

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MASAYUKI ITÔ

**Sur les noyaux de Frostman-Kunugui et
les noyaux de Dirichlet**

Annales de l'institut Fourier, tome 27, n° 3 (1977), p. 45-95

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_45_0

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES NOYAUX DE FROSTMAN-KUNUGUI ET LES NOYAUX DE DIRICHLET

par Masayuki ITÔ

1. Introduction .

Soit \mathbf{R}^n l'espace euclidien à dimension $n (\geq 3)$. Pour un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on notera $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$. On désignera par (r, σ) les coordonnées sphériques dans \mathbf{R}^n . On rappelle qu'un noyau de convolution κ sur \mathbf{R}^n est une mesure positive dans \mathbf{R}^n et que, pour une mesure réelle μ dans \mathbf{R}^n , le κ -potentiel de μ est la convolution $\kappa * \mu$ dès qu'elle a un sens.

Un noyau de convolution κ s'appelle un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n s'il est invariant par rotation, s'annule à l'infini⁽¹⁾ et si $\Delta \kappa \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine O , où Δ est le laplacien sur \mathbf{R}^n . Pour un noyau de Frostman-Kunugui κ , il existe une fonction (et une seule) $\Phi(t)$ non-négative, finie, continue, croissante au sens large et convexe dans $(0, \infty)$ et une constante non-négative c telles que

$$\kappa = \Phi(|x|^{2-n}) dx + c\epsilon,$$

où ϵ désigne la mesure unité en O . On dira que Φ est la fonction convexe associée à κ .

On verra facilement qu'un noyau de Frostman-Kunugui n'est pas toujours un noyau de Dirichlet. Dans cet article, on se propose de donner une condition explicite pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

(¹) On dit que κ s'annule à l'infini si, quelle que soit la fonction f finie et continue à support compact, $\kappa * f$ tend vers 0 lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n de classe C^2 en dehors de O (2). Désignons par α la densité continue de $\Delta\kappa$ en dehors de O . Si $\kappa \neq 0$ et si α vérifie (*), alors κ est de la forme

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n} \text{ (3)},$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante ≥ 0 .

(*) Pour un nombre $t > 0$, on désigne par $S(O; t)$ et par $B(O; t)$ la sphère de centre O et de rayon t et la boule ouverte de centre O et de rayon t . Pour $t' \geq t > 0$ quelconque et pour une constante $c \geq 0$ quelconque, l'inégalité

$$\alpha(x) \geq c \int \alpha(x - y) ds_t(y)$$

a lieu sur $CB(O; t')$ dès qu'elle a lieu pour $S(O; t)$, où s_t désigne la mesure uniforme sur $S(O; t)$ telle que $\int ds_t = 1$.

Dans le cas où $\alpha > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, (*) est équivalent à la condition suivante : Pour $t > 0$ quelconque, la fonction

$\int \alpha(x - y) ds_t(y) / \alpha(x)$ de x est décroissante au sens large lorsque $r (\geq t)$ croît.

La démonstration se basera sur l'extension de la formule de Riesz et le résultat suivant :

Soit κ_0 un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n invariant par rotation et soit u le laplacien généralisé sur \mathbf{R}^n tel que $u * \kappa_0 = -\epsilon$. Supposons qu'il existe une fonction finie et continue α en dehors de O vérifiant (*) telle que $u = \alpha(x) dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Alors pour $t > 0$ quelconque, il existe une mesure positive λ_t sur $[t, \infty)$ telle que

$$\alpha(x) dx = \int \epsilon'_\rho d\lambda_t(\rho),$$

sur $CB(O; t)$ dès que $\rho \rightarrow \epsilon'_\rho$ est vaguement continue, où ϵ'_ρ désigne la mesure balayée de ϵ sur $CB(O; \rho)$ relativement au noyau κ_0 .

En l'appliquant aux noyaux de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n plus réguliers, on arrivera au théorème suivant :

(2) Précisément $\kappa = K(x) dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ où K est une fonction de classe C^2 .

(3) On note symboliquement r^{2-n} le noyau newtonien $|x|^{2-n}$ sur \mathbf{R}^n .

Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n de classe C^4 en dehors de O et soit ϕ une fonction de classe C^2 dans $(0, \infty)$ telle que $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n}) dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Si $\phi(t) > 0, \frac{d}{dt}\phi(t) \geq 0, \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \geq 0$ dans $(0, \infty)$ et si $\frac{d}{dt}\phi(t)t/\phi(t)$ et $\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)t^2/\phi(t)$ sont croissantes (au sens large) avec t , alors il existe un noyau de Dirichlet κ_0 et une constante $c \geq 0$ tels que $\kappa = \kappa_0 + ct^{2-n}$.

Enfin l'auteur remercie sincèrement Monsieur le Professeur J. Deny qui s'est intéressé à son travail et lui a donné nombreux conseils.

2. Préliminaires.

On commencera avec des résultats élémentaires sur les noyaux de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n ($n \geq 3$).

PROPOSITION 1. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui. Alors il existe une fonction $\Phi(t)$ finie, continue, non-négative, convexe et croissante au sens large dans $(0, \infty)$ et une constante $c \geq 0$ telle que

$$\kappa = \Phi(|x|^{2-n}) dx + c\epsilon. \tag{1}$$

Démonstration. — On voit facilement qu'il existe une fonction $u \geq 0$ localement sommable dans \mathbf{R}^n et sous-harmonique en dehors de O telle que $\kappa = u(x) dx + c\epsilon$, où $c = \kappa(\{O\})$. Comme u est invariante par rotation, u est finie et continue dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Posons, pour tout $x \neq O \in \mathbf{R}^n, \Phi(|x|^{2-n}) = u(x)$; alors Φ est une fonction ≥ 0 , finie et continue dans $(0, \infty)$. La sous-harmonicité de u donne la convexité de Φ . Soit f une fonction ≥ 0 finie, continue, invariante par rotation et portée par $B(O; 1)$ telle que $\int f(x) dx = 1$. Comme

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \kappa * f(x) = 0 \text{ (cf. la définition d'un noyau de Frostman-Kunugui)}$$

et $u(x) \leq u * f(x)$ sur $CB(O; 1)$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t) = 0$. Ceci et la convexité de Φ montrent que Φ est croissante au sens large. La démonstration est ainsi complète.

Evidemment Φ est uniquement déterminée et s'appelle la fonction convexe associée à κ .

Pour simplifier les notations, on note respectivement C_K et M_K l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans \mathbf{R}^n à support compact et l'ensemble des fonctions mesurables et bornées dans \mathbf{R}^n à valeurs réelles et à support compact. On désigne par C_K^+ et M_K^+ leurs sous-ensembles des fonctions ≥ 0 .

Soit κ un noyau de convolution sur \mathbf{R}^n . On dit que κ satisfait au principe classique du maximum si, quelle que soit f de M_K^+ , $u_f \leq 1$ presque partout (noté désormais p.p.) sur \mathbf{R}^n dès que $u_f \leq 1$ p.p. sur $\{x \in \mathbf{R}^n ; f(x) > 0\}$, où u_f est la densité de $\kappa * (fdx)$ par rapport à dx .

On dit que κ est de type positif si, pour $f \in M_K$ quelconque, $\int u_f f dx \geq 0$.

La proposition suivante a été essentiellement obtenue par K. Kunugui (cf. [12]).

PROPOSITION 2. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n . Alors

- 1) κ satisfait au principe classique du maximum,
- 2) κ est de type positif.

Démonstration. — Soit Φ la fonction convexe associée à κ . Pour $f \in M_K^+$ quelconque, la fonction $\int \Phi(|x - y|^{2-n}) f(y) dy$ de x est finie, continue dans \mathbf{R}^n et sous-harmonique en dehors du support de fdx , $\text{supp}(fdx)$. Comme $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int \Phi(|x - y|^{2-n}) f(y) dy = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\int \Phi(|x - y|^{2-n}) f(y) dy \leq \sup \left\{ \int \Phi(|z - y|^{2-n}) f(y) dy ; f(z) > 0 \right\}.$$

Ceci et la proposition 1 donnent immédiatement (1). L'énoncé (2) résulte de (1) et du théorème 5 de [11].

On désigne par \mathcal{O} l'espace vectoriel topologique des fonctions infiniment dérivables dans \mathbf{R}^n à valeurs complexes et à support compact.

Une distribution u dans \mathbf{R}^n s'appelle un laplacien généralisé si, quelle que soit f une fonction de \mathcal{O} à valeurs réelles, $u(f) \leq 0$ dès que $f(O) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)$. Voir, par exemple, [5].

PROPOSITION 3. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n . Alors $\Delta\kappa$ est un laplacien généralisé.

Démonstration — Soit Φ la fonction convexe associée à κ . Comme Φ est finie, continue et convexe dans $(0, \infty)$, $D_- \Phi(t)$ existe, où $D_- \Phi(t) = \lim_{s \uparrow t} \frac{\Phi(s) - \Phi(t)}{s - t}$. On a $D_- \Phi(t) \geq 0$. Posons, pour un entier $m \geq 1$,

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in (0, m^{n-2}) \\ D_- \Phi(m^{n-2})(t - m^{n-2}) + \Phi(m^{n-2}), & t \in (m^{n-2}, \infty). \end{cases}$$

Alors Φ_m est continue, convexe, croissante au sens large dans $(0, \infty)$. On voit facilement que la suite $(\Phi_m)_{m=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers Φ avec $m \uparrow \infty$. Posons $\kappa_m = \Phi_m(|x|^{2-n}) dx + \kappa(\{O\}) \epsilon$. Alors κ_m est un noyau de Frostman-Kunugui et la suite $(\Delta\kappa_m)_{m=1}^\infty$ converge vers $\Delta\kappa$ au sens des distributions lorsque $m \rightarrow \infty$. Donc il suffit de montrer que, pour $m \geq 1$ quelconque, $\Delta\kappa_m$ est un laplacien généralisé. Dans ce cas, on peut supposer $\kappa(\{O\}) = 0$. Comme $\Delta\kappa_m$ est égale à une mesure positive dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ et $\Delta\kappa_m = 0$ dans $B(O; \frac{1}{m}) - \{O\}$, il existe une mesure positive σ_m portée par $CB(O; \frac{1}{m})$ telle que, au sens des distributions,

$$\Delta\kappa_m = -(n-2) \omega_n D_- \Phi(m^{n-2}) \epsilon + \sigma_m$$

dans \mathbf{R}^n , où ω_n est l'aire de la sphère d'unité. Posons

$$c_m = (n-2) \omega_n D_- \Phi(m^{n-2}).$$

Comme κ_m est de type positif (cf. la proposition 2), $-\Delta\kappa_m$ l'est aussi. En rappelant le théorème de Bochner, on voit que, pour $t > 0$ quelconque,

$$\int \exp(-t|x|^2) d\sigma_m(x) \leq c_m.$$

En faisant $t \downarrow 0$, on arrive à $\int d\sigma_m \leq c_m$. Soit f une fonction réelle de \mathcal{O} vérifiant $f(O) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Alors on a

$$\Delta\kappa_m(f) = -c_m f(O) + \int f(x) d\sigma_m(x) \leq \left(\int d\sigma_m - c_m \right) f(O) \leq 0.$$

Donc $\Delta\kappa_m$ est un laplacien généralisé, et la démonstration est complète.

Rappelons qu'une fonction définie-négative ψ dans \mathbb{R}^n est une fonction continue à valeurs complexes vérifiant $\psi(O) \geq 0$, $\psi(-x) = \bar{\psi}(x)$ et, pour tout entier $m \geq 1$, toute famille $(x^i)_{i=1}^m$ de points de \mathbb{R}^n et toute famille $(c_i)_{i=1}^m$ de nombres complexes tels que $\sum_{i=1}^m c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi(x^i - x^j) c_i \bar{c}_j \leq 0 \quad (2)$$

(voir, par exemple, [1] et [5]).

La proposition suivante est déjà connue (cf. le chapitre III dans [5]).

PROPOSITION 4. — *Une distribution u dans \mathbb{R}^n est un laplacien généralisé si et seulement si u est à croissance lente et la transformée \hat{u} de u est de la forme $\hat{u} = -\psi(x) dx$, où ψ est une fonction définie-négative.*

Ecrivons le théorème de Lévy-Khinchine (cf. par exemple, [5]). A une fonction définie-négative ψ dans \mathbb{R}^n , on peut associer une constante $c \geq 0$, une forme linéaire $L(x)$, une forme hermitienne $Q(x) \geq 0$ et une mesure positive dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ vérifiant

$$\int |x|^2 / (1 + |x|^2) d\nu(x) < \infty$$

telles que l'on ait

$$\begin{aligned} \psi(x) = c + L(x)\sqrt{-1} + Q(x) + \int \left(1 + \frac{2\pi\sqrt{-1}x \cdot y}{1 + |y|^2} \right. \\ \left. - \exp(-2\pi\sqrt{-1}x \cdot y) \right) d\nu(y), \end{aligned}$$

où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire. Dans ce cas, la décomposition est unique.

On dit que ν est la mesure singulière associée à ψ .

Remarque 1. — Soit ψ une fonction définie-négative dans \mathbf{R}^n et u le laplacien généralisé tel que $\hat{u} = -\psi(x) dx$. Alors, en dehors de O , u est égal à la mesure singulière ν associée à ψ .

En effet, soit f une fonction de \mathcal{O} telle que $\text{supp}(f) \not\ni O$. Comme, pour tout le polynôme p , la formule de Parseval donne

$$\int \hat{f}(x) p(x) dx = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} u(f) &= -\int \overline{\hat{f}(x)} \psi(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \iint \overline{\hat{f}(x)} (\exp(-2\pi\sqrt{-1}x \cdot y) - \frac{2\pi\sqrt{-1}x \cdot y}{1 + |y|^2} - 1) d\nu_m(y) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \overline{\hat{f}(x)} \nu_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f d\nu_m = \int f d\nu, \end{aligned}$$

où $\nu_m = \nu$ sur $\text{CB}(O; \frac{1}{m})$ et $\nu_m = 0$ dans $B(O; \frac{1}{m})$. Donc $u = \nu$ dans $C\{O\}$.

