^{|s_i, t_i]}$ ($E^{|s_n, t_n|}$ *pour le dernier), ou encore si on appelle*

$$(\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_n)$$

un point courant de $E^{\bigcup_i |s_i, t_i]}$ *ou* $\prod_{i=1,2,\ldots,n} E^{|s_i, t_i]}$ *(toujours* $|s_n , t_n|$ *pour le dernier), on aura :*

$$P(\sigma, \bigcup_i |s_i , t_i] \;;\; \mu)\, (d\omega_1 , d\omega_2 , \ldots d\omega_n) =$$

$$\int_{x\in E} \mu(dx)\; (\otimes^{|s_1 , t_1]} \delta_\nabla)\, (d\omega_1) \ldots (\otimes^{|s_{k-1} , t_{k-1}]} \delta_\nabla)\, (d\omega_{k-1})$$

$$P(\sigma , |\sigma , t_k] \;;\; x)\, (d\omega_k)\; P(t_k , |s_{k+1} , t_{k+1}] \;;\; X^{t_k}(\omega_k))\, (d\omega_{k+1})$$

$$\ldots P(t_{n-1} , |s_n , t_n| \;;\; X^{t_{n-1}}(\omega_{n-1}))\, (d\omega_n)\,. \tag{4.8 bis}$$

Démonstration. — Elle ne comporte que des difficultés d'écriture : On démontre l'égalité des projections des deux membres sur les produits finis. Bornons-nous à un cas simple qui suffira pour comprendre. Soit à calculer

$$P(\sigma , [\sigma , t_1] \cup]t_1 , t_2] \;;\; x)\,.$$

Bornons-nous à sa projection sur $E^{\{\sigma, t_1 , t_2\}}$.

C'est $P(\sigma , \sigma ; x)\, (dx_0)\; P(\sigma , t_1 ; x_0)\, (dx_1)\; P(t_1 , t_2 ; x_1)\, (dx_2)$.

Considérons maintenant l'autre membre,

$$P(\sigma , [\sigma , t_1] \;;\; x)\, (d\omega_1)\; P(t_1 ,]t_1 , t_2] \;;\; X^{t_1}(\omega_1))\, (d\omega_2)\,.$$

Sa projection par $(\mathrm{I}d , X^{t_2})$ est

$$P(\sigma , [\sigma , t_1] \;;\; x)\, (d\omega_1)\; P(t_1 , t_2 \;;\; X^{t_1}(\omega_1))\, (dx_2)$$

Il faut maintenant prendre la projection $(X^\sigma , X^{t_1} , \mathrm{I}d)$ de ce dernier. On sait que si $\nu(d\omega_1)$ est une mesure, dont la projection par (X^σ , X^{t_1})

est $\rho(dx_0, dx_1)$, la projection de $h(X^{t_1}(\omega_1))\,\nu(d\omega_1)$ est

$$h(x_1)\,\rho(dx_0, dx_1)\,.$$

Or la projection de $P(\sigma, [\sigma, t_1]; x)(d\omega_1)$ par (X^σ, X^{t_1}) est

$$P(\sigma, \sigma; x)(dx_0)\,P(\sigma, t_1; x_0)(dx_1)\,.$$

Donc celle de

$$P(\sigma, [\sigma, t_1]; x)(d\omega_1)\,P(t_1, t_2; X^{t_1}(\omega_1))(dx_2)$$

est

$$P(\sigma, \sigma; x)(dx_0)\,P(\sigma, t_1; x_0)(dx_1)\,P(t_1, t_2; x_1)(dx_2)\,.$$

Les deux projections sont bien les mêmes.

Remarque (4.8 ter). – On peut aussi considérer le cas plus général d'intervalles $|s_1, t_1], \ldots, |s_{n-1}, t_{n-1}], |s_n, t_n|$, avec seulement l'inégalité large $t_i \leqslant s_{i+1}$ dans tous les cas. Alors deux intervalles peuvent avoir une extrémité commune. On ne devra alors plus parler de $P(\sigma, \bigcup_i |s_i, t_i]; \mu)$, mais seulement de $(X^{|s_1, t_1]} \ldots X^{|s_n, t_n|})(P^{\sigma,\mu})$, probabilité sur $\Pi E^{|s_i, t_i]}$; moyennant quoi (4.8 bis) subsistera. Elle se démontrera encore par l'égalité des projections sur les produits finis, en utilisant la remarque (4.5 ter). On pourra le comprendre simplement comme ci-dessus en prenant $\mu = \delta_x$, les intervalles $[\sigma, t_1], [t_1, t_2]$, ayant une extrémité commune t_1, et en prenant les images des deux membres par $((X^\sigma, X^{t_1}), (X^{t_1}, X^{t_2}))$ sur $E^{(\sigma, t_1, t_1, t_2)} \simeq E^4$. La projection de

$$(X^{[\sigma, t_1]}, X^{[t_1, t_2]})(P^{\sigma, x}) \quad \text{par} \quad (X^\sigma, X^{t_1}, X^{t_1}, X^{t_2})$$

n'est autre que $(X^\sigma, X^{t_1}, X^{t_1}, X^{t_2})(P^{\sigma, x})$, c'est-à-dire

$$P(\sigma, \sigma; x)(dx_0)\,P(\sigma, t_1; x_0)(dx_1)\,P(t_1, t_1; x_1)(dx_1')$$
$$P(t_1, t_2; x_1')(dx_2),$$

par (4.5 ter). Cherchons la projection de

$$P(\sigma, [\sigma, t_1]; x)(d\omega_1)\,P(t_1, [t_1, t_2]; X^{t_1}(\omega_1))(d\omega_2)$$

D'abord sa projection par $(\mathrm{Id}, (X^{t_1}, X^{t_2}))$ est

$$P(\sigma, [\sigma, t_1]; x)(d\omega_1)\,P(t_1, t_1; X^{t_1}(\omega_1))\,dx_1')\,P(t_1, t_2; x_1')(dx_2)\,.$$

On doit ensuite prendre l'image de celle-ci par $((X^\sigma, X^{t_1}), \mathrm{Id})$. On fera la même remarque que ci-dessus pour $h(X^{t_1}(\omega_1))\,\nu(d\omega_1)$; sachant que l'image de $P(\sigma, [\sigma_1, t_1]; x)(d\omega_1)$ est

$$P(\sigma, \sigma; x)(dx_0)\, P(\sigma, t_1; x_0)(dx_1),$$

l'image cherchée sera

$$P(\sigma, \sigma; x)(dx_0)\, P(\sigma, t_1; x_0)(dx_1)\, P(t_1, t_1; x_1)(dx'_1)$$
$$P(t_1, t_2; x'_1)(dx_2).$$

Les deux projections sont bien les mêmes.

(4.9) *La relation généralisée de Chapman-Kolmogorov* s'écrit aussitôt, pour $r \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant v$:

$$\int_{\alpha \in E^{|s,t]}} P(r, |s, t]; x)(d\alpha)\, P(t, |u, v|; X^t(\alpha)) = P(r, |u, v|; x).$$

Ecrivons en effet (4.8 bis) (ou 4.8 ter)) pour $\sigma = r$, et les intervalles $|s, t]$, $|u, v|$:

$$P(r, |s, t] \cup |u, v|; x)(d\alpha, d\beta) = P(r, |s, t]; x)(d\alpha)$$
$$P(t, |u, v|; X^t(\alpha)(d\beta).$$

Projetons sur $E^{|u,v|}$, ce qui revient aussi à intégrer en α :

$$P(r, |u, v|; x)(d\beta) = \int_{\alpha \in E^{|s,t]}} P(r, |s, t]; x)(d\alpha)$$
$$P(t, |u, v|; X^t(\alpha)(d\beta),$$

ce qui est la formule cherchée (en supprimant $d\beta$).

5. Les tribus, et les désintégrations λ_ω^s.

Nous appellerons $\mathcal{U}^t$ (tribu du passé du temps t) la tribu (sur Ω) engendrée par les projections X^s, $s \leqslant t$, de $E^{\mathbf{R}}$ sur E muni de sa tribu borélienne. Ensuite $\overline{\mathcal{U}^t}$ sera sa complétée universelle,

$$\overline{\mathcal{U}^t} = \bigcap_{\lambda} \mathcal{U}^t \vee \mathcal{N}_\lambda ,$$

où $\mathcal{N}_\lambda$ est la tribu des parties λ-négligeables ou conégligeables, λ probabilité abstraite arbitraire sur $(E^{\mathbf{R}}, \otimes^{\mathbf{R}} \mathcal{E})$ (12).

Pour définir λ^s_ω, nous pourrons le faire par ses projections ; pour $t_1 < t_2 < \cdots t_{k-1} < s \leqslant t_k < \cdots < t_n$, on posera :

$$(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n})(\lambda^s_\omega) \tag{5.1}$$

$$= \delta_{X^{t_1}(\omega)}(dx_1)\,\delta_{X^{t_2}(\omega)}(dx_2)\cdots\delta_{X^{t_{k-1}}(\omega)}(dx_{k-1})$$

$$P(s, t_k; X^s(\omega))(dx_k)\,P(t_k, t_{k+1}; x_k)(dx_{k+1})\cdots$$

$$P(t_{n-1}, t_n; x_{n-1})(dx_n).$$

On a en particulier la formule fondamentale

$$X^t(\lambda^s_\omega) = P(s, t; X^s(\omega)) \quad \text{pour} \quad t \geqslant s. \tag{5.1 bis}$$

Cela revient à considérer $E^{\mathbf{R}}$ comme produit $E^{]-\infty, s[} \times E^{[s, +\infty[}$; alors λ^s_ω est le produit tensoriel de la première projection de δ_ω par la deuxième projection de $P^{s, X^s(\omega)}$. Ou encore, en utilisant la notation produit, $\omega = (\alpha, \beta)$:

$$\lambda^s_{\alpha,\beta} = \delta_\alpha \otimes \mathrm{pr}_2\, P^{s, X^s(\beta)} \quad (\mathrm{pr}_2 = \text{deuxième projection}). \tag{5.2}$$

On utilisera avantageusement la notation de (4.8), avec les 2 intervalles $]-\infty, s[$, $[s, +\infty[$ (ici on prend le premier intervalle ouvert à droite) ; pour $\omega = (\alpha, \beta)$:

$$\lambda^s_{\alpha,\beta}(d\alpha', d\beta') = \delta_\alpha(d\alpha')\,P(s, [s, +\infty[\,; X^s(\beta))(d\beta'). \tag{5.3}$$

Si on veut s'en tenir aux indications de l'énoncé (4.8), où tous les intervalles (sauf peut-être le dernier) sont fermés à droite, on devra prendre les intervalles $]-\infty, s-\epsilon]$, $[s, +\infty[$ (donc laisser tomber une partie de l'information sur λ^s_ω) et écrire la projection de λ^s_ω sur

(12) Le mot "complétée universelle" est à la rigueur correct. Mais on dira ici qu'une tribu $\mathcal{T}$ est universellement complète si $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$; toute complétée universelle est universellement complète. Là il faut avouer que l'expression est assez impropre ; si $\mathcal{T}$ est universellement complète, cela ne veut pas dire que, pour toute λ, elle est λ-complète, mais qu'elle est contenue dans $\mathcal{T} \vee \mathcal{N}_\lambda$.

$$E^{]-\infty, s-\epsilon]} \times E^{[s, +\infty[}$$

comme

$$X^{]-\infty, s-\epsilon] \cup [s, +\infty[} \lambda^s_\omega = \delta_\alpha(d\alpha') \, P(s \, , [s \, , + \infty[\; ; X^s(\beta)) \, (d\beta'), \tag{5.4}$$

si $\qquad X^{]-\infty, s-\epsilon]}(\omega) = \alpha \, , X^{[s, +\infty[}(\omega) = \beta \, .$

On remarque alors que $X^{]-\infty, s-\epsilon] \cup [s, +\infty[}(\lambda^s_\omega)$ ne dépend que de $(\alpha \, , \beta)$, projection de ω sur $E^{]-\infty, s-\epsilon]} \times E^{[s, +\infty[}$, et on aura :

$$\lambda^s_{\alpha, \beta}(d\alpha', d\beta') = \delta_\alpha(d\alpha') \, P(s \, , [s \, , + \infty[\; ; X^s(\beta)) \, (d\beta') \tag{5.4 bis}$$

On introduira aussi les tribus d'avenir. La tribu ${}^t\mathfrak{U}$ de l'avenir du temps t (la notation est commode : pour la tribu du passé de t, $\mathfrak{U}$ est avant t, $\mathfrak{U}^t$, tandis que, pour la tribu de l'avenir de t, $\mathfrak{U}$ est après t, ${}^t\mathfrak{U}$) est celle qui est engendrée par les X^s, $s \geqslant t$. Alors les formules précédentes donnent trivialement :

Proposition (5.4 ter). — *Les probabilités* λ^s_ω *et* $P^{s, X^s(\omega)}$ *coïncident sur la tribu* ${}^s\mathfrak{U}$ *de l'avenir du temps s.*

Proposition (5.5). — *Une désintégration de* $P^{\sigma, \mu}$ *relativement à la tribu* $\overline{\mathfrak{U}}^s$ *est donné par* $\omega \mapsto P^{\sigma, \mu}$ *si* $s < \sigma$, *et par* $\omega \mapsto \lambda^s_\omega$ *si* $s \geqslant \sigma$. *C'est aussi une désintégration relativement à* $\mathfrak{U}^s$ *si*

$$x \mapsto P(s \, , t \; ; x)$$

est continue pour la topologie étroite.

Démonstration. — Il suffit de le faire pour $\mu = \delta_x$ (13).

A) Prenons d'abord $s \geqslant \sigma$.

On montrera les 3 propriétés caractéristiques de la désintégration (14) :

a) $\omega \mapsto \lambda^s_\omega$ appartient à la tribu $\overline{\mathfrak{U}^s}$. Avec la notation (5.2), nous devons montrer que $(\alpha \, , \beta) \mapsto \lambda^s_{\alpha, \beta}$ appartient à $\overline{\mathfrak{U}^s}$. C'est

(13) Schwartz [2], proposition (3.13), page 62 : si des mesures admettent, relativement à une tribu, la même désintégration, toute intégrale de ces mesures admet la même désintégration.

(14) Schwartz [2], proposition (2.18), p. 37.

évident, car $\alpha \mapsto \delta_\alpha$ appartient à la tribu $\otimes^{]-\infty, s[}\, \mathcal{E} \subset \mathcal{U}^s$; ensuite $x \mapsto P^{\sigma, x}$ appartient, d'après (4.7), à la tribu universellement mesurable $\mathcal{E}$; alors $\beta \to P^{s, X^s(\beta)}$ appartient à l'image réciproque $(X^s)^{-1}(\mathcal{E})$; comme $(X^s)^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{U}^s$, $(X^s)^{-1}(\mathcal{E}) \subset \bar{\mathcal{U}}^s$.

b) $P^{\sigma, x}$ est l'intégrale des λ^s_ω par rapport à elle-même. Il suffit de montrer que les projections sur tout produit fini sont égales, c'est-à-dire que

$$(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(P^{\sigma, x}) = \int P^{\sigma, x}(d\omega)\,(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})(\lambda^s_\omega).$$

On pourra alors le faire avec les notations (4.9) et (5.3). Soit d'abord $\sigma < s$. On utilisera les 3 intervalles

$$J_1 =]-\infty, \sigma - \epsilon],\ J_2 = [\sigma, s - \epsilon],\ J_3 = [s, +\infty[\ ;$$

tout ensemble fini de $\mathbf{R}$ est contenu dans une réunion de 3 tels intervalles. On posera $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$; on appellera (α, β, γ) ou $(\alpha', \beta', \gamma')$ un point courant de $E^{J_1} \times E^{J_2} \times E^{J_3}$.

On a vu que $X^J(\lambda^s_\omega) = \lambda^s_{X^J(\omega)} = \lambda^s_{\alpha, \beta, \gamma}$, suivant (5.4 bis), et on veut montrer que $\int P^{\sigma, x}(d\omega)\, X^J(\lambda^s_\omega) = X^J(P^{\sigma, x})$. (5.4 bis) donne :

$$\lambda^s_{\alpha, \beta, \gamma}(d\alpha', d\beta', d\gamma')$$
$$= \delta_\alpha(d\alpha')\,\delta_\beta(d\beta')\,P(s, [s, +\infty[\ ; X^s(\gamma))(d\gamma')\,. \quad (5.6)$$

Alors

$$\int P^{\sigma, x}(d\omega)\, X^J(\lambda^s_\omega) = \int P^{\sigma, x}(d\omega)\, \lambda^s_{X^J(\omega)}$$
$$= \int (X^J(P^{\sigma, x}))(d\alpha, d\beta, d\gamma)\, \lambda^s_{\alpha, \beta, \gamma}\,. \quad (5.7)$$

Or

$$(X^J P^{\sigma, x})(d\alpha, d\beta, d\gamma) = (\otimes^{]-\infty, \sigma - \epsilon]}\, \delta_\nabla)(d\alpha)\, P(\sigma, [\sigma, s - \epsilon]\ ; x)(d\beta)$$
$$P(s - \epsilon, [s, +\infty[\ ; X^{s-\epsilon}(\beta))(d\gamma)\,. \quad (5.8)$$

Il nous faut donc intégrer (5.6) en $d\alpha, d\beta, d\gamma$ par rapport à la mesure (5.8). On trouve (compte tenu de ce que $\int \delta_t\, \nu(dt) = \nu$, et

$$\int f(t)\, \delta_t\, \nu(dt) = f\nu)$$

$$(\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha')\;\mathrm{P}(\sigma,[\sigma,s-\epsilon]\;;x)\,(d\beta')$$

$$\int_\gamma \mathrm{P}(s-\epsilon,[s,+\infty[\;;\mathrm{X}^{s-\epsilon}(\beta'))\,(d\gamma)\,\mathrm{P}(s,[s,+\infty[\;;\mathrm{X}^s(\gamma))\,(d\gamma'). \tag{5.9}$$

Mais la dernière intégrale s'écrit aussi([15]) :

$$\int_z (\mathrm{X}^s(\mathrm{P}(s-\epsilon,[s,+\infty[\;;\mathrm{X}^{s-\epsilon}(\beta'))))\,(dz)\;\mathrm{P}(s,[s,+\infty[\;;z)\,(d\gamma')$$

$$=\int_z \mathrm{P}(s-\epsilon,s\;;\mathrm{X}^{s-\epsilon}(\beta'))\,(dz)\;\mathrm{P}(s,[s,+\infty]\;;z)\;(d\gamma')\,,$$

qui, d'après Chapman-Kolmogorov (4.9), vaut

$$\mathrm{P}(s-\epsilon,[s+\infty]\;;\mathrm{X}^{s-\epsilon}(\beta'))\,(d\gamma')\,.$$

Alors l'intégrale de (5.6) en $d\alpha, d\beta, d\gamma$, par rapport à la mesure (5.8), vaut exactement $(\mathrm{X}^{\mathrm{J}}\,\mathrm{P}^{\sigma,x})\,(d\alpha', d\beta', d\gamma')$. On a donc montré que $\int (\mathrm{X}^{\mathrm{J}}\,\lambda^s_\omega)\,\mathrm{P}^{\sigma,x}(d\omega) = \mathrm{X}^{\mathrm{J}}\mathrm{P}^{\sigma,x}$, ce qui démontre b) pour $\sigma < s$.

