ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ GRAMAIN

Sur le groupe fondamental de l'espace des noeuds

Annales de l'institut Fourier, tome 27, n° 3 (1977), p. 29-44

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27,3 (1977), 29-44

SUR LE GROUPE FONDAMENTAL DE L'ESPACE DES NŒUDS

par André GRAMAIN

1. Les espaces de noeuds.

On se propose d'étudier la topologie de l'espace $\mathcal{K} = \mathrm{Pl}(S_1, S_3)$ des plongements différentiables du cercle S_1 dans l'hypersphère S_3, muni de la topologie de la C^∞-convergence uniforme. Dans le présent article, on se contente de décrire un sous-groupe du groupe fondamental de chaque composante connexe de $\mathcal{K}$. Il est raisonnable de penser que le sous-groupe décrit est le groupe fondamental de $\mathcal{K}$, tout au moins dans le cas des nœuds semi-linéaires.

L'usage est d'appeler nœud (orienté) une sous-variété orientée de S_3 difféomorphe à S_1. L'espace des nœuds orientés est donc le quotient $\mathcal{K}/\mathrm{Diff}^+(S_1)$, où $\mathrm{Diff}^+(S_1)$ est le groupe des difféomorphismes orientés du cercle. Indiquons brièvement comment on déduit la topologie de l'espace des nœuds de celle de l'espace $\mathcal{K}$. L'application $\mathrm{Diff}^+(S_1) \longrightarrow S_1$ qui, à un difféomorphisme φ, associe l'image $\varphi(a)$ d'un point donné $a \in S_1$, est une équivalence d'homotopie. Il en résulte qu'on a, pour chaque composante $\mathcal{K}_\alpha$ de $\mathcal{K}$, des isomorphismes :

$$\pi_i(\mathcal{K}_\alpha) \longrightarrow \pi_i(\mathcal{K}_\alpha/\mathrm{Diff}^+(S_1)) \quad \text{pour} \quad i > 2.$$

Si $\mathcal{K}_\alpha$ est la composante d'un nœud non-trivial, on verra ci-dessous (n° 5) que l'homomorphisme $\pi_1(\mathrm{Diff}^+(S_1)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{K}_\alpha)$ est injectif. On a alors des isomorphismes :

$$\pi_2(\mathcal{K}_\alpha) \longrightarrow \pi_2(\mathcal{K}_\alpha/\mathrm{Diff}^+(S_1)),$$

$$\pi_1(\mathcal{K}_\alpha/\mathrm{Diff}^+(S_1)) \cong \pi_1(\mathcal{K}_\alpha)/\pi_1(\mathrm{Diff}^+(S_1)).$$

Soit au contraire $\mathcal{K}_0$ la composante du noeud trivial, alors l'homomorphisme $\pi_1(\mathrm{Diff}^+(S_1)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{K}_0)$ est nul. On peut le voir de la façon suivante. Le groupe SO(4) opère dans S_3, donc dans $\mathcal{K}$ et dans $\mathcal{K}_0$. Considérons le noeud (trivial) k défini par le grand cercle de S_3 contenu dans le plan des deux premières coordonnées de $\mathbf{R}^4$ et convenablement paramétré. Prenons k pour point-base de $\mathcal{K}_0$; alors l'image du générateur de $\pi_1(\mathrm{Diff}^+(S_1))$ dans $\pi_1(\mathcal{K}_0)$ coïncide avec l'image du générateur de $\pi_1(\mathrm{SO}(2))$. Mais l'homomorphisme $\pi_1(\mathrm{SO}(2)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{K}_0)$ est nul puisque SO(2) opère trivialement sur l'élément de $\mathcal{K}_0$ défini par le grand cercle du plan des deux dernières coordonnées. On a donc un isomorphisme

$$\pi_1(\mathcal{K}_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{K}_0/\mathrm{Diff}^+(S_1))$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_2(\mathcal{K}_0) \longrightarrow \pi_2(\mathcal{K}_0/\mathrm{Diff}^+(S_1)) \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