Remarque 2. — Soit ψ une fonction définie-négative dans \mathbf{R}^n . Si ψ est invariante par rotation, alors il existe deux constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ et une mesure positive ν en dehors de O invariante par rotation et vérifiant $\int |x|^2 / (1 + |x|^2) d\nu(x) < \infty$ telles que

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu(y). \tag{3}$$

Réciproquement la fonction de la forme comme (3) est une fonction définie-négative invariante par rotation.

Soit u le laplacien généralisé tel que $\hat{u} = -\psi(x) dx$. Alors u est aussi invariant par rotation. D'après la remarque 1, la mesure singulière ν associée à ψ est invariante par rotation. Donc on peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + Q(x) + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu(y),$$

où c_1 est une constante ≥ 0 et où $Q(x)$ est une forme hermitienne ≥ 0 . On voit donc que $Q(x)$ est aussi invariante par rotation. Ceci donne, avec une constante $c_2 \geq 0$, $Q(x) = c_2 |x|^2$, d'où la remarque 2.

On dit qu'un noyau de convolution κ sur \mathbf{R}^n est un noyau de Dirichlet si κ est à croissance lente et si $\hat{\kappa}$ est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$, où ψ est une fonction définie-négative dans \mathbf{R}^n à valeurs réelles telle que $\frac{1}{\psi}$ soit localement sommable (cf. [1]).

La proposition suivante est un résultat très connu donné par A. Beurling et J. Deny (cf. [1]).

PROPOSITION 5. — *Un noyau de Dirichlet est un noyau d'un espace de Dirichlet spécial.*

Rappelons qu'un espace de Dirichlet spécial D sur \mathbf{R}^n est un espace hilbertien dont les éléments sont des fonctions localement sommables dans \mathbf{R}^n à valeurs réelles (ou bien à valeurs complexes)⁽⁴⁾ et qui vérifie les quatre conditions suivantes :

a) A un compact F dans \mathbf{R}^n quelconque, on peut associer une constante $A(F) > 0$ telle que, quelle que soit u de D ,

$$\int_F |u| dx \leq A(F) \|u\|.$$

b) $C_K \cap D$ est dense dans D et dans C_K .

c) Pour toute la contraction normale T ⁽⁵⁾ et pour toute u de D , $T \cdot u \in D$ et $\|T \cdot u\| \leq \|u\|$.

⁽⁴⁾ Plus précisément tout élément de D est une classe de fonctions p.p. égales.

⁽⁵⁾ Une contraction normale T est une application de \mathbf{R}^1 sur elle-même vérifiant $T(0) = 0$ et $|Ta - Tb| \leq |a - b|$ ($a, b \in \mathbf{R}^1$).

d) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $u \in D$ quelconques, $U_x u \in D$ et $\|U_x u\| = \|u\|$, où $U_x u$ est la fonction obtenue de u par la translation de x .

On note ici $\|\cdot\|$ la norme dans D . La condition (a) donne que, pour $f \in M_K$ quelconque, il existe une fonction u_f de D , et une seule telle que, quelle que soit u de D ,

$$(u_f, u) = \int u(x) f(x) dx,$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire associé. On dit que u_f est le potentiel de f dans D . A. Beurling et J. Deny [1] ont montré que, à un espace de Dirichlet spécial D , on peut associer d'une manière unique un noyau de convolution κ tel que, pour $f \in M_K$ quelconque,

$$\kappa * (fdx) = u_f dx.$$

On appelle κ le noyau de D .

Définissons le balayage pour les noyaux de convolution. On dit qu'un noyau de convolution κ sur \mathbf{R}^n vérifie le principe du balayage sur tout ouvert si, pour une mesure positive μ dans \mathbf{R}^n à support compact et pour un ouvert ω dans \mathbf{R}^n , il existe une mesure positive μ' portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait :

$$(B.1) \quad \kappa * \mu \geq \kappa * \mu'.$$

$$(B.2) \quad \kappa * \mu = \kappa * \mu' \text{ (au sens des mesures) dans } \omega.$$

PROPOSITION 6 ([1] et [3]).— Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n . Alors on a :

1) κ est symétrique par rapport à O et s'annule à l'infini.

2) κ est injectif⁽⁶⁾.

3) κ vérifie le principe du balayage sur tout ouvert.

4) κ vérifie le principe de domination ; c'est-à-dire, pour $f, g \in M_K^+$ quelconques, $u_f \leq u_g$ p.p. sur \mathbf{R}^n dès que $u_f \leq u_g$ p.p. sur l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^n ; f(x) > 0\}$, où $\kappa * (fdx) = u_f dx$.

5) κ vérifie le principe de positivité des masses ; c'est-à-dire, pour des mesures positives μ et ν quelconques, $\int d\mu \leq \int d\nu$ dès que

⁽⁶⁾ Ceci signifie que, pour une mesure réelle μ , $\mu = 0$ dès que $\kappa * \mu$ a un sens et que $\kappa * \mu = 0$.

$\kappa * (\mu + \nu)$ a un sens et que $\kappa * \mu \leq \kappa * \nu$.

Examinons encore le balayage pour les noyaux de Dirichlet.

Remarque 3. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n . Alors, pour une mesure positive μ telle que $\kappa * \mu$ ait un sens et pour un ouvert ω dans \mathbf{R}^n , il existe une seule mesure positive μ'_ω portée par $\bar{\omega}$ et vérifiant (B.1), (B.2) et (B.3) :

(B.3) Pour une mesure positive ν quelconque, $\kappa * \nu \geq \kappa * \mu'_\omega$ dès que $\kappa * \nu \geq \kappa * \mu$ dans ω .

En effet, d'après l'injectivité de κ et (B.3), une telle mesure positive est uniquement déterminée dès qu'elle existe. Donc on montrera seulement l'existence de μ'_ω . Soit $(\omega_m)_{m=1}^\infty$ une suite d'ouverts relativement compacts telle que $\bar{\omega}_m \subset \omega_{m+1}$ et $\bigcup_{m=1}^\infty \omega_m = \omega$.

D'abord on suppose que $\text{supp}(\mu)$ est compact. D'après la proposition 6, il existe une mesure positive μ'_m portée par $\bar{\omega}_m$ et vérifiant (B.1) et (B.2) pour μ et ω_m . D'après (4) et (5) de la proposition 6, $(\kappa * \mu'_m)_{m=1}^\infty$ est croissante et $\int d\mu'_m \leq \int d\mu$ ($m = 1, 2, \dots$). Donc on peut supposer que $(\mu'_m)_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers la limite μ'_ω lorsque $m \rightarrow \infty$. Comme, pour $f \in C_K$ quelconque, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \kappa * f(x) = 0$

et $\left(\int d\mu'_m\right)_{m=1}^\infty$ est bornée, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \kappa * f d\mu'_m = \int \kappa * f d\mu'_\omega,$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa * \mu'_m = \kappa * \mu'_\omega \text{ (vaguement).}$$

On voit alors que μ'_ω vérifie (B.1) et (B.2) pour μ et ω . Soit ν une mesure positive telle que $\kappa * \nu \geq \kappa * \mu$ dans ω . Alors, pour $m \geq 1$ quelconque, $\kappa * \mu'_m \leq \kappa * \nu$ dans ω . Comme $\text{supp}(\mu'_m) \subset \omega$, on a $\kappa * \mu'_m \geq \kappa * \nu$, d'après (4) de la proposition 6. En faisant $m \uparrow \infty$, on voit que μ'_ω vérifie (B.3), et donc μ'_ω est la mesure demandée.

Montrons notre remarque. On pose $\mu_m = \mu$ sur $B(O ; m) \cap CB(O ; m - 1)$ et $\mu'_m = 0$ dans son complément ($m = 1, 2, \dots$). Soit $\mu'_{m, \omega}$ la mesure positive portée par $\bar{\omega}$ et vérifiant (B.1), (B.2) et (B.3) pour μ'_m et ω . Posons $\mu_\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \mu'_{m, \omega}$; alors on voit facilement que μ'_ω est la mesure demandée.

On dit que μ'_ω est la mesure balayée de μ sur ω relativement à κ . On a toujours $\int d\mu \geq \int d\mu'_\omega$.

Remarque 4. – Soient κ un noyau de Dirichlet et ω_1, ω_2 deux ouverts dans \mathbb{R}^n tels que $\omega_1 \subset \omega_2$. Alors, pour une mesure positive μ telle que $\kappa * \mu$ ait un sens, $\mu'_{\omega_1} \geq \mu'_{\omega_2}$ dans ω_1 .

En remarquant que μ'_{ω_1} est aussi la mesure balayée de μ'_{ω_2} sur ω_1 relativement à κ , on voit l'inégalité demandée.

La proposition suivante est déjà connue (cf. [6]).

PROPOSITION 7. – Soit κ un noyau de Dirichlet dont la transformée de Fourier $\hat{\kappa}$ est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents :

- 1) Pour une mesure positive μ à support compact et un ouvert ω quelconques, $\int d\mu = \int d\mu'_\omega$ dès que $C\omega$ est compact.
- 2) $\psi(O) = 0$.
- 3) $\int d\kappa = \infty$.

Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ . Si, pour une mesure réelle μ , la fonctionnelle $C_K \cap D \ni \phi \rightarrow \int \phi d\mu$ est bornée dans D , alors il existe $u_\mu \in D$ unique telle que $(u_\mu, \phi) = \int \phi d\mu$. On dit aussi que u_μ est le potentiel de μ dans D .

Remarque 5 (cf. [1]). — Si μ est positive et u_μ existe dans D , alors $\kappa * \mu$ a un sens et $\kappa * \mu = u_\mu dx$.

Pour simplifier la notation, on note

$$\mathfrak{G}(\kappa) = \{\mu : \text{mesure réelle ; } u_\mu \text{ existe dans } D\} \quad (4)$$

et $\mathfrak{G}^+(\kappa)$ la totalité des mesures positives appartenant à $\mathfrak{G}(\kappa)$.

3. Une extension de la formule de Riesz.

On connaît bien la formule de décomposition de Riesz pour les noyaux de Riesz-Frostman. Dans ce paragraphe, on discutera une généralisation de cette formule. D'abord on prépare un lemme.

LEMME 1. — Soit $\psi \neq 0$ une fonction définie-négative sur \mathbb{R}^n invariante par rotation. Alors $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable.

Démonstration. — D'après la remarque 2, on peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu(y),$$

où c_i est une constante ≥ 0 ($i = 1, 2$) et où ν est une mesure positive invariante par rotation dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$. Comme $\psi \neq 0$, $(c_1, c_2, \nu) \neq (0, 0, 0)$. Comme $n \geq 3$, on voit que si $c_1 > 0$ ou bien $c_2 > 0$, $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable. Supposons que $c_1 = c_2 = 0$ et $\nu \neq 0$. Comme ν est invariante par rotation, on a $\psi(x) > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$. On choisit un nombre $t > 0$ tel que $\int_{0 < |y| < t} |y|^2 d\nu(y) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu(y)}{|x|^2} &\geq \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu'_t(\dot{y})}{|x|^2} \\ &= \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \int (\pi x \cdot y)^2 d\nu'_t(\dot{y})}{|x|^2} \\ &= \frac{\pi^2}{n} \int |y|^2 d\nu'_t(\dot{y}) > 0, \end{aligned}$$

où ν'_t désigne la restriction de ν sur $B(O ; t)$. Donc $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable, d'où le lemme 1.

THEOREME 1. — *A un noyau de Frostman-Kunugui $\kappa_1 \neq 0$ sur \mathbf{R}^n , on peut associer un noyau de Dirichlet κ_2 invariant par rotation, et un seul tel que l'on ait*

$$\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}. \tag{5}$$

Réciproquement, à un noyau de Dirichlet κ_1 sur \mathbf{R}^n invariant par rotation, on peut associer un noyau de Frostman-Kunugui $\kappa_2 \neq 0$, et un seul tel que l'égalité analogue à (5) ait lieu.

Démonstration. — Soit $\kappa_1 \neq 0$ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n . D'après les propositions 3 et 4, il existe une fonction définie-négative ψ invariante par rotation telle que

$$\widehat{\Delta\kappa_1} = -(n - 2) \omega_n \psi(x) dx.$$

Comme $\Delta\kappa_1 \neq 0$, $\psi \neq 0$, et donc le lemme 1 donne que $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable. Il existe un noyau de Dirichlet κ_2 tel que $\kappa_2 = \frac{1}{\psi} dx$ (cf. [1]). Remarquons que $\Delta\kappa_1$ peut être considérée comme une mesure positive en dehors de O et que $\int_{|x| \geq 1} d(\Delta\kappa_1) < \infty$ (voir la remarque 1); alors on voit que $(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2$ a un sens et

$$(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2 = (n - 2) \omega_n \epsilon.$$

Soit ϵ'_m la mesure balayée de ϵ sur $\overline{CB(O ; m)}$ relativement au noyau κ_2 . Comme $\text{supp}(\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \subset \overline{B(O ; m)}$, $\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))$ a un sens et

$$\begin{aligned} -\Delta(\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))) &= (-\Delta\kappa_1) * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \\ &= ((-\Delta\kappa_1) * \kappa_2) * (\epsilon - \epsilon'_m) \\ &= (n - 2) \omega_n (\epsilon - \epsilon'_m) \end{aligned}$$

Comme $-\Delta(r^{2-n} - \kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))) \geq 0$ au sens des distributions dans \mathbf{R}^n et $\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))$ s'annule à l'infini, on a

$$\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \leq r^{2-n}.$$

On voit facilement que $(\kappa_2 * \epsilon'_m)_{m=1}^\infty$ est décroissante. Comme κ_2 s'annule à l'infini et $\int d\epsilon'_m \leq 1$ (voir la proposition 6), $(\kappa_2 * \epsilon'_m)_{m=1}^\infty$ converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque $m \uparrow \infty$. D'après le théorème de Beppo-Levi dans la théorie de l'intégration, $\kappa_1 * \kappa_2$ a un sens et

$$\kappa_1 * \kappa_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \text{ (vaguement).}$$

Donc $\kappa_1 * \kappa_2 \leq r^{2-n}$. Comme $\Delta(r^{2-n} - \kappa_1 * \kappa_2) = 0$, on voit que κ_2 est un noyau de Dirichlet demandé. Evidemment un noyau de Dirichlet κ_2 vérifiant $(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2 = (n-2)\omega_n\epsilon$ est uniquement déterminé.