Supposons maintenant $s = \sigma$. Il n'y a plus à prendre que deux intervalles, $]-\infty,\sigma-\epsilon]$ et $[\sigma,+\infty[$. (5.6) est à remplacer par

$$\lambda^\sigma_{\alpha,\beta}(d\alpha', d\beta') = \delta_\alpha(d\alpha')\;\mathrm{P}(\sigma,[\sigma+\infty]\;;\mathrm{X}^\sigma(\beta))\,(d\beta')\;; \tag{5.10}$$

(5,8) est à remplacer par :

$$(\mathrm{X}^{\mathrm{J}}\mathrm{P}^{\sigma,\mu})\,(d\alpha\,,d\beta) = (\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha)\;\mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\;;x)\,(d\beta) \tag{5.11}$$

Alors l'intégrale de (5,10) en $d\alpha$, $d\beta$ par rapport à la mesure (5.11) est

$$(\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha')$$

$$\int_\beta \mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\,;x)\,(d\beta)\;\mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\;;\mathrm{X}^\sigma(\beta))\,(d\beta')$$

---

(15) C'est la propriété de la mesure image. Soit m une mesure sur $(\mathrm{X}\,,\mathfrak{X})$, h une application m-mesurable de X dans $(\mathrm{Y}\,,\mathfrak{Y})$. Si f est une fonction réelle (ou à valeurs mesures sur $(\mathrm{Z}\,,\mathfrak{Z})$), $h\,(m)$-mesurable, alors $(h\,(m))\,(f) = m\,(f\circ h)$, c'est-à-dire $\int_\mathrm{Y} f(y)\,(hm)\,(dy) = \int_\mathrm{X} f(h\,(x))\,m\,(dx)$.

$$= (\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha)$$

$$\int_z (\mathrm{X}^\sigma(\mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\ ;x))\,(dz)\ \mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\ ;\ z)\,(d\beta')$$

$$= (\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha')\int_z \mathrm{P}(\sigma,\sigma\ ;x)\,(dz)\ \mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\ ;z)\,(d\beta')$$

= (d'après Chapman-Kolmogorov, (4.9)) :

$$(\otimes^{]-\infty,\sigma-\epsilon]}\,\delta_\nabla)\,(d\alpha')\ \mathrm{P}(\sigma,[\sigma,+\infty]\ ;x)\,(d\beta') = (\mathrm{X}^{\mathrm{J}}\mathrm{P}^{\sigma,x})\,(d\alpha',d\beta')$$

ce qui achève de démontrer b).

c) Pour $\mathrm{P}^{\sigma,\mu}$ – presque tout ω, λ^s_ω est extérieurement portée par l'atome de ω dans $\overline{\mathfrak{U}^s}$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{U}^s$, qui est l'ensemble des trajectoires coincidant avec ω aux temps $\leqslant s$. La formule (5.2) montre que c'est vrai pour *tout* ω pour les temps $< s$; en effet, δ_α est extérieurement portée par α, i.e. $(\delta_\alpha)^*(\{\alpha\}) = 1$ (mais pour la mesure $\delta_{(\alpha)}$ sur la tribu $\otimes^{]-\infty,s[}\,\mathcal{E}$, $\{\alpha\}$ n'est pas mesurable, on n'a donc pas $\delta_\alpha\{\alpha\} = 1$). D'autre part, $\mathrm{X}^s(\lambda^s_\omega) = \mathrm{P}(s\,,s\ ;\mathrm{X}^s(\omega))$; ceci est égal à $\delta_{\mathrm{X}^s(\omega)}$ si et seulement si $\mathrm{X}^s(\omega)$ est s-normal ; or, pour $\mathrm{P}^{\sigma,x}$ – presque tout ω, $\mathrm{X}^s(\omega)$ est s-normal, si et seulement si, pour $(\mathrm{X}^s\mathrm{P}^{\sigma,x})$ – presque tout y, y est s-normal, c'est-à-dire si, pour $\mathrm{P}(\sigma\,,s\ ;x)$ – presque tout y, $\mathrm{P}(s\,,s\ ;y) = \delta_y$, ce qui est (3.2).

Alors, si $\mathrm{A}\in\overline{\mathfrak{U}^s}$, pour $\mathrm{P}^{\sigma,x}$ – presque tout $\omega\in\mathrm{A}$, λ^s_ω est extérieurement portée par l'atome de ω dans $\overline{\mathfrak{U}^s}$ donc par A ; mais A est universellement mesurable, donc λ^s_ω est portée par A, et on a donc toutes les conditions requises pour une désintégration. CQFD.

B) Il reste à considérer le cas $s<\sigma$. On sait(16) que $\mathrm{P}^{\sigma,x}$ est désintégrée relativement à $\overline{\mathfrak{U}^s}$, par une constante égale à elle-même, si et seulement si $\mathrm{P}^{\sigma,\mu}$ est ergodique pour $\overline{\mathfrak{U}^s}$, c'est-à-dire donne à toute partie de $\overline{\mathfrak{U}^s}$ la mesure 0 ou 1. C'est forcément vrai si $\mathrm{P}^{\sigma,\mu}$ est exté-

(16) C'est évident. Pour que P soit désintégrée, pour une tribu $\mathfrak{T}$, par $\omega\to\mathrm{P}$, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité de la désintégration

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \int_\mathrm{A}\mathrm{P}(\mathrm{B})\,\mathrm{P}(d\omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{B})\,,$$

$\mathrm{A}\in\mathfrak{T}$, $\mathrm{B}\in\mathfrak{O}$. Cela donne, en faisant $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = (\mathrm{P}(\mathrm{A}))^2$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou 1. Inversement, si $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ ou 1, on a bien $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{B}\in\mathfrak{O}$.

rieurement portée par un atome a de $\overline{\mathcal{U}^s}$ (donc de $\mathcal{U}^s$) ; en effet, dans ce cas, pour tout $A \in \overline{\mathcal{U}^s}$, si $a \in A$, $(P^{\sigma,\mu})^*(A) \geqslant (P^{\sigma,\mu})^*(a) = 1$, mais A est mesurable, donc $P^{\sigma,\mu}(A) = 1$; si $a \notin A$, $P^{\sigma,\mu}(\complement A) = 1$ donc $P^{\sigma,\mu}(A) = 0$. Or $P^{\sigma,\mu}$ est extérieurement portée par l'ensemble des trajectoires qui sont en ∇ aux temps $< \sigma$ donc aux temps $\leqslant s$, ensemble qui est un atome de $\mathcal{U}^s$.

PROPOSITION (5.12). – *La famille des $\lambda^t_{\omega'}$ est autodésintégrante : λ^s_ω admet pour désintégration, relativement à la tribu $\overline{\mathcal{U}^t}$ (et pour la tribu $\mathcal{U}^t$ si $x \mapsto P(s, t; x)$ est continue pour la topologie étroite), $\omega' \mapsto \lambda^s_\omega$ si $t < s$, et $\omega' \mapsto \lambda^t_{\omega'}$ si $t \geqslant s$* (17).

Démonstration. – On vérifie, comme dans la démonstration de (5.5), les conditions a, b, c.

a) $\omega' \mapsto \lambda^s_\omega$, $\omega' \mapsto \lambda^t_{\omega'}$, appartiennent à la tribu $\overline{\mathcal{U}^t}$; déjà vu.

b) λ^s_ω est évidemment l'intégrale de la constante $\omega' \mapsto \lambda^s_\omega$ par rapport à elle-même. D'autre part, elle est l'intégrale de $\omega' \mapsto \lambda^t_{\omega'}$ par rapport à elle-même, pour $t \geqslant s$. La démonstration est identique à celle de (5.5). Faisons-là très rapidement. On choisira, en supposant $t > s$,

$$J_1 =]-\infty, s-\epsilon], J_2 = [s, t-\epsilon],$$

et $$J_3 = [t, +\infty[, J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 .$$

On devra montrer que :

$$\int \lambda^s_\omega(d\omega')\, X^J(\lambda^t_{\omega'}) = X^J(\lambda^s_\omega),$$

ce qui revient, puisque

$$X^J(\lambda^t_{\omega'}) = \lambda^t_{X^J(\omega')}$$

à $$\int (X^J\lambda^s_\omega)(d\alpha', d\beta', d\gamma')\, \lambda^t_{\alpha',\beta',\gamma'} = X^J(\lambda^s_\omega)$$

ou $$\int \lambda^s_{\alpha,\beta,\gamma}(d\alpha', d\beta', d\gamma')\, \lambda^t_{\alpha',\beta',\gamma'} = \lambda^s_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

On a successivement

(17) Voir [Schwartz], théorème 96.8), p. 132.

$$\lambda^t_{\alpha',\beta',\gamma'}(d\alpha'',d\beta'',d\gamma'') = \delta_{\alpha'}(d\alpha'')\,\delta_{\beta'}(d\beta'')\qquad (5.13)$$
$$\mathrm{P}(t\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^t(\gamma'))\,(d\gamma'')$$

$$\lambda^s_{\alpha,\beta,\gamma}(d\alpha',d\beta',d\gamma') = \delta_\alpha(d\alpha')\,\mathrm{P}(s\,,[s\,,t-\epsilon]\,;\mathrm{X}^s(\beta))\,(d\beta')\qquad (5.14)$$
$$\mathrm{P}(t-\epsilon\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^{t-\epsilon}(\beta'))\,(d\gamma').$$

Alors

$$\int_{\alpha',\beta',\gamma'} \mathrm{X}^s_{\alpha,\beta,\gamma}(d\alpha',d\beta',d\gamma')\,\lambda^t_{\alpha',\beta',\gamma'}(d\alpha'',d\beta'',d\gamma'')$$
$$= \delta_\alpha(d\alpha'')\,\mathrm{P}(s\,,[s\,,t-\epsilon]\,;\mathrm{X}^s(\beta))\,(d\beta'')$$
$$\int_{\gamma'} \mathrm{P}(t-\epsilon\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^{t-\epsilon}(\beta''))\,(d\gamma')$$
$$\mathrm{P}(t\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^t(\gamma'))\,(d\gamma'')$$
$$= \delta_\alpha(d\alpha'')\,\mathrm{P}(s\,,[s\,,t-\epsilon]\,;\mathrm{X}^s(\beta))\,(d\beta'')$$
$$\int_z (\mathrm{X}^t\mathrm{P}(t-\epsilon\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^{t-\epsilon}(\beta'')))(dz)$$
$$\mathrm{P}(t\,,[t\,,+\infty[\,;z)\,(d\gamma'')$$
$$= \delta_\alpha(d\alpha'')\,\mathrm{P}(s\,,[s\,,t-\epsilon]\,;\mathrm{X}^s(\beta))\,d\beta''$$
$$\int_z \mathrm{P}(t-\epsilon\,,t\,;\mathrm{X}^{t-\epsilon}(\beta''))\,(dz)$$
$$\mathrm{P}(t\,,[t\,,+\infty[\,;z)\,(d\gamma'')$$
$$= (\text{Chapman-Kolmogorov})\ \delta_\alpha(d\alpha'')\,\mathrm{P}(s\,,[s\,,t-\epsilon[\,;\mathrm{X}^s(\beta))\,(d\beta'')$$
$$\mathrm{P}(t-\epsilon\,,[t\,,+\infty[\,;\mathrm{X}^{t-\epsilon}(\beta''))\,(d\gamma'')$$
$$= \lambda^s_{\alpha,\beta,\gamma}(d\alpha'',d\beta'',d\gamma'').$$

Nous laissons au lecteur le cas $t = s$, qui se traite par partage en deux intervalles, $]-\infty\,,s-\epsilon]$, $[s\,,+\infty[$.

c) Soit $t \geqslant s$. Pour tout ω', $\lambda^t_{\omega'}$ est extérieurement portée par l'ensemble des trajectoires qui coïncident avec ω' aux instants $< t$ (c'est le c) de la démonstration de (5.5)). Ensuite $\lambda^t_{\omega'}$ est portée par l'ensemble des trajectoires coincidant avec ω' à l'instant t, si et seulement si $\mathrm{X}^t(\omega')$ est t-normal ; or $\mathrm{X}^t(\omega')$ est t-normal pour λ^s_ω-presque tout ω', si et seulement si y est t-normal pour $\mathrm{X}^t(\lambda^s_\omega)$-presque tout y, ou $\mathrm{P}(s\,,t\,;\mathrm{X}^s(\omega))$-presque tout y, ce qui résulte de (3.2). Donc λ^s_ω est extérieurement portée par l'ensemble des trajectoires coïncidant avec

ω aux instants $\leqslant t$, c'est-à-dire par l'atome de ω dans $\overline{\mathcal{U}^t}$. On démontre alors, comme dans (A, c) de (5.5), que si $A \in \overline{\mathcal{U}^t}$, pour λ^s_ω-presque tout $\omega' \in A$, $\lambda^t_{\omega'}$ est portée par A, donc $\omega' \longrightarrow \lambda^t_{\omega'}$ est une désintégration de λ^s_ω pour $\overline{\mathcal{U}^t}$.

Soit maintenant $t < s$. La mesure λ^s_ω est extérieurement portée par l'ensemble des trajectoires qui coïncident avec celle de ω aux temps $< s$, donc aux temps $\leqslant t$, ensemble qui est un atome dans $\mathcal{U}^t$. Donc comme dans (B) de la démonstration de (5.5), λ^s_ω est désintégrée sur $\overline{\mathcal{U}^t}$ par la constante λ^s_ω.

6. Les fonctions excessives et les potentiels.

Nous ferons la théorie minimale nécessaire pour démontrer plus loin la régularité des trajectoires.

DEFINITION (6.1). – *Une fonction $f \geqslant 0$ sur* $\mathbf{R} \times$ E, *c'est-à-dire une famille $(f^t)_{t\in\mathbf{R}}$ de fonctions $\geqslant 0$ sur* E, *est dite excessive, si les f^t sont universellement mesurables, et si, pour tous s, t, $s \leqslant t$, $P^{s,t} f^t \leqslant f^s$ et converge simplement vers f^s quand t tend vers s. Elle est dite α-excessive, $\alpha \geqslant 0$, si la famille $(e^{-\alpha t} f^t)_{t\in\mathbf{R}}$ est excessive ; une fonction excessive est donc 0-excessive, et une fonction α-excessive est β-excessive pour $\beta \geqslant \alpha$.*

PROPOSITION (6.2). – *Si f est excessive, alors, pour tout s, la fonction $t \mapsto P^{s,t} f^t$ est décroissante, et continue à droite pour la convergence simple sur* E.

Démonstration. – Cela résulte aussitôt de ce que

$$P^{r,t} f^t = P^{r,s}(P^{s,t} f^t),$$

$r \leqslant s \leqslant t$, et du passage à la limite des intégrales pour les suites croissantes de fonctions.

PROPOSITION (6.3). – *Soient σ, $r \in \mathbf{R}$, et μ de Radon sur* E. *Si f est excessive, le processus $(f^t \circ X^t)_{t\in\mathbf{R}}$ est une surmartingale à intégrales continues à droites, pour les tribus $(\overline{\mathcal{U}^t})_{t\in\mathbf{R}}$ pour $t \geqslant \sigma$ relativement à la probabilité $P^{\sigma,\mu}$, pour $t \geqslant r$ relativement à la probabilité λ^r_ω.*

Démonstration. – Soient $\sigma \leqslant s \leqslant t$, ou $r \leqslant s \leqslant t$.

L'espérance conditionnelle de $f^t \circ X^t$ relativement à la tribu $\overline{\mathcal{U}^s}$ et la probabilité $P^{\sigma,\mu}$ ou λ^r_ω, est

$$\omega' \mapsto \lambda^s_{\omega'}(f^t \circ X^t) = (X^t(\lambda^s_{\omega'}))(f^t) = (P^{s,t}f^t)(X^s(\omega')) \\ \leqslant f^s(X^s(\omega')),$$

puisque f est excessive.

Montrons la continuité à droite des intégrales, en nous bornant par exemple à $P^{\sigma,\mu}$:

$$P^{\sigma,\mu}(f^t \circ X^t) = (X^t P^{\sigma,\mu})(f^t) = \int \mu(dx)\, P(\sigma, t; x)(f^t) \\ = \mu(P^{\sigma,t}f^t);$$

c'est bien une fonction de t décroissante et continue à droite puisque f est excessive.