On dit que deux noeuds k_1 et k_2 ont même type (orienté) s'il existe un homéomorphisme orienté $h : S_3 \longrightarrow S_3$ tel que $h(k_1) = k_2$. S'il en est ainsi, on peut supposer, d'après un théorème de Moïse (cf. [6], p. 7), que h est un difféomorphisme. Mais l'espace des difféomorphismes orientés de S_3 est connexe par arc (Cerf [3]) et les noeuds k_1 et k_2 sont images de plongements isotopes de S_1 dans S_3. Inversement, par relèvement des isotopies, deux plongements isotopes de S_1 dans S_3 ont pour images des noeuds conjugués par un difféomorphisme orienté de S_3. Ainsi l'ensemble $\pi_0(\mathcal{K})$ s'identifie à l'ensemble des types de noeuds orientés. La description de $\pi_0(\mathcal{K})$, ou classification des noeuds, n'est pas abordée dans cet article.

2. L'espace des noeuds basés.

Soient $f : S_1 \longrightarrow S_3$ un plongement, a un point de S_1, j le jet d'ordre un de f en a et $b = f(a)$. Notons $\mathcal{K}'$ (resp. $\mathcal{K}''$) le sous-espace de $\mathcal{K}$ formé des plongements $g : S_1 \longrightarrow S_3$ tels que $g(a) = b$ (resp. $J_a^1(g) = j$). On a les inclusions $\mathcal{K}'' \subset \mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. L'espace $\mathcal{K}'$ est la fibre de la fibration localement triviale $p : \mathcal{K} \longrightarrow S_3$ définie par $p(f) = f(a)$.

LEMME 1. – *L'espace $\mathcal{K}$ a le type d'homotopie de $\mathcal{K}' \times S_3$.*

En effet S_3 est parallélisable et il existe une section $s : S_3 \longrightarrow SO(4)$ de l'opération évidente. En composant s et l'opération de $SO(4)$ dans $\mathcal{K}$, on construit des sections de la fibration p dans chaque composante de $\mathcal{K}$.

L'espace $\mathcal{K}''$ est la fibre d'une fibration localement triviale q : $\mathcal{K}' \longrightarrow \Sigma_2$, où Σ_2 est l'espace des jets de plongements d'origine donnée, et a le type d'homotopie de S_2. On se ramène à la base S_2 en remplaçant $\mathcal{K}'$ par le sous-espace dont les jets ont une longueur donnée.

LEMME 2. – a) *On a un isomorphisme* $\pi_0(\mathcal{K}'') \longrightarrow \pi_0(\mathcal{K}')$.

b) *Soient $\mathcal{K}_0'$ et $\mathcal{K}_0''$ les composantes du noeud trivial ; l'espace $\mathcal{K}'_0$ a le type d'homotopie de $\mathcal{K}''_0 \times S_2$.*

c) *Pour les autres composantes, on a des isomorphismes*

$$\pi_2(\mathcal{K}'') \xrightarrow{\sim} \pi_2(\mathcal{K}'),$$

$$\pi_i(\mathcal{K}'') \times \pi_i(S_2) \simeq \pi_i(\mathcal{K}'), \quad \text{pour} \quad i > 2$$

et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\varphi} \pi_1(\mathcal{K}'') \times (Z/2) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{K}') \longrightarrow 0,$$

telle que $\varphi(1) = (\tau, 1)$.