Réciproquement, soit κ_1 un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n invariant par rotation. On désigne par u le laplacien généralisé tel que

$$u * \kappa_1 = -\epsilon.$$

D'après la proposition 4 et la remarque 2, on peut écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$u(\phi) = -c_1 \phi(O) + c_2 \Delta\phi(O) - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \frac{1}{m}} (\phi(O) - \phi(x)) d\nu(x),$$

où c_i est une constante ≥ 0 ($i = 1, 2$) et où ν est une mesure positive en dehors de O invariante par rotation telle que

$$\int |x|^2 / (1 + |x|^2) d\nu(x) < \infty.$$

D'après $\int_{|x| \geq 1} d\nu < \infty$, la convolution $-u * r^{2-n}$ est définie au sens des distributions. Comme ν est invariante par rotation, on a, pour $\phi \geq 0 \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$\infty > \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|y| \geq \frac{1}{m}} (r^{2-n} * \phi(x) - r^{2-n} * \phi(x-y)) d\nu(y) \geq 0$$

dans \mathbb{R}^n . Alors on voit immédiatement que $-u * r^{2-n} \geq 0$ au sens des distributions. Par conséquent $-u * r^{2-n}$ est égal à un noyau de convolution κ_2 s'annulant à l'infini. Comme $\Delta\kappa_2 = (n-2)\omega_n u$, κ_2

est un noyau de Frostman-Kunugui. De la même manière que dans la première partie, on voit que $\kappa_1 * \kappa_2$ a un sens et $\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}$. L'injectivité de κ_1 donne l'unicité de κ_2 . La démonstration est ainsi complète.

Le théorème 1 donne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — Soit D_{FK} l'ensemble formé par tous les noyaux de Frostman-Kunugui et de Dirichlet. Alors, pour $\kappa_1 \in D_{FK}$ quelconque, il existe $\kappa_2 \in D_{FK}$, et un seul tel que $\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}$.

Dans ce cas, κ_2 s'appelle le noyau dual de κ_1 par rapport à r^{2-n} .

On donnera une condition pour qu'un noyau de Dirichlet appartienne à D_{FK} . La proposition suivante jouera un rôle important dans cet article.

PROPOSITION 8. — Soit κ un noyau de Dirichlet invariant par rotation dont la transformée de Fourier est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$ et ν la mesure singulière associée à ψ . On note, pour $t > 0$ quelconque, $\nu_t = \nu$ sur $CB(O ; t)$ et $\nu_t = 0$ dans $B(O ; t)$. Si, pour tout $t > 0$, $\nu \neq \nu_t$ et

$$\left(\int d\nu_t\right) \kappa \geq \kappa * \nu_t, \tag{6}$$

alors κ est un noyau de Frostman-Kunugui.

Démonstration. — Soit u le laplacien généralisé tel que $-u * \kappa = \epsilon$. Comme ν est invariante par rotation, on peut écrire, pour $\phi \in \mathcal{O}$ quelconque,

$$u(\phi) = -c_1 \phi(0) + c_2 \Delta \phi(0) - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \frac{1}{m}} (\phi(0) - \phi(x)) d\nu(x),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes ≥ 0 (voir la proposition 4 et la remarque 2). Supposons que κ ne soit pas un noyau de Frostman-Kunugui ; alors il existe un nombre $\rho > 0$, une fonction $\phi \geq 0$ de \mathcal{O} vérifiant

$$\text{supp}(\phi) \subset B(O ; \rho)$$

et un point y de $\overline{CB(O ; \rho)}$ tels que $\Delta \kappa * \phi(y) < 0$. Donc il existe un nombre $t_0 > 0$ tel que, pour $t \in (0, t_0)$ quelconque,

$$\kappa * \phi(y) > \kappa * \phi * s_t(y),$$

où l'on rappelle que s_t désigne la mesure uniforme sur $S(O; t)$ telle que $\int ds_t = 1$. Comme ν est invariante par rotation et $\nu \neq \nu_{t_0}$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int (\kappa * \phi(y) - \kappa * \phi(y - z)) d(\nu_{1/m} - \nu_{t_0})(z) > 0.$$

Ceci et l'inégalité (6) donnent que

$$-u * \kappa * \phi(y) = c_1 \kappa * \phi(y) - c_2 \Delta \kappa * \phi(y)$$

$$+ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|z| \geq \frac{1}{m}} (\kappa * \phi(y) - \kappa * \phi(y - z)) d\nu(z) > 0.$$

D'autre part, $-u * \kappa * \phi(y) = 0$, car $y \notin \text{supp}(\phi)$. On arrive donc à une contradiction. Par conséquent κ est un noyau de Frostman-Kunugui, et la démonstration est ainsi complète.

4. La régularité des noyaux de Dirichlet et des mesures balayées.

Commençons avec une proposition connue.

PROPOSITION 9 ([8]). — *Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n . Si κ est absolument continu (par rapport à la mesure de Lebesgue), alors il existe une fonction $K \geq 0$ semi-continue inférieurement telle que $\kappa = K(x) dx$ et que le noyau-fonction K satisfasse au principe de continuité⁽⁷⁾.*

On discutera la continuité de K pour un noyau de Dirichlet κ invariant par rotation. D'abord on préparera trois lemmes.

LEMME 2. — *Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n . Si $\kappa(\{O\}) > 0$, alors, pour $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$, μ est absolument continue.*

En effet, la remarque 5 donne que $\kappa * \mu$ est absolument continu.

⁽⁷⁾ Ceci signifie que, pour une mesure positive μ à support compact, la fonction $K * \mu$ est finie et continue dès que la restriction de $K * \mu$ sur $\text{supp}(\mu)$ l'est aussi.

Comme $\kappa * \mu \geq \kappa(\{O\}) \mu$, μ est aussi absolument continue.

LEMME 3 ([1]). — Soit κ un noyau de Dirichlet, ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$ et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est égal à κ . Alors, pour $\mu \in \mathcal{G}^+(\kappa)$ à support compact,

$$\|u_\mu\|^2 = \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi(x)} dx,$$

où u_μ est le potentiel de μ dans D . Réciproquement, pour une mesure positive μ à support compact quelconque, $\mu \in \mathcal{G}^+(\kappa)$ et l'égalité analogue a lieu dès que $\int |\hat{\mu}(x)|^2 / \psi(x) dx < \infty$.

LEMME 4. — Soit κ un noyau de Dirichlet et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ . Alors, pour $\mu \in \mathcal{G}^+(\kappa)$ et un entier $m \geq 1$ quelconques, μ_m appartient à $\mathcal{G}^+(\kappa)$ et $\|u_{\mu_m}\| \leq m^{1-n/2} \|u_\mu\|$, où μ_m est la mesure définie par $\int f d\mu_m = \int f(mx) d\mu(x)$ pour toute $f \in C_K$.

Démonstration. — Posons $\nu_m = \mu$ dans $B(O; m)$ et $\nu_m = 0$ sur $CB(O; m)$; alors $(u_{\nu_m})_{m=1}^\infty$ converge fortement vers u_μ dans D lorsque $m \rightarrow \infty$. Donc il suffit de supposer que $\text{supp}(\mu)$ est compact. Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Comme, pour tout le nombre réel t , $m^2(1 - \cos t) \geq 1 - \cos mt$, on a $m^2\psi(x) \geq \psi(mx)$ dans \mathbb{R}^n . D'après le lemme 3,

$$\begin{aligned} \|u_{\mu_m}\|^2 &= \int \frac{|\hat{\mu}(mx)|^2}{\psi(mx)} dx = m^{-n} \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi\left(\frac{1}{m}x\right)} dx \\ &\leq m^{2-n} \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi(x)} dx = m^{2-n} \|u_\mu\|^2, \end{aligned}$$

d'où le lemme 4.

THEOREME 2. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n invariant par rotation et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ . Si, pour tout $t > 0$, $s_t \in \mathfrak{G}^+(\kappa)$ et l'application $(0, \infty) \ni t \rightarrow \|u_{s_t}\|$ est localement bornée, alors il existe une fonction $K \geq 0$ invariante par rotation, continue au sens large dans \mathbf{R}^n et finie en dehors de O telle que $\kappa = K(x) dx$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 0$ et le noyau-fonction K vérifie le principe de continuité.

Démonstration. — Montrons d'abord que κ est absolument continu. Soit ϵ'_m la mesure balayée de ϵ sur $\overline{CB\left(O; \frac{1}{m}\right)}$ relativement au noyau κ . Alors ϵ'_m est invariante par rotation et on a $\int d\epsilon'_m \leq 1$. Donc il existe une mesure positive λ_m sur $\left[\frac{1}{m}, \infty\right)$ telle que $\epsilon'_m = \int s_t d\lambda_m(t)$ et $\int d\lambda_m \leq 1$. Posons $\alpha = \sup \left\{ \|u_{s_t}\| ; \frac{1}{m} \leq t \leq \frac{2}{m} \right\}$; alors, pour tout $t \in \left[\frac{1}{m}, \infty\right)$, le lemme 4 donne $\|u_{s_t}\| \leq \alpha$. Comme, pour $\phi \in C_K \cap D$ quelconque,

$$\begin{aligned} \int \phi d\epsilon'_m &= \int \phi ds_t d\lambda_m(t) \\ &= \int (u_{s_t}, \phi) d\lambda_m(t) \leq \|\phi\| \int \|u_{s_t}\| d\lambda_m(t) \leq \alpha \|\phi\|, \end{aligned}$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans D , la fonctionnelle linéaire $C_K \cap D \ni \phi \rightarrow \int \phi d\epsilon'_m$ est bornée dans D . Donc $\epsilon'_m \in \mathfrak{G}^+(\kappa)$ et $\|u_{\epsilon'_m}\| \leq \alpha$. Comme $(u_{\epsilon'_m})_{m=1}^\infty$ converge d'une manière croissante vers κ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ avec $m \uparrow \infty$ et, d'après le lemme 2, $\kappa(\{O\}) = 0$, κ est absolument continu.

D'après la proposition 9, il existe une fonction $K \geq 0$ semi-continue inférieurement telle que $\kappa = K(x) dx$ et K vérifie le principe de continuité. Evidemment K est invariante par rotation et, pour $\mu \in \mathfrak{G}^+(\kappa)$ quelconque, $u_\mu = K * \mu$ p.p. sur \mathbf{R}^n .

Montrons que K est finie et continue dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 0.$$

On prend une suite $(f_k)_{k=1}^\infty \subset C_K^+$ telle que $\text{supp}(f_k) \subset B(O; \frac{1}{k})$, $f_k(x) = f_k(-x)$ et $\int f_k dx = 1$. Soit $t > 0$ quelconque ; posons $g_k = s_t * f_k$. Alors $(u_{g_k})_{k=1}^\infty$ converge fortement vers u_{s_t} dans D lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme K est semi-continue inférieurement, on a :

$$\|u_{s_t}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{g_k}\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int K * g_k(x) g_k(x) dx \geq \int K * s_t(x) ds_t(x).$$

Donc $K * s_t$ est égale à une constante ≥ 0 sur $S(O; t) = \text{supp}(s_t)$. Le principe de continuité pour K donne que $K * s_t$ est finie et continue dans R^n . Soit m un entier ≥ 1 quelconque. La famille $(u_{s_t})_{t \geq 1/m}$ est bornée dans D. Comme, pour $\phi \in C_K \cap D$ quelconque, la fonction (u_{s_t}, ϕ) de t est finie et continue dans $(0, \infty)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_{s_t}, \phi) = 0$, $(\frac{1}{m}, \infty) \ni t \rightarrow u_{s_t}$ est faiblement continue dans D et $\lim_{t \rightarrow \infty} u_s = 0$ (faiblement). En particulier, la fonction $(u_{s_t}, u_{e'_m})$ de t est finie et continue dans $(\frac{1}{m}, \infty)$ et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Comme $u_{e'_m} = K$ p.p. sur $CB(O; \frac{1}{m})$, on a, pour $t > \frac{1}{m}$ quelconque,

$$\begin{aligned} (u_{s_t}, u_{e'_m}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{s_t * f_k}, u_{e'_m}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_{e'_m}(s_t * f_k) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int K(s_t * f_k) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} K * s_t * f_k(O) \\ &= K * s_t(O) = \int K(x) ds_t(x), \end{aligned}$$

car $K * s_t$ est finie et continue. Comme m est quelconque, on voit que la fonction $\int K(x) ds_t(x)$ de t est finie et continue dans $(0, \infty)$ et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. La fonction K étant invariante par rotation, on peut écrire $K(x) = \int K(y) ds_{|x|}(y)$ en dehors de O et donc K est finie et continue en dehors de O et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 0$.

Montrons finalement $\lim_{|x| \rightarrow 0} K(x) = \infty$. Supposons que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} K(x) < \infty.$$

Alors il existe une suite $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ de nombres > 0 telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$ et que $\left(\int K(x) ds_{t_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ soit bornée. Pour tout l'entier $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|u_{\epsilon'_m}\|^2 &\leq \int K(x) d\epsilon'_m(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int K * s_{t_k}(x) d\epsilon'_m(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int K * \epsilon'_m(x) ds_{t_k}(x) \\ &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int K(x) ds_{t_k}(x). \end{aligned}$$

Donc $(u_{\epsilon'_m})_{m=1}^{\infty}$ est bornée dans D . Comme $K = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{\epsilon'_k}$ p.p., on a $K \in D$. Soit $\phi \in C_K \cap D$ quelconque. Alors

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |\phi(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |(K, U_x \phi)| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \|K\| \|U_x \phi\| = \|K\| \|\phi\|.$$

Comme $C_K \cap D$ est dense dans D , tout l'élément de D est une fonction finie et continue. En particulier, K est finie et continue. Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Alors $\frac{1}{\psi}$ est sommable. Comme $\varliminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{|x|^2} < \infty$ et $n \geq 3$, ceci est une contradiction. On voit donc que $\lim_{|x| \rightarrow 0} K(x) = \infty$.