Pour les potentiels, on peut aussi partir d'une fonction sur $\mathbf{R} \times E$; nous aurons besoin dans la suite seulement des potentiels d'une fonction sur E.

DEFINITION (6.4). – *Soit f une fonction universellement mesurable $\geqslant 0$ sur E. On appelle α-potentiel de f la fonction sur $\mathbf{R} \times E$:*

$$(s, x) \mapsto \int_s^{+\infty} (P^{s,t}f)(x)\, e^{-\alpha(t-s)}\, dt.$$

On abrégera par

$$U^s_\alpha f = \int_s^{+\infty} (P^{s,t}f)\, e^{-\alpha(t-s)}\, dt$$

PROPOSITION (6.5). – *Un α-potentiel est une fonction α-excessive.*

Démonstration. – Puisque f est universellement mesurable, $(t, x) \mapsto P^{s,t}f(x)$ est universellement mesurable par (2.5). Alors $U^s_\alpha f$ est universellement mesurable. Ensuite, pour $r \leqslant s$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^{r,s}(e^{-\alpha s}\,\mathrm{U}^s_\alpha f) &= \mathrm{P}^{r,s}\int_s^{+\infty}(e^{-\alpha t}\,\mathrm{P}^{s,t} f)\,dt \\
&= \int_s^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{P}^{r,s}\,\mathrm{P}^{s,t} f\,dt \text{ (par Fubini)} \\
&= \int_s^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{P}^{r,t} f\,dt \text{ (Chapman-Kolmogorov)} \\
&\leqslant \int_r^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{P}^{r,t} f\,dt = e^{-\alpha r}\,\mathrm{U}^r_\alpha f\ ;
\end{aligned}$$

et $\int_s^{+\infty}$ tend vers $\int_r^{+\infty}$ simplement sur E, quand s tend vers r.

PROPOSITION (6.6). — *Si* $f \geqslant 0$ *sur* E *est* K-*continue et bornée, alors* $\mathrm{U}_\alpha f$ *est* K-*continue et bornée sur* $\mathbf{R} \times \mathrm{E}$. *En outre, quand* α *tend vers* $+\infty$, $\alpha\,\mathrm{U}^s_\alpha f$ *converge vers* $\mathrm{P}^{s,s} f$ *dans* KCB (E), *uniformément pour* s *borné.*

Démonstration. — Faisons varier x dans un compact H de E. Alors, pour α fixé, $(s\,,\,t\,,\,x) \to \mathrm{P}^{s,t} f(x)$ est continue. Donc

$$(s\,,\,x) \mapsto \int_s^{s+\mathrm{N}} e^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{P}^{s,t} f(x)\,dt$$

est continue. Mais $\int_{s+\mathrm{N}}^{+\infty} \leqslant e^{-\alpha \mathrm{N}}$ Sup $|f|$, est arbitrairement petit pour N grand, donc $(s\,,\,x) \mapsto \mathrm{U}^s_\alpha f(x)$ est bien continue.

Faisons tendre α vers $+\infty$, et faisons toujours varier x dans un compact H de E, et s dans un compact A de $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
|\alpha\,\mathrm{U}^s_\alpha f(x) - \mathrm{P}^{s,s} f(x)| &= \left|\int_s^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)}\,(\mathrm{P}^{s,t} f(x) - \mathrm{P}^{s,s} f(x))\,dt\right| \\
&\text{(parce que } \int_s^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)}\,dt = +\,1) \\
&\leqslant \int_s^{s+\eta} \alpha e^{-\alpha(t-s)}\,|\mathrm{P}^{s,t} f(x) - \mathrm{P}^{s,s} f(x)|\,dt \\
&+ \int_{s+\eta}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)}\,|\mathrm{P}^{s,t} f(x) - \mathrm{P}^{s,s} f(x)|\,dt\,.
\end{aligned}$$

Mais $(s\,,\,t\,,\,x) \to \mathrm{P}^{s,t} f(x)$ est uniformément continue pour

$$s \in \mathrm{A},\ s \leqslant t \leqslant s + 1,\ x \in \mathrm{H}.$$

Donc $P^{s,t}f(x) - P^{s,s}f(x)$ tend vers 0 uniformément, quand t tend vers s. Donc la première intégrale est $\leqslant \frac{\epsilon}{2}$ pour η assez petit. Une fois choisi η, la deuxième intégrale est majorée par

$$\text{const.} \int_{s+\eta}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha(t-s)}\, dt = \text{const.}\, e^{-\alpha\eta}$$

et tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$. Donc la somme est $\leqslant \epsilon$ pour α assez grand.

7. Fuite des masses de $P(s, t; x)$ à l'infini quand x tend vers l'infini.

Une première condition a déjà exprimé que la masse $P(s, t; x)$ ne restait pas loin de x pour s, t bornés, c'est l'équiconcentration de $P(s, t; x)$ pour s, t bornés et x dans un compact. Une deuxième condition va l'exprimer, dans un autre cas : si x fuit à l'infini, les masses de $P(s, t; x)$ fuient aussi à l'infini. Fuir à l'infini veut dire : sortir de tout compact.

Hypothèse de fuite à l'infini (7.1).

Nous ferons désormais l'hypothèse suivante :

Quels que soient $\epsilon > 0$, A borné dans $\mathbf{R}$, L compact dans E, il existe un compact K de E tel que, pour s et $t \in A$, $x \in \complement K$, on ait $P(s, t; x)(\complement L) \geqslant 1 - \epsilon$. On retrouve cette condition sous une forme plus familière quand E est localement compact (souslinien, donc polonais) :

PROPOSITION (7.2). – *Si* E *est localement compact polonais, et si les conditions antérieures sont vérifiées,* (7.1) *est équivalente à dire que si $f \in C_0(E)$ (fonction continue tendant vers* 0 *à l'infini), alors $P^{s,t}f$ aussi, et que $(s, t) \mapsto P^{s,t}f$ est continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans* $C_0(E)$.

Démonstration. – Sur un localement compact, la K-continuité est la continuité. Supposons d'abord vérifiée la condition de l'énoncé. Prenons $0 \leqslant f \leqslant 1, f \in C_0(E)$ égale à 1 sur L. Pour s et t bornés, $P^{s,t} f$ parcourt alors une partie relativement compacte de $C_0(E)$, donc converge à l'infini vers 0, uniformément par rapport à s et t ; donc, pour A, ϵ, L donnés, il existe un compact K de E tel que $P^{s,t} f(x) \leqslant \epsilon$ pour $x \in \complement K, s, t \in A$. Mais $P(s, t; x)(f) \geqslant P(s, t; x)(L)$, donc $P(s, t; x)(L) \leqslant \epsilon$ pour $x \in \complement K$, s et $t \in A$, donc

$$P(s, t; x)(\complement L) \geqslant 1 - \epsilon,$$

donc on a (7.1).

Inversement supposons (7.1) réalisé. Pour $|f| \leqslant 1$, $f \in C_0(E)$, et pour ϵ donné il existe un compact L de E tel que $|f| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$ sur $\complement L$. Il existe alors un compact K vérifiant (7,1) par rapport à A, $\frac{\epsilon}{2}$, L. Pour $x \in \complement K$, s et t dans A,

$$|P^{s,t} f(x)| \leqslant P(s, t; x)\left(1_L + \frac{\epsilon}{2} 1_{\complement L}\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \;;$$

donc $P^{s,t} f \in C_0(E)$; en outre $P^{s,t} f$ converge vers 0 à l'infini, uniformément pour $s, t \in A$. Mais alors la continuité de $(s, t) \mapsto P^{s,t} f$ pour la convergence uniforme sur tout compact entraîne sa continuité à valeurs dans $C_0(E)$.

Remarque (7.3). – On peut voir les choses autrement.

Disons qu'une fonction réelle f sur E tend vers 0 à l'infini si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un compact K tel que $|f(x)| \leqslant \epsilon$ pour $x \in K$. Si, dans E, aucun point n'a de voisinage compact, alors un compact est d'intérieur vide ; une fonction continue tendant vers 0 à l'infini est nulle. Mais une fonction borélienne peut tendre vers 0 à l'infini, par exemple la fonction caractéristique d'un compact. Alors (7.1) équivaut à : si f borélienne (ou K-borélienne, ou universellement mesurable) tend vers 0 à l'infini, il en est de même de $P^{s,t} f$, uniformément pour s, t bornés. En effet, cette propriété, appliquée à la fonction caractéristique d'un compact L, redonne (7.1). Inversement (7.1) redonne cette propriété ; la démonstration est la même que pour f continue dans la proposition (7.2).

8. Le théorème fondamental de permanence des trajectoires dans les compacts. Régularité des trajectoires.

LEMME (8.1). — *Soient* A *borné dans* $\mathbf{R}$, H *compact dans* E, $\epsilon > 0$, $N > 0$. *Il existe un compact* K *dans* E *ayant la propriété suivante :*

Soient $\sigma \in A$, $t_1 < t_2 \ldots < t_n$ *un nombre fini quelconque de temps compris entre* σ *et* $\sigma + N$; *soit* $D = \{\sigma, t_1, t_2, \ldots t_n\}$; *soit* Ω' *l'ensemble des trajectoires de* $E^{\mathbf{R}}$ *qui sont contenues dans* K *aux instants* $\sigma, t_1, t_2 \ldots t_n$, *et soit* Ω'_D *l'ensemble des trajectoires de* E^D *qui ont la même propriété. Alors, si* μ *est portée à* $\frac{\epsilon}{2}$ *près par* H, $P^{\sigma,\mu}(\Omega')$ *et* $P(\sigma, D ; \mu)(\Omega'_D) \geqslant 1 - \epsilon$.

Démonstration. — $P(\sigma, D ; \mu) = X^D P^{\sigma,\mu}$, et $\Omega' = (X^D)^{-1}(\Omega'_D)$, donc la deuxième inégalité entraîne la première, et en fait elles sont équivalentes puisque K^D est borélien. Démontrons la première.

Donnons-nous provisoirement un ϵ'. Soit L un compact de E tel que $P(\sigma, t ; x)(L) \geqslant 1 - \epsilon'$ pour $\sigma \in A$, $\sigma \leqslant t \leqslant \sigma + N$, $x \in H$. Et soit K un compact de E tel que, pour $\sigma \in A$, $\sigma \leqslant s \leqslant t \leqslant \sigma + N$, $x \in \complement K$, on ait $P(s, t ; x)(\complement L) \geqslant 1 - \epsilon'$. Soit T le premier des instants $\sigma, t_1, t_2, \ldots, t_n$ pour lequel $X^T \in \complement K$; $T = t_n$ s'il n'y en a pas. C'est un temps d'arrêt. Comme il n'y a ici qu'un nombre fini de valeurs du temps, une désintégration de $P^{\sigma,\mu}$ relativement à la tribu $\overline{\mathfrak{U}^T}$ est $\omega \to \lambda_\omega^{T(\omega)}$ (18). Alors :

$$P^{\sigma,\mu}\{X^{t_n} \in \complement L\} \geqslant P^{\sigma,\mu}\{X^T \in \complement K \quad \text{et} \quad X^{t_n} \in \complement L\}$$

$$= \int_{\{\omega\, ;\, X^{T(\omega)}(\omega) \in \complement K\}} \lambda_\omega^{T(\omega)}\{X^{t_n} \in \complement L\}\, P^{\sigma,\mu}(d\omega)$$

(égalité de la désintégration : l'ensemble $\{X^T \in \complement K\}$ est dans $\overline{\mathfrak{U}^T}$ (19))

---

(18) Schwartz [2], théorème (7.2), p. 140.

(19) Schwartz [2], égalité (2.12), p. 35.

$$= \int_{\{X^T \in \complement K\}} P^{\sigma,\mu}(d\omega)\ (X^{t_n}(\lambda_\omega^{T(\omega)}))\ (\complement L)$$

$$= \int_{\{X^T \in \complement K\}} P^{\sigma,\mu}(d\omega)\ (P(T(\omega), t_n\ ;\ X_\omega^{T(\omega)})\ (\complement L))$$

$$\geqslant (1-\epsilon')\ P^{\sigma,\mu}\{X^T \in \complement K\}.$$

Alors

$$P^{\sigma,\mu}\{X^\sigma \quad \text{ou} \quad X^{t_1} \quad \text{ou} \quad X^{t_2} \ldots \quad \text{ou} \quad X^{t_n} \in \complement K\}$$

$$= P^{\sigma,\mu}\{X^T \in \complement K\} \leqslant \frac{1}{1-\epsilon'}\ P^{\sigma,\mu}\{X^{t_n} \in \complement L\}$$

$$= \frac{1}{1-\epsilon'} \int_E \mu(dx)\ P^{\sigma,x}\{X^{t_n} \in \complement L\}$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\epsilon'}\left(\int_H + \int_{\complement H}\right) \leqslant \frac{1}{1-\epsilon'}\left(\epsilon' + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Il suffit donc d'avoir choisi ϵ' tel que $\frac{1}{1-\epsilon'}\left(\epsilon' + \frac{\epsilon}{2}\right) \leqslant \epsilon$ pour obtenir le résultat cherché [20].

LEMME (8.2). – *Soient* A, H, ϵ, N *donnés comme au lemme précédent, et* K *choisi en conséquence. Soit* D *un ensemble dénombrable quelconque de valeur du temps, dense dans*

$$[\sigma, \sigma + N], \sigma \in A.$$

Soit Ω' (resp. Ω'_D) *l'ensemble des trajectoires de* E^R (resp. E^D) *dont la restriction à* D *est restriction d'une trajectoire de* E^R *réglée, et qui sont dans* K *à tous les instants de* D. *Alors, pour toute* μ *portée à* $\frac{\epsilon}{2}$ *près par* H,

$$P^{\sigma,\mu}(\Omega') \geqslant 1-\epsilon \quad \text{et} \quad P(\sigma, D\ ;\ \mu)\ (\Omega'_D) \geqslant 1-\epsilon.$$

Démonstration. – Comme dans le lemme précédent,

$$P(\sigma, D\ ;\ \mu) = X^D(P^{\sigma,\mu}),$$

(20) C'est le seul endroit où nous utilisions un temps d'arrêt. L'utilisation des $\lambda_\omega^{T(\omega)}$ revient à une propriété de Markov, pour un nombre fini de valeurs du temps.

et $\Omega' = (X^D)^{-1}(\Omega'_D)$, donc la deuxième propriété entraîne la première ; elles ne sont pas a priori équivalentes, car Ω'_D n'est pas a priori mesurable (catastrophe de la mesure image !). Démontrons donc la deuxième. L'ensemble Ω''_D des trajectoires qui, aux temps $\in$ D, sont dans K, est l'intersection dénombrable filtrante des ensembles de trajectoires qui ont la même propriété pour les ensembles D' finis $\subset$ D ; le lemme précédent donne alors le résultat pour la permanence des trajectoires dans K à tous les instants de D, $P(\sigma, D ; \mu)(\Omega''_D) \geqslant 1 - \epsilon$. Montrons maintenant la régularité. Si f est bornée α-excessive pour un $\alpha \geqslant 0$, $(f^t \circ X^t)_{t\in D}$ est une surmarginale (à intégrales finies continues à droite), donc elle est $P(\sigma, D ; \mu)$ presque sûrement la restriction à D d'un processus sur $[\sigma, \sigma + N]$, réglé [21]. Mais soit g une fonction bornée continue $\geqslant 0$ sur E. Les α-potentiels $U_\alpha g$ sont α-excessifs, donc $((\alpha U^s_\alpha g) \circ X^s)_{s\in D}$ est $P(\sigma, D ; \mu)$-presque sûrement la restriction à D d'une fonction sur $[\sigma, \sigma + N]$, réglée. Ensuite, par (6.6), en faisant tendre α vers $+\infty$, on voit que, pour $P(\sigma, D ; \mu)$-presque tout $\omega \in \Omega''_D$ (pour lequel X^s reste dans K pour $s \in D$!), $s \to P^{s,s} g(X^s(\omega))$ est restriction à D d'une application réglée de $[\sigma, \sigma + N]$ dans K, comme limite uniforme de telles applications. Pour un s déterminé,

$$P^{s,s} g(X^s(\omega)) = P(s, s ; X^s(\omega))\, g$$

est égal à $g(X^s(\omega))$ pour $P(\sigma, D ; \mu)$-presque tout ω, parce que $P(s, s ; X^s(\omega)) = \delta_{X^s(\omega)}$; car cela revient à dire que, pour

$$(X^s P(\sigma, D ; \mu)) = P(\sigma, s ; \mu)\text{-presque tout } y,$$

$P(s, s ; y) = \delta_y$, ce qui est (3.2). Ceci reste encore vrai pour un ensemble dénombrable D de valeurs de s. Donc, pour $P(\sigma, D ; \mu)$-presque tout $\omega \in \Omega''_D$, $s \longrightarrow g(X^s(\omega))$ est restriction à D d'une fonction sur $[\sigma, \sigma + N]$ réglée. Ceci est encore vrai pour toute famille dénombrable de fonctions g continues $\geqslant 0$ sur E. Mais K est un compact métrisable ; E est complètement régulier, donc les fonctions continues séparent ses points ; donc il existe une famille dénombrable de g qui définit la topologie de K (c'est-à-dire telle que K ait la topologie la moins fine qui les rende continues). Donc l'ensemble $\Omega'_D \subset \Omega''_D$ pour lequel les trajectoires $s \longrightarrow X^s(\omega)$, $s \in D$, sont restrictions à D de fonctions réglées sur $[\sigma, \sigma + N]$, à valeurs dans K, a même $P(\sigma, D ; \mu)$-

---

(21) Voir Paul-André Meyer [1], théorème T3, p. 128.

mesure que Ω''_D, son complémentaire dans Ω''_D est $P(\sigma , D ; \mu)$-négligeable, cqfd.