Le a) est immédiat puisque S_2 est simplement connexe. En restriction aux composantes du noeud trivial, les grands cercles permettent de définir une section de la fibration q, d'où b). Pour les autres composantes, la fibration $q_\alpha : \mathcal{K}_\alpha \longrightarrow S_2$ est trivialisée par l'application canonique $\pi : SO(3) \longrightarrow S_2$. En effet, l'opération de $SO(4)$ dans $\mathcal{K}$ induit une opération de $SO(3)$ dans $\mathcal{K}'_\alpha$ compatible avec π et q. Cette loi d'opération permet d'identifier le produit fibré $SO(3) \times_{S_2} \mathcal{K}'_\alpha$ au produit $SO(3) \times \mathcal{K}''_\alpha$. L'application orbitale $\rho_\alpha : SO(2) \longrightarrow \mathcal{K}''_\alpha$ déduite par l'opération de $SO(3)$ dans les fibres respectives au-dessus d'un point de S_2 induit, comme on le verra au n° 3 ci-dessous, une injection $\pi_1(SO(2)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{K}'')$. L'assertion c) résulte alors de la suite exacte d'homotopie de la fibration $pr_2 : SO(3) \times_{S_2} \mathcal{K}'_\alpha \longrightarrow \mathcal{K}'_\alpha$ dont la fibre est $SO(2)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}'_\alpha \times_{S_2} SO(3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}'_\alpha \arrow[d, "q_\alpha"] \\ SO(3) \arrow[r, dashed] \arrow[ur, dashed] & S_2 \end{tikzcd}$$

Définissons l'espace $\mathcal{B}$ des noeuds basés. Soient I le segment $[0, 1]$, B la boule unité fermée de R^3, P et P′ les points de cote $+1$ et -1 de B. Soit $\mathcal{B}$ l'espace des plongements $f : I \longrightarrow B$ tels que

$$f(0) = P\ ,\ f(1) = P',\ f^{-1}(bB) = \{0,1\}$$

(où bB est le bord de B) et qui ont un jet d'ordre un donné, orthogonal à bB, en 0 et 1. Considérons S_3 comme réunion de B et d'une autre boule B′, collées le long de leurs bords. A un plongement $f \in \mathcal{B}$, on associe un élément $g \in \mathcal{K}''$ en prolongeant f par un plongement d'image le diamètre PP′ de B′. *L'injection* $i : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{K}''$ *ainsi définie est une équivalence d'homotopie (cf.* [2], p. 331).

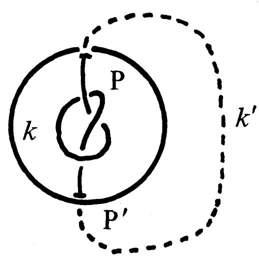

Fig. 1

3. Les rotations.

Soient $f \in \mathcal{B}$, $g = i(f)$, k' le noeud image de g et $k = k' \cap B$. Choisissons un point-base $* \in bB$, voisin et distinct de P. Le groupe $G = \pi_1(B - k, *)$ est le groupe du noeud k'. Soit $m \in G$ la classe du petit cercle d'axe PP′ passant par $*$ et orienté positivement : c'est le méridien de k' (cf. [5]).

Soit $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) le groupe des difféomorphismes orientés de B qui induisent l'identité sur P et P′ (resp. sur k). L'application

$\kappa : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{B}$ qui, à $h \in \mathcal{G}$, associe $h \circ f$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathcal{H}$. Notons $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}$ le sous-groupe des rotations d'axe PP' et $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{R}$ la rétraction définie par le jet en P. On identifie $\pi_1(\mathcal{R})$ à son image dans $\pi_1(\mathcal{G})$. Le choix, pour générateur, de la rotation positive d'un tour identifie $\pi_1(\mathcal{R})$ à $\mathbf{Z}$.

LEMME 3. – *Soient* $\gamma \in \pi_1(\mathcal{H})$ *et* $q = \pi \circ \iota(\gamma)$

$$(\text{où } \iota : \pi_1(\mathcal{H}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G})).$$

L'automorphisme $\mathrm{Int}(m^q)$ *de* G *est l'identité.*

Soit g_t, $t \in [0,1]$, un lacet de $\mathcal{H}$ représentant γ. Le lacet $\alpha : t \mapsto g_t(*)$ a pour classe m^q dans G. Or, pour tout lacet β de $\mathrm{B} - k$ basé en $*$, le chemin g_t définit une homotopie de β à $\alpha.\ \beta.\alpha^-$, d'où le lemme.