Remplaçons $K(0)$ par $+\infty$ si c'est nécessaire ; alors on voit que K est la fonction demandée. La démonstration est ainsi complète.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *Soit κ un noyau de Dirichlet invariant par rotation dont la transformée de Fourier est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Si κ vérifie la condition suivante (1) ou bien (2), alors la même conclusion a lieu.*

$$(1) \quad \varliminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{|x|^2} > 0.$$

(2) *Il existe $t_0 > 0$ tel que $s_{t_0} \in \mathcal{G}^+(\kappa)$ et la mesure singulière associée à ψ est décroissante par rapport à $r = |x| > 0$ (8).*

Démonstration. — Supposons d'abord que κ vérifie (1). Il est bien connu que, pour $t > 0$ quelconque, $s_t \in \mathcal{G}^+(r^{2-n})$ et l'application

$$(0, \infty) \ni t \longrightarrow \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{|x|^2} dx$$

est continue. Ecrivons, avec deux constantes $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$,

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) d\nu(y)$$

(cf. la remarque 2). La condition (1) donne que $c_2 > 0$. Ceci et le lemme 3 donnent que $s_t \in \mathcal{G}^+(\kappa)$ et l'application $(0, \infty) \ni t \longrightarrow \|u_{s_t}\|$ est localement bornée, d'où la même conclusion.

Supposons que κ vérifie (2). On peut supposer que $t_0 = 1$. D'après les lemmes 3 et 4, il suffit de montrer que, pour tout entier $m \geq 1$.

$$\sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq 1} \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{\psi(x)} dx < \infty. \tag{7}$$

Comme $\hat{s}_t(x) = \hat{s}_1(tx)$, (7) se déduit de

$$\inf \left\{ \frac{\psi(tx)}{\psi(x)} ; x \neq 0, 1 \leq t \leq m \right\} > 0,$$

car $s_1 \in \mathcal{G}^+(\kappa)$. Comme ν est invariante par rotation, il existe une mesure positive λ dans $(0, \infty)$ telle que $\nu = \int s_t d\lambda(t)$. Soit $(f_k)_{k=1}^\infty$ une suite de C_K^+ telle que f_k soit invariante par rotation,

$$\text{supp}(f_k) \subset B\left(O ; \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \int f_k dx = 1.$$

Comme la fonction $\int f_k(x - y) d\nu(y)$ de x est décroissante par rap-

(8) Pour une fonction f de C_K^+ invariante par rotation et un nombre $t > 0$ vérifiant $B(O ; t) \supset \text{supp}(f)$, la fonction $\int f(x - y) d\nu(y)$ de x est définie sur $CB(O ; t)$ et invariante par rotation. On dit que ν est décroissante par rapport à r si, pour toute $f \in C_K^+$ invariante par rotation et pour tout $t > 0$ vérifiant $B(O ; t) \supset \text{supp}(f)$, $\int f(x - y) d\nu(y)$ est décroissante au sens large lorsque $r (\geq t)$ est croissant.

port à $r \left(\geq \frac{1}{k} \right)$, il existe une fonction finie et continue $\lambda_k \geq 0$ sur $\left[\frac{1}{k}, \infty \right)$ telle que $\left(\int f_k(x-y) dv(y) \right) dx = \int_s^t \lambda_k(t) dt$ sur CB $\left(0; \frac{1}{k} \right)$ et la fonction $\lambda_k(t)/t^{n-1}$ de t soit décroissante au sens large sur $\left[\frac{1}{k}, \infty \right)$. Soit $t \in [1, m]$ quelconque. Pour une fonction $g \geq 0$ finie et continue dans $(0, \infty)$ à support compact quelconque, on a

$$\begin{aligned} \int g(ts) d\lambda(s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int g(ts) \lambda_k(s) ds = \frac{1}{t} \lim_{k \rightarrow \infty} \int g(s) \lambda_k\left(\frac{s}{t}\right) ds \\ &\geq \frac{1}{t^n} \lim_{k \rightarrow \infty} \int g(s) \lambda_k(s) ds = \frac{1}{t^n} \int g(s) d\lambda(s), \end{aligned}$$

et donc, pour $x \in \mathbf{R}^n$ quelconque,

$$\begin{aligned} \psi(tx) &= c_1 + c_2 t^2 |x|^2 + \int \int (1 - \cos(2t\pi x \cdot y)) ds_u(y) d\lambda(u) \\ &= c_1 + c_2 t^2 |x|^2 \\ &\quad + \int \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) ds_{tu}(y) d\lambda(u) \geq \frac{1}{t^n} \psi(x), \end{aligned}$$

d'où $\inf \left\{ \frac{\psi(tx)}{\psi(x)} ; x \neq 0, 1 \leq t \leq m \right\} \geq 1/m^n > 0$. On voit ainsi que la même conclusion a lieu. La démonstration est complète.

Discutons ensuite la continuité absolue des mesures balayées. Rappelons d'abord le théorème de représentation par A. Beurling et J. Deny ([1]).

PROPOSITION 10. — Soit κ un noyau de Dirichlet, ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$ et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ . Alors il existe une constante $c \geq 0$, une forme

(⁹) On dit que $Q(f, g)$ possède la propriété locale si $Q(f, g) = 0$ dès que f est égale à une constante dans un certain voisinage de $\text{supp}(g)$ ou bien que g est égale à une constante dans un certain voisinage de $\text{supp}(f)$.

hermitienne $Q(f, g) \geq 0$ sur $C_K \cap D$ possédant la propriété locale⁽⁹⁾ telles que, pour toutes $f, g \in C_K \cap D$,

$$(f, g) = c \int fg dx + Q(f, g) + \frac{1}{2} \iint (f(x+y) - f(x))(g(x+y) - g(x)) d\nu(y) dx, \quad (8)$$

où ν est la mesure singulière associée à ψ . Dans ce cas, c et $Q(f, g)$ sont uniquement déterminées.

En utilisant la présente proposition, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 11. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n tel que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Supposons que la mesure singulière associée à ψ possède la densité continue $\alpha(x)$ en dehors de O . Pour une mesure positive μ dans \mathbb{R}^n à support compact et un ouvert ω dans \mathbb{R}^n quelconques, il existe une fonction finie et continue $f'_{\mu, \omega}$ dans ω , et une seule telle que $\mu'_\omega = f'_{\mu, \omega} dx$ dans ω dès que $\text{supp}(\mu) \cap \bar{\omega} = \emptyset$ et que $C\omega$ est compact, où μ'_ω est la mesure balayée de μ sur ω relativement à κ . Dans ce cas, on a, pour $x \in \omega$,

$$f'_{\mu, \omega} = \int \alpha(x-y) d(\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega)(y). \quad (9)$$

Démonstration. — Ecrivons g la fonction définie par la partie droite de (9). Alors g est finie et continue dans ω . Pour la proposition 11, il suffit de montrer que, pour tout $\phi \in C_K \cap D$ à support dans ω , $\int \phi d\mu'_\omega = \int \phi g dx$, car $C_K \cap D$ est dense dans C_K .

On choisit un nombre $t > 0$ vérifiant $\text{supp}(\phi) + B(O; t) \subset \omega$. Soit f une fonction de C_K^+ symétrique par rapport à O et vérifiant

$$\text{supp}(f) \subset B(O; t).$$

Comme $(\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega) * f$ appartient à $C_K \cap D$ et

$$\text{supp}(\phi) \cap (\text{supp}((\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega) * f) \cup \text{supp}(\mu)) = \emptyset,$$

la proposition 10 donne que

$$\begin{aligned}
\int \phi * f d\mu'_\omega &= \int \phi(x) (\mu'_\omega - \mu) * f(x) dx \\
&= (\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f, \phi) \\
&= \frac{1}{2} \iint (\phi(x+y) - \phi(x)) (\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x+y) \\
&\quad - \kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x)) \alpha(y) dy dx \\
&= \iint \phi(x) (\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x) \\
&\quad - \kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x+y)) \alpha(y) dy dx \\
&= \iint \kappa * (\check{\mu} - \check{\mu}'_\omega) * (\phi * f)(y) \alpha(y) dy
\end{aligned}$$

où $\int h d\check{\mu} = \int h(-x) d\mu(x)$ pour toute $h \in C_K$. En faisant $f dx \rightarrow \epsilon$ (vaguement), on a $\int \phi d\mu'_\omega = \int \phi g dx$. La démonstration est ainsi complète.

En particulier, on note, pour $t > 0$ quelconque, $f'_t(x; \kappa)$ la fonction $f'_{\epsilon, \overline{CB(O;t)}}$ obtenue dans la proposition 11. En posant $f'_t(x; \kappa) = 0$ dans $\overline{B(O;t)}$, on peut supposer que f'_t est une fonction sommable dans \mathbf{R}^n (cf. la proposition 7). Pour un entier $m \geq 1$, on note encore

$$f'_{t,m}(x; \kappa) = \begin{cases} f'_{t-1/m}(x; \kappa) & \text{sur } \overline{CB(O;t)} \\ 0 & \text{dans } \overline{B(O;t)} \end{cases} \quad (10)$$

dès que $t > \frac{1}{m}$.

COROLLAIRE 3. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n invariant par rotation et vérifiant la même condition que ci-dessus. Alors il existe une fonction $c(t; \kappa)$ dans $(0, \infty)$ telle que

$$0 \leq c(t; \kappa) \leq 1 - \int f'_t dx$$

et

$$\epsilon'_t = c(t; \kappa) s_t + f'_t(x; \kappa) dx \quad (11)$$

où ϵ'_t est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\text{CB}}(O; t)$ relativement à κ .

En effet, évidemment ϵ'_t est aussi invariante par rotation et on a $\epsilon'_t = \int_{f'_t(x)} dx$ dans $\overline{\text{CB}}(O; t)$, d'après la proposition 11. Comme $\text{supp}(\epsilon'_t) \subset \overline{\text{CB}}(O; t)$, on voit facilement qu'il existe une telle fonction. D'après le principe de positivité des masses, on a

$$c(t; \kappa) + \int f'_t(x) dx \leq 1.$$

Posons, pour un entier $m \geq 1$,

$$c_m(t; \kappa) = c\left(t - \frac{1}{m}; \kappa\right) + \int_{|x| \leq t} f'_{t-1/m}(x) dx \quad (12)$$

dès que $t > \frac{1}{m}$; alors $c_m(t; \kappa)$ est une fonction définie dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$.

PROPOSITION 12. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n invariant par rotation tel que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ vérifiant $s_{t_0} \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et que la mesure singulière associée à ψ possède la densité continue $\alpha(x)$ décroissante au sens large par rapport à $r = |x| > 0$.

Alors on a :

1) Les applications $(0, \infty) \ni t \rightarrow \epsilon'_t$ et $(0, \infty) \ni t \rightarrow \kappa * \epsilon'_t$ sont vaguement continues.

2) La fonction $\int d\epsilon'_t$ de t est continue.

3) Pour un entier $m \geq 1$ quelconque, la fonction $c_m(t; \kappa)$ est continue dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$.

Démonstration. — D'après le théorème 2 et le corollaire 2, il existe une fonction $K \geq 0$ continue au sens large dans \mathbb{R}^n et finie en dehors de O telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 0$, $\kappa = K(x) dx$ et que K vérifie le principe de continuité. Evidemment K est aussi invariante par rotation.

Soit $t > 0$ quelconque et $(t_m)_{m=1}^\infty$ une suite dans $(0, \infty)$ tendant vers t ($m \rightarrow \infty$) quelconque. Comme $\int d\epsilon'_{t_m} \leq 1$, $(\epsilon'_{t_m})_{m=1}^\infty$ est vaguement bornée. Soit ϵ''_t un point vaguement adhérent de $(\epsilon'_{t_m})_{m=1}^\infty$ quelconque. Comme $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 0$, on a $K * \epsilon'_t = K * \epsilon''_t$ p.p. dans $CB(O; t)$. De la même manière que dans le théorème 2 et dans le corollaire 2, on voit que $K * \epsilon'_t$ et $K * \epsilon''_t$ sont finies et continues. Donc $K * \epsilon'_t = K * \epsilon''_t$ sur $CB(O; t)$. Comme $\text{supp}(\epsilon'_t) \cup \text{supp}(\epsilon''_t) \subset CB(O; t)$, le principe de domination pour κ donne que $\kappa * \epsilon'_t = \kappa * \epsilon''_t$, et donc $\epsilon'_t = \epsilon''_t$, d'après l'injectivité de κ . Par conséquent $(0, \infty) \ni t \rightarrow \epsilon'_t$ et $(0, \infty) \ni t \rightarrow \kappa * \epsilon'_t$ sont vaguement continues.

On voit facilement que la fonction $\int d\epsilon'_t$ de t est continue (d'après la proposition 7, il suffit de considérer le cas $\int d\kappa < +\infty$).

Montrons finalement que $c_m(t; \kappa)$ est continue dans $(\frac{1}{m}, \infty)$.

Comme $t \rightarrow (\kappa - \kappa * \epsilon'_t)$ est vaguement continue et

$$f'_t(x) = \int \alpha(x-y) d(\kappa - \kappa * \epsilon'_t)(y)$$

dans $\overline{CB(O; t)}$, on voit que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t > \frac{1}{m}$ et une suite $(t_k)_{k=1}^\infty$ tendant vers t ($k \rightarrow \infty$) quelconques, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_{t_k, m}(x) = f'_{t, m}(x)$

dans $B(O; t) \cup \overline{CB(O; t)}$. Posons $\alpha_{1/m} = 0$ dans $B(O; 1/m)$ et $\alpha_{1/m} = \alpha$ en dehors de $B(O; 1/m)$; alors, pour k assez grand, $f'_{t_k, m} \leq K * \alpha_{1/m}$ sur \mathbb{R}^n . On remarque ici que $\int \alpha_{1/m} dx < \infty$. Le théorème de Lebesgue donne que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f'_{t_k, m} dx = \int f'_{t, m} dx$, et donc la fonction $\int f'_{t, m} dx$ de t est finie et continue dans $(\frac{1}{m}, \infty)$. Comme

$$c_m(t; \kappa) = \int d\epsilon'_{t-1/m} - \int f'_{t, m} dx,$$

on voit que $c_m(t; \kappa)$ est continue dans $(\frac{1}{m}, \infty)$. La démonstration est ainsi complète.