LEMME (8.3 A). – *Soit* D *un ensemble dénombrable de* E. *L'ensemble* $\widetilde{\Omega}$ (resp. $\widetilde{\Omega}_D$) *des trajectoires de* $E^{\mathbf{R}}$ (resp. E^D) *qui sont réglées* (resp. *qui sont prolongeables en trajectoires* $\mathbf{R} \longrightarrow$ E *réglées) est de* $P^{\sigma,\mu}$-(resp. $P(\sigma , D ; \mu)$-) *mesure extérieure* 1 (resp. *mesure* 1).

Démonstration. – C'est vrai pour les temps $< \sigma$, on peut donc se borner aux temps $\geqslant \sigma$. On peut aussi, pour tout $N > 0$, se borner aux temps $\leqslant \sigma + N$. On prend alors $A = \{\sigma\}$. Soit H un compact tel que $\mu(H) \geqslant 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$, on détermine K en conséquence suivant le lemme (8.1). Alors $\widetilde{\Omega}_D$ contient l'ensemble $\widetilde{\Omega}'_D$ du lemme (8.2), donc $P(\sigma , D ; \mu)\, (\widetilde{\Omega}_D) \geqslant 1 - \epsilon$; ϵ étant arbitraire, $P(\sigma , D ; \mu)\, (\widetilde{\Omega}_D) = 1$. Ensuite soit B un ensemble de $\otimes^{\mathbf{R}}\, \mathscr{E}$, contenant $\widetilde{\Omega}$. Il est de la forme $B' \times E^{\mathbf{R}-D}$, D dénombrable, B′ borélien de E^D, $B' \supset \widetilde{\Omega}_D$.

Donc :

$$P(\sigma , D ; \mu)\, (\widetilde{\Omega}_D) = 1, \quad \text{ou} \quad (X^D(P^{\sigma,\mu}))\, (\widetilde{\Omega}_D) = 1.$$

Donc :

$$P^{\sigma,\mu}(B) = P^{\sigma,\mu}((X^D)^{-1}(B')) \geqslant P^{\sigma,\mu}((X^D)^{-1}(\widetilde{\Omega}_D)) = 1.$$

Donc :

$$(P^{\sigma,\mu})^*(\widetilde{\Omega}) = 1.$$

THEOREME (8.3). – *Soit* D *un ensemble dénombrable de* E. *L'ensemble* $\Omega^{\cdot}$ (resp. $\Omega^{\cdot}_D$) *des trajectoires de* $E^{\mathbf{R}}$ (resp. $E^{\mathbf{D}}$) *qui sont réglées et continues à droite* (resp. *qui sont prolongeables en trajectoires* $\mathbf{R} \longrightarrow$ E *réglées et continues à droite) est de* $P^{\sigma,\mu}$-(resp $P(\sigma , D ; \mu)$-) *mesure extérieure* 1 (resp. *mesure* 1).

Démonstration. – Soit $\widetilde{P}(\sigma , D ; \mu)$ la probabilité induite par $P(\sigma , D ; \mu)$ sur $\widetilde{\Omega}_D$; $\widetilde{\Omega}_D$ est de $P(\sigma , D , \mu)$-mesure 1 d'après le lemme (8.3A), donc l'image de $\widetilde{P}(\sigma , D ; \mu)$ par l'injection naturelle de $\widetilde{\Omega}$ dans Ω_D est $P(\sigma , D ; \mu)$. Pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}_D$, on peut définir

$$X^{t+}(\omega) = \lim_{\substack{t' \in D \\ t' > t \\ t' \to t}} X^t(\omega)$$

pour tout $t \in D$, donc une application X^{t+} de $\widetilde{\Omega}_D$ dans E. Elle est universellement mesurable comme limite d'une suite d'applications universellement mesurables (0.4). Si donc

$$t_1 < t_2 < \cdots t_{k-1} < \sigma \leqslant t_k < \cdots < t_n$$

sont des éléments de D (sauf $\sigma \in \mathbf{R}$), on peut calculer la mesure image $(X^{t_1+}, \ldots, X^{t_n+})\, P(\sigma, D; \mu)$ dans $E^{\{t_1, \ldots, t_n\}}$. Cherchons sa valeur sur une fonction $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$, où les f_i sont continues bornées sur E. C'est $\widetilde{P}(\sigma, D; \mu)\ ((f_1 \circ X^{t_1+}) \ldots (f_n \circ X^{t_n+}))$. Puisque, pour tout $\omega \in \widetilde{\Omega}_D$, $t \to X^t$ est réglée, X^{t+} est la limite de $X^{t'}$ pour $t' \in D$, $t' > t$, tendant vers t ; mais alors $f_i \circ X^{t'_i}$ converge vers $f_i \circ X^{t_i+}$ quand t'_i tend à droite vers t_i. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, l'intégrale cherchée est donc la limite de

$$\widetilde{P}(\sigma, D; \mu)\, (f_1 \circ X^{t'_1}) \ldots (f_n \circ X^{t'_n})),$$

c'est-à-dire de

$$(X^{t'_1}, \ldots, X^{t'_n})\, (\widetilde{P}(\sigma, D; \mu))\, (f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n)$$

$$= \text{(d'après (4.2)} \int \mu(dx)\, f_1(\nabla)\, f_2(\nabla) \cdots f_{k-1}(\nabla)\, g'_k(x),$$

où

$$g'_k(x) = P^{\sigma, t'_k}(f_k P^{t'_k, t'_{k+1}}(\ldots (f_{n-2} P^{t'_{n-2}, t'_{n-1}}(f_{n-1} P^{t'_{n-1}, t'_n} f_n)) \ldots))$$

Lorsque les t'_i tendent vers t_i, $P^{t'_{n-1}, t'_n} f_n$ converge vers $P^{t_{n-1}, t_n} f_n$ dans KCB (E) (proposition (2.2)), donc

$$P^{t'_{n-2}, t'_{n-1}}(f_{n-1} P^{t'_{n-1}, t'_n} f_n) \quad \text{vers} \quad P^{t_{n-2}, t_{n-1}}(f_{n-1} P^{t_{n-1}, t_n} f_n)$$

dans KCB (E), etc. Finalement on trouve donc la limite

$$\int \mu(dx)\, f_1(\nabla) \ldots f_{k-1}(\nabla)\, g_k(x),$$

$$g_k(x) = P^{\sigma, t_k}(f_k \ldots (f_{n-2} P^{t_{n-2}, t_{n-1}}(f_{n-1} P^{t_{n-1}, t_n} f_n)) \ldots),$$

c'est-à-dire

$$(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})\, (P(\sigma, D; \mu)\, (f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n).$$

Mais l'égalité de deux probabilités de E^n sur toutes les fonctions $(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n)$, f_i continues, entraîne leur égalité. On a donc trouvé :

$$(X^{t_1+}, \ldots X^{t_n+})\,\widetilde{P}(\sigma\,, D\,;\mu) = (X^{t_1}, \ldots X^{t_n})\,P(\sigma\,, D\,;\mu)\,.$$

Soit X^+ l'application de $\widetilde{\Omega}_D$ dans Ω_D qui, à chaque $\omega \in \widetilde{\Omega}_D$, fait correspondre la trajectoire $X^+(\omega)$, définie par $X^+(\omega)(t) = X^{t+}(\omega)$. Elle est mesurable, car chacune de ses projections l'est, et $X^t \circ X^+ = X^{t+}$. La formule que nous venons d'obtenir montre alors que

$$X^+(\widetilde{P}(\sigma\,, D\,;\mu)) = P(\sigma\,, D\,;\mu)\,,$$

puisqu'elles ont même projections sur les produits finis.

Mais, E^D étant radonien, $P(\sigma\,, D\,;\mu)$ est une probabilité de Radon sur E^D ; elle est portée par $\widetilde{\Omega}_D$, donc la probabilité induite $\widetilde{P}(\sigma\,, D\,;\mu)$ est de Radon sur $\widetilde{\Omega}_D$; X^+ est mesurable-Borel de $\widetilde{\Omega}_D$ dans E^D contenu dans un souslinien, donc elle est mesurable Lusin, il n'y a pas de catastophe de la mesure image, et $P(\sigma\,, D\,;\mu)$ est donc portée par $X^+(\widetilde{\Omega}_D)$, qui est l'espace $\Omega^{\cdot}_D$ des restrictions à D de trajectoires $\mathbf{R} \longrightarrow E$ réglées et continues à droite : $P(\sigma\,, D\,;\mu)(\Omega^{\cdot}_D) = 1$. Par la même méthode qu'à la fin de la démonstration du lemme (8.3A), on en déduira que $(P^{\sigma,\mu})^*(\Omega^{\cdot}) = 1$.

(8.4) *Remplacement de l'espace* $E^{\mathbf{R}}$ *par l'espace* $\Omega^{\cdot}$ *des trajectoires réglées et continues à droite.*

Soit $\Omega^{\cdot} \subset E^{\mathbf{R}}$ l'espace des trajectoires réglées et continues à droite ; nous le munirons de la tribu $\mathcal{O}^{\cdot}$ induite par $\mathcal{O} = \otimes^{\mathbf{R}}\mathcal{E}$. Soit $P^{\cdot\sigma,\mu}$ la mesure induite par $P^{\sigma,\mu}$; puisque $\Omega^{\cdot}$ est de $P^{\sigma,\mu}$-mesure extérieure 1, $P^{\cdot\sigma,\mu}$ est encore une probabilité sur $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$; *c'est elle que nous considérerons désormais.* Elle a naturellement les mêmes projections que $P^{\sigma,\mu}$ sur tous les facteurs E^R, $R \subset \mathbf{R}$ puisque son image dans $E^{\mathbf{R}}$ est $P^{\sigma,\mu}$; et elle peut est entièrement déterminée par ses projections sur les produits finis, car deux mesures sur $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$ qui ont ces mêmes projections ont même image dans $E^{\mathbf{R}}$, et elles sont les mesures induites de cette image donc coïncident. Tous les théorèmes relatifs aux projections de $P^{\sigma,\mu}$ sont donc encore vrais pour $P^{\cdot\sigma,\mu}$. Mais certaines propriétés sont simplifiées, car les mesures extérieures 1 deviennent maintenant des mesures 1. Par exemple $P^{\cdot\sigma,\mu}$-presque sûrement la trajectoire est en ∇ aux temps < 0, car c'est vrai pour tous les temps rationnels, donc tous par continuité à droite, alors qu'avec $P^{\sigma,\mu}$, on trouvait seulement une mesure extérieure 1. Nous appellerons $\mathcal{U}^{\cdot t}$ la tribu induite par $\mathcal{U}^t$ sur $\Omega^{\cdot}$, encore engendrée par les projections X^s, $s \leqslant t$.

Alors $\overline{\mathcal{U}^{\cdot t}}$ sera sa complétée universelle ; $\overline{\mathcal{U}^{\cdot t}} \supset \overline{\mathcal{U}^{t}} \cap \Omega^{\cdot}$. Enfin nous remplacerons désormais λ^{s}_{ω} par la probabilité induite sur $\Omega^{\cdot}$, $\lambda^{\cdot s}_{\omega}$, en nous bornant naturellement aux $\omega \in \Omega^{\cdot}$ (la formule (5.2) montre que l'on a aussi $(\lambda^{s}_{\omega})^{*}(\Omega^{\cdot}) = 1$, donc $\lambda^{\cdot s}_{\omega}(\Omega^{\cdot}) = 1$). Maintenant $\lambda^{\cdot t}_{\omega}$ est portée par l'ensemble des trajectoires qui coïncident avec ω aux temps $< t$, et aux temps $\leqslant t$ si $X^{t}(\omega)$ est t-normal, et non plus seulement extérieurement portée comme λ^{t}_{ω} ; car c'est vrai pour les temps rationnels, donc pour tous par continuité à droite. Mais pour $P^{\cdot \sigma, \mu}$-presque tout ω, $X^{t}(\omega)$ est t normal, puisque cela revient à dire que, pour $X^{t}(P^{\cdot \sigma, \mu}) = P(\sigma\, , t\, ; \mu)$-presque tout y, y est t-normal, ce qui est (3.2) ; donc pour $P^{\cdot \sigma, \mu}$-presque tout ω, pour t fixé, $\lambda^{\cdot t}_{\omega}$ est portée par l'ensemble des trajectoires coïncidant avec ω aux temps $\leqslant t$. Il reste alors vrai que $P^{\cdot \sigma, \mu}$ est désintégrée relativement à X^{σ} par $x \mapsto P^{\cdot \sigma, x}$. (En particulier, on a encore $P^{\cdot \sigma, \mu} = \int_{E} \mu(dx)\, P^{\cdot \sigma, x}$), et relativement à $\mathcal{U}^{\cdot s}$ par $\omega \to P^{\cdot \sigma, \mu}$ pour $s < \sigma$, par $\omega \to \lambda^{\cdot s}_{\omega}$ pour $s \geqslant \sigma$; et que $\lambda^{\cdot s}_{\omega}$ est désintégrée relativement à $\mathcal{U}^{\cdot t}$, par $\omega' \mapsto \lambda^{\cdot s}_{\omega}$ si $t < s$, $\omega' \to \lambda^{\cdot t}_{\omega'}$ si $t \geqslant s$. Il s'agira même ici d'une désintégration stricte. Démontrons la pour $P^{\cdot \sigma, \mu}$. Nous avons à montrer les 3 propriétés :

a) $\omega \mapsto \lambda^{\cdot s}_{\omega}$ appartient à la tribu $\overline{\mathcal{U}^{\cdot s}}$. C'est évident, puisque, $\omega \to \lambda^{s}_{\omega}$ appartient à $\overline{\mathcal{U}^{s}}$, donc $\omega \to \lambda^{\cdot s}_{\omega}$ à $\overline{\mathcal{U}^{s}} \cap \Omega^{\cdot} \subset \overline{\mathcal{U}^{\cdot s}}$.

b) $P^{\cdot \sigma, \mu}$ est l'intégrale des $\lambda^{\cdot s}_{\omega}$ par rapport à elle-même. Soit donc $B \in \mathcal{O}$; il est l'intersection $\Omega^{\cdot} \cap B'$, $B' \in \mathcal{O}$;

$$P^{\cdot \sigma, \mu}(B) = P^{\sigma, \mu}(B'), \qquad \text{et} \qquad \lambda^{\cdot s}_{\omega}(B) = \lambda^{s}_{\omega}(B')$$

pour tout ω.

$$\int_{\Omega^{\cdot}} P^{\cdot \sigma, \mu}(d\omega)\, \lambda^{\cdot s}_{\omega}(B) = \int_{\Omega^{\cdot}} P^{\cdot \sigma, \mu}(d\omega)\, \lambda^{s}_{\omega}(B')$$

$$= \int_{\Omega} P^{\sigma, \mu}(d\omega)\, \lambda^{s}_{\omega}(B') = P^{\sigma, \mu}(B') = P^{\cdot \sigma, \mu}(B).$$

c) Pour $P^{\cdot \sigma, \mu}$-presque tout ω, $\lambda^{\cdot s}_{\omega}$ est portée par l'atome de ω dans $\mathcal{U}^{\cdot s}$. Cet atome est l'ensemble des trajectoires de $\Omega^{\cdot}$ coïncidant avec ω aux temps $\leqslant s$, et nous venons de le voir.

(8.4 bis). Enfin le lemme (9.2) se perfectionne maintenant ainsi : A, ϵ, N, H étant donnés et K déterminé comme à (8.2), mais en outre de manière qu'il contienne ∇, la trajectoire reste dans K aux temps $\leqslant \sigma + N$ avec une $P^{\cdot \sigma, \mu}$-probabilité $\geqslant 1 - \epsilon$, si μ est portée à $\frac{\epsilon}{2}$ près par H et $\sigma \in A$.

En effet, c'est vrai pour les temps rationnels, donc pour tous.

PROPOSITION (8.5). – *Les tribus $\mathcal{O}^{\cdot}$, $\mathcal{U}^{\cdot t}$, sur $\Omega^{\cdot}$ sont dénombrablement engendrées et séparantes. Les probabilités $P^{\cdot \sigma,\mu}$, $\lambda_{\omega}^{\cdot s}$ sont parfaites sur $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$, c'est-à-dire de Radon pour n'importe quelle topologie métrisable séparable ayant $\mathcal{O}^{\cdot}$ pour tribu borélienne.*

Démonstration. – Puisque E est contenu dans un souslinien complétement régulier, sa tribu borélienne est celle d'une topologie métrisable moins fine, on peut donc appliquer Egoroff (voir (0.4)) : la limite d'une suite de fonctions $\Omega^{\cdot} \to$ E appartenant à une tribu $\mathcal{A}^{\cdot}$, appartient encore à $\mathcal{A}^{\cdot}$. Donc $\mathcal{O}^{\cdot}$ (resp. $\mathcal{U}^{\cdot t}$), engendrée par les X^s, $s \in \mathbf{R}$ (resp. $s \leqslant t$), est aussi la tribu engendrée par les X^s, $s \in \mathbf{Q}$ (resp. $s \in \mathbf{Q} \cup \{t\}, s \leqslant t$). Donc $\mathcal{O}^{\cdot}$ et $\mathcal{U}^{\cdot t}$ sont bien dénombrablement engendrées. Elles sont séparantes comme c'était déjà le cas sur $E^{\mathbf{R}} = \Omega$; mais là les atomes n'appartenaient pas aux tribus, tandis qu'ici les tribus sont dénombrablement séparantes, puisque séparantes et dénombrablement engendrées, et les atomes appartiennent aux tribus.