LEMME 4. – *Si k' n'est pas un noeud trivial, l'automorphisme* $\mathrm{Int}(m)$ *de* G *n'est pas d'ordre fini.*

Cela résulte du théorème de Burde et Zieschang ([1]). En effet, d'après ce théorème, si k' n'est pas un noeud torique, le centre de G est réduit à l'élément neutre, d'où le résultat dans ce cas. Si k' est le noeud torique (non trivial) d'invariants (a, b), où a et b sont deux entiers premiers entre eux, le groupe G possède une présentation à deux générateurs x, y et un relateur $x^a y^{-b}$. Le centre de G est le groupe cyclique engendré par x^a et l'on a $m = x^g y^h$, où g et h sont des entiers tels que $ah + bg = 1$. Il en résulte qu'aucune puissance m^q $(q \neq 0)$ n'appartient au centre de G.

PROPOSITION 1. – *Si k' n'est pas un noeud trivial, l'homomorphisme κ induit une injection de $\pi_1(\mathcal{R})$ dans $\pi_1(\mathcal{B}, f)$.*

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{H}) \arrow[r, "\iota"] & \pi_1(\mathcal{G}) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & \pi_1(\mathcal{B}, f) \\
& \pi_1(\mathcal{R}) \arrow[u, hook, shift left] &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne est exacte. L'application $\pi \circ \iota$ est nulle d'après les lemmes 3 et 4.

Remarque. – De même que l'on a remplacé $\mathcal{K}''$ par le sous-espace $\mathcal{B}$ qui a même type d'homotopie, on peut remplacer $\mathcal{K}'$ par l'espace $\mathcal{B}'$ des plongements de I dans B d'extrémités diamétralement opposées arbitraires dans bB. La fibration q devient l'application $f \mapsto f(0)$. L'opération de **SO**(3) dans $\mathcal{K}'$ décrite au n° 2 n'est autre que l'opération dans $\mathcal{B}'$ déduite de l'opération ordinaire de **SO**(3) dans la boule unité B. La restriction à **SO**(2) provient de l'opération de $\mathcal{R}$, et il lui correspond l'homomorphisme $\kappa : \pi_1(\mathcal{R}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{B}, f)$. La démonstration du lemme 2 est ainsi complétée par la proposition 1.

4. Représentation dans Aut(G).

Soit T un voisinage tubulaire fermé de k dans B. On suppose que bT rencontre transversalement bB suivant deux cercles d'axe PP$'$ et que le cercle supérieur contient le point-base $*$. Notons V l'adhérence de B-T ; c'est une variété à bord, à ceci près qu'il y a deux arêtes au bord : c'est la variété du nœud k' (cf. [5]).

Soit $\mathcal{C}$ la composante connexe de l'identité dans l'espace Pl(T, T $\cap$ bB ; B) des plongements de T dans B qui sont l'identité sur T $\cap$ bB.

LEMME 5. – *L'application $\rho : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ de restriction à k induit une équivalence d'homotopie de $\mathcal{C}$ sur la composante de f dans $\mathcal{B}$.*

En effet, ρ est une fibration localement triviale. D'après le théorème d'isotopie des voisinages tubulaires, sa fibre a le type d'homotopie d'une composante de l'espace des lacets de **SO**(2), c'est-à-dire d'un point.

Considérons le groupe $\mathcal{G}'$ (resp. $\mathcal{H}'$) des difféomorphismes de B qui induisent l'identité sur bB (resp. T $\cap$ bB). Le groupe $\mathcal{G}'$ est connexe (Cerf, [3]), et l'on a une fibration localement triviale $\mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{C}$ de fibre $\mathcal{H}'$. D'où une suite exacte :

$$\pi_1(\mathcal{G}') \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}, \mathrm{Id}) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{H}') \longrightarrow 0.$$

