Annales de l'institut Fourier

Jean-Pierre Henry

Sur les idéaux jacobiens des courbes planes

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 3 (1977), p. 193-210
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_193_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 3 (1977), 193-210

SUR LES IDÉAUX JACOBIENS DES COURBES PLANES

par Jean-Pierre Georges HENRY

Introduction.

On répond à la question posée par J. J. Risler dans [3] : soit J un idéal primaire pour l'idéal maximal dans l'anneau des séries formelles en deux variables sur **C**, **C**$[[x, y]]$; la multiplicité de l'idéal engendré par les dérivées partielles des éléments de J et les éléments de J que nous appellerons idéal jacobien de J et noterons $\Delta^2 J$ est-elle égale à celle de l'idéal jacobien d'un élément "assez général" de l'idéal J ?

Ce qui suit nous donne la réponse suivante :

• Si l'idéal J est quelconque, ces deux multiplicités peuvent différer (§ 2).

• Si l'idéal J est déjà idéal jacobien d'un élément de l'anneau **C**$[[x, y]]$, ou plus généralement idéal jacobien itéré d'un tel élément, les deux multiplicités considérées sont égales.

• Plus précisément *sans supposer que J est primaire*, s'il est le jacobien itéré d'un élément, *non nécessairement réduit,* les deux idéaux étudiés ont même clôture intégrale.

Ce résultat est utilisé par J. J. Risler pour montrer que si une famille à un paramètre (f) de courbes planes est "stablement équisingulière" (au sens de F. Pham [2]) toutes les familles d'idéaux constituées par les extensions jacobiennes critiques itérées de (f) sont des familles équisingulières d'idéaux (cf. [3]). Lê Dũng Tráng utilise également ce résultat dans [1] pour obtenir un calcul pratique du nombre de Milnor de l'élément général de l'idéal jacobien.

1. Rappels.

THEOREME 1.1. – *Soient* J *et* J′ *deux idéaux de l'anneau des séries formelles* $\mathbf{C}[[x , y]]$ *avec* J *inclus dans* J′, *les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) J *et* J′ *ont même clôture intégrale*

(ii) *Pour toute valuation* v, $v(\mathrm{J}) = v(\mathrm{J}')$ (*où pour tout idéal* I, *on note* $v(\mathrm{I}) = \inf \{v(f)/f \in \mathrm{I}\}$.

(iii) *Pour toute courbe algébroïde unicursale passant par l'origine, dite courbe d'épreuve, et dont le paramétrage est donné par :*

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \Psi(t)$$

où φ *et* Ψ *sont des séries formelles en* t *à coefficients complexes (sans terme constant !) on a l'égalité :*

$$\inf\{\mathrm{ordre}_t\, f(\varphi(t),\ \psi(t))/f(x , y) \in \mathrm{J}\} = \inf\{\mathrm{ordre}_t\, g(\varphi(t), \Psi(t))/g \in \mathrm{J}'\}$$

THEOREME 1.2. – *Sous les mêmes hypothèses qu'en* (1.1) *si* J *et* J′ *sont primaires, les assertions* (i), (ii), (iii) *de* (1.1) *sont équivalentes à l'assertion* (iv) :

(iv) J *et* J′ *ont même multiplicité.*

Remarque 1.3. – Tout élément g nul à l'origine est entier sur l'idéal engendré par ses dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

2. Un contre exemple dans le cas d'un idéal primaire quelconque.

Soit J l'idéal engendré par y^2 et $x^2 y + x^4$, son jacobien $\Delta^2 \mathrm{J}$ est engendré par y et x^2,

$$\Delta^2 \mathrm{J} = (y , x^2)\, \mathbf{C}[[x , y]]$$

Un élément général de J peut s'écrire

$$\varphi(x , y) = y^2 + \lambda x^2 y + \lambda x^4$$

son jacobien est

$$\Delta^2(\varphi) = (2y + \lambda x^2 , 2\lambda xy + 4\lambda x^3) \cdot \mathbf{C}[[x , y]].$$

Comme $\Delta^2(\varphi)$ est évidemment inclus dans $\Delta^2 \mathrm{J}$, nous allons utiliser le critère (iii) du théorème (1.1).

Pour tout nombre λ, il existe une courbe d'épreuve dont le paramétrage est donné par

$$x = t$$

$$y = -\frac{\lambda}{2} t^2$$

telle que pour la valuation associée (l'ordre en t) on ait

$$v(\Delta^2 \mathrm{J}) = 2$$

$$v(\Delta^2(\varphi)) = 3 ;$$

les deux idéaux n'ont donc pas la même multiplicité (Th (1.2)).