5. Les noyaux de Dirichlet et la condition (*).

Rappelons d'abord la condition (*) pour une fonction dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$.

Soit α une fonction finie et continue ≥ 0 dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$. On dit que α vérifie la condition (*) si, pour $t' \geq t > 0$ et une constante $c \geq 0$ quelconques,

$$\alpha(x) \geq c \int \alpha(x - y) ds_t(y)$$

sur $CB(O; t')$ dès que la même inégalité a lieu sur $S(O; t')$.

Remarque 6. — Soit α une fonction finie et continue > 0 dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ invariante par rotation. Alors pour que α vérifie la condition (*), il faut et il suffit que, pour tout $t > 0$, la fonction

$$\int \alpha(x - y) ds_t(y) / \alpha(x)$$

dans $\overline{CB(O; t)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x| (> t)$ croît.

Cela résulte immédiatement de la définition.

PROPOSITION 13. — Soit α une fonction finie et continue ≥ 0 dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ invariante par rotation et vérifiant la condition (*). Alors $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ ou bien $\alpha = 0$. En particulier, si $\alpha \neq 0$ et $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \alpha(x) dx < \infty$, alors α est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ et strictement décroissante lorsque $r = |x| (> 0)$ croît.

Démonstration. — Posons $A = \{x \in C\{O\}; \alpha(x) = 0\}$ est supposons que $A \neq \emptyset$. Posons $t_0 = \sup \{|y|; y \in A\}$. On montrera d'abord que $A = \overline{B(O; t_0)} \cap C\{O\}$. Supposons que $A \neq \overline{B(O; t_0)} \cap C\{O\}$. Alors il existe $t_1 > 0$ tel que $A \cap (\overline{B(O; t_1)} \cap CA) = S(O; t_1)$. On

peut choisir $t, t' \in (0; \infty)$ et une constante $c > 0$ tels que

$$0 < t < t_1/2 < t' < t_1, \int \alpha(x-y) ds_t(y) > 0$$

sur $S(O; t_1)$ et $\alpha(x) \geq c \int \alpha(x-y) ds_{t'}(y)$ sur $S(O; t')$. D'après la condition (*), on a $\alpha(x) \geq c \int \alpha(x-y) ds_t(y)$ sur $S(O; t_1)$. Mais cela est en contradiction avec $\alpha(x) = 0$ sur $S(O; t_1)$, et donc $\bar{A} \supset \bar{B}(O; t_0)$, d'où $A = \bar{B}(O; t_0) \cap C\{O\}$. Par conséquent, pour la première conclusion, il suffit de montrer que $t_0 = \infty$. Supposons $t_0 < \infty$. Soit t un nombre tel que $0 < t < t_0/4$. Alors $\alpha(x) = 0$ et $\int \alpha(x-y) ds_t(y) = 0$ sur $S(O; t_0/2)$, et donc, d'après la condition (*),

$$\alpha(x) \geq \int \alpha(x-y) ds_t(y)$$

sur $S(O; t_0)$, d'où $\int \alpha(x-y) ds_t(y) = 0$ sur $S(O; t_0)$. Comme α est invariante par rotation, cela est en contradiction avec la définition de t_0 . On voit ainsi que $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ ou $\alpha \equiv 0$.

Montrons la deuxième partie. Supposons qu'il existe un point $x_0 \neq O$ de \mathbf{R}^n tel que α ne soit pas sous-harmonique dans un certain voisinage de x_0 . Posons $t_0 = |x_0|$. Alors on peut choisir $t \in (0, t_0)$ tel que $\alpha(x_0) > \int \alpha(x_0 - y) ds_t(y)$. On a $\alpha(x) > \int \alpha(x - y) ds_t(y)$ sur $S(O; t_0)$. Comme $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ (cf. la première partie), on a $\alpha(x) > \int \alpha(x - y) ds_t(y)$ sur $CB(O; t_0)$, d'après la condition (*). Posons $\psi(x) = 1 - \hat{s}_t(x)$ sur \mathbf{R}^n ; alors ψ est définie-négative et $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable, d'après le lemme 1. Donc il existe un noyau de Dirichlet κ tel que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. On a $\int d\kappa = \infty$ (cf. la proposition 7). Comme $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, il existe une fonction $f \neq 0 \in C_K^+$ invariante par rotation telle que $\text{supp}(f) \subset B(O; t_0 - t)$ et $\alpha(x) \geq \kappa * f(x)$ sur $CB(O; t_0 - t) \cap \bar{B}(O; t_0)$. Comme

$$\int_{|x| \geq t_0} \alpha(x) dx < \infty, \sup \{ \kappa * f(x) - \alpha(x) ; x \in \text{CB}(\text{O}; t_0) \} > 0,$$

et donc il existe un point $y \in \text{CB}(\text{O}; t_0)$ tel que

$$\kappa * f(y) - \alpha(y) = \sup \{ \kappa * f(x) - \alpha(x) ; x \in \text{CB}(\text{O}; t_0) \},$$

car $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \kappa * f(x) = 0$. Par conséquent on a

$$\kappa * f(y) - \alpha(y) \geq \int (\kappa * f(y - z) - \alpha(y - z)) ds_t(z).$$

Mais cela est en contradiction avec $\alpha(y) > \int \alpha(y - z) ds_t(z)$ et

$$(\epsilon - s_t) * \kappa * f(y) = f(y) = 0,$$

d'où α est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Soit $\phi(t)$ une fonction définie dans $(0, \infty)$ telle que $\phi(|x|^{-2-n}) = \alpha(x)$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$. De la même manière que dans la proposition 1, ϕ est finie, continue, convexe et croissante au sens large. En vertu de la convexité de ϕ et de $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \alpha(x) dx < \infty$, ϕ est strictement croissante avec t , et donc α est strictement décroissante lorsque r croît. La démonstration est ainsi complète.

D'après la remarque 6 et la proposition 13, on voit facilement la remarque suivante :

Remarque 7. — Soit α la même fonction que dans la proposition 13. Alors, pour tout $t > 0$ et toute mesure positive μ dans \mathbb{R}^n invariante par rotation et portée par $B(\text{O}; t)$,

$$\alpha(x) \geq \int \alpha(x - y) d\mu(y)$$

sur $\text{CB}(\text{O}; t)$ dès que la même inégalité a lieu sur $S(\text{O}; t)$.

On remarque ici qu'il existe une mesure positive λ sur $[0, t)$ telle que $\mu = \int s_\rho d\lambda(\rho)$, où $s_0 = \epsilon$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Riesz (cf. [13]).

THEOREME 3. — Soit κ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n invariant par rotation tel que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $s_{t_0} \in \mathfrak{E}^+(\kappa)$ et que la mesure singulière associée à ψ possède la densité continue $\alpha(x)$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Si α vérifie la condition (*), alors, pour $t > 0$ quelconque, il existe une mesure positive λ_t sur $[t, \infty)$ telle que l'on ait

$$\alpha(x) dx = \int \epsilon'_\rho d\lambda_t(\rho) \quad (13)$$

sur $CB(O; t)$, où ϵ'_ρ est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{CB(O; \rho)}$ relativement à κ .

D'après la proposition 12, l'intégrale droite de (13) est définie au sens des mesures.

Remarque 8. — Soit γ un nombre tel que $0 < \gamma < 2$. On dit que $|x|^{\gamma-n} dx$ est le noyau de Riesz-Frostman d'ordre γ . On sait que $|x|^{\gamma-n} dx$ est un noyau de Dirichlet, sa transformée de Fourier est, avec une constante $c_\gamma > 0$, $1/c_\gamma |x|^\gamma$ et que la mesure singulière associée à $c_\gamma |x|^\gamma$ est, avec une constante $c'_\gamma > 0$, $c'_\gamma |x|^{-\gamma-n} dx$. M. Riesz [13] a montré que, pour $t > 0$,

$$|x|^{-\gamma-n} dx = c''_\gamma \int_t^\infty \epsilon'_\rho \rho^{-\gamma-1} (\rho^2 - t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} d\rho$$

dans $CB(O; t)$, où c''_γ est une constante > 0 et où ϵ'_ρ est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{CB(O; \rho)}$ relativement à $|x|^{\gamma-n} dx$. Dans § 6, on montrera que la fonction $|x|^{-\gamma-n}$ de x vérifie la condition (*).

Pour montrer le théorème 3, on utilisera les trois lemmes suivants.

LEMME 5. — Soit $\kappa = K(x) dx$ un noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n invariant par rotation, où K est une fonction vérifiant les mêmes conditions que dans le théorème 2. Supposons les mêmes conditions que dans le théorème 3 et encore que $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Alors, pour tout nombre donné δ vérifiant $0 < \delta < 1$, il existe une famille $(s_{t,\delta})_{0 < t < \infty}$ de fonctions ≥ 0 dans \mathbf{R}^n , invariante par rotation, telle que l'on ait :

a) $s_{t,\delta}(x) = 0$ dans $B(O; t) \cup CB(O; t + \delta)$.

b) $s_{t,\delta}(x)$ est finie et continue comme une fonction sur $\text{CB}(O; t)$.

c) $\int s_{t,\delta}(x) dx = 1$.

d) $|K * s_t(x) - K * s_{t,\delta}(x)| < \delta$ sur \mathbf{R}^n .

e) $s_{t,\delta}(x)/\alpha(x)$ est décroissante lorsque $r (\geq t)$ croît.

f) L'application $(0, \infty) \ni t \rightarrow s_{t,\delta}(x) dx$ est vaguement continue.

g) Pour un intervalle fermé $[a, b]$ et un nombre positif ξ quelconques, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$ et $x, y \in \text{CB}(O; t)$ vérifiant $|x - y| < \eta$,

$$\left| \frac{s_{t,\delta}(x)}{\alpha(x)} - \frac{s_{t,\delta}(y)}{\alpha(y)} \right| < \xi.$$

Démonstration. — Soit D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ . On note $\|\cdot\|$ la norme dans D . D'après la proposition 13 et le corollaire 2, on a, pour $t > 0$ quelconque, $s_t \in \mathfrak{G}^+(\kappa)$. Comme la fonction $\|u_{s_t}\|$ de t est localement bornée (cf. le corollaire 2), le lemme 4 donne que, pour $t_0 > 0$ quelconque, $\sup_{t \geq t_0} \|u_{s_t}\| < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_{s_t}\| = 0$. Evidemment, pour $\phi \in C_K \cap D$ quelconque, la fonction $\int \phi ds_t$ de t est finie et continue, et donc $(0, \infty) \ni t \rightarrow u_{s_t}$ est faiblement continue dans D . Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Comme, pour tout entier $m \geq 1$ et tout nombre $a > 0$, $\inf \left\{ \frac{\psi(atx)}{\psi(ax)} ; 1 \leq t \leq m \right\} \geq 1/m^n$ sur \mathbf{R}^n (cf. la démonstration du corollaire 2), on a

$$\lim_{r \rightarrow t} \int \frac{|\hat{s}_r(x)|^2}{\psi(x)} dx = \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{\psi(x)} dx$$

d'après le théorème de Lebesgue. Donc la fonction $\|u_{s_t}\|$ de t est continue dans $(0, \infty)$. On voit ainsi que $(0, \infty) \ni t \rightarrow u_{s_t}$ est fortement continue dans D et que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_{s_t}\| = 0$.

On sait déjà que, pour tout $t > 0$, $K * s_t$ est finie et continue dans \mathbb{R}^n . Posons

$$M(x, t) = K * s_t(x) = K * s_t * s_{|x|}(O)$$

dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Comme, pour $t \neq 0$ et $x \neq O$, on a

$$M(x, t) = (u_{s_t}, u_{s_{|x|}}),$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire associé, M est finie et continue dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ et s'annule à l'infini. En remarquant la continuité uniforme de M sur tout compact, on voit qu'il existe une application continue $(0, \infty) \ni t \rightarrow \delta_t \in (0, \delta)$ telle que, pour $t \in (0, \infty)$, $t' \in (t, t + \delta_t)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ quelconques, $|M(x, t) - M(x, t')| < \delta$ et que, pour un entier $m \geq 1$ quelconque, $\min\{\delta_t; 1/m \leq t \leq m\} > 0$. Soit y_t un point de $S(O; t + \delta_t)$ et posons

$$s'_{t,\delta}(x) = \begin{cases} \alpha(x) - \alpha(y_t) & \text{si } x \in \text{CB}(O; t) \cap \text{B}(O; t + \delta_t) \\ 0 & \text{si } x \in \text{B}(O; t) \cup \text{CB}(O; t + \delta_t) \end{cases}$$

Alors, d'après la proposition 13, $s'_{t,\delta}(x) > 0$ sur $\text{CB}(O; t) \cap \text{B}(O; t + \delta_t)$.

Posons

$$s'_{t,\delta}(x) = \left(\int s'_{t,\delta}(x) dx \right)^{-1} s'_{t,\delta}(x);$$

alors on obtient une famille $(s'_{t,\delta})_{0 < t < \infty}$ de fonctions ≥ 0 .

Montrons qu'elle est une famille demandée. On voit facilement qu'elle vérifie les conditions (a), (b), (c), (d), (e) et (f). Comme les fonctions $\int s'_{t,\delta}(x) dx$ et $|y_t|$ de t sont continues, la fonction

$$\left(\int s'_{t,\delta}(x) dx \right)^{-1} \frac{\alpha(x) - \alpha(y_t)}{\alpha(x)}$$

de (x, t) est finie et continue dans $(\mathbb{R}^n - \{O\}) \times (0, \infty)$. En remarquant sa continuité uniforme sur tout compact, on voit que la condition (g) est vérifiée. Le lemme 5 est ainsi démontré.