On identifie le groupe G du nœud k' au groupe $\pi_1(\mathrm{V}, *)$. *Soit* $\Gamma \subset$ Aut(G) *le groupe des automorphismes de* G *qui laissent invariants les éléments périphériques* (c'est-à-dire de l'image de $\pi_1(b\mathrm{V}, *)$). Remarquons que $\mathcal{H}'$ n'est autre que le groupe Diff(V, bV). D'après les théorèmes de Waldhausen et Cerf (cf. [3] et [10]), on a donc :

LEMME 6. – *L'homomorphisme* $\mu : \pi_0 (\mathcal{H}', \mathrm{Id}) \longrightarrow \Gamma$ *qui, à une classe de difféomorphismes de* (V , bV), *associe l'automorphisme induit sur* π_1 (V , $*$), *est un isomorphisme.*

PROPOSITION 2. – *On a une suite exacte :*

$$\pi_1 (\mathcal{G}') \longrightarrow \pi_1 (\mathcal{C}, \mathrm{Id}) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

Remarque. – Si l'on s'intéresse aux nœuds semi-linéraires, tout ce qu'on vient de dire est encore exact. Comme le groupe des automorphismes semi-linéaires de la boule relativement à son bord est acyclique (rétraction d'Alexander), on a un isomorphisme $\pi_1 (\mathcal{C}_{\mathrm{PL}}, \mathrm{Id}) \longrightarrow \Gamma$. Dans le cas différentiable, on ignore encore tout des groupes

$$\pi_i (\mathcal{G}') \ , \ i \geqslant 1 .$$

Dans la suite de cet article, on décrit par générateurs et relations un sous-groupe de Γ et les relèvements des générateurs dans $\pi_1 (\mathcal{C}, \mathrm{Id})$.

5. Les automorphismes intérieurs.

Supposons désormais le nœud k' non-trivial. Choisissons une surface de Seifert Σ de genre minimal, c'est-à-dire une surface connexe à bord connexe plongée dans V de sorte que $b\Sigma = \Sigma \cap b\mathrm{V}$ et que $\pi_1 (\Sigma) \longrightarrow \pi_1 (\mathrm{V})$ soit injectif. On peut supposer que $b\Sigma$ rencontre $b\mathrm{B} - \mathrm{T}$ suivant un arc de grand cercle et $b\mathrm{T}$ suivant la trajectoire de $*$ dans une trivialisation de T comme fibré en disque. On prend pour parallèle (anglais : longitude) la classe ℓ, dans $\pi_1 (\mathrm{V})$, de $b\Sigma$ orienté sur $b\mathrm{T}$ comme k (de P vers P$'$). Le groupe fondamental de Σ est un groupe libre à $2g$ générateurs $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, où g désigne le genre de Σ et aussi le genre du nœud k'. On a $\ell = \prod_{1 \leqslant i \leqslant g} [a_i, b_i]$. Cette expression est minimale et ℓ n'est donc puissance d'aucun élément de $\pi_1 (\Sigma)$.

Le sous-groupe des éléments périphériques de G est le groupe abélien libre engendré par m et ℓ. Les éléments de Γ sont les automorphismes de G respectant m et ℓ. Dans le cas d'un nœud de Neuwirth, $\pi_1 (\Sigma)$ s'identifie au groupe dérivé D (G) (cf. [8]) ; le groupe Γ est alors le groupe des automorphismes de D (G) commutant à l'automorphisme φ de D (G) induit par Int (m), et fixant ℓ.

PROPOSITION 3. – *Soit* $g \in \mathrm{G}$. *Pour que* $\mathrm{Int}\,(g) \in \Gamma$, *il faut et il suffit que* $g \in \pi_1\,(b\mathrm{V})$. *L'application* $\mathrm{Int} : \pi_1\,(b\mathrm{V}) \longrightarrow \Gamma$ *est injective lorsque le nœud* k' *n'est pas torique. Si le nœud* k' *est le nœud torique d'invariants* $(a\,,\,b)$, *le noyau est engendré par* $z = m^{ab}\,\ell$; *l'image de* $\pi_1\,(b\mathrm{V})$ *dans* Γ *est cyclique infinie et engendrée par* $\mathrm{Int}\,(m)$.