3. Les idéaux jacobiens itérés.

THEOREME 3.1. – *Soit $f(x,y)$ un élément de $\mathbf{C}[[x,y]]$, J le $n^{\text{ième}}$ jacobien itéré de f (c'est-à-dire l'idéal engendré par f et ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n). Pour presque tout $(\lambda_0 , \ldots , \lambda_n)$ dans $\mathbf{PC}^n$ (c'est-à-dire dans un ouvert dense de $\mathbf{PC}^n$) l'idéal $\Delta^2 \mathrm{J}$ et l'idéal jacobien de*

$$\lambda_0 \frac{\partial^n f}{\partial y^n} + \ldots + \lambda_i \frac{\partial^n f}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \varphi_\lambda$$

ont même clôture intégrale.

COROLLAIRE 3.2. – *Avec les hypothèses de (3.1) et si $\Delta^2 \mathrm{J}$ est primaire, alors $\Delta^2 \phi_\lambda$ est primaire et a même multiplicité que $\Delta^2 \mathrm{J}$ pour presque tout λ.*

Pour démontrer le théorème nous utiliserons le critère (iii) du théorème (1.1.).

4. Notations.

4.1. Soit J le n$^{\text{ième}}$ jacobien itéré de f, Δ^2J le $(n+1)^{\text{ième}}$. Nous noterons comme suit les dérivées partielles de f :

$$f_i^{(k)} = \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i \, \partial y^{k-i}}$$

Nous noterons φ_λ la combinaison linéaire des $(n+1)$ dérivées partielles d'ordre n :

$$\varphi_\lambda = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i \, f_i^{(n)},$$

et $\Delta^2(\varphi_\lambda)$ sera son idéal jacobien, où λ désigne le $(n+1)$-uple $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Nous voulons montrer que pour λ dans un ouvert dense de $\mathbf{PC}^n$, $\Delta^2\varphi_\lambda$ et Δ^2J ont même clôture intégrale.

4.2. *Choix des coordonnées.*

On supposera que x est un paramètre transverse pour f, qui sera mise sous la forme de Weierstrass :

$$f(x, y) = y^\nu + A_1(x)\, y^{\nu-1} + \ldots + A_i(x) y^{\nu-i} + \ldots + A_\nu(x)$$

où l'ordre des séries formelles en x, $A_i(x)$ est supérieur ou égal à i.

4.3. *Les branches définies par les dérivées partielles.*

En utilisant par exemple le théorème de Puiseux, on peut trouver un entier naturel m tel qu'en faisant le changement de variable

$$x = \theta^m$$

on puisse décomposer les $f_i^{(n+1)}(\theta^m, y)$ en produits de facteurs de la forme

$$\text{(P)} \qquad \epsilon(\theta, y) \,.\, \theta^k \,.\, \prod_{\ell} (y - w_\ell(\theta))$$

où ϵ est une série inversible de $\mathbf{C}[[\theta, y]]$ et les $w_\ell(\theta)$ des éléments de $\mathbf{C}[[\theta]]$.

Nous supposerons désormais un tel entier m (non nécessairement minimal) choisi, ainsi que les séries $w_l(\theta)$ que nous indexerons de 1 à L.

4.4. *Le contact avec ces branches de la courbe d'épreuve.*

Comme la valuation associée à la courbe d'épreuve axe des y vérifie

$$v(\Delta^2 \varphi_\lambda) = v(\Delta^2 \mathrm{J}) = v(y^{\nu-n-1})$$

sauf pour $\lambda = (0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ c'est-à-dire dans un hyperplan fermé de $\mathbf{PC}^n$, nous pouvons ne considérer que les courbes d'épreuve paramétrées par

$$x = s^p$$

$$y = \mathrm{U}(s)$$

Pour de telles courbes d'épreuve nous allons définir un entier positif ρ qui dépend de leur "contact" avec les branches des dérivées partielles d'ordre $n + 1$ de f. En changeant de variable par

$$s = t^m$$

on peut définir un entier naturel ρ comme suit :

• $\mathrm{U}(t^m)$ coïncide avec une (au moins) des séries $w_\ell(t^p)$ jusqu'à l'ordre $p(\rho - 1)$

• $\mathrm{U}(t^m)$ ne coïncide avec aucune des $w_\ell(t^p)$ jusqu'à l'ordre $p\rho$.

• Enfin si $\mathrm{U}(t^m)$ est égale à une des séries $w_\ell(t^p)$ ρ vaudra $+\infty$.

L'entier ρ ainsi défini sera le contact de la courbe d'épreuve avec les branches w_ℓ. On notera $w_{\ell,r}$ la série w_ℓ tronquée à l'ordre r, c'est-à-dire la somme des termes de $w_\ell(\theta)$ de degré en θ strictement inférieur à r.

DEFINITION 4.5. – *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des courbes d'épreuve, distinctes de l'axe des y, telles que pour la valuation v associée il existe un λ dans $\mathbf{PC}^n$ tel que*

$$v(\Delta^2 \varphi_\lambda) > v(\Delta^2 \mathrm{J})$$

DEFINITION 4.6. – *Soit* E *l'ensemble des λ dans $\mathbf{PC}^n$ tels qu'il existe une courbe d'épreuve de $\mathcal{E}$ dont la valuation associée v vérifie*

$$v(\Delta^2 \varphi_\lambda) > v(\Delta^2 \mathrm{J}).$$

Nous voulons montrer que E est le complémentaire d'un ouvert dense de $\mathbf{PC}^n$, divisons la difficulté en décomposant E.