On sait que $P^{\cdot \sigma,\mu}$, $\lambda_{\omega}^{\cdot s}$, seront de Radon pour toute topologie métrisable ayant $\mathcal{O}^{\cdot}$ comme tribu borélienne, si c'est vrai pour une de ces topologies(22). Choisissons donc D dénombrable dense dans E. E peut être muni d'une topologie métrisable séparable moins fine ayant les mêmes parties boréliennes, soit E', alors E'^{D} est métrisable séparable. La projection $E^{\mathbf{R}} \xrightarrow{X^D} E^D$, restreinte à $\Omega^{\cdot}$, est une bijection de $\Omega^{\cdot}$ sur son image $\Omega_D^{\cdot}$, espace des trajectoires D $\to$ E qui sont restrictions de trajectoires $\mathbf{R} \to$ E réglées et continues à droite. Cette bijection transporte exactement $\mathcal{O}^{\cdot}$ sur la tribu induite par celle de E'^{D}, engendrée par ses projections, c'est-à-dire par les X^s, $s \in$ D, donc par la tribu borélienne de E'^{D}. Donc X^D défini une bijection de $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$ sur $\Omega_D^{\cdot} \subset E'^{D}$ muni de sa tribu borélienne ; cela revient, en identifiant $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$ à son image $\Omega_D^{\cdot} \subset E'^{D}$, à munir $\Omega^{\cdot}$ de la topologie séparable métrisable de la convergente simple (dans

(22) Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un même ensemble $\Omega^{\cdot}$, ayant même tribu borélienne $\mathcal{O}^{\cdot}$; supposons $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ métrisables séparables. Soit P une probabilité sur $(\Omega^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot})$. L'application identique de $(E, \mathcal{T}_1)$ dans $(E, \mathcal{T}_2)$ est P-mesurable, donc P-mesurable Lusin si P est de Radon pour $\mathcal{T}_1$, puisque $\mathcal{T}_2$ est métrisable séparable ; donc la mesure image, qui est encore P, est de Radon pour $\mathcal{T}_2$.

E′) sur l'ensemble dénombrable dense D. Sur E'^{D}, $P(\sigma, D ; \mu)$ est de Radon (voir (0.1) et (0.5)) ; et (8.3) dit que $P(\sigma, D ; \mu)$ est portée par $\Omega_D^{\cdot}$. Donc sa mesure induite $P^{\cdot}(\sigma, D ; \mu)$ sur $\Omega_D^{\cdot}$ est de Radon ; mais c'est précisément $X^D(P^{\cdot \sigma, \mu})$. Donc, sur $\Omega^{\cdot}$ muni de la topologie de la convergence simple (dans E′) sur D, $P^{\sigma, \mu}$ est de Radon. Donc $P^{\cdot \sigma, \mu}$ est parfaite. La formule (5.2) montre que $\lambda_\omega^{\cdot s}$ est aussi parfaite.

PROPOSITION (8.7). — *Cas de continuité des trajectoires. Supposons qu'il existe une suite* $\mathcal{D} = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de fonctions continues sur* E, *séparant les points de* E, *tel que, pour tout* n, *pour tous* σ *et* μ, *l'ensemble des* ω *pour lesquels* $t \to f_n(X^t(\omega))$ *est continue pour* $t > \sigma$, *soit de* $P^{\sigma, \mu}$*-mesure extérieure* 1. *Soit* D *dénombrable dense dans* **R**. *Alors l'ensemble* $\Omega^{\cdot\cdot}$ (resp. $\Omega_D^{\cdot\cdot}$) *des trajectoires* $\mathbf{R} \to$ E (resp. D $\to$ E) *continues* (resp. *prolongeables à* **R** *en trajectoires continues) aux temps* $> \sigma$, *est de* $P^{\sigma, \mu}$*-mesure extérieure* 1 (resp. *de* $P(\sigma, D ; \mu)$*-mesure* 1).

Remarque. — Nous avons mis la continuité aux temps $> \sigma$; au temps σ, il y a toujours continuité à droite, mais pas continuité, puisque la trajectoire est en x à l'instant $\sigma P^{\sigma, x}$-presque sûrement si (x, σ) est normal, et en ∇ aux temps $< \sigma$.

Démonstration. — Reprenons les notations de (8.2) et de sa démonstration. Appelons Ω''' (resp. Ω_D''') l'ensemble des trajectoires de $E^{\mathbf{R}}$ (resp. E^D) dont la restriction à D est restriction d'une trajectoire continue $]\sigma, +\infty[\ \to$ E, et dans K à tous les instants de D ;

$$\Omega''' \subset \Omega' \subset \Omega'', \quad \Omega_D''' \subset \Omega_D' \subset \Omega_D'' .$$

L'ensemble des $\omega \in \Omega_D''$ pour lesquels $t \to f_n(X^t(\omega))$ est, pour tout n, restriction à D d'une fonction continue, a une $P(\sigma, D ; \mu)$-mesure extérieure 1 ; mais cet ensemble est borélien(23) donc $P(\sigma, D ; \mu)$-

(23) L'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur **R** est Fréchet séparable, donc polonais. Son image Γ par l'application continue injective

$$C(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^{D}$$

est donc un espace lusinien, donc borélien dans $\mathbf{R}^D$ (Schwartz [1], théorème 5, p. 101) ; c'est le sous espace de $\mathbf{R}^D$ formé des applications D $\to$ **R** qui sont restrictions à D d'applications continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ensuite f_n est continue K $\to$ **R**, donc $K^D \to \mathbf{R}^D$; l'image réciproque $f_n^{-1}(\Gamma)$ est donc borélienne dans K^D. C'est l'ensemble des applications de D dans K qui, composées avec f_n : K $\to$ **R**, sont dans Γ, c'est-à-dire restrictions à D d'applications continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$; c'est exactement le sous-ensemble des $\omega \in \Omega_D''$ pour lesquels $t \to f_n(X^t(\omega))$ est restriction à D d'une fonction réelle continue sur **R**.

mesurable et de mesure 1. Mais les f_n définissent la topologie de K (compact métrisable), donc, pour $P(\sigma, D ; \mu)$-presque tout $\omega \in \Omega''_D$, la trajectoire est restriction à D d'une trajectoire continue.

$$P(\sigma, D ; \mu)\,(\Omega'''_D) \geqslant 1 - \epsilon \; ; \quad \text{donc} \quad P^{\sigma,\mu}(\Omega''') \geqslant 1 - \epsilon \, .$$

On conclura comme au théorème (8.3).

(8.8). Changement de l'espace des trajectoires dans le cas de continuité.

Plusieurs attitudes sont possibles :

1) Garder l'espace $\Omega^{\cdot}$ de (8.4) des trajectoires réglées et continues à droite ; on aura seulement que, $P^{\cdot\sigma,\mu}$-presque sûrement pour les temps $> \sigma$, la trajectoire sera continue ; au paragraphe 9 et suivants, on l'appellera Ω au lieu de $\Omega^{\cdot}$.

2) Abandonner une fois pour toutes $\mathbf{R}$ comme espace des temps et prendre une fois pour toutes les temps $\geqslant \sigma$; alors on pourra prendre l'espace $\Omega^{\cdot\cdot}$ des trajectoires continues sur $[\sigma, +\infty[$ et $P^{\cdot\cdot\sigma,\mu}$ sera une mesure parfaite sur $\Omega^{\cdot\cdot}$. Alors on ne pourra plus définir $P^{\cdot\cdot\,\tau,\mu}$ comme une probabilité sur cet espace, pour $\tau > \sigma$, mais seulement considérer $P([\tau, +\infty[\; ; \mu)$ et les diverses probabilités considérées ainsi ne seront plus sur le même espace $\Omega^{\cdot\cdot}$. Aux paragraphes 9 et suivants, $\Omega^{\cdot\cdot}$ sera de nouveau noté Ω.

3) Supposons tous les points normaux. On pourra alors (voir note(*) page 224) remplacer partout δ_∇ par δ_x dans la définition de $P^{\sigma,\mu}$. Alors $P^{\sigma,x}$-extérieurement-presque sûrement la trajectoire est en x pour les temps $< \sigma$, donc elle sera $P^{\sigma,\mu}$ extérieurement-presque sûrement continue partout. On pourra alors remplacer Ω par l'espace $\Omega^{\cdot\cdot}$ des trajectoires $\mathbf{R} \to$ E, partout continues, il n'y a plus aucune difficulté ; et dans les paragraphes suivants, $\Omega^{\cdot\cdot}$ sera de nouveau noté Ω.

9. Changement définitif d'espace Ω. Les désintégrations régulières.

A partir de maintenant, nous abandonnerons définitivement l'espace $\Omega = E^{\mathbf{R}}$ et ne retiendrons que l'espace $\Omega^{\cdot}$. *Mais alors pour simplifier, nous supprimerons les points.* Ω sera donc désormais l'espace des trajectoires $\mathbf{R} \to E$, réglées et continues à droite ; $\mathfrak{O}$ sera la tribu engendrée par les projections ; et nous noterons

$$\Omega\,,\ \mathfrak{O}\,,\ \mathfrak{U}^t\,,\ P^{\sigma,\mu}\,,\ \lambda^s_\omega\,,$$

ce qui était, au paragraphe précédent, noté $\Omega^{\cdot}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{U}^{\cdot t}$, $P^{\cdot\sigma,\mu}$, $\lambda^{\cdot s}_\omega$.

THEOREME (9.1). – *Posons* $\mathfrak{T}^t = \overline{\mathfrak{U}^{t}}^{+} = \overline{\mathfrak{U}^{t+}} = \bigcap\limits_{t'>t} \overline{\mathfrak{U}^{t'}}$. *La famille des tribus* $(\mathfrak{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$ *est croissante et continue à droite, et universellement complète*(24). *Alors, pour tous* σ, μ, $P^{\sigma,\mu}$ *admet comme désintégration régulière pour* $(\mathfrak{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$: $(t\,,\omega) \to P^{\sigma,\mu}$ *pour* $t<\sigma$, *et* $(t\,,\omega) \to \lambda^t_\omega$ *pour* $t \geqslant \sigma$. *Et toute* λ^s_ω *admet comme désintégration régulière pour* $(\mathfrak{T}^t)_{t\in\mathbf{R}}$: $(t\,,\omega') \to \lambda^s_\omega$, *si* $t<s$, $\lambda^t_{\omega'}$ *si* $t \geqslant s$.

Démonstration. – Nous démontrerons d'abord un lemme :

LEMME (9.2). – *Soit* Φ *une fonction sur* Ω, *de la forme* $(f_1 \circ X^{t_1})\,(f_2 \circ X^{t_2}) \ldots (f_n \circ X^{t_n})$, *où les* f_i *sont des fonctions continues sur* E. *Alors, pour* $P^{\sigma,\mu}$*-presque tout* ω' *et* $t \geqslant \sigma$, *et pour* λ^s_ω*-presque tout* ω' *et* $t \geqslant s$, $t \to \lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ *est continue à droite.*

Démonstration du lemme. – Utilisons (5.1) et (4.2), avec

$$t_{k-1} < t \leqslant t_k \ :$$

(9,2 bis) $\lambda^t_{\omega'}(\Phi) =$

$$f_1(X^{t_1}(\omega'))\, f_2(X^{t_2}(\omega')) \ldots f_{k-1}(X^{t_{k-1}}(\omega'))\, g^t(X^t(\omega'))$$

où $\quad g^t = P^{t,t_k}(f_k\, P^{t_k,t_{k+1}}(f_{k+1} \ldots (f_{n-1}\, P^{t_{n-1},t_n}(f_n)) \ldots))$

D'après (2.2), $(t\,,x) \to g^t(x)$ est K-continue. Mais, pour ω' fixé, quand t décrit un intervalle fermé de $\mathbf{R}$, l'ensemble des $X^t(\omega')$, $X^{t-}(\omega')$) décrit un compact de E ; donc $t \to g^t(X^t(\omega'))$ est continue à droite.

Comme ensuite les f_i sont continues, on voit que, pour tout ω', $t \to \lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ est continue à droite dans l'intervalle $]t_{k-1}\,, t_k]$. C'est également vrai pour les autres intervalles, et pour $]-\infty\,, t_1]$ et

(24) Voir note (12), p. 234.

$]t_n, +\infty]$. Il reste à voir sa continuité à droite aux points t_{k-1}. Lorsque $t > t_{k-1} \geqslant \sigma$ tend vers t_{k-1}, pour tout ω', $\lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ tend vers

$f_1(X^{t_1}(\omega')) \ldots f_{k-1}(X^{t_{k-1}}(\omega')) \times$ [valeur en $X^{t_{k-1}}(\omega')$

de $\qquad P^{t_{k-1}, t_k}(f_k P^{t_k, t_{k+1}}(f_{k+1} \ldots (f_{n-1} P^{t_{n-1}, t_n}(f_n)) \ldots))]$.

Par ailleurs,

$\lambda^{t_{k-1}}_{\omega'}(\Phi) = f_1(X^{t_1}(\omega')) \ldots f_{k-2}(X^{t_{k-2}}(\omega')) \times$ [valeur en $X^{t_{k-1}}(\omega')$

de

$P^{t_{k-1}, t_{k-1}}(f_{k-1} P^{t_{k-1}, t_k}(f_k P^{t_k, t_{k+1}}(f_{k+1} \ldots (f_{n-1} P^{t_{n-1}, t_n}(f_n)) \ldots)$

Il y aura donc continuité à droite si

$$P(t_{k-1}, t_{k-1}; X^{t_{k-1}}(\omega')) = \delta_{X^{t_{k-1}}(\omega')} ;$$

ceci a lieu pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω', car cela équivaut à dire que, pour $X^{t_{k-1}}(P^{\sigma,\mu}) = P(\sigma, t_{k-1}; \mu)$-presque tout y, (t_{k-1}, y) est normal, ce qui est (3.2). Nous avons donc bien montré que, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω', $t \mapsto \lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ est continue à droite pour $t \geqslant \sigma$. Ce ne serait pas nécessairement vrai pour $t < \sigma$, car ∇ n'est pas nécessairement t normal pour tout t.

D'autre part, pour λ^s_ω-presque tout ω',

$$P(t_{k-1}, t_{k-1}; X^{t_{k-1}}(\omega')) = \delta_{X^{t_{k-1}}(\omega')} ,$$

pour $t_{k-1} \geqslant s$, car cela équivaut à dire que, pour

$$(X^{t_{k-1}}(\lambda^s_\omega)) = P(s, t_{k-1}; X^{t_{k-1}}(\omega))\text{-presque tout } y,$$

(t, y) est normal, ce qui est (3.2). Donc encore pour λ^s_ω-presque tout ω', $t \mapsto \lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ est continue à droite pour $t \geqslant s$ (*). Ceci achève la démonstration du lemme.

Montrons maintenant le théorème. Tout d'abord, $(\Omega, \mathcal{O})$ vérifie les conditions de Jirina (25) pour l'existence de désintégrations régulières de mesures parfaites, puisque, pour les topologies métrisables séparables de tribu borélienne $\mathcal{O}$, ces mesures deviennent de Radon.

(*) Ce ne serait plus nécessairement vrai pour $t < s$; car, pour λ^s_ω-presque tout ω', $X^t(\omega') = X^t(\omega)$ pour $t < s$, et les points $(t, X^t(\omega))$, $t < s$, ne sont pas nécessairement normaux.

(25) Schwartz [2], théorème (2.17), p. 36 et théorème (5,1), p. 101.

Fixons d'abord $t \geqslant \sigma$ ou $\geqslant s$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite strictement décroissante de temps $> t$ et tendant vers t. Comme toute désintégration est régulière pour les temps $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$, t, et les tribus

$$(\overline{\mathcal{U}^{t_n}})_{n \in \mathbf{N}} \quad , \quad \mathcal{C}^t = \mathcal{U}^{t+} ,$$

et que les désintégrations pour les $\overline{\mathcal{U}^{t_n}}$ sont $\omega \to \lambda_\omega^{t_n}$, on voit que $\omega' \to \Lambda_{\omega'}^t$ est une désintégration de $P^{\sigma,\mu}$ ou de λ_ω^s pour $\overline{\mathcal{U}^{t+}} = \mathcal{C}^t$, si et seulement si elle est dans $\mathcal{C}^t$, et si, pour toute $F \in \mathcal{O}$, pour $P^{\sigma,\mu}$ ou λ_ω^s-presque tout ω', $\lim_{n \to \infty} \lambda_{\omega'}^{t_n}(F) = \Lambda_{\omega'}^t(F)$. Et il suffit pour cela que ce soit vrai pour les F d'un ensemble $\mathcal{B}$ déterminant (26). Or il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D}$ de fonctions Φ comme au lemme (9.2), qui engendre $\mathcal{O}$: il suffit de prendre les temps qui interviennent à (9.2) dans un ensemble dénombrable dense de $\mathbf{R}$, et des f_i formant un ensemble dénombrable engendrant sa tribu borélienne (voir (0. 0)). On peut supposer $\mathcal{D}$ stable par multiplication. Alors $\mathcal{B}$ pourra être l'espace des combinaisons $\mathbf{Q}$ linéaires d'éléments de $\mathcal{D}$; c'est une $\mathbf{Q}$-algèbre dénombrable déterminante. Comme on a, d'après (9.2) pour $F \in \mathcal{B}$, pour $P^{\sigma,\mu}$ ou λ_ω^s-presque tout ω', $\lim_{n \to \infty} \lambda_{\omega'}^{t_n}(F) = \lambda_{\omega'}^t(F)$, cela prouve que $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^t$ est une désintégration de $P^{\sigma,\mu}$ si $t \geqslant \sigma$, de λ_ω^s si $t \geqslant s$, non seulement pour $\overline{\mathcal{U}}^t$ mais pour $\mathcal{C}^t$. Ensuite

$$(t\,,\,\omega') \longrightarrow \lambda_{\omega'}^t$$

sera une désintégration régulière si, pour toute $F \in \mathcal{B}$, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω' ou λ_ω^s-presque tout ω', $t \mapsto \lambda_{\omega'}^t(F)$ est continue à droite, ce qui est précisément le lemme (9.2).