Rappelons la notation $f'_{t,m}(x; \kappa)$ définie dans (10).

LEMME 6. — *Supposons les mêmes conditions que dans le lemme 5. Soient $[a, b]$, m et δ un intervalle fermé $\subset (0, \infty)$, un entier $> 1/a$ et un nombre > 0 . Alors il existe un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$ et tout $x, y \in \text{CB}(O; t) \cap \text{B}(O; b)$ vérifiant $|x - y| < \eta$,*

$$\left| \frac{f'_{t,m}(x; \kappa)}{\alpha(x)} - \frac{f'_{t,m}(y; \kappa)}{\alpha(y)} \right| < \delta.$$

Démonstration. — Soit α' une fonction > 0 , finie et continue dans \mathbb{R}^n telle que $\alpha'(x) = \alpha(x)$ sur $\text{CB}(O; \frac{1}{m})$. Alors, pour $t > \frac{1}{m}$ quelconque,

$$f'_{t,m}(x; \kappa) = \alpha' * (\kappa - \kappa * \epsilon'_{(t-1/m)})(x)$$

sur $\text{CB}(O; t)$. D'après la proposition 12, l'application $t \rightarrow \kappa - \kappa * \epsilon'_t$ est vaguement continue, et donc la fonction $\frac{\alpha' * (\kappa - \kappa * \epsilon'_t)(x)}{\alpha(x)}$ de (x, t) est finie et continue dans $(\mathbb{R}^n - \{O\}) \times (0, \infty)$. En remarquant sa continuité uniforme sur tout compact, on voit le lemme 6.

LEMME 7. — *Soient κ et α les mêmes que dans le théorème 3 et supposons que α vérifie la condition (*) et $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$. Posons, pour un entier $m \geq 1$, $t \in (\frac{1}{m}, \infty)$ et $\phi \in C_K$,*

$$\epsilon'_{t,m} = c_m(t; \kappa) s_{t,1/m} dx + f'_{t,m}(x; \kappa) dx, \tilde{\phi}_m(t) = \int \phi d\epsilon'_{t,m}$$

et $\tilde{\phi}(t) = \int \phi d\epsilon'_t$. Alors, pour $\phi \in C_K$ quelconque, $(\tilde{\phi}_m)_{m=1}^\infty$ converge uniformément vers $\tilde{\phi}$ sur tout compact lorsque $m \rightarrow \infty$.

Démonstration. — Posons $\epsilon''_{t,m} = c_m(t; \kappa) s_t + f'_{t,m}(x; \kappa) dx$ et $\tilde{\phi}'_m(t) = \int \phi d\epsilon''_{t,m}$. Comme $0 < c_m(t; \kappa) < 1$ et $\int \phi(x) s_{t,1/m}(x) dx$ converge uniformément vers $\int \phi ds_t$ sur tout compact lorsque $m \rightarrow \infty$,

il suffit de montrer que $(\tilde{\phi}'_m)_{m=1}^\infty$ converge uniformément vers $\tilde{\phi}$ sur tout compact lorsque $m \rightarrow \infty$. Comme $\int d\epsilon'_t \leq \int d\epsilon''_{t,m} \leq 1$, il suffit de le montrer dans le cas où ϕ est infiniment dérivable. On a

$$\phi(x) = -(n-2) \omega_n \int |x-y|^{2-n} \Delta\phi(y) dy$$

et d'après la proposition 12, on voit que les fonctions de (x, t) $\int |x-y|^{2-n} d\epsilon'_{t,m}(y)$ et $\int |x-y|^{2-n} d\epsilon_t(y)$ sont finies et continues dans $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$.

Par conséquent il suffit de montrer que $(\int |x-y|^{2-n} d\epsilon''_{t,m})_{m=1}^\infty$ converge d'une façon monotone vers $\int |x-y|^{2-n} d\epsilon'_t(y)$ lorsque $m \uparrow \infty$, d'après le théorème de Dini. Supposons $m < k$. Alors, d'après la remarque 4, $f'_{t,m}(x; \kappa) \leq f'_{t,k}(x; \kappa)$ sur \mathbf{R}^n et, d'après le principe de positivité de masse, on a $\int d\epsilon'_{(t-1/m)} \geq \int d\epsilon'_{(t-1/k)}$. Donc

$$c_m(t; \kappa) \geq c_k(t; \kappa).$$

En vertu de la continuité vague de $t \rightarrow \epsilon'_t$ (cf. la proposition 12), $(\epsilon''_{t,m})_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers ϵ'_t lorsque $m \rightarrow \infty$. Par conséquent $(\int |x-y|^{2-n} d\epsilon''_{t,m}(y))_{m=1}^\infty$ converge d'une manière décroissante vers $\int |x-y|^{2-n} d\epsilon'_t(y)$ lorsque $m \rightarrow \infty$, comme cela résulte de la formule

$$\begin{aligned} \int |x-y|^{2-n} d\epsilon''_{t,m}(y) &= \left(\int d\epsilon'_{t-1/m} \right) U_t(x) \\ &\quad - \omega_n \int_t^\infty [U_t(x) - U_s(x)] s^{n-1} h_{t,m}(s) ds, \end{aligned}$$

où on a posé $U_t(x) = |x|^{2-n}$ pour $|x| \geq t$, $U_t(x) = t^{2-n}$ pour $|x| \leq t$,

et $h_{t,m}(|x|) = f'_{t,m}(x)$. La démonstration est ainsi complète.

Démonstration du théorème 3. — On peut supposer $\alpha \neq 0$. Alors, d'après la proposition 13, on a $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. On voit que les trois derniers lemmes s'appliquent à notre démonstration, d'après le corollaire 2. On montrera seulement qu'il existe une mesure positive λ sur $[1, \infty)$ telle que $\alpha_1(x) dx = \int \epsilon'_t d\lambda(t)$, où $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ sur $CB(O; 1)$ et $\alpha_1(x) = 0$ dans $B(O; 1)$. De la même manière, on arrivera à la conclusion du théorème 3. Posons

$$g_{t,m}(x) = c_m(t; \kappa) s_{t,1/m}(x) + f'_{t,m}(x; \kappa)$$

sur \mathbf{R}^n , où $s_{t,1/m}$ est la fonction obtenue dans le lemme 5. Alors on a $g_{t,m}(x) > 0$ sur $CB(O; t)$. Posons $\beta_m(t) = \int g_{t,m}(x) dx$; alors β_m est finie et continue dans $(0, \infty)$, d'après la proposition 12. En vertu du principe de positivité de masse, on a $\beta_m \leq 1$. Soit k un entier ≥ 2 . On pose, pour $m \geq 2$ quelconque,

$$a_{m,k} = \min_{1 \leq t \leq k} \beta_m(t) > 0.$$

D'après les lemmes 5 et 6, il existe un entier $p \geq 1$ tel que, pour $t \in [1, k]$ et $x, y \in CB(O; t) \cap \overline{B(O; k)}$ vérifiant $|x - y| < \frac{1}{p}$,

$$\left| \frac{g_{t,m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{g_{t,m}(y)}{\alpha(y)} \right| < \frac{1}{m},$$

car $c_m(t; \kappa) < 1$. En vertu de la condition (*) pour $\alpha, \frac{f'_{t,m}(x; \kappa)}{\alpha(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x| (\geq t)$ croît (voir aussi la remarque 7). D'après le lemme 5, $\frac{s_{t,1/m}(x)}{\alpha(x)}$ est aussi décroissante

au sens large lorsque $r (\geq t)$ croît. Donc la fonction $\frac{g_{t,m}(x)}{\alpha(x)}$ de x l'est aussi. Soit d_0 une constante > 0 telle que $\alpha(x) = d_0 g_{1,m}(x)$ sur $S(O; 1)$. Alors on a $\alpha(x) \geq d_0 g_{1,m}(x)$ sur $CB(O; 1)$. Soit d_1

une constante ≥ 0 telle que $\alpha(x) = d_0 g_{1,m}(x) + d_1 g_{(1+1/p),m}(x)$ sur $S(O; 1+1/p)$. Alors $\alpha(x) \geq d_0 g_{1,m}(x) + d_1 g_{(1+1/p),m}(x)$ sur $CB(O; 1 + \frac{1}{p})$. On obtient, par récurrence, une famille $(d_j)_{j=0}^{(k-1)p-1}$ de constantes ≥ 0 telle que

$$\alpha(x) \geq \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)$$

sur $CB(O; 1)$ et que, pour un entier i vérifiant $0 \leq i \leq (k-1)p-1$,

$$\alpha(x) = \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x) = \sum_{j=0}^i d_j g_{(1+j/p),m}(x)$$

sur $S(O; 1 + \frac{i}{p})$. Pour tout $x \in CB(O; 1) \cap B(O; k)$, on choisit un entier i tel que

$$0 \leq i \leq (k-1)p-1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{i}{p} \leq |x| < 1 + \frac{i+1}{p}$$

Soit y un point de $S(O; 1 + \frac{j}{p})$. Comme $g_{t,m}$ et α sont invariantes par rotation,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(y)}{\alpha(y)} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \left| \frac{g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{g_{(1+j/p),m}(y)}{\alpha(y)} \right| < \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j. \end{aligned}$$

Comme

$$\int \alpha_1(x) dx \geq \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \int g_{(1+j/p),m}(x) dx \geq a_{m,k} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j,$$

on a

$$\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \leq \frac{1}{a_{m,k}} \int \alpha_1(x) dx.$$

Posons $b_{m,k} = \int \alpha_1(x) dx / a_{m,k}$; alors $(b_{m,k})_{m=2}^\infty$ est bornée, car, pour $t > \frac{1}{m}$ quelconque, $\int g_{t,m}(x) dx = \int d\epsilon'_{(t-1/m)}$. On pose

$$\lambda_{m,k} = \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \epsilon_{(1+j/p)},$$

où $\epsilon_{(1+j/p)}$ désigne la mesure d'unité au point $1 + \frac{j}{p}$ dans \mathbb{R}^1 . Alors on a $\text{supp}(\lambda_{m,k}) \subset [1, k]$, $\int d\lambda_{m,k} \leq b_{m,k}$,

$$\left(1 - \frac{1}{m} b_{m,k}\right) \alpha_1(x) \leq \int g_{t,m}(x) d\lambda_{m,k}(t) \tag{14}$$

dans $B(O; k)$ et

$$\int g_{t,m}(x) d\lambda_{m,k}(t) \leq \alpha_1(x) \tag{15}$$

sur \mathbb{R}^n . Comme la suite $(\lambda_{m,k})_{m=2}^\infty$ est vaguement bornée, on peut supposer qu'elle converge vaguement vers la limite λ_k lorsque $m \rightarrow \infty$. On a $\text{supp}(\lambda_k) \subset [1, k]$. D'après le lemme 7, pour $\phi \in C_K$ quelconque, la suite $\left(\int \phi(x) g_{t,m}(x) dx\right)_{m=2}^\infty$ de fonctions de t converge uniformément vers $\int \phi d\epsilon'_t$ sur $[1, k]$ lorsque $m \rightarrow \infty$, et donc on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint \phi(x) g_{t,m}(x) dx d\lambda_{m,k}(t) = \iint \phi(x) d\epsilon'_t(x) d\lambda_k(t)$$

Comme ϕ est quelconque, $\left(\int \epsilon'_{t,m} d\lambda_{m,k}\right)_{m=2}^\infty$ converge vaguement vers $\int \epsilon'_t d\lambda_k(t)$ dans \mathbb{R}^n lorsque $m \rightarrow \infty$, où $\epsilon'_{t,m} = g_{t,m}(x) dx$. Regardons (14) et (15) ; en faisant tendre m vers l'infini, on a

$$\alpha_1(x) dx = \int \epsilon'_t d\lambda_k(t)$$

dans $B(O; k)$ et

$$\alpha_1(x) dx \geq \int \epsilon'_t d\lambda_k(t)$$

dans \mathbf{R}^n . Considérons finalement la suite $(\lambda_k)_{k=2}^\infty$ de mesures positives dans $(0, \infty)$. En rappelant la forme de $\lambda_{m,k}$, on voit que $\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$, $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ dans $(0, k)$ et $\text{supp}(\lambda_k) \subset [1, k]$. Donc $(\lambda_k)_{k=2}^\infty$ converge vaguement vers la limite λ lorsque $k \rightarrow \infty$. Comme $\lambda \geq \lambda_k$ ($k = 2, 3, \dots$),

$$\int \epsilon'_t d\lambda_k(t) \leq \int \epsilon'_t d\lambda(t) \leq \alpha_1(x) dx,$$

d'où $\alpha_1(x) dx = \int \epsilon'_t d\lambda(t)$. La démonstration est ainsi complète.

En utilisant les théorèmes 1 et 3, on donne une condition suffisante pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

THEOREME 4. — Soit $\kappa \neq 0$ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n de classe C^2 en dehors de O et α la densité continue de $\Delta\kappa$ en dehors de O . Si α vérifie la condition (*), alors κ est de la forme

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n}$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante ≥ 0 .

Démonstration. — D'après le théorème 1, il existe un noyau de Dirichlet κ' sur \mathbf{R}^n invariant par rotation tel que

$$\kappa * \kappa' = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}$$

Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa}' = \frac{1}{\psi} dx$. Comme $(\Delta\kappa) * \kappa' = -\epsilon$, la remarque 1 donne que la mesure singulière associée à ψ est $\alpha(x)dx$. Notons

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) \alpha(y) dy,$$

où c_1 et c_2 sont de constantes ≥ 0 .

Supposons $\alpha = 0$. Alors $c_1 > 0$ ou bien $c_2 > 0$. Comme

$$-\Delta \kappa = c_1 \epsilon - \frac{c_2}{4\pi^2} \Delta,$$

on a $\kappa = \frac{c_1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n} + \frac{c_2}{4\pi^2} \epsilon$, car κ s'annule à l'infini. Donc κ est un noyau de Dirichlet.