DEFINITION 4.7. — $\mathcal{E}(r\,,\,\ell)$ *où* ℓ *appartient à* $[1\,,\,L)$ *sera l'ensemble des courbes d'épreuve de* $\mathcal{E}$ *ayant le contact r avec les branches des dérivées partielles d'ordre* $n+1$ *de f, et ce par l'intermédiaire de la branche* w_ℓ :

- $U(t^m)$ *coïncide avec* $w_\ell(t^p)$ *jusqu'à l'ordre* $p(r-1)$
- $U(t^m)$ *ne coïncide avec aucune* $w_j(t^p)$ *jusqu'à l'ordre pr.*

Remarque 4.8. — $\mathcal{E}(\infty\,,\,\ell)$ est évidemment réduit à un élément. la courbe d'épreuve donnée par

$$x = t^m$$

$$y = w_\ell(t)$$

DEFINITION 4.9. — *Soit* $E(r\,,\,\ell)$ *le sous-ensemble de* E *formé des* λ *de* $\mathbf{PC}^n$ *tel qu'il existe une courbe d'épreuve dans* $\mathcal{E}(r\,,\,\ell)$ *dont la valuation associée v vérifie :*

$$v(\Delta^2 \varphi_\lambda) > v(\Delta^2 J)$$

Remarque 4.10. — $\mathcal{E}$ est la réunion des $\mathcal{E}(r\,,\,\ell)$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\ell\in[1,L]} \bigcup_{r\in\mathbf{N}} \mathcal{E}(r\,,\,\ell)$$

Remarque 4.11. — E est la réunion (non disjointe) des $E(r\,,\,\ell)$.

$$E = \bigcup_{\ell\in[1,L]} \bigcup_{r\in\mathbf{N}} E(r\,,\,\ell)$$

5. Démonstration du théorème 3.1.

Avec les notations du paragraphe 4 il suffit de démontrer les deux lemmes suivants

LEMME 5.1. — *Pour tout couple* $(r\,,\,\ell)$ *de* $\mathbf{N} \times [1\,,\,L]$, *l'ensemble* $E(r\,,\,\ell)$ *a pour complémentaire un ouvert dense de* $\mathbf{PC}^n$.

LEMME 5.2. — *Pour tout entier* ℓ *dans* $[1\ , \mathrm{L}]$ *il existe un entier* $r_{(\ell)}$ *tel que pour* r *plus grand que* $r_{(\ell)}$, *l'ensemble* $\mathrm{E}(r\, , \ell)$ *soit inclus dans* $\mathrm{E}(r_{(\ell)}\ , \ell)$ *lui-même inclus dans un hyperplan de* $\mathbf{PC}^n$.

6. Démonstration du lemme 5.1.

Dans ce paragraphe les entiers r et ℓ sont fixés.

6.1. *Paramétrisation de* $\mathcal{E}\,(r\ , \ell)$.

Si $\mathcal{E}\,(r\ , \ell)$ est vide, $\mathrm{E}\,(r\ , \ell)$ aussi, si $\mathcal{E}\,(r\ , \ell)$ n'est pas vide, tout élément lui appartenant peut s'écrire

$$x = t^{pm}$$

$$y = u\,(t) = w_{\ell\,,r}\,(t^p) + zt^\sigma + \eta\,(t)$$

où σ est un entier strictement supérieur à $p\,(r - 1)$ et η une série d'ordre strictement supérieur à σ.

Comme r et ℓ sont fixés dans ce paragraphe, nous noterons $u_0\,(t)$ le polynôme $w_{\ell\,,r}\,(t^p)$. Nous noterons

$$\mathrm{N} = pm.$$

La courbe d'épreuve générique de $\mathcal{E}\,(r\ , \ell)$ est alors paramétrée par

$$x = t^{\mathrm{N}}$$

$$y = u_0\,(t) + zt^\sigma + \text{termes d'ordre plus élevé.}$$

PROPOSITION 6.2. — *Avec les hypothèses et les notations de* (6.1) *le coefficient du terme initial en* t *de*

$$f_i^{(n+1)}\,(t^{\mathrm{N}}\ , u_0\,(t) + zt^\sigma + \eta\,(t))$$

est un polynôme en z , $\mathrm{P}_i(z)$ *qui ne dépend que de* i, *de* r *et de* ℓ *et éventuellement du fait que* $\sigma < pr$ *ou que* $\sigma = pr$, *mais ne varie pas pour* σ *variant dans* $]p\,(r - 1)\, , pr[$; *de plus l'un au moins de ces polynômes est non constant.*

Démonstration. – On met les $f_i^{(n+1)}$ sous la forme (P) définie en (4.3). $f_i^{(n+1)}(t^N, u(t))$ apparaît alors comme un produit de facteurs et le terme initial du produit est le produit des termes initiaux. Comme dans chaque facteur le coefficient du terme initial est soit un terme constant qui ne dépend que des coefficients de w_ℓ et de u_0, soit le polynôme z, soit si $\sigma = pr$ éventuellement $z - \eta_{\ell,r}$ où $\eta_{\ell,r}$ est le coefficient de θ^r dans la série $w_\ell(\theta)$, ceci démontre la première partie de la proposition.