DEFINITION (9.3). — *Définissons λ_ω^{s-} comme suit : pour*

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < s \leqslant t_k \ldots < t_n$$

sa projection sera définie par :

$$\begin{aligned}(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n})(\lambda_\omega^{s-}) = \delta_{X^{t_1}(\omega)}(dx_1) \ldots \delta_{X^{t_{k-1}}(\omega)}(dx_{k-1}) \quad (9.4)\\ P(s\,,\,t_k\,;\,X^{s-}(\omega))(dx_k)\,P(t_k, t_{k+1}\,;\,x_k)\,dx_{k+1} \ldots\\ P(t_{n-1}, t_n\,;\,x_{n-1})\,(dx_n)\,.\end{aligned}$$

(26) Schwartz [2], p. 14. Cela veut dire ici que $\mathcal{B} \ni 1$ est un ensemble dénombrable de fonctions bornées, $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, stable par multiplication, et engendrant la tribu $\mathcal{O}$. Voir alors loc. cit. proposition (4.10 ter), p. 79.

Avec la notation (5.2), $\mathbf{R} =]-\infty, s[\cup [s, +\infty[$,

$$\lambda^{s-}_{\alpha,\beta} = \delta_\alpha \otimes \mathrm{pr}_2 \mathrm{P}^{s, \mathrm{X}^{s-}(\alpha)} ; \tag{9.5}$$

Avec la notation de (5.3) :

$$\lambda^{s-}_{\alpha,\beta}(d\alpha', d\beta') = \delta_\alpha(d\alpha')\, \mathrm{P}^{s, \mathrm{X}^{s-}(\alpha)}(d\beta') \tag{9.6}$$

On a en particulier la formule essentielle :

$$\mathrm{X}^t(\lambda^{s-}_\omega) = \mathrm{P}(s, t; \mathrm{X}^{s-}(\omega)) . \tag{9.7}$$

D'autre part, les formules précédentes donnent :

PROPOSITION (9.7 bis). – *Les probabilités* λ^{s-}_ω *et* $\mathrm{P}^{s, \mathrm{X}^{s-}(\omega)}$ *coïncident sur la tribu d'avenir* ${}^s\mathfrak{U}$ *du temps s.*

PROPOSITION (9.8). – $\lambda^s_\omega = \lambda^{s-}_\omega$ *si et seulement si*

$$\mathrm{P}(s, s; \mathrm{X}^s(\omega)) = \mathrm{P}(s, s; \mathrm{X}^{s-}(\omega))$$

(donc $\mathrm{X}^s(\omega) = \mathrm{X}^{s-}(\omega)$ *s'ils sont s-normaux).*

Démonstration. – Cela résulte aussitôt de (9.4) en prenant des projections pour lesquelles $t_k = s$.

THEOREME (9.9). – *Pour la désintégration régulière* $(t, \omega') \mapsto \lambda^t_{\omega'}$ *de* $\mathrm{P}^{\sigma,\mu}$ *pour* $t > \sigma$, *ou de* λ^s_ω *pour* $t > s$, *un système de limites à gauche est* $(t, \omega') \mapsto \lambda^{t-}_{\omega'}$.

Démonstration. – Nous devrons utiliser un lemme analogue à (9.2) mais meilleur car valable pour *tout* ω' :

LEMME (9.10). – *Si* Φ *a la forme indiquée au lemme (9.2), la fonction* $t \mapsto \lambda^t_{\omega'}(\Phi)$ *a partout des limites à gauche, et son système de limites à gauche est* $t \mapsto \lambda^{t-}_{\omega'}(\Phi)$.

Démonstration du lemme. – Nous utiliserons la même expression (9.2 bis). Alors le système de limites à gauche est donné dans $]t_{k-1}, t_k]$ par

$$\omega' \mapsto f_1(\mathrm{X}^{t_1}(\omega'))\, f_2(\mathrm{X}^{t_2}(\omega')) \ldots f_{k-1}(\mathrm{X}^{t_{k-1}}(\omega'))\, g^t(\mathrm{X}^{t-}(\omega')) ,$$

car $(t, x) \to g^t(x)$ est K-continue. Or ceci est exactement

$$\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t-}(\Phi) .$$

Démontrons maintenant le théorème. Tout d'abord, le lemme prouve que, pour toute Φ, $\omega' \to \lambda_{\omega'}^{t-}(\Phi)$ est dans la tribu $\mathcal{C}^{t-}$; en prenant des $F \in \mathcal{B}$ comme dans la démonstration du théorème (9.3), cela prouve que $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t}(F)$ est dans $\mathcal{C}^{t-}$, donc que $\omega' \mapsto \lambda_{\omega'}^{t-}$ est dans $\mathcal{C}^{t-}$.

Ensuite $(t, \omega') \mapsto \lambda_{\omega'}^{t-}$ est un système de limites à gauche, si pour toute $F \in \mathcal{B}$, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω' ou pour λ_ω^s-presque tout ω', le système de limites à gauche de $t \mapsto \lambda_{\omega'}^{t}(F)$ est

$$t \to \lambda_{\omega'}^{t-}(F)\,(^{27}) ;$$

or c'est même vrai pour tout ω' d'après le lemme (9.10).

THEOREME (9.11). – *Toute λ_ω^{s-} admet pour désintégration régulière relativement à $(\mathcal{C}^t)_{t\in\mathbf{R}}$: $(t, \omega') \mapsto \lambda_\omega^{s-}$ pour $t < s$, $\lambda_{\omega'}^{t}$, pour $t \geqslant s$, et pour système de limites à gauche $(t, \omega') \to \lambda_\omega^{s-}$ pour $t \leqslant s$, $\lambda_{\omega'}^{t-}$ pour $t > s$.*

Démonstration. – La démonstration est exactement la même que pour λ_ω^s, il est inutile de la refaire.

Remarque (9.12). – Les tribus $\mathcal{C}^t$ sont universellement fortes, comme intersection dénombrable de complétées universelles de tribus dénombrablement engendrées. Donc on savait d'avance que, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω, λ_ω^s et λ_ω^{s-} admettent les désintégrations régulières et limites à gauche données ici, mais c'est même vrai pour tout ω (28).

PROPOSITION (9.13). – *$P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement pour les temps $\geqslant \sigma$, λ_ω^s et λ_ω^{s-}-presque sûrement pour les temps $\geqslant s$, la trajectoire est entièrement dans l'ensemble des points normaux.*

---

(27) Schwartz [2], théorème (4.21 bis), p. 91.

(28) Pour les tribus fortes, voir Schwartz [2], p. 58, puis corollaire (3.9 bis) p. 59 et corollaire (6.2), p. 128. Ajoutons même que le résultat général n'est pas si complet, voir remarque page 133.

Démonstration. – Nous voulons dire que, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω', pour tout $t \geqslant \sigma$, ou pour $\lambda_\omega^{s\pm}$-presque tout ω', pour tout $t \geqslant s$, le point $X^t(\omega')$ est t-normal. C'est évident pour un t fixé, parce que cela revient à dire que, pour $P(\sigma, t; x)$ ou $P(s, t; X^s(\omega)$ ou $X^{s-}(\omega))$ – presque tout y, $P(t, t; y) = \delta_y$, c'est (3.2).

Mais l'ensemble des points (t, y) normaux est K-fermé dans $\mathbf{R} \times E$, donc, par continuité à droite, c'est vrai pour toute la trajectoire.

PROPOSITION (9.14). – *$P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement pour les temps $> \sigma$, $\lambda_\omega^{s\pm}$-presque sûrement pour les temps $> s$, les limites à gauche de la trajectoire sont des points normaux.*

Démonstration. – Nous avons vu que, pour presque tout ω', les points $(t, X^t(\omega'))$ sont normaux ; alors aussi leurs limites $(t, X^{t-}(\omega'))$ puisque l'ensemble des points normaux de $\mathbf{R} \times E$ est K-fermé.

PROPOSITION (9.15). – *Si f est une fonction excessive sur* $\mathbf{R} \times E$, *alors le processus $(f^t \circ X^t)_{t \in \mathbf{R}}$ est une surmatingale régulière pour $P^{\sigma,\mu}$ et les temps $\geqslant \sigma$, pour $\lambda_\omega^{s\pm}$ et les temps $\geqslant s$.*

Démonstration. – Il suffit(29) de voir que, pour tout ω', pour tout t, $u \to \lambda_{\omega'}^t(f^u \circ X^u) = (X^u(\lambda_{\omega'}^t))\,(f^u) = P^{t,u} f^u(X^t(\omega'))$ est décroissante et continue à droite pour $u \geqslant t$, et prend la valeur $f^t(X^t(\omega'))$ au point t, ce qui résulte de (6.2).

PROPOSITION (9.16). – *Pour tout ω et tout s, λ_ω^s-presque sûrement $X^{s-} = X^{s-}(\omega)$, et $X^s = X^s(\omega)$ si et seulement si $(s, X^s(\omega))$ est normal. Pour tout ω et tout s, λ_ω^{s-}-presque sûrement $X^{s-} = X^{s-}(\omega)$, et $X^s = X^{s-}(\omega)$ si et seulement si $(s, X^{s-}(\omega))$ est normal.*

Démonstration. – $\lambda_\omega^{s\pm}$ presque sûrement la trajectoire coïncide avec ω aux temps $< s$, donc $X^{s-} = X^{s-}(\omega)$. Ensuite, dire que λ_ω^s-

---

(29) Voir Schwartz [2], proposition (5.12), énoncé 4), page 113. Ici nous l'utilisons pour une surmartingale scalaire $\geqslant 0$ et non dans le cas général d'une surmartingale de mesures $\geqslant 0$, nous sommes donc ici dans un cas plus simple. Il est vrai que cela suppose la surmartingale partout finie, mais on en déduit sans peine le cas d'une surmartingale scalaire $\geqslant 0$ arbitraire par un passage à la limite croissante.

presque sûment $X^s = X^s(\omega)$, c'est dire que $X^s(\lambda_\omega^s) = \delta_{X^s(\omega)}$ ou que $P(s, s ; X^s(\omega)) = \delta_{X^s(\omega)}$, donc que $(s, X^s(\omega))$ est normal. Puis λ_ω^{s-}-presque sûrement $X^s = X^{s-}(\omega)$ si et seulement si

$$X^s(\lambda_\omega^{s-}) = \delta_{X^{s-}(\omega)}$$

ou $P(s, s ; X^{s-}(\omega)) = \delta_{X^{s-}(\omega)}$, c'est-à-dire si $(s, X^{s-}(\omega))$ est normal.

Remarque. – Par contre, en général, il est faux que λ_ω^{s-}-presque sûrement $X^s = X^s(\omega)$, car $X^s(\omega) \neq X^{s-}(\omega)$.

LEMME (9.17)(30). – *Soit* $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$ *vérifiant les conditions de Jirina, soit* $(\mathcal{T})_{t \in \mathbf{R}}$ *une famille de tribus* λ*-mesurables, croissante et continue à droite, et voit* $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^t$ *une désintégration régulière, de limites à gauche* $(t, \omega) \mapsto \lambda_\omega^{t-}$. *Alors, si* T *est un temps d'arrêt prévisible, une désintégration de* λ *relativement à la tribu* $\mathcal{T}^{T-}$ *est donnée,* λ*-presque partout, par* $\omega \mapsto \lambda_\omega^{T(\omega)-}$, *et partout si cette fonction est* $\mathcal{T}^{T-}$*-mesurable.*

Démonstration. – Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite strictement croissante de temps d'arrêt, de limite T. On sait que $\mathcal{T}^{T-} = \bigvee_n \mathcal{T}^{T_n}$. Mais alors il existe une désintégration régulière pour les tribus $\mathcal{T}^{T_n}$, $n \in \mathbf{N}$, et $\mathcal{T}^{T-}$. Donc $\omega \to \Lambda_\omega$ est une désintégration pour $\mathcal{T}^{T-} \vee \mathcal{N}_\lambda$ si et seulement si, pour toute $F \in \mathcal{O} \geqslant 0$ ou bornée, $\Lambda_\omega(F) = \lim_{n \to \infty} \lambda_\omega^{T_n(\omega)}(F)$ λ-presque sûrement. Or, la désintégration donnée étant régulière, avec système de limites à gauche, on a justement, pour tout F, $\lambda_\omega^{T(\omega)-}(F) = \lim_{n \to \infty} \lambda_\omega^{T_n(\omega)}(F)$ λ-presque sûrement. Donc $\omega \mapsto \lambda_\omega^{T(\omega)-}(F)$ est une désintégration pour $\mathcal{T}^{T-} \vee \mathcal{N}_\lambda$, *cqfd.*

THEOREME (9.18). – *(Quasi-continuité à gauche). Soit* T *un temps d'arrêt accessible*(31) $> \sigma$ (resp. $> s$). *Alors,* $P^{\sigma,\mu}$ *presque*

(30) Nous donnons simplement ici un complément qui ne figurait pas à Schwartz [2], où étaient étudiés les temps d'arrêt quelconques, non les temps d'arrêt prévisibles.

(31) Pour la classification des temps d'arrêt, voir par exemple Dellacherie-Meyer [1], chapitre IV.

sûrement (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$*-presque sûrement*), $X^T = X^{T-}$; *pour* $P^{\sigma,\mu}$*-presque tout* ω', $\lambda_\omega^{s\pm}$*-presque tout* ω', $\lambda_{\omega'}^{T(\omega')-} = \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$.

Démonstration. – Il suffit de le démontrer pour un temps d'arrêt T prévisible. Alors l'évènement $X^T = X^{T-}$ est universellement mesurable. Donc d'après le lemme ci-dessus,

$$P^{\sigma,\mu}\{X^T = X^{T-}\} = \int P^{\sigma,\mu}(d\omega)\, \lambda_\omega^{T(\omega)-}\{X^T = X^{T-}\}$$

Mais T est dans la tribu $\mathcal{C}^{T-}$, donc, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω, $\lambda_\omega^{T(\omega)-}$-presque sûrement $T = T(\omega)$, donc $X^T = X^{T(\omega)}$, $X^{T-} = X^{T(\omega)-}$. Donc l'intégrale vaut $\int P^{\sigma,\mu}(d\omega)\, \lambda_\omega^{T(\omega)-}\{X^{T(\omega)} = X^{T(\omega)-}\}$, qui vaut 1 d'après la proposition (9.16), car pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω, $(T(\omega), X^{T(\omega)-}(\omega))$ est normal par (9.14). Même démonstration pour les autres cas.

Conséquence (9.19). – Pour tout $t > \sigma$, $X^t = X^{t-}$ $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement. Donc

$$X^{t-}(P^{\sigma,\mu}) = X^t(P^{\sigma,\mu}) = P(\sigma, t\,;\mu)\,.$$

De même pour $t > s$,

$$X^{t-}(\lambda_\omega^s) = X^t(\lambda_\omega^s) = P(s, t\,; X^s(\omega))\,,$$

$$X^{t-}(\lambda_\omega^{s-}) = X^t(\lambda_\omega^{s-}) = P(s, t\,; X^{s-}(\omega))\,.$$

Donc, dans les formules de projection de $P^{\sigma,\mu}$ ou $\lambda_\omega^{s\pm}$ sur des produits finis, on pourra mettre des X^{t_i-} au lieu de X^{t_i}.

COROLLAIRE (9.20). – *Fixons-nous* σ, μ (resp. ω, s). *L'ensemble des* (t, ω), $t > \sigma$ (resp. $t > s$), *pour lesquels* $X^t(\omega') \neq X^{t-}(\omega')$, *l'ensemble de ceux pour lesquels* $\lambda_{\omega'}^t \neq \lambda_{\omega'}^{t-}$, *sont contenus dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt qui, à un ensemble* $P^{\sigma,\mu}$*-négligeable près* (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$ *négligeable près*) *sont complètement inaccessibles.*

Démonstration. – Fixons-nous, par exemple, $P^{\sigma,\mu}$.

On sait que ces ensembles sont réunions dénombrables de graphes de temps d'arrêt. Chacun de ces temps d'arrêt a une partie accessible et une partie complètement inaccessible(32) ; (9.14) dit que la partie accessible est $P^{\sigma,\mu}$-négligeable.

COROLLAIRE (9.21). – *Par rapport à* $P^{\sigma,\mu}$ (resp. $\lambda_{\omega}^{s\pm}$), *la famille de tribus* $\mathcal{C}^t$ *n'a pas de temps de discontinuité* $> \sigma$ (resp. $> s$) ; *tout temps d'arrêt accessible* $> \sigma$ (resp. $> s$) *est, à un ensemble négligeable près, prévisible.*

Démonstration. – Soit T un temps d'arrêt prévisible $> \sigma$ (resp. $> s$) ; puisque $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement (resp. $\lambda_{\omega}^{s\pm}$-presque sûrement), $\lambda_{\omega'}^{T(\omega')-} = \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$ (9.18), $\mathcal{C}^T$ et $\mathcal{C}^{T-}$ sont égales aux ensembles négligeables près puisqu'elles donnent à $P^{\sigma,\mu}$ (resp. $\lambda_{\omega}^{s\pm}$) même désintégration ; c'est la définition même de l'absence de temps de discontinuité. La fin en résulte(33).

10. La propriété forte de Markov.

Cette propriété joue habituellement un rôle central dans la théorie. Ici nous allons voir qu'elle est un sous-produit évident des théorèmes de désintégration régulière du § 9, et elle est en fait moins forte qu'eux.

Soit T un temps d'arrêt partout fini, relatif aux tribus $\mathcal{C}^t$. On appelle tribu de l'avenir de T, qu'on notera ${}^T\mathcal{C}$ (par opposition à $\mathcal{C}^T$, tribu du passé de T) la tribu engendrée par les X^{T+t}, $t \geq 0$. ${}^T\mathcal{C}$ est dénombrablement engendrée, car on peut se borner aux t rationnels.

On peut aussi faire intervenir les opérateurs de translation θ. θ^s sera l'application de Ω dans lui-même définie par

---

(32) Voir Dellacherie-Meyer [1], chapitre IV.