Supposons $\alpha \neq 0$. Posons

$$\psi_0(x) = c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) \alpha(y) dy$$

sur \mathbf{R}^n ; alors ψ_0 est définie-négative et invariante par rotation. D'après le lemme 1, il existe un noyau de Dirichlet κ'_0 invariant par rotation tel que $\widehat{\kappa'_0} = \frac{1}{\psi_0} dx$. D'après le théorème 1, il existe un noyau de Frostman-Kunugui κ_0 tel que

$$\kappa_0 * \kappa'_0 = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}.$$

Si $c_1 > 0$, alors $\int d\kappa' < \infty$ et $\kappa'_0 - \kappa' = c_1 \kappa'_0 * \kappa'$, et donc

$$\begin{aligned} \kappa_0 * \kappa' &= \kappa_0 * \kappa'_0 * (\epsilon - c_1 \kappa') = \frac{1}{(n-2)\omega_n} (r^{2-n} - c_1 r^{2-n} * \kappa') \\ &= \left(\kappa - \frac{c_1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n} \right) * \kappa'. \end{aligned}$$

En vertu de l'injectivité de κ' , on a $\kappa_0 = \kappa - \frac{c_1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}$. Posons

$$c = \frac{c_1}{(n-2)\omega_n}; \text{ alors on a}$$

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n}.$$

Si $c_1 = 0$, évidemment $\kappa = \kappa_0$.

Montrons que κ_0 est un noyau de Dirichlet. On suppose d'abord $c_2 \neq 0$. D'après le corollaire 2, on a, pour tout $t > 0$, $s_t \in \mathcal{G}^+(\kappa'_0)$.

Donc le théorème 3 donne que, pour $t > 0$ quelconque, il existe une mesure positive λ_t sur $[t, \infty)$ telle que

$$\alpha_t(x) dx = \int \epsilon'_\rho d\lambda_t(\rho),$$

où $\alpha_t(x) = 0$ dans $B(O; t)$, $\alpha_t(x) = \alpha(x)$ sur $\overline{CB(O; t)}$ et où ϵ'_ρ est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{CB(O; \rho)}$ relativement à κ'_0 . Comme $\psi_0(O) = 0$, la proposition 7 donne que, pour tout $\rho > 0$, $\int d\epsilon'_\rho = 1$,

et donc on a $\int d\lambda_t = \int \alpha_t(x) dx < \infty$. Comme $\alpha \neq \alpha_t$ et

$$\kappa'_0 * (\alpha_t dx) = \int \kappa'_0 * \epsilon'_\rho d\lambda_t(\rho) \leq \left(\int d\lambda_t \right) \kappa'_0 = \left(\int \alpha_t(x) dx \right) \kappa'_0,$$

on obtient, d'après la proposition 8, que κ'_0 est un noyau de Frostman-Kunugui, et donc κ_0 est un noyau de Dirichlet, d'après le théorème 1.

Supposons que $c_2 = 0$. Pour un entier $m \geq 1$, posons

$$\psi_m(x) = \frac{1}{m} |x|^2 + \psi_0(x)$$

sur \mathbf{R}^n ; alors il existe un noyau de Dirichlet κ'_m invariant par rotation tel que $\widehat{\kappa'_m} = \frac{1}{\psi_m} dx$. Soit κ_m un noyau de Frostman-Kunugui

tel que $\kappa_m * \kappa'_m = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}$. On voit alors que κ'_m est aussi

un noyau de Frostman-Kunugui et que κ_m est un noyau de Dirichlet. Evidemment $(\Delta \kappa'_m)_{m=1}^\infty$ converge vers $\Delta \kappa'_0$ au sens des distributions dans \mathbf{R}^n lorsque $m \rightarrow \infty$. Donc $\Delta \kappa'_0 \geq 0$ au sens des distributions en dehors de O . Comme $\kappa'_0 \neq 0$ et κ'_0 s'annule à l'infini, κ'_0 est un noyau de Frostman-Kunugui et donc, en utilisant encore le théorème 1, κ_0 est un noyau de Dirichlet. La démonstration est ainsi complète.

Dans le théorème 4, nous ne savons pas maintenant si $\kappa_0 + cr^{2-n}$ est toujours un noyau de Dirichlet.

Pour $p \geq 0$ quelconque, on note G_p le noyau de Dirichlet sur \mathbf{R}^n dont la transformée de Fourier est égale à $(p + 4\pi^2|x|^2)^{-1} dx$.

Evidemment $G_0 = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}$ et G_p est égal à une fonction > 0

continue au sens large dans \mathbf{R}^n et infiniment dérivable en dehors de O .

Remarque 9. — a) La famille $(G_p)_{p \geq 0}$ est une résolvente ; c'est-à-dire, pour $p \geq 0, q > 0$ quelconques, $G_p - G_q = (q - p) G_p * G_q$ et $\lim_{p \rightarrow 0} G_p = G_0$.

b) il existe une fonction $0 < a(p, t) < 1$ continue dans $(0, \infty) \times (0, \infty)$ telle que, pour $t \in (0, \infty)$ quelconque, la fonction $a(p, t)$ de p soit infiniment dérivable et strictement croissante et que $\frac{1}{a(p, t)} s_t$ soit la mesure balayée de ϵ sur $CB(O ; t)$ relativement à G_p .

c) Soient $x, y \in \mathbf{R}^n - \{O\}$ donnés. Si $|x| < |y|$, alors la fonction $\frac{G_p(y)}{G_p(x)}$ de p est strictement décroissante lorsque p croît.

En effet, (a) est bien connu. Comme $(-\Delta + p\epsilon) * G_p = \epsilon$, la mesure balayée de ϵ sur $CB(O ; t)$ relativement à G_p est portée par $S(O ; t)$ et invariante par rotation, et donc elle est proportionnelle à s_t . En l'écrivant $\frac{1}{a(p, t)} s_t$, on peut définir la fonction $a(p, t)$ dans $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Elle est évidemment finie et continue et on a $a(p, t) > 1$. Comme $\frac{d}{dp} G_p = -G_p * G_p$ et

$$a(p, t) = \frac{G_p * s_t(x_t)}{G_p(x_t)},$$

où $|x_t| = t$, la fonction $a(p, t)$ de p est infiniment dérivable. Soient $0 < p < q$ quelconques. Comme $G_p = G_q * (\epsilon + (q - p) G_p)$, on voit facilement $a(p, t) G_p * s_t < a(q, t) G_p * s_t$, d'où

$$a(p, t) < a(q, t).$$

On choisit encore une constante $b > 0$ tel que $bG_q * s_{|x|} = G_p$ sur $S(O ; |x|)$. Comme $G_p = G_q * (\epsilon + (q - p) G_p)$, on a $bG_q * s_{|x|} < G_p$ dans $CB(O ; |x|)$, d'où $bG_q * s_{|x|}(y) < G_p(y)$. Comme

$$G_q * s_{|x|} = a(q, |x|) G_q$$

sur $\text{CB}(O; |x|)$, on a $\frac{G_q(x)}{G_p(x)} > \frac{G_q(y)}{G_p(y)}$, d'où (c).

Le théorème 4 donne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. — Soit λ une mesure positive sur $[0, \infty)$ telle que $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\lambda(p) < \infty$ et soit c une constante ≥ 0 . Alors $ce + \int G_p d\lambda(p)$ est un noyau de Dirichlet dès que $(\lambda, c) \neq (0, 0)$.

Démonstration. — On peut supposer $c = 0$. D'après (a) de la remarque 9, il suffit de le montrer dans le cas où $\lambda(\{0\}) = 0$. Comme $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\lambda(p) < \infty$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} pG_p = \epsilon$ (vaguement), le noyau de convolution $\int G_p d\lambda(p)$ a un sens. Donc il suffit de montrer que la fonction $\int pG_p d\lambda(p)$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ vérifie la condition (*), car $\Delta G_p = pG_p$ en dehors de 0. On a, pour $t > 0$,

$$\left(\int pG_p d\lambda(p) \right) * s_t = \int a(p, t) pG_p d\lambda(p)$$

dans $\text{CB}(O; t)$. Soient $x, y \in \overline{\text{CB}(O; t)}$ et supposons $|x| < |y|$. Comme la fonction $a(p, t)$ de p est croissante et la fonction $\frac{G_p(y)}{G_p(x)}$ de p est décroissante, on a

$$\frac{\int pG_p(y) d\lambda(p)}{\int pG_p(x) d\lambda(p)} \geq \frac{\int a(p, t) pG_p(y) d\lambda(p)}{\int a(p, t) pG_p(x) d\lambda(p)}$$

$$\left(\int pG_p(x) d\lambda(p) \right) * s_t$$

et donc $\frac{\left(\int pG_p(x) d\lambda(p) \right) * s_t}{\int pG_p(x) d\lambda(p)}$ est décroissante lorsque $r = |x| (\geq t)$

croît. La démonstration est ainsi complète.

6. Applications du théorème 4.

Ce paragraphe sera consacré à l'étude des conditions suffisantes plus concrètes pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

Remarque 10. — Soit α une fonction > 0 en dehors de O de classe C^2 et invariante par rotation. Si α vérifie la condition (*), alors $\frac{\Delta\alpha(x)}{\alpha(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ croît.

En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ et supposons $|x| < |y|$. En vertu de la condition (*) pour α , on a, pour $0 < t < |x|$ quelconque,

$$\frac{\frac{1}{t^2} \left(\int \alpha(x-z) ds_t(z) - \alpha(x) \right)}{\alpha(x)} \geq \frac{\frac{1}{t^2} \left(\int \alpha(y-z) ds_t(z) - \alpha(y) \right)}{\alpha(y)}.$$

En faisant $t \downarrow 0$, on arrive à l'inégalité $\frac{\Delta\alpha(x)}{\alpha(x)} \geq \frac{\Delta\alpha(y)}{\alpha(y)}$, d'où la remarque 10.

Si $\int_{|x| \geq 1} \alpha(x) dx < \infty$, on a $\Delta\alpha \geq 0$ en dehors de O , d'après la proposition 13. Réciproquement on aura le lemme suivant :

LEMME 8. — Soit α une fonction > 0 dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ de classe C^2 et invariante par rotation. Supposons que $\Delta\alpha > 0$ en dehors de

O et que $\int_{|x| \geq 1} \alpha(x) dx < \infty$. Si, pour $t > 0$ quelconque, la fonction

$$\frac{\int \Delta\alpha(x-y) ds_t(y)}{\int \alpha(x-y) ds_t(y)}$$

de x dans $\overline{CB(O; t)}$ est décroissante au sens large

lorsque $r = |x| (\geq t)$ croît, alors α vérifie la condition (*).

Démonstration. — Soit ϕ la fonction dans $(0, \infty)$ définie par $\phi(|x|^{2-n}) = \alpha(x)$; alors ϕ est de classe C^2 . Comme α est sous-

harmonique dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ et $\int_{|x| \geq 1} \phi(|x|^{2-n}) dx < \infty$, ϕ est convexe

et strictement croissante avec t . On a aussi $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 0$. Par conséquent α est strictement décroissante lorsque $r (> 0)$ croît, et on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$. Supposons que α ne vérifie pas la condition (*). Alors il existe $t_0 > 0$ et $x_1, x_2 \in \overline{\text{CB}(O; t_0)}$ tels que $|x_1| < |x_2|$ et

$$\frac{\alpha(x_2)}{\alpha(x_1)} < \frac{\int \alpha(x_2 - y) ds_{t_0}(y)}{\int \alpha(x_1 - y) ds_{t_0}(y)}.$$

Posons $t_1 = |x_1|$ et, pour $t \in [0, t_1)$ quelconque,

$$f(t) = \frac{\int \alpha(x_2 - y) ds_t(y)}{\int \alpha(x_1 - y) ds_t(y)},$$

où $s_0 = \epsilon$. Alors f une fonction finie et continue sur $[0, t_1)$ et de classe C^1 dans $(0, t_1)$. Comme $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, on a, pour $x_i (i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \alpha(x_i - y) ds_t(z) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{(n-2)\omega_n h} \int \Delta \alpha(x_i - y) dy \int |y-z|^{2-n} d(s_t - s_{t+h})(z) \\ &= \frac{t^{1-n}}{\omega_n} \int_{|y| \leq t} \Delta \alpha(x_i - y) dy = t^{1-n} \int_0^t \rho^{n-1} d\rho \int \Delta \alpha(x_i - y) ds_\rho(y). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= t^{1-n} \frac{\int_0^t \rho^{n-1} d\rho \int \Delta \alpha(x_1 - y) ds_\rho(y)}{\int \alpha(x_1 - y) ds_t(y)} \\ &\times \left(\frac{\int_0^t \rho^{n-1} d\rho \int \Delta \alpha(x_2 - y) ds_\rho(y)}{\int_0^t \rho^{n-1} d\rho \int \Delta \alpha(x_1 - y) ds_\rho(y)} - \frac{\int \alpha(x_2 - y) ds_t(y)}{\int \alpha(x_1 - y) ds_t(y)} \right). \end{aligned}$$

Soit $\tilde{t} \in [0, t_0]$ vérifiant $f(\tilde{t}) = \max \{f(t) ; t \in [0, t_0]\}$. Alors on a $f(\tilde{t}) > f(0)$ et $\tilde{t} \neq 0$. Comme, pour $t \in [0, \tilde{t}]$ quelconque,

$$\frac{\int \Delta\alpha(x_2 - y) ds_t(y)}{\int \Delta\alpha(x_1 - y) ds_t(y)} \leq f(t) \leq f(\tilde{t})$$

et f n'est pas constante sur $[0, \tilde{t}]$, on a $\frac{df}{dt}(\tilde{t}) < 0$. Mais cela est en contradiction avec la définition de \tilde{t} . La démonstration est ainsi complète.

Regardons la présente démonstration ; alors on voit la remarque suivante :

Remarque 11. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbf{R}^n . Si $\Delta^2 \kappa \geq 0$ au sens des distributions en dehors de O , alors il existe une fonction $\phi \geq 0$ finie, continue, croissante au sens large et convexe dans $(0, \infty)$, et une seule telle que $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n}) dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$.