D'autre part la courbe d'épreuve générique considérée a le contact r avec au moins une des branches w_ℓ. Le coefficient du terme initial qu'une telle branche fait apparaître est nécessairement soit de la forme z soit de la forme $z - \eta_{\ell,r}$, ce qui termine la démonstration de la proposition (6.2).

PROPOSITION 6.3. – *Si λ est un élément de* $\mathrm{E}(r, \ell)$ *et z la valeur du paramètre associé à une courbe d'épreuve de* $\mathcal{E}(r, \ell)$ *telle que pour la valuation correspondante v on ait :*

$$v(\Delta^2 \varphi_\lambda) > v(\Delta^2 \mathrm{J})$$

λ et z sont liés par le système d'équations et d'inéquations :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (1)\ \lambda_0 \delta_0 \mathrm{P}_0(z) + \cdots + \lambda_i \delta_i \mathrm{P}_i(z) + \cdots + \lambda_n \delta_n \mathrm{P}_n(z) = 0 \\ (2)\ \lambda_0 \delta_1 \mathrm{P}_1(z) + \cdots + \lambda_i \delta_{i+1} \mathrm{P}_{i+1}(z) + \cdots + \lambda_n \delta_{n+1} \mathrm{P}_{n+1}(z) = 0 \\ (\mathrm{G})\ \textit{les } \delta_i \mathrm{P}_i(z) \textit{ non tous nuls} \end{cases}$$

où les δ_i qui valent 0 ou 1 sont déterminés comme suit : soit w la valuation de $\Delta^2 \mathrm{J}$,

$$w = \inf \{ v(f) \,/\, f \in \Delta^2 \mathrm{J} \},$$

on prend

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v(f_i^{(n+1)}) > w \\ 1 & \text{si} \quad v(f_i^{(n+1)}) = w \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 6.3. – Le coefficient du terme de plus bas degré en t de $f_i^{(n+1)}(t^N, u(t))$ est $\mathrm{P}_i(z)$, ce terme est soit de degré w, soit de degré strictement supérieur à w. Dans le premier cas le coefficient du terme de degré w dans $f^{(n+1)}(t^N, u(t))$ est $\mathrm{P}_i(z)$, dans le deuxième cas il est nul ; dans les deux cas c'est $\delta_i P_i(z)$. Les inégalités (G) traduisent le fait qu'une au moins de ces $f_i^{(n+1)}(t^N, u(t))$ est d'ordre w. L'équation (1) exprime que $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y}(t^N, u(t))$ est d'ordre strictement supérieur à w, l'équation (2) que $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x}(t^N, u(t))$ est d'ordre strictement supérieur à w.

PROPOSITION 6.4. — *Si on note* $D(z)$ *le p.g.c.d. des polynômes* $\delta_0 P_0(z), \ldots, \delta_{n+1} P_{n+1}(z)$ *et si*

$$\delta_i P_i(z) = D(z) \cdot R_i(z)$$

le système (I) de (6.3) implique le système (II)

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \lambda_0 R_0(z) + \cdots + \lambda_n R_n(z) = 0 \\ \lambda_0 R_1(z) + \cdots + \lambda_n R_{n+1}(z) = 0 \\ D(z) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve. — C'est clair.

DEFINITION 6.5. — *Nous dirons que deux* $m+1$*-uples de polynômes* $(A_0(z), \ldots, A_m(z))$ et $(B_0(z), \ldots, B_m(z))$ *non triviaux sont équivalents si on a les égalités de fractions rationnelles :*

$$\frac{A_0(z)}{B_0(z)} = \cdots = \frac{A_i(z)}{B_i(z)} = \cdots = \frac{A_m(z)}{B_m(z)}$$

ou encore pour tout couple (i, j) $A_i(z)\, B_j(z) = A_j(z) \,.\, B_i(z)$. Comme on a pris la précaution d'exclure le m-uple $(0, \ldots, 0, \ldots, 0)$, $A_i(z) = 0$ équivaut à $B_i(z) = 0$ et on a bien une relation d'équivalence.

PROPOSITION 6.6. — *Soit* $A_0(z), \ldots, A_m(z)$ $(m+1)$*-polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, non tous nuls et* $B_0(z), \ldots, B_m(z)$ $(m+1)$ *autres polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, non tous nuls.*

Soit $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ *le résultant des 2 polynômes en* z, $\sum_{i=0}^{i=m} \lambda_i A_i(z)$

et $\sum_{i=0}^{i=m} \lambda_i B_i(z)$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ *soit identiquement nul est que les* $(m+1)$*-uples* $(A_0, \ldots, A_m)$ *et* $(B_0, \ldots, B_m)$ *soient équivalents.*

Démonstration de la proposition 6.6. – Faisons la démonstration par récurrence sur m.