Le groupe $\pi_1\,(b\mathrm{V})$ est commutatif, donc les automorphismes $\mathrm{Int}\,(g)$, pour $g \in \pi_1\,(b\mathrm{V})$, fixent les éléments périphériques. Inversement, soit $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{Int}\,(g) \in \Gamma$. On peut écrire $g = m^n h$, où $h \in \mathrm{D}\,(\mathrm{G})$ (cf. [5], § 2) ; alors $\mathrm{Int}\,(h)$ induit l'identité sur $\pi_1\,(b\mathrm{V})$. Il en résulte ([9], Satz 5) que $h \in \pi_1\,(\Sigma)$. Dans le groupe libre $\pi_1\,(\Sigma)$, comme h et ℓ commutent, ils engendrent un groupe libre à un générateur. Ce générateur ne peut être que ℓ ou ℓ^{-1} puisque ℓ n'est puissance d'aucun élément de $\pi_1\,(\Sigma)$. On a donc $g = m^n\,\ell^q$.

Le noyau de $\pi_1\,(b\mathrm{V}) \longrightarrow \Gamma$ est le centre de G. Pour un nœud non-torique, il est réduit à l'élément neutre ; pour un nœud torique, il est comme indiqué ([1]).

Remarque. – On retrouve, en particulier, le résultat de la proposition 1. En effet, la rotation de k sur l'axe PP′ donne, dans Γ, l'automorphisme $\mathrm{Int}\,(m)$. D'autre part, on peut décrire un élément

$$\gamma \in \pi_1\,(\mathcal{C}\,,\,\mathrm{Id})$$

dont l'image dans Γ soit $\mathrm{Int}\,(\ell)$ de la façon imagée suivante. Pensons que la boule B est très grande dans $\mathbf{S}_3$ et que la boule B′ n'est guère plus grande que la section du tube T. On note b le centre de la boule B′. Soit $\mathrm{F}_t\,,\, t \in [0\,,\,1]$, un lacet dans $\mathbf{SO}\,(4)$ tel que $\mathrm{F}_t\,(b)$ décrive k' en suivant son orientation, ainsi que $\mathrm{F}_t\,(\mathrm{P}')$, et que $\mathrm{F}_t\,(*) \in \Sigma$, c'est-à-dire que $\mathrm{F}_t\,(*)$ décrit un représentant de ℓ. Le lacet F_t est uniquement déterminé. La restriction de F_t^{-1} à $k' \cap \mathrm{F}_t\,(\mathrm{B})$ définit presque un élément γ de $\pi_1\,(\mathcal{C}\,,\,\mathrm{Id})$; presque, parce que le nœud ne passe pas par P, mais une petite déformation nous ramène à cette situation. On vérifie immédiatement que γ donne bien lieu à l'automorphisme $\mathrm{Int}\,(\ell)$.

Généralisation. – Supposons maintenant que le nœud k' soit la somme de nœuds indécomposables $k'_1, \ldots, k'_n$. Prenons le point-de-vue des nœuds basés. Remplaçons la boule B par le cylindre $\mathrm{D} \times [0\,,n]$. On suppose que P est le point $(0\,,\,0)$ et on choisit $* \in \mathrm{D} \times \{0\}$. Pour