En effet, comme $\Delta\kappa$ définit une mesure positive dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ et $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d\Delta\kappa(x) < \infty$, on l'obtient de la même manière que dans la proposition 1. Dans ce cas, on a $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 0$.

Préparons encore le lemme suivant :

LEMME 9. — Soit ϕ une fonction > 0 , convexe et croissante au sens large dans $(0, \infty)$ de classe C^1 et supposons que $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$ t est croissante au sens large avec t . Soient $t, a_1, a_2 \in (0, \infty)$ vérifiant $t < a_1 \leq a_2$ et posons $x_1 = (a_1, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (a_2, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Si, pour $y_1, y_2 \in S(O; t)$, $|x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_2|$, alors on a

$$\frac{\phi(|x_2 - y_1|^{2-n})}{\phi(|x_1 - y_1|^{2-n})} \leq \frac{\phi(|x_2 - y_2|^{2-n})}{\phi(|x_1 - y_2|^{2-n})}$$

Démonstration. — Posons $\theta_1 = \angle y_1 Ox_1$ et $\theta_2 = \angle y_2 Ox_1$ ($0 \leq \theta_i \leq \pi$) ;

alors $|x_i - y_j| = (a_i^2 + t^2 - 2a_i t \cos \theta_j)^{1/2}$ ($i, j = 1, 2$). Comme $|x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_2|$, on a $\theta_1 \leq \theta_2$. On pose

$$p_i(\theta) = (a_i^2 + t^2 - 2a_i t \cos \theta)^{1/2} \quad (i = 1, 2; 0 \leq \theta \leq \pi)$$

et

$$f(\theta) = \frac{\phi(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})}.$$

Alors il suffit de montrer que $f(\theta)$ est croissante au sens large avec θ . Calculons la dérivée f' de f ; alors, pour $\theta \in (0, \pi)$ quelconque,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t(n-2) \sin \theta} \cdot \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \\ &= \frac{a_1 p_1(\theta)^{-n} \phi'(p_1(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})} - \frac{a_2 p_2(\theta)^{-n} \phi'(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_2(\theta)^{2-n})} \\ &= \frac{a_1}{p_1(\theta)^2} \cdot \frac{\phi'(p_1(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})} (p_1(\theta))^{2-n} - \frac{a_2}{p_2(\theta)^2} \cdot \frac{\phi'(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_2(\theta)^{2-n})} (p_2(\theta))^{2-n}. \end{aligned}$$

Comme $0 < t < a_1 \leq a_2$, on a $\frac{a_1}{p_1(\theta)^2} \geq \frac{a_2}{p_2(\theta)^2}$. Ayant

$$p_1(\theta)^{2-n} \geq p_2(\theta)^{2-n}$$

et $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$ t étant croissante au sens large avec t , on a $f'(\theta) \geq 0$. Le lemme 9 et ainsi démontré.

Montrons notre deuxième théorème principal.

THEOREME 5. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbb{R}^n et Φ la fonction convexe associée à κ . Supposons que κ possède la densité K de classe C^4 en dehors de O . Si les deux conditions suivantes (1) et (2) sont vérifiées, alors κ est de la forme

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n},$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante ≥ 0 .

(1) $\Delta K > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$ et $\frac{\Delta^2 K(x)}{\Delta K(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x| (> 0)$ croît.

(2) $\frac{\Phi'''(t)}{\Phi''(t)}$ t est croissante au sens large avec $t (> 0)$, où $\Phi'' = \frac{d^2 \Phi}{dt^2}$ et $\Phi''' = d^3 \Phi/dt^3$.

Démonstration. – Montrons d’abord que $\Delta^2 K(x) > 0$ en dehors de O . Supposons qu’il existe $x_0 \neq O \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Delta^2 K(x_0) \leq 0$. Comme $\Delta^2 K$ est invariante par rotation et $\frac{\Delta^2 K(x)}{\Delta K(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r > 0$ croît, on a $\Delta^2 K \leq 0$ sur $CB(O; t_0)$, où $t_0 = |x_0|$. Comme $\Delta K > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$, on peut choisir une fonction $G > 0$ finie et continue dans \mathbb{R}^n telle que $G = \Delta K$ sur $CB(O; t_0)$. Soit f une fonction $\neq 0$ de C_K^+ portée par $B(O; t_0)$. Alors on peut choisir une fonction $g \in C_K^+$ portée par $B(O; t_0)$ telle que

$$r^{2-n} * f(x) \leq G * g(x)$$

sur $B(O; 2t_0)$. Comme $G * g - r^{2-n} * f$ est surharmonique en dehors de $CB(O; 2t_0)$ et on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (G * g(x) - r^{2-n} * f(x)) \geq 0$, on a aussi $G * g(x) \geq r^{2-n} * f(x)$ sur $CB(O; 2t_0)$, et donc $\int G(x) dx = \infty$. Mais cela est en contradiction avec $\int_{|x| \geq 1} \Delta K(x) dx < \infty$ (cf. la proposition 3 et la remarque 1), d’où $\Delta^2 K(x) > 0$ dans $\mathbb{R}^n - \{O\}$.

Rappelons la remarque 11 ; alors on voit qu’il existe une fonction $\phi > 0$ croissante et convexe dans $(0, \infty)$ telle que $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 0$ et $\Delta K(x) = \phi(|x|^{2-n})$ en dehors de O . Evidemment ϕ est de classe C^2 . Comme $\phi(t) = (n - 2)^2 \Phi''(t) t^{2(n-1)/(n-2)}$, on a

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} t = \frac{\Phi'''(t)}{\Phi''(t)} t + \frac{2(n - 1)}{n - 2}. \tag{16}$$

condition (2), $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} t$ est croissante au sens large avec t .

Montrons que ΔK vérifie la condition (*). Posons, pour $t \geq 0$,

$$d_t(x) = \frac{\int \Delta^2 K(x - y) ds_t(y)}{\int \Delta K(x - y) ds_t(y)}$$

dans $\overline{\text{CB}(O; t)}$, où $s_0 = \epsilon$. D'après le lemme 8, il suffit de montrer que, pour $t > 0$ quelconque, $d_t(x)$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x| (> t)$ croît. Soient $a_1, a_2 \in (0, \infty)$ tels que $t < a_1 \leq a_2$ et posons $x_1 = (a_1, 0, \dots, 0)$, $x_2 = (a_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Pour $\theta \in [0, \pi]$ quelconque, on note

$$\tilde{\alpha}_i(\theta) = \Delta K(x_i - y_\theta) \quad \text{et} \quad \tilde{d}_i(\theta) = d_0(x_i - y_\theta) \quad (i = 1, 2),$$

où y_θ est un point de $S(O; t)$ tel que $\angle x_i O y_\theta = \theta$. Evidemment y_θ n'est pas unique dès que $\theta \neq 0$. Mais, ΔK et d_0 étant invariantes par rotation, on voit que $\tilde{\alpha}_i$ et \tilde{d}_i sont bien définies sur $[0, \pi]$. Elles sont finies et continues sur $[0, \pi]$. Soit \tilde{s}_t la mesure positive sur $[0, \pi]$

définie par $\int \tilde{f} d\tilde{s}_t = \int f ds_t$ pour toute la fonction \tilde{f} finie et continue sur $[0, \pi]$, où f est la fonction sur $S(O; t)$ définie par $f(y) = f(\angle x_i O y)$.

D'après le lemme 9, $\frac{\tilde{\alpha}_2(\theta)}{\tilde{\alpha}_1(\theta)}$ est croissante au sens large avec θ . Comme d_0 est décroissante au sens large lorsque $r (> 0)$ croît, \tilde{d}_i est décroissante au sens large sur $[0, \pi]$ ($i = 1, 2$) et on a $\tilde{d}_1(\theta) \geq \tilde{d}_2(\theta)$ sur $[0, \pi]$. Donc on a

$$\begin{aligned} \frac{\int \Delta K(x_2 - y) ds_t(y)}{\int \Delta K(x_1 - y) ds_t(y)} &= \frac{\int \tilde{\alpha}_2(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)}{\int \tilde{\alpha}_1(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)} \geq \frac{\int \tilde{\alpha}_2(\theta) \tilde{d}_1(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)}{\int \tilde{\alpha}_1(\theta) \tilde{d}_1(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)} \\ &\geq \frac{\int \tilde{\alpha}_2(\theta) \tilde{d}_2(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)}{\int \tilde{\alpha}_1(\theta) \tilde{d}_1(\theta) d\tilde{s}_t(\theta)} = \frac{\int \Delta^2 K(x_2 - y) ds_t(y)}{\int \Delta^2 K(x_1 - y) ds_t(y)}, \end{aligned}$$

d'où $d_t(x_1) \geq d_t(x_2)$. Comme $d_t(x)$ est invariante par rotation et a_1, a_2 sont quelconques, $d_t(x)$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x| (> t)$ croît. Ainsi ΔK vérifie la condition (*). D'après le théorème 4, on arrive à notre conclusion. La démonstration est complète.

Remarque 12. — Dans le présent théorème, si Φ vérifie encore la condition suivante (3), alors κ est un noyau de Dirichlet.

$$(3) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0.$$

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème 5.

COROLLAIRE 5. — Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur \mathbb{R}^n et supposons que $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n}) dx$ en dehors de O , où ϕ est une fonction > 0 convexe et croissante au sens large dans $(0, \infty)$ de classe C^2 . Si $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} t$ et $\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} t^2$ sont croissantes au sens large avec t , alors κ est de la forme

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n},$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante ≥ 0 .

Démonstration. — On a

$$\frac{\Delta\phi(|x|^{2-n})}{\phi(|x|^{2-n})} = (n-2)^2 \frac{\phi''(|x|^{2-n})}{\phi(|x|^{2-n})} (|x|^{2-n})^2 \frac{1}{|x|^2}$$

en dehors de O . Donc κ vérifie la condition (1) dans le théorème 5. D'après (16), on voit que κ vérifie la condition (2) dans le théorème 5. Par conséquent le théorème 5 donne le corollaire 5.

Considérons le noyau de Riesz-Frostman $r^{\gamma-n}$ ($0 < \gamma \leq 2$). On note symboliquement $r^{\gamma-n}$ le noyau de convolution $|x|^{\gamma-n} dx$ dans \mathbb{R}^n . Le corollaire 6 est déjà connu (cf. [10]). On l'obtient directement.

COROLLAIRE 6. — Soit λ une mesure positive $\neq 0$ sur $(0, 2]$ vérifiant $\int \frac{1}{\gamma} d\lambda(\gamma) < \infty$. Alors $\int r^{\gamma-n} d\lambda(\gamma)$ est un noyau de Dirichlet sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. — Posons $\kappa = \int r^{\gamma-n} d\lambda(\gamma)$. Comme

$$\int_{|x| \leq 1} d\kappa = \omega_n \int \frac{1}{\gamma} d\lambda(\gamma) < \infty,$$

κ est un noyau de convolution. Il suffit de le montrer dans le cas où $\lambda(\{2\}) = 0$, car $\lim_{\beta \uparrow 2} \left(\int r^{\gamma-n} d\lambda(\gamma) + \lambda(\{2\}) (r^{\beta-n} - r^{2-n}) \right) = \kappa$.

Posons

$$\phi(t) = \int t^{\frac{n+2-\gamma}{n-2}} (n-\gamma)(2-\gamma) d\lambda(\gamma)$$

dans $(0, \infty)$; alors on a $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n}) dx$ en dehors de O . Un calcul élémentaire donne que $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} t$ et $\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} t^2$ sont croissantes au sens large avec t . Comme $\lambda(\{2\}) = 0$, κ vérifie la condition (3) dans la remarque 12. Par conséquent κ est un noyau de Dirichlet.

Remarque 13. — Soit λ une mesure positive dans $(0, 2)$ de masse totale finie et posons $\alpha(x) = \int |x|^{-\gamma-n} d\lambda(\gamma)$ en dehors de O . Alors α vérifie la condition (*), car on a, avec une constante $c_\gamma > 0$, $\Delta |x|^{2-\gamma-n} = |x|^{-\gamma-n}/c_\gamma$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, et donc

$$\alpha(x) = \Delta \int |x|^{2-\gamma-n} c_\gamma d\lambda(\gamma) \text{ dans } \mathbf{R}^n - \{O\}.$$

En vertu du théorème 3, on voit, que pour tout $t > 0$, $\alpha_t dx$ est représentée par l'intégrale (13).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEURLING et J. DENY, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, U.S.A., 45 (1959), 208-215.
- [2] G. CHOQUET et J. DENY, Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 246 (1956), 764-767.
- [3] G. CHOQUET et J. DENY, Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 250 (1960), 4260-4262.
- [4] J. DENY, Principe complet du maximum et contractions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 15 (1965), 259-271.
- [5] C.S. HERZ, Analyse harmonique à plusieurs variables, *Sém. Math. d'Orsay*, 1965/66.

- [6] M. ITÔ, On total masses of balayaged measures, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 263-278.
- [7] M. ITÔ, The singular measure of a Dirichlet space, *Nagoya Math. J.*, 32 (1968), 337-359.
- [8] M. ITÔ, Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 268 (1969), 867-868.
- [9] M. ITÔ, Remarque sur la somme des résolvantes, *Proc. Japan Acad.*, 46 (1970), 243-245.
- [10] M. ITÔ, Sur les sommes des noyaux de Dirichlet, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 271 (1970), 937-940.
- [11] M. ITÔ, Sur les principes divers du maximum et le type positif, *Nagoya Math. J.*, 44 (1971), 133-164.
- [12] K. KUNUGUI, Etude sur la théorie du potentiel généralisé, *Osaka Math. J.*, 2 (1950), 63-102.
- [13] M. RIESZ, Intégrales de Rieman-Liouville et potentiels, *Acta Sc. Math. Szeged*, 9 (1938), 1-42.

Manuscrit reçu le 21 mai 1976
Proposé par G. Choquet.

Masayuki Itô,
Département de Mathématiques
Université de Nagoya (Japon).