Si $m = 1$, on considère les 2 polynômes $\lambda_0 A_0(z) + \lambda_1 A_1(z)$ et $\lambda_0 B_0(z) + \lambda_1 B_1(z)$. Si $\Delta(\lambda_0, \lambda_1)$ est identiquement nul, pour tout (λ_0, λ_1) dans $\mathbf{P}^1$ ces deux polynômes admettent une racine commune. Il est facile de voir que pour une infinité de valeurs distinctes de z $\dfrac{A_0(z)}{A_1(z)}$ et $\dfrac{B_0(z)}{B_1(z)}$ prennent des valeurs égales, ces deux fractions rationnelles sont donc égales et (A_0, A_1) est équivalent à (B_0, B_1). Supposons la proposition montrée jusqu'à $m-1$. Nous avons besoin du

LEMME 6.7. – *Avec les notations et les hypothèses du lemme 6.6, pour presque tout* (α, β) *les* n *polynômes* $A_0, \ldots, A_{n-2}, \alpha A_{n-1} + \beta A_n$ *sont premiers entre eux dans leur ensemble, de même que les* n *polynômes* $B_0, \ldots, B_{n-2}, \alpha B_{n-1} + \beta B_n$.

Preuve du lemme 6.7. – Soit $D_1(z)$ le p.g.c.d. des polynômes $A_0(z), \ldots, A_{n-2}(z)$, et $a_1, \ldots, a_k$ ses racines

$$D_1(z) = \prod_{i=1}^{i=k} (z - a_i)$$

Les trois polynômes D_1, A_{n-1}, A_n n'ont pas de racine commune. Le résultant de D_1 et de $\alpha A_{n-1} + \beta A_n$ est un polynôme $\Delta_1(\alpha, \beta)$ non identiquement nul, car c'est le produit pour i de 1 à k des résultants de $\alpha A_{n-1} + \beta A_n$ avec $z - a_i$ or aucun de ces résultants ne peut être identiquement nul puisqu'un au moins de A_{n-1}, A_n n'admet pas a_i comme racine.

De même $\Delta_2(\alpha, \beta)$ est défini et n'est pas identiquement nul. Alors pour $\Delta_1(\alpha, \beta) \neq 0$ et $\Delta_2(\alpha, \beta) \neq 0$ les (α, β) ont la propriété cherchée.

Continuons la démonstration par récurrence de la proposition (6.6).

Si $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ est nul alors $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}, \alpha\lambda_{n-1}, \beta\lambda_{n-1})$ est lui aussi identiquement nul, or c'est le résultant des deux polynômes :

$$\lambda_0 A_0(z) + \cdots + \lambda_{n-2} A_{n-2}(z) + \lambda_{n-1}(\alpha A_{n-1}(z) + \beta A_n(z))$$

$$\lambda_0 B_0(z) + \cdots + \lambda_{n-2} B_{n-2}(z) + \lambda_{n-1}(\alpha B_{n-1}(z) + \beta B_n(z))$$

nous pouvons alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour $n - 1$; les deux n-uples de polynômes $(A_0(z), \ldots, A_{n-2}(z), \alpha A_{n-1}(z) + \beta A_n(z))$ et $(B_0(z), B_1(z), \ldots, B_{n-2}(z), \alpha B_{n-1}(z) + \beta B_n(z))$ sont donc équivalents. Comme ces équivalences sont vraies pour presque tout (α, β) il est facile d'en déduire que les deux $(n + 1)$-uples $(A_0(z), \ldots, A_n(z))$ et $(B_0(z), \ldots, B_n(z))$ sont aussi équivalents, ce qui termine la démonstration de (6.6).

PROPOSITION 6.8. — *Avec les notations et les hypothèses de 6.3, si l'un des δ_i est nul* $E(r, \mathfrak{L})$ *est contenu dans une hypersurface de* $\mathbf{PC}^n$.

Démonstration. — Il est facile de voir que si l'un des δ_i est nul et comme les δ_i ne peuvent être tous nuls les deux $(n + 1)$-uples de polynômes

$$(\delta_0 P_0(z), \ldots, \delta_n P_n(z)) \quad \text{et} \quad (\delta_1 P_1(z), \ldots, \delta_{n+1} P_{n+1}(z))$$

ne peuvent être équivalents. Soit alors $D_1(z)$ le p.g.c.d. des polynômes $\delta_0 P_0, \ldots, \delta_n P_n$ et $D_2(z)$ celui des polynômes $\delta_1 P_1, \ldots, \delta_{n+1} P_{n+1}$ on peut alors écrire :

$$\delta_0 P_0 = D_1 A_0$$

$$\delta_n P_n = D_1 A_n$$

$$\delta_1 P_1 = D_2 B_0$$

$$\delta_{n+1} P_{n+1} = D_2 B_n$$

les deux $(n + 1)$-uples de polynômes $(A_0, \dots, A_n)$ et $(B_0, \dots, B_n)$ ne sont pas équivalents. En appliquant la proposition 6.6. on en déduit que le résultant $\Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ des deux polynômes $\lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_n A_n$ et $\lambda_0 B_0 + \dots \lambda_n B_n$ n'est pas identiquement nul. Avec les notations de 6.4. le résultant des deux polynômes $\lambda_0 R_0 + \dots + \lambda_n R_n$ et $\lambda_0 R_1 + \dots + \lambda_n R_{n+1}$ est alors non identiquement nul. Pour avoir une solution de (I) de (6.3) il faut donc