(33) Dellacherie-Meyer [1], théorème 83, p. 217.

$$X^t(\theta^s(\omega)) = X^{t+s}(\omega) .$$

Alors θ^T est l'opération définie par $\omega \mapsto \theta^{T(\omega)}(\omega)$. Alors

$$X^{T+t} = X^t \circ \theta^T ,$$

de sorte que ${}^T\mathcal{C}$ est la tribu $(\theta^T)^{-1}({}^0\mathcal{C})$, où ${}^0\mathcal{C}$ est la tribu de l'avenir du temps 0, engendrée par les X^t, $t \geqslant 0$. Alors une fonction de ${}^T\mathcal{C}$ est de la forme $F \circ \theta^T$, où F est dans la tribu d'avenir ${}^0\mathcal{C}$ du temps 0. Bien entendu, $(\theta^T)^{-1}\,{}^0\mathcal{C} \subset {}^T\mathcal{C} \subset \mathfrak{O}$. Alors la propriété de Markov forte est la suivante :

Proposition (10.1). – *Soit* T *un temps d'arrêt fini* $\geqslant \sigma$ (resp. $\geqslant s$). *Soit* $F \in \overline{{}^0\mathcal{C}}$. *Alors une espérance conditionnelle de* $F \circ \theta^T$ *par rapport à la tribu* $\mathcal{C}^T$ *est donnée,* $P^{\sigma,\mu}$*-presque partout* (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$*-presque partout*), *par*

$$\omega' \mapsto P^{T(\omega'), X^{T(\omega')}(\omega')}(F \circ \theta^{T(\omega')}) = (\theta^{T(\omega')}(P^{T(\omega'),X^{T(\omega')}(\omega')}))(F)$$

Démonstration. – Une espérance conditionnelle de $F \circ \theta^T$ pour la tribu $\mathcal{C}^T$ est $\omega' \to \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}(F \circ \theta^T)$, à un ensemble négligeable près. Mais pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω' (resp. pour $\lambda_\omega^{s\pm}$-presque tout ω'), T est $\lambda_{\omega'}^{T(\omega')}$-presque partout égal à $T(\omega')$(34). Donc une espérance conditionnelle est encore, à un ensemble négligeable près, $\omega' \to \lambda_{\omega'}^{T(\omega')}(F \circ \theta^{T(\omega')})$. Mais $F \circ \theta^{T(\omega')}$ appartient à la tribu d'avenir du temps $T(\omega')$, donc, par (5.4 ter).

$$\lambda_{\omega'}^{T(\omega')}(F \circ \theta^{T(\omega')}) = P^{T(\omega'), X^{T(\omega')}(\omega')}(F \circ \theta^{T(\omega')}),$$

cqfd.

Remarques :

1) La propriété forte de Markov n'est vraie *que pour les temps d'arrêt* $T \geqslant \sigma$, relativement à $P^{\sigma,\mu}$. Donc le processus ne devrait s'appeler markovien que pour $P^{\sigma,\mu}$ et les temps $\geqslant \sigma$. Mais comme

(34) Schwartz [2], corollaire (7.3), p. 140, et proposition (7.7), p. 143.

on peut faire varier σ et μ de toutes les manières, il est normal d'appeler fortement markoviens les processus précédemment construits.

2) Dans beaucoup d'applications pratiques, il sera largement aussi simple, au lieu d'utiliser la propriété de Markov forte, d'utiliser les désintégrations régulières, dont elle est un sous-produit. Voici un exemple :

DEFINITION (10.2). — *Soit* S *un temps d'arrêt.*

Soit A *une partie analytique de* $\mathbf{R} \times E$, $A = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} \{t\} \times A^t$, $A^t \in E$.

On appelle temps d'entrée $\geqslant$ S *dans* A *la quantité*

$$D_A^S = \operatorname{Inf} \{t \geqslant S \,; X^t \in A^t\} \;; D_A^S \geqslant S \,.$$

On appelle temps d'entrée stricte

$$T_A^S = \operatorname{Inf} \{t > S \,; X^t \in A^t\} \;; T_A^S \geqslant D_A^S \geqslant S \,.$$

PROPOSITION (10.2 bis). — D_A^S *et* T_A^S *sont des temps d'arrêt par rapport à* $(\mathcal{C}^t)_{t \in \mathbf{R}}$.

Démonstration. — Munissons en effet $\mathbf{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{R}$. Alors $(t, \omega) \mapsto (t, X^t(\omega))$ est une application mesurable de $(\mathbf{R} \times \Omega, \mathcal{R} \otimes \mathcal{O})$ dans $(\mathbf{R} \times E, \mathcal{R} \otimes \mathcal{E})$; l'image réciproque de A par cette application, c'est-à-dire $A' = \{(t, \omega) \;;\; (t, X^t(\omega)) \in A\}$ est donc $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{O})$-analytique. Son intersection avec

$$\{(t, \omega) \,; S(\omega) \leqslant t < \tau\}$$

est $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\tau)$-analytique ; la projection de cette intersection sur Ω est donc $\mathcal{C}^\tau$-analytique, donc dans $\mathcal{C}^\tau$ (complétée universelle !) ; or cette projection est l'ensemble $\{D_A^S < \tau\}$. Donc $\{D_A^S < \tau\} \in \mathcal{C}^\tau$, par suite $\{D_A^S \leqslant \tau\} \in \mathcal{C}^{\tau+} = \mathcal{C}^\tau$ (continuité à droite), donc D_A^S est bien un temps d'arrêt. T_A^S s'obtiendrait en remplaçant dans la démonstration précédente, $S(\omega) \leqslant t < \tau$ par $S(\omega) < t < \tau$, donc c'est encore un temps d'arrêt, cqfd.

$D_A^S(\omega)$ et $T_A^S(\omega)$ sont égaux, sauf peut-être si $D_A^S(\omega) = S$ et $X^{D_A^S(\omega)}(\omega) \in A$.

DEFINITION (10.3). – *A étant une partie souslinienne de* $\mathbf{R} \times E$, *un point* (s, x) *de* $\mathbf{R} \times E$ *est dit régulier pour* A, $(s, x) \in A^{\text{Rég}}$, *si* $P^{s,x}$*-presque sûrement,* $T_A^s = s$.

PROPOSITION (10.4). – *Si* $A \subset \mathbf{R} \times E$ *est souslinien,* $A^{\text{Rég}}$ *est universellement mesurable.*

Démonstration. – Nous avons vu, dans la démonstration de (10.2 bis) que, pour s' fixé, $\{\omega \in \Omega \,;\, D_A^{s'}(\omega) < \tau\}$ est $\mathcal{C}^\tau$-analytique. Mais on peut aussi faire varier s'. L'ensemble des $(s', t, X^t(\omega))$ tels que $(t, X^t(\omega)) \in A$, $s' \leqslant t < s' + \epsilon \leqslant \tau$ est $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\tau)$-analytique. Sa projection sur le 2ème facteur $\mathbf{R}$ est l'ensemble des (s', ω) tels que $D_A^{s'}(\omega) < s' + \epsilon \leqslant \tau$, il est donc $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\tau)$-analytique. L'intersection pour tous les $\epsilon > 0$, soit $\{(s', \omega) \,;\, D_A^{s'}(\omega) = s' < \tau\}$ est donc $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{C}^\tau)$-analytique. Il est donc universellement mesurable, ainsi que la réunion pour tous les τ, $B = \{(s', \omega) \,;\, D_A^{s'}(\omega) = s'\}$.

Mais $(s, x) \mapsto P^{s,x}$, fonction à valeurs mesures sur Ω, est universellement mesurable (voir après (4.3)), donc aussi $(s, x) \mapsto \delta_s \otimes P^{s,x}$ à valeur mesures sur $\mathbf{R} \times \Omega$. Donc $(s, x) \mapsto (\delta_s \otimes P^{s,x})(B)$ est universellement mesurable. Par le même raisonnement (en remplaçant $s' \leqslant t$ par $s' < t$), $(s, x) \longrightarrow (\delta_s \otimes P^{s,x})(B')$ est universellement mesurable, où $B' = \{(s', \omega) \,;\, T_A^{s'}(\omega) = s'\}$. Or $(s, x) \in A^{\text{Rég}}$ équivaut à $(\delta_s \otimes P^{s,x})(B') = 1$, cqfd.

PROPOSITION (10.5). – *Pour* $A \subset \mathbf{R} \times E$ *souslinien et* (s, x) *normal,* $(s, x) \in A \cup A^{\text{Rég.}}$ *équivaut à :* $P^{s,x}$*-presque sûrement,* $D_A^s = s$.

Démonstration. – Supposons (s, x) normal $\in A \cup A^{\text{Rég}}$. Ou bien $(s, x) \in A$; alors $P^{s,x}$-presque sûrement $X^s = x \in A$ donc $D_A^s = s$; ou bien $(s, x) \in A^{\text{Rég}}$, alors $P^{s,x}$-presque sûrement $s \leqslant D_A^s \leqslant T_A^s = s$, donc $D_A^s = s$.

Inversement, supposons (s, x) normal et supposons que $P^{s,x}$-presque sûrement $D_A^s = s$. Supposons $(s, x) \notin A$. Alors $P^{s,x}$-presque sûrement $X^s = x$ donc $(s, X^s) \notin A$, donc $T_A^s = s$; donc $(s, x) \in A^{\text{Rég}}$.

Alors voici un théorème habituellement démontré par la propriété de Markov forte et que nous démontrerons de manière équivalente par la désintégration :

PROPOSITION (10.6). — *Soit* U *le temps d'arrêt* D_A^s *ou* T_A^s, $S \geqslant \sigma$ (resp. $S \geqslant s$). *Alors,* $P^{\sigma,\mu}$*-presque sûrement* (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$*-presque sûrement) pour* $U < +\infty$, $(U, X^U) \in A \cup A^{\text{Rég}}$.

Démonstration. — Bornons-nous à $P^{\sigma,\mu}$, c'est pareil pour $\lambda_\omega^{s\pm}$. Prenons d'abord $U = D_A^S$. Tout d'abord, pour tout ω',

$$D_A^{U(\omega')}(\omega') = D_A^{S(\omega')}(\omega') = U(\omega') .$$

Donc

$$P^{\sigma,\mu}\{U < +\infty\} = P^{\sigma,\mu}\{U < +\infty \quad \text{et} \quad D_A^U = U\} .$$

Mais une désintégration de $P^{\sigma,\mu}$ pour $\mathcal{C}^U$ est $\omega \mapsto \lambda_\omega^{U(\omega)}$ pour $U(\omega) < +\infty$, $\omega \mapsto \delta_\omega$ pour $U(\omega) = +\infty$.

Comme $\{U < +\infty\} \in \mathcal{C}^U$, l'égalité de la désintégration(35) donne :

$$P^{\sigma,\mu}\{U < +\infty\} = \int_{U<+\infty} P^{\sigma,\mu}(\omega)\, \lambda_\omega^{U(\omega)}\{D_A^U = U\}$$

Cela n'est possible que si, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω tel que

$$U(\omega) < +\infty, \quad \lambda_\omega^{U(\omega)}\{D_A^U = U\} = 1.$$

Mais, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω pour lequel $U(\omega)$ est fini, $\lambda_\omega^{U(\omega)}$-presque sûrement $U = U(\omega)$, donc $\lambda_\omega^{U(\omega)}\{D_A^{U(\omega)} = U(\omega)\} = 1$. Mais l'évènement $D_A^S = s$ (ici $s = U(\omega)$) est dans la tribu d'avenir de s, donc sa $\lambda_\omega^{U(\omega)}$-mesure est aussi sa $P^{U(\omega), X^{U(\omega)}(\omega)}$-mesure ; donc, pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω tel que $U(\omega) < +\infty$,

$$P^{U(\omega), X^{U(\omega)}(\omega)}\ \{D_A^{U(\omega)} = U(\omega)\} = 1.$$

Enfin, par (9.13), pour $P^{\sigma,\mu}$-presque tout ω pour lequel $U(\omega) < +\infty$, $(U(\omega), X^{U(\omega)}(\omega))$ est normal, donc la dernière égalité exprime, par (10.5), que $(U(\omega), X^{U(\omega)}(\omega)) \in A \cup A^{\text{Rég}}$, d'où le résultat pour $U = D_A^S$.

Ensuite, $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement $D_A^S = T_A^S$ si $D_A^S \neq S$. Si $D_A^S = S$ il existe $n \in \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $D_A^{S+\frac{1}{n}} = T_A^{S+\frac{1}{n}} = T_A^S$; comme $P^{\sigma,\mu}$-presque que sûrement, pour tout n, $\left(D_A^{S+\frac{1}{n}}, X^{D_A^{S+\frac{1}{n}}}\right) \in A \cup A^{\text{Rég}}$, on a aussi, $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement, $(T_A^S, X^{T_A^S}) \in A \cup A^{\text{Rég}}$, cqfd.

(35) Schwartz [2], égalité (2.12), p. 35.

11. Processus homogènes dans le temps.

Le processus est dit homogène dans le temps s'il existe des probabilités de Radon $P(t\,;x)$, $t \geqslant 0$, sur E telles que

$$P(s\,,t\,;x) = P(t-s\,;x)\,.$$

Alors $(t\,,x) \to P(t\,,x)$ est supposée K-continue pour la convergence dans P(E) ; Chapman-Kolmogorov s'écrit, pour $0 \leqslant s \leqslant t$:

$$P(s+t\,;x) = \int P(s\,;x)(dy)\,P(t\,;y)\,. \tag{11.1}$$

Un point $x \in E$ est normal si $P(0\,,x) = \delta_x$ et alors $(t\,,x)$ est normal pour tout t.

On a un semi-groupe $(P^t)_{t\in \mathbf{R}+}$ au sens habituel, opérant sur les fonctions universellement mesurables, bornées ou $\geqslant 0$, et sur les probabilités de Radon : $P^{s+t} = P^s P^t$.

La formule (4.1) s'écrit ici, pour $t_1 \ldots < t_{k-1} < \sigma \leqslant t_k \ldots < t_n$:

$$\begin{aligned}(X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots X^{t_n})(P^{\sigma,x}) &\qquad\qquad (11.2)\\ = \delta_\nabla(dx_1)\ldots\delta_\nabla(dx_{k-1})\,P(t_k-\sigma\,;x_{k-1})(dx_k)&\\ \ldots P(t_n-t_{n-1}\,;x_{n-1})(dx_n)&\end{aligned}$$

Les formules (5.1) et (9.4) s'écrivent pour

$$t_1 < t_2 \ldots < t_{k-1} < s \leqslant t_k < \cdots < t_n\,:$$

$$(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})(\lambda_\omega^{s\pm}) = \delta_{X^{t_1}(\omega)}(dx_1)\ldots\delta_{X^{t_{k-1}}(\omega)}(dx_{k-1}) \tag{11.3}$$

$$P(t_k-s\,;X^{s\pm}(\omega))(dx_k)\ldots P(t_n-t_{n-1}\,;x_{n-1})(dx_n)\,.$$

On fait alors jouer un rôle fondamental aux opérateurs de translation θ^r. Trivialement θ^r est $(\mathfrak{U}^{r+t}, \mathfrak{U}^t)$-mesurable, donc aussi $(\mathfrak{T}^{r+t}, \mathfrak{T}^t)$-mesurable, et $(\mathfrak{O}\,,\,\mathfrak{O})$-mesurable. On peut donc calculer les images θ^r des probabilités fondamentales sur $(\Omega\,,\mathfrak{T})$:

PROPOSITION (11.4). –

$$\theta^r P^{\sigma,\mu} = P^{\sigma-r,\mu}$$

$$\theta^r \lambda_\omega^{s\pm} = \lambda_{\theta^r\omega}^{(s-r)\pm}\,.$$

Démonstration. –

1) Démontrons d'abord la $1^{\text{ère}}$ formule. Il suffit de démontrer que les deux membres ont même projection sur E^n par $(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})$; nous supposerons

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < \sigma - r \leqslant t_k < t_{k+1} \ldots < t_n$$

et ferons $\mu = \delta_x$, ce qui donnerait μ quelconque par intégration. Alors (11.2) donne :

$$(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})\ (\theta^r P^{\sigma,x}) = (X^{t_1+r}, \ldots, X^{t_n+r})\ (P^{\sigma,x})$$

$$= \delta_\nabla(dx_1) \ldots \delta_\nabla(dx_{k-1})\ P(t_k + r - \sigma\ ;\ x_{k-1})\ (dx_k)$$

$$P(t_n - t_{n-1}\ ;\ x_{n-1})\ (dx_n)$$

$$= (X^{t_1}, X^{t_2}, \ldots, X^{t_n})\ (P^{\sigma-r,x}).$$

2) On démontre de même la $2^{\text{ème}}$ formule par (11.3), pour

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < s - r \leqslant t_k < \cdots < t_n :$$

$$(X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})\ (\theta^r (\lambda_\omega^{s\pm}))$$

$$= (X^{t_1+r}, \ldots, X^{t_n+r})\ (\lambda_\omega^{s\pm})$$

$$= \delta_{X^{t_1+r}(\omega)}(dx_1) \ldots \delta_{X^{t_{k-1}+r}(\omega)}(dx_{k-1})$$

$$P(t_k + r - s\ ;\ X^{s\pm}(\omega))\ (dx_k) \ldots P(t_n - t_{n-1}\ ;\ x_{n-1})\ (dx_n)$$

$$= \delta_{X^{t_1}(\theta^r\omega)}(dx_1) \ldots \delta_{X^{t_{k-1}}(\theta^r\omega)}(dx_{k-1})$$

$$P(t_k + r - s\ ;\ X^{(s-r)\pm}(\theta^r\omega))\ (dx_k) \ldots P(t_n - t_{n-1}\ ;\ x_{n-1})\ (dx_n)$$

$$= (X^{t_1}, \ldots, X^{t_n})\ (\lambda_{\theta^r\omega}^{(s-r)\pm}),\ cqfd.$$

Conséquence (11.5). – On commence en général toutes les trajectoires au temps 0, c'est-à-dire on remplace l'échelle des temps **R** par $\mathbf{R}^+$. Alors il n'y a plus que $P^{\sigma,\mu}$ qu'on appelle P^μ.