- soit $R_1, \dots, R_{n+1}$ et λ_0 nuls avec R_0 non nul.
- soit $R_0, \dots, R_n$ et λ_n nuls avec R_{n+1} non nul.
- soit Δ nul.

$E(r, \ell)$ est donc contenu dans l'hypersurface $\lambda_0 \lambda_n \Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = 0$.

PROPOSITION 6.9. — *Avec les notations et les hypothèses de 6.3 si aucun δ_i n'est nul,* $E(r, \ell)$ *est contenu dans une hypersurface de* $\mathbf{PC}^n$.

Démonstration. — (Celle-ci a été très simplifiée par rapport à la démonstration originelle grâce à J. Briançon). On peut écrire pour tout i,

$$f_i^{(n)}(t^N, u(t)) = \sum_{k \geq 0} F_i^k(z)\, t^k$$

où les $F_i^k(z)$ sont des polynômes en z dont les coefficients dépendent des coefficients de la série $u(t)$ autres que z. Nous allons dériver les deux membres de cette égalité par rapport à z et à t.

La dérivation par rapport à z donne l'égalité

$$t^a f_i^{(n+1)}(t^N, u(t)) = \sum_{k \geq 1} \frac{dF_i^k(z)}{dz}\, t^k \qquad (6.9.1.)$$

La dérivation par rapport à t donne l'égalité.

$$N \,.\, t^{N-1} f_{i+1}^{(n+1)}(t^N, u(t)) + u'(t) f_i^{(n+1)}(t^N, u(t)) = \sum_{k \geq 1} k\, F_i^k(z)\, t^{k-1}. \qquad (6.9.2.)$$

Plusieurs cas peuvent se produire :

a) l'ordre de $u'(t)$ est strictement supérieur à $N - 1$.

b) $u_0(t)$ est nulle et $\sigma = N$.

c) $u_0(t)$ n'est pas nulle et est d'ordre N.

Nous allons écrire l'égalité des formes initiales en t résultant des deux égalités (6.9.1) et (6.9.2). Du fait que tous les δ_i valent 1 nous savons déjà que toutes les $f_i^{(n+1)}(t^N, u(t))$ sont d'ordre w en t. De (6.9.1) on déduit donc pour tout i de 0 à n.

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dF_i^k(z)}{dz} = 0 & \text{si} \quad k < \sigma + w & (6.9.3) \\ \dfrac{dF_i^{\sigma+w}}{dz} = P_i(z) & & (6.9.4) \end{array}\right.$$

a) De même, dans le cas a) comme alors $u'(t)$ est d'ordre strictement supérieur à $N - 1$, le premier membre de (6.9.2) a même forme initiale en t que $N \,.\, t^{N-1} f_{i+1}^{(n+1)}(t^N, u(t))$. On déduit donc de l'égalité (6.9.2) les égalités :

$$\left\{\begin{array}{lll} F_i^k(z) = 0 & \text{pour } k < N + w & (6.9.5) \\ \dfrac{N+w}{N} \,.\, F_i^{N+w}(z) = P_{i+1}(z) & & (6.9.6) \end{array}\right.$$

mais comme $\sigma + w > N + w$, on déduit de (6.9.6) et (6.9.3) que

$$\frac{dP_{i+1}(z)}{dz} = 0 \qquad (6.9.7)$$

pour tout i de 0 à n.

Les $P_{i+1}(z)$ ne dépendent donc pas de z et l'équation (2) du système I de (6.3) est une équation en λ à coefficients constants, qui détermine un hyperplan de $\mathbf{PC}^n$ qui contient $E(r, \ell)$.

b) Dans le cas b) le terme initial de $u'(t)$ est $N \,.\, zt^{N-1}$, on déduit alors de l'égalité (6.9.2) les égalités :

$$\left\{\begin{array}{lll} F_i^k(z) = 0 & \text{pour} \quad k < N + w & (6.9.5) \\ N(P_{i+1}(z) + z\mathbf{P}_i(z)) = (N + w)\, F_i^{N+w}(z) & & (6.9.7) \end{array}\right.$$

on pose alors $F_i^{N+w}(z) = R_i(z)$; du fait de l'égalité (6.9.7) $R_i(z)$ est polynôme en z dont les coefficients comme ceux de P_i et P_{i+1} ne dépendent que de r et de ℓ (proposition (6.2)).

La première équation du système (I) devient avec ces nouvelles notations, en utilisant les égalités (6.9.4) (où $\sigma = N$) l'équation (III.1) où $R'_i(z)$ désigne la dérivée de $R_i(z)$.

$$\lambda_0 R'_0(z) + \cdots + \lambda_n R'_n(z) = 0 \tag{III.1}$$

tandis qu'une combinaison de la première équation de (I) avec le coefficient $\dfrac{N}{N+w}\,.\,z$ et de la deuxième avec le coefficient $\dfrac{N}{N+w}$ donne l'équation

$$\lambda_0 R_0(z) + \cdots + \lambda_n R_n(z) = 0 \tag{III.2}$$

La condition (G) devient

(III.G) les $R_i(z)$ et les $R'_i(z)$ non tous nuls.

On notera $Q_i(z)$ le quotient de $R_i(z)$ par le p.g.c.d. des R_i et R'_i, D. Le système (III) devient le système (IV)

$$\lambda_0 Q_0(z) + \cdots + \lambda_n Q_n(z) = 0 \tag{IV.2}$$

$$\lambda_0 (D'Q_0 + DQ'_0) + \cdots + \lambda_n (D'Q_n + DQ'_n) = 0 \tag{IV.1}$$

ou encore

$$\lambda_0 Q'_0 + \cdots + \lambda_n Q'_n = 0 \tag{IV. 1 bis}$$

On peut alors appliquer la proposition (6.6). Supposons que les deux $(n+1)$-uples de polynômes $(Q_0, \ldots, Q_n)$ et $(Q'_0, \ldots, Q'_n)$ soient équivalents, alors pour tout couple (i, j) on a :

$$\frac{Q'_i}{Q_i} = \frac{Q'_j}{Q_j}$$

d'où $\mathrm{Log}(Q_i(z)) = \mathrm{Cte} + \mathrm{Log}(Q_j(z))$

$$Q_i(z) = \mathrm{Cte} \times Q_j(z)$$

Alors en posant $Q_0(z) = Q(z)$

$$Q_i(z) = a_i \,.\, Q(z)$$

où les a_i sont des constantes, (IV.2) devient

$$Q(z)(\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n) = 0$$

et (IV.1bis) devient

$$Q'(z)(\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n) = 0$$

comme Q (z) n'a pas de racine multiple, le résultant de ces deux équations est une puissance de $(\lambda_0 + a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n)$ et n'est pas identiquement nul. Si les deux $(n + 1)$-uples $(Q_0, \ldots, Q_n)$ et $(Q'_0, \ldots, Q'_n)$ ne sont pas équivalents, d'après (6.6) le résultant $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ (c'est-à-dire dans le cas particulier, le discriminant de $\lambda_0 Q_0 + \ldots + \lambda_n Q_n$) n'est pas identiquement nul. Dans les deux cas donc $\Delta(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = 0$ détermine une hypersurface de $\mathbf{PC}^n$ qui contient E $(r, \mathfrak{L})$.

c) Dans le cas c), $u_0(t)$ est une série d'ordre N en t dont nous noterons ρ le premier coefficient. L'égalité (6.9.2) nous fournit alors les égalités suivantes pour tout i de 0 à n

$$N(P_{i+1}(z) + \rho \,.\, P_i(z)) = (N + w)\, F_i^{N+w}(z) \tag{6.9.8}$$

or (6.9.3) fournit, puisque $N + w < \sigma + w$ dans ce cas, les égalités

$$\frac{d\,F_i^{N+w}}{dz} = 0$$

c'est donc une combinaison linéaire de l'équation (I.1) avec coefficient $\dfrac{N\rho}{N + w}$ et de l'équation (I.2) avec coefficient $\dfrac{N}{N + w}$ qui fournit cette fois une équation en λ à coefficients les $F_i^{N+w}(z)$ c'est-à-dire des constantes indépendantes de z. De deux choses l'une, ou cette équation est non triviale, et détermine un hyperplan E $(r, \mathfrak{L})$, ou cette équation est triviale, c'est-à-dire que pour tout i de 0 à n on a

$$P_{i+1}(z) = -\rho \,.\, P_i(z)$$

L'équation (I.1) devient alors

$$P_0(z)(\lambda_0 + (-\rho)\lambda_1 + \cdots + (-\rho)^i\lambda_i + \cdots + (-\rho)^n\lambda_n) = 0$$

la condition (I.G) interdisant d'annuler $P_0(z)$, on voit que l'on retrouve une équation en $\lambda_0, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n$ à coefficients constants qui détermine un hyperplan de $\mathbf{PC}^n$ contenant E $(r, \mathfrak{L})$.

Nous avons donc montré que dans tous les cas (a), (b), (c) $E(r, \ell)$ était contenu dans une hypersurface de $\mathbf{PC}^n$.

Le lemme (5.1) étant maintenant démontré, il reste à prouver le lemme (5.2).