La deuxième formule de (11.4) s'écrit, pour $r = s$:

PROPOSITION (11.6). – *Si l'échelle des temps est* $\mathbf{R}^+$:

$$\theta^s \lambda_\omega^{s\pm} = P^{X^{s\pm}(\omega)}$$

(*pour* $s \geqslant 0$ *avec* s^+, $s > 0$ *avec* $s-$).

Démonstration. – (11.4) donne, avec l'échelle des temps $\mathbf{R}$:

$$\theta^s \lambda_\omega^{s\pm} = \lambda_{\theta^s\omega}^{0\pm}$$

En restreignant ces deux mesures à la tribu d'avenir du temps 0, (5.4 ter) et (9.7 bis) donnent

$$\theta^s \lambda_\omega^{s\pm} = \mathrm{P}^{0,\mathrm{X}^{0\pm}(\theta^s\omega)} = \mathrm{P}^{0,\mathrm{X}^{s\pm}(\omega)} = \mathrm{P}^{\mathrm{X}^{s\pm}(\omega)}.$$

PROPOSITION (11.7). – *Si l'échelle des temps est* $\mathbf{R}^+$, *la propriété de Markov forte* (10.1) *s'énonce comme suit : si* T *est un temps d'arrêt, une espérance conditionnelle de* $\mathrm{F} \circ \theta^{\mathrm{T}}$ (F $\mathfrak{O}$*-mesurable sur* Ω) *par rapport à* $\mathscr{C}$ *est donné,* P^μ*-presque partout, par*

$$\omega \to \mathrm{P}^{\mathrm{X}^{\mathrm{T}(\omega)}(\omega)}(\mathrm{F}).$$

12. Processus markoviens dans les groupes topologiques sousliniens, invariants par les translations (Marches aléatoires à temps continu).

PROPOSITION (12.1). – *Soit* E *un groupe topologique souslinien (nécessairement complètement régulier). Soit* $(s, t) \to \mu^{s,t}$, $s \leqslant t$, *une application à valeurs dans* P(E), K*-continue* [*cela veut dire que,* $(s, t) \to \mu^{s,t}$ *est continue pour la topologie étroite, et que* $\mu^{s,t}$ *reste équiconcentrée pour s et t bornés*]. *On supposera la loi de convolution, pour* $r \leqslant s \leqslant t$, $\mu^{r,s} * \mu^{s,t} = \mu^{r,t}$, *et* $\mu^{t,t} = \delta$. *Alors, en posant* $\mathrm{P}(s, t\,; x) = \delta_x * \mu^{s,t}$, *on aura des probabilités de transition satisfaisant à toutes les conditions antérieures, et en outre à la condition de normalité* $\mathrm{P}(t, t\,; x) = \delta_x$.

On définit donc un Markov correspondant.

C'est un processus à accroissements aléatoires indépendants : pour $s \leqslant t$, $(\mathrm{X}^s)^{-1}\mathrm{X}^t$ *est indépendant de la tribu* $\mathscr{C}^s$, *relativement aux propbabilités* $\mathrm{P}^{\sigma,\mu}$, $\sigma \leqslant s$, *ou* $\lambda_\omega^{r\pm}$, $r \leqslant s$.

Démonstration. –

1) Tout d'abord $(s, t, x) \to \delta_x * \mu^{s,t}$ est continue pour la topologie étroite. Soit en effet U un ouvert, K un compact contenu dans U, W un voisinage de l'origine e tel que WWK $\subset$ U. Alors

$\delta_x * \mu^{s,t}(\mathrm{U}) = \mu_{s,t}(\delta_{x^{-1}} * \mathrm{U})$, la parenthèse désignant le translaté à gauche de U par la translation x^{-1} ; pour $x \in \mathrm{W}$, $\delta_{x^{-1}} * \mathrm{U} \supset \mathrm{WK}$, donc

$$\liminf_{x\to e,\ s\to s_0,\ t\to t_0} (\delta_x * \mu^{s,t})(\mathrm{U}) \geqslant \liminf_{s\to s_0,\ t\to t_0} \mu^{s,t}(\mathrm{WK}) \geqslant \mu^{s_0,t_0}(\mathrm{WK})$$

(parce que WK est ouvert) $\geqslant \mu^{s_0,t_0}(\mathrm{K})$; K étant arbitraire, la limite inférieure est $\geqslant \mu^{s_0,t_0}(\mathrm{U})$, ce qui prouve la continuité étroite aux points $(e\,;s_0, t_0)$ d'où en tous les autres par translation. Ensuite, pour s, t dans un borné A de $\mathbf{R}$, et $x \in \mathrm{H}$ compact, $\delta_x * \mu^{s,t}$ reste équi-concentrée ; en effet, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe un compact K' tel que $\mu^{s,t}(\mathrm{K}') \geqslant 1 - \epsilon$; alors

$$(\delta_x * \mu^{s,t})(\mathrm{HK}') = \mu^{s,t}(\delta_{x^{-1}} * \mathrm{HK}') \geqslant \mu^{s,t}(\mathrm{K}') \geqslant 1 - \epsilon\,;$$

si donc $\mathrm{K} = \mathrm{HK}'$, on aura bien $\delta_x * \mu^{s,t}(\mathrm{K}) \geqslant 1 - \epsilon$ pour

$$s\,,\, t \in \mathrm{A}\,,\, x \in \mathrm{H}\,.$$

2) Si f est une fonction continue bornée sur E, $\mathrm{P}^{s,t} f = f * \check{\mu}^{s,t}$ définie par $x \to \int f(xy)\, \mu^{s,t}(dy)$.

Si μ est une probabilité de Radon sur E, $\mu \mathrm{P}^{s,t} = \mu * \mu^{s,t}$.

3) La relation de Chapman-Kolmogorov est assurée par

$$\mu^{r,t} = \mu^{r,s} * \mu^{s,t},$$

et tous les points sont normaux.

4) Il reste à vérifier la condition (7.1). Soient donnés A, ϵ, L. Il existe un compact M de E tel que $\mu^{s,t}(\mathrm{M}) \leqslant \epsilon$ pour $s, t \in \mathrm{A}$ (équi-concentration). Alors $\mathrm{K} = \mathrm{LM}^{-1}$ répond à (7.1). En effet, soit $x = k' \in \complement \mathrm{K}$; si $\ell \in \mathrm{L}$, on a $k'^{-1}\ell \in \complement \mathrm{M}$ (car, si $k'^{-1}\ell = m \in \mathrm{M}$, on aurait $k'^{-1} = m\ell^{-1}$ donc $k' = \ell m^{-1} \in \mathrm{LM}^{-1} = \mathrm{K}$, ce qui n'est pas) ; donc $\delta_{x^{-1}} * \mathrm{L} \subset \complement \mathrm{M}$, donc

$$(\delta_x * \mu^{s,t})(\mathrm{L}) = \mu^{s,t}(\delta_{x^{-1}} * \mathrm{L}) \leqslant \mu^{s,t}(\complement \mathrm{M}) \leqslant \epsilon\,,$$

donc $(\delta_x * \mu^{s,t})(\complement \mathrm{L}) \geqslant 1 - \epsilon$.

5) Pour montrer que $(X^s)^{-1} X^t$ est indépendante de $\mathcal{C}^s$, il suffit de voir que, si B est un évènement de la tribu de $(X^s)^{-1} X^t$, son espérance conditionnelle sur $\mathcal{C}^s$, $\omega' \to \lambda^s_{\omega'}(B)$, est une constante. Mais B est une image réciproque, par $(X^s)^{-1} X^t$, d'un $C \in \mathcal{E}$ (borélien de E). Alors $\lambda^s_{\omega'}(B) = (((X^s)^{-1} (X^t)) (\lambda^s_{\omega'})) (C)$. Mais ici tous les points sont normaux, donc $\lambda^s_{\omega'}$-presque sûrement $X^s = X^s(\omega')$, donc

$$\lambda^s_{\omega'}(B) = ((X^s(\omega'))^{-1} X^t)\,(\lambda^s_{\omega'})\,(C) = (\delta_{(X^s(\omega'))^{-1}} * (X^t(\lambda^s_{\omega'}))\ (C)$$

$$= (\delta_{(X^s(\omega'))^{-1}} * \delta_{X^s(\omega')} * \mu^{s,t})\ (C) = \mu^{s,t}(C),$$

et $\lambda^s_{\omega'}(B) = \mu^{s,t}(C)$, ce qui montre bien l'indépendance.

COROLLAIRE (12.1 bis). – *Soient* $\sigma < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$;

$$X^\sigma, (X^\sigma)^{-1} X^{t_1}, (X^{t_1})^{-1} X^{t_2}, \ldots, (X^{t_{n-1}})^{-1} X^{t_n}$$

sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E, *pour* $P^{\sigma,\mu}$, *de lois* $\mu, \mu^{\sigma,t_1}, \mu^{t_1,t_2}, \ldots, \mu^{t_{n-1},t_n}$. *Même résultat pour* $\lambda^{r\pm}_\omega$, $r < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, *en remplaçant* X^σ *par* X^r, *et* μ *par* $\delta_{X^{r\pm}(\omega)}$.

Remarquons que ceci détermine complètement le processus à une équivalence près, mais ce sont les résultats précédents qui permettent de trouver une version à trajectoires réglées et continues à droite.

Exemple (12.2), Processus p-gaussiens, $0 < p \leqslant 2$.

Soit Γ une probabilité de Radon sur un espace vectoriel topologique localement convexe souslinien E. On dit qu'elle est p-gaussienne, si pour tout $\xi \in E'$, $\xi(\Gamma)$ est p-gaussienne, c'est-à-dire a une fonction caractéristique de la forme $\tau \to \exp(-q(\xi)\,|\tau|^p)$. Alors $q(t\xi) = |t|^p\, q(\xi)$.

L'image de Fourier de Γ est $\hat{\Gamma}(\xi) = e^{-q(\xi)}$.

PROPOSITION (12.3). – *Si* Γ *est de Radon p-gaussienne sur* E *souslinien, et si on pose* $\mu^t = t^{1/p} \,.\, \Gamma$ (*homothétique de* Γ *dans le rapport* $t^{1/p}$), $t \geqslant 0$, *on définit un processus de Markov homogène dans le temps et normal, suivant* (12.1) *avec* $\mu^{s,t} = \mu^{t-s}$. *Pour* $p = 2$, *le processus est* $P^{\sigma,\mu}$*-presque sûrement continu pour les temps* $> \sigma$ *et* $\lambda_\omega^{s\pm}$*-presque sûrement continu pour les temps* $> s$ *; on l'appelle le mouvement brownien associé à la probabilité gaussienne* Γ.

Démonstration. – On doit, pour le début, montrer simplement que $\mu^s * \mu^t = \mu^{s+t}$, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Il suffit de remarquer qu'il y a produit des fonctions caractéristiques :

$$\hat{\mu}^t(\xi) = (t^{1/p} \,.\, \Gamma)\hat{}\ (\xi) = \hat{\Gamma}(t^{1/p}\,\xi) = e^{-q(t^{1/p}\,\xi)} = e^{-tq(\xi)}\,,$$

d'où $\hat{\mu}^s\,\hat{\mu}^t = \hat{\mu}^{s+t}$.

Soit $p = 2$, Alors, pour $\xi \in E'$, $(\xi \circ X^t)_{t \in \mathbf{R}}$ est un mouvement brownien sur $\mathbf{R}$; car $\xi \circ (X^t - X^s)$ est indépendant de la tribu $\mathcal{C}^s$, et de loi gaussienne $(t-s)^{1/2} \,.\, \xi(\Gamma)$. Donc, pour tout ξ, cette image est $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$-presque sûrement) continue pour les temps $> \sigma$ (resp. $> s$). D'après la proposition (8.7), comme il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui sépare les points de E, et avec l'adaptation au nouvel espace Ω adopté à partir du § 9, le processus brownien $(X^t)_{t \in \mathbf{R}}$ est $P^{\sigma,\mu}$-presque sûrement (resp. $\lambda_\omega^{s\pm}$-presque sûrement) continu aux temps $> \sigma$ (resp. $> s$). Comme ce processus est normal, on peut changer Ω et prendre pour Ω l'espace des trajectoires continues $\mathbf{R} \to E$, suivant l'attitude 3 de (8.8), avec la convention que $P^{\sigma,x}$-presque sûrement, la trajectoire est en x (et non ∇) aux temps $< \sigma$ (ou $\leqslant \sigma$).

Remarque (12.4). – Supposons que E soit un espace vectoriel topologique dont les compacts sont métrisables et dont les sous-espaces vectoriels fermés séparables sont sousliniens (par exemple un Banach E a ces propriétés, bien que non souslinien). Alors on peut y considérer quand même les processus p-gaussiens, avec les mêmes propriétés. Partons en effet de $P^{\sigma,\mu}$; μ est portée par une réunion dénombre de compacts, qui seront métrisables ; les $\mu^{s,t} = (t-s)^{1/p} \,.\, \Gamma$ sont aussi tous portés par un sous-espace vectoriel fermé séparable ; finalement μ et les $\mu^{s,t}$ sont portées par un même sous-espace vectoriel fermé séparable de E, donc souslinien, et on pourra faire la théorie sur ce sous-espace.

Remarque (12.5). – L'image d'un processus de Markov n'est pas en général un processus de Markov. C'est cependant vrai ici, et on a trivialement (parce que u conserve la convolution) :

PROPOSITION (12.5). – *Plaçons-nous dans les conditions de la proposition* (12.1), *et soit* u *un morphisme continu du groupe* E *dans un groupe topologique soulinien* F. *Posons* $\nu^{s,t} = u(\mu^{s,t})$. *Alors on peut définir sur* F *un processus de Markov à partir des* $\nu^{s,t}$ *; soient* $Q(s, t; y)$ *ses probabilités de transitions,* $Q^{\sigma,\nu}$ *sa probabilité avec départ à l'instant* σ *pour la loi* ν, $\Lambda_\omega^{s\pm}$ *ses probabilités de désintégration.*

On appelle Ω_E (resp. Ω_F) l'espace des trajectoires réglées et continues à droite à valeurs dans E (resp. F). Alors on a les formules :

$$u(\mu^{s,t}) = \nu^{s,t} \;;\; u(P(s, t; x)) = Q(s, t; u(x)) \;;\; u(P^{\sigma,\mu}) = Q^{\sigma,u(\mu)} \;;\; u(\lambda_\omega^{s\pm}) = \Lambda_{u(\omega)}^{s\pm} .$$

Si on appelle X^t la projection $\Omega_E \longrightarrow E^{\{t\}} = E$, Y^t la projection $\Omega_F \longrightarrow F^{\{t\}} = F$, on a $u(X^t(\omega)) = Y^t(u(\omega))$; $(u \circ X^t)_{t\in \mathbf{R}}$ est un processus de Markov fort sur Ω_E, par rapport aux tribus $\mathcal{C}_E^t$, avec

$$(u \circ X^t)(\lambda_\omega^{s\pm}) = (Y^t \circ u)(\lambda_\omega^{s\pm}) = Y^t \circ \Lambda_{u(\omega)}^{s\pm} = Q(s, t; Y^{s\pm}(u(\omega))) = Q(s, t; u(X^{s\pm}(\omega))) .$$

12.6. Processus de Markov cylindriques.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Soit $(\mu^{s,t})_{t\geqslant s}$ une famille de probabilités cylindriques sur E, $(s, t) \mapsto \mu^{s,t}$ continue pour la topologie cylindrique, avec la loi de convolution $\mu^{r,s} * \mu^{s,t} = \mu^{r,t}$ pour $r \leqslant s \leqslant t$, $\mu^{t,t} = \delta$. On ne peut définir aucun processus sur E. Mais soit u une application linéaire continue de E dans un espace vectoriel F de dimension finie : alors les $u(\mu^{s,t})$ vérifient toutes les conditions de la proposition, donc définissent un processus de Markov sur l'espace Ω_F des trajectoires $\mathbf{R} \longrightarrow F$ réglées et continues à droite. On définit donc une sorte de processus de Markov cylindrique.

Soit maintenant u une application linéaire continue de E dans un espace vectoriel topologique localement convexe souslinien F, et supposons que u radonifie les $\mu^{s,t}$, et que $(s, t) \mapsto u(\mu^{s,t})$ soit étroitement continue, et équiconcentrée pour s, t bornés. Alors il existera un processus de Markov image, d'espace d'états F, construit sur Ω_F. Par exemple, pour les processus p-gaussiens de l'exemple (12,2) où Γ est seulement une probabilité cylindrique p-gaussienne sur E, il suffira de radonifier Γ pour radonifier le processus, car alors

$$(s, t) \mapsto (t-s)^{\frac{1}{p}} u(\Gamma)$$

aura les propriétés voulues. Par exemple, le "mouvement brownien dans un espace hilbertien" est seulement cylindrique, il devient un Markov vrai seulement par images par toutes les applications linéaires continues qui radonifient la probabilité cylindrique de Gauss.

Index Bibliographique.

R.M. BLUMENTHAL et R.K. GETOOR [1], Markov Processes and Potential theory, Academic Press, New-York and London, 1968.

Claude DELLACHERIE et Paul-André MEYER [1], Probabilités et potentiel, Paris, Hermann, 1975.

Paul-André MEYER [1]. Probabilités et Potentiel, Paris, Hermann, 1966.

Laurent SCHWARTZ [1]. Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures, Oxford University Press, 1973.

Laurent SCHWARTZ [2]. Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure, *Journal d'Analyse Mathématique*, Jérusalem, XXVI (1973).

Index terminologique.

Cet index est court, aussi est-il aussi simple de le donner, non par ordre alphabétique, mais par ordre d'apparition successive des termes :

Index des notations.

Manuscrit reçu le 16 juillet 1976
Proposé par J. Neveu.

Laurent SCHWARTZ,
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
91120 Palaiseau.