7. Démonstration du lemme 5.2.

Dans ce paragraphe ℓ restera fixé, mais r variera. Il nous faut donc préciser les notations du paragraphe précédent.

Nous noterons $P_i^r(z)$ les polynômes définis en (6.2) correspondant à une courbe d'épreuve de $\mathcal{E}(r, \ell)$, et δ_i^r les δ_i correspondants (définis en (6.3)).

DEFINITION 7.1. – *Soit q le nombre minimum de facteurs égaux à $y - w_\ell(\theta)$ dans les décompositions* (P) *des* $f_i^{(n+1)}(\theta^m, y)$ (cf. (4.3)). I *sera l'ensemble des indices i tels que $f_i^{(n+1)}$ contienne q facteurs égaux à $y - w_\ell$ et* J *son complémentaire (éventuellement vide) dans* $[0, n+1]$.

PROPOSITION 7.2. – *Il existe un entier r_1 tel que pour $r \geqslant r_1$ on ait pour $j \in$ J*

$$\delta_j^r = 0.$$

Démonstration de 7.2. – Si J est vide, il n'y a rien à prouver. Supposons maintenant J non vide et soit j un élément de J.

$f_j^{(n+1)}$ contient au moins $(q+1)$ facteurs égaux à $y - w_\ell$. On considère maintenant les $w_k \neq w_\ell$. On forme les différences

$w_k(\theta) - w_\ell(\theta)$ et on note e le sup des ordres de ces différences. Alors pour $r \geqslant e + 1$ l'ordre de $u(t^m) - w_k(t^p)$ en t est le même que celui de $w_k(t^p) - w_\ell(t^p)$ et est majoré par p.e. Donc quand r croît, en étant plus grand que $e+1$, les ordres des facteurs

$$u(t^m) - w_k(t^p)$$

restent majorés par p.e., tandis que ceux des facteurs $u(t^m) - w_\ell(t^p)$ croissent comme $p(r-1)$. Comme $f_j^{(n+1)}$ contient au moins $(q+1)$-facteurs égaux à $y - w_\ell$ il existe un entier r_1 tel que pour $r \geqslant r_1$ l'ordre de $f_j^{(n+1)}$ soit strictement plus grand que celui des $f_i^{(n+1)}$ qui ne contiennent que q facteurs égaux à $y - w_\ell$ et donc δ_j^r est nul.

PROPOSITION 7.3. – *Il existe un entier r_2 tel que pour tout r plus grand que r_2 et tout i dans* I *les* $\mathrm{P}_i^r(z)$ *soient de la forme* $\mathrm{P}^r(z) \,.\, a_i$ *où a_i est une constante ne dépendant que de i (et de ℓ).*

Démonstration de 7.3. – Avec les notations de (7.2) pour $r \geqslant e + 1$ le coefficient du terme initial en t des facteurs

$$u(t^m) - w_k(t^p)$$

(pour $w_k \neq w_\ell$) est égal à celui de $w_\ell(t^p) - w_k(t^p)$ et est évidemment une constante $a_{k,\ell}$. Si on note $\mathrm{P}^r(z)$ le coefficient du terme initial de $(u(t^m) - w_\ell(t^p))^q$ on voit que le coefficient du terme initial de

$$f_i^{(n+1)}(t^{mp}, u(t^m)) \quad \text{où} \quad f_i^{(n+1)}(\theta^m, y)$$

peut s'écrire $\eta \,.\, (\prod_k (y - w_k)) \times (y - w_\ell)^q$ est bien $(\prod_k a_{k,\ell}) \times \mathrm{P}^r(z)$ qui est de la forme annoncée.

PROPOSITION 7.4. – *Il existe un entier r_3 tel que pour tout r plus grand que r_3 le système* I *de (6.3) implique le système III suivant*

$$\mathrm{III} \quad \begin{cases} (1) \;\; a_0\lambda_0 + \ldots + a_n\lambda_n = 0 \\ (2) \;\; a_1\lambda_0 + \ldots + a_{n+1}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

où les a_i sont des constantes ne dépendant que de ℓ.

Démonstration. – Il suffit de prendre r_3 supérieur à r_2 et r_1. On sait alors que

a) si i est dans I, on peut écrire $\mathrm{P}_i^r(z) = \mathrm{P}^r(z) \,.\, a_i$

b) si j est dans J, on peut écrire $\delta_j^r = 0$. On posera alors $a_j = 0$. Avec cette convention dans les deux cas on peut écrire

$$\mathrm{P}_i^r(z) = \mathrm{P}^r(z) \,.\, a_i$$

et les équations (I.1) et (I.2) deviennent :

$$\mathrm{P}^r(z)\,(a_0\lambda_0 + \cdots + a_n\lambda_n) = 0$$

$$\mathrm{P}^r(z)\,(a_1\lambda_0 + \cdots + a_{n+1}\lambda_n) = 0$$

mais la condition (I.G) interdit d'annuler $\mathrm{P}^r(z)$ d'où finalement le système III annoncé.