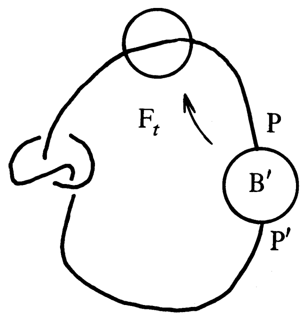

Fig. 2

$1 \leqslant i \leqslant n$, soient B_i le cylindre $D \times [i-1\,,i]$, $*_i$ le point$(*\,,i-1)$, et, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, D_i le disque $D \times \{i\}$. On peut supposer que k rencontre chaque D_i uniquement en son centre et orthogonalement, et que, pour tout $i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, $k_i = k \cap B_i$ est un nœud basé du type de k_i'. On suppose de même que le bord bT du tube rencontre D_i transversalement suivant un cercle concentrique à bD_i et contenant $*_i$. Les groupes G_i des nœuds k_i' sont considérés comme sous-groupes de G, en les rapportant au point-base $*$ à l'aide d'un chemin joignant $*$ à $*_i$; on choisit (cf. fig. 3) un chemin composé d'un segment de rayon de D_0, d'un segment de génératrice du cylindre $bD \times [0\,,n]$ et d'un segment de rayon de D_{i-1}. Le groupe G est alors somme des G_i amalgamée par l'identification des méridiens m_i (entre eux et à m) (cf. [8] p. 76). On peut choisir la surface de Seifert minimale Σ comme réunion de surfaces de Seifert minimales Σ_i de chacun des nœuds basés k_i, qui rencontrent orthogonalement D_{i-1}, D_i et $bD \times [i-1\,,i]$ suivant leur section par le plan des points $*$, P et P′ (cf. [4], p. 141). Les bords $b\Sigma_i$, rapportés comme précédemment à $*$, et orientés comme k, ont des classes, notées ℓ_i, dans G_i. On a $\ell = \ell_1 \cdot \ldots \cdot \ell_n$.

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, soit λ_i l'unique automorphisme de G tel que $\lambda_i \mid G_i = \mathrm{Int}\,(\ell_i)$, $\lambda_i \mid G_j = \mathrm{Id}$ pour $j \neq i$. Soit aussi φ_i l'unique automorphisme de G tel que $\varphi_i \mid G_i = \mathrm{Int}\,(m_i)$, $\varphi_i \mid G_j = \mathrm{Id}$ pour $j \neq i$.

PROPOSITION 4. – *Les automorphismes λ_i et φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ appartiennent à Γ et engendrent un sous-groupe abélien libre Γ_0 de Γ. Les automorphismes φ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et λ_i (pour les i tels que k_i ne soit pas torique) constituent une base de Γ_0.*

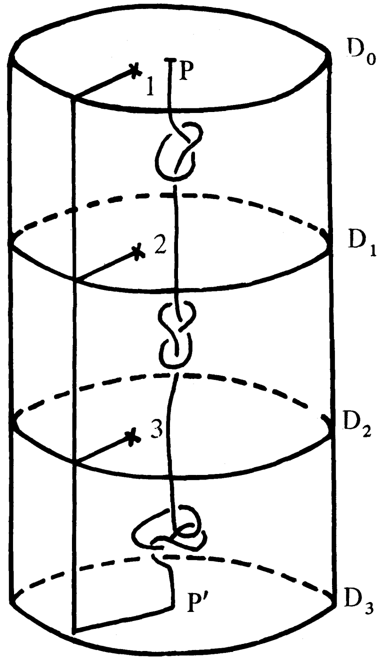

Fig. 3

Cela résulte immédiatement de la proposition 3 et de la définition de λ_i et φ_i. Remarquons aussi que Int $(\ell) = \Pi\lambda_i$ et que $\mathrm{Int}(m) = \Pi\varphi_i$ appartiennent à Γ_0. Une description géométrique des lacets dans π_1 ($\mathcal{C}$, Id) donnant lieu aux automorphismes de Γ_0 est facile à donner en utilisant la remarque suivant la proposition 3.

6. Un groupe d'automorphismes extérieurs.

Conservons les notations de la fin du n° précédent. Pour tout couple d'entiers $(i\ ,\ k)$ tel que $1 \leqslant i < k \leqslant n$, posons :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i,k}(x) &= \ell_k^{-1} . x . \ell_k && \text{si } x \in G_i \,, \\
&= \ell_k^{-1} . \ell_i^{-1} . \ell_k . \ell_i . x . \ell_i^{-1} \cdot \ell_k^{-1} . \ell_i . \ell_k && \text{si } x \in G_r \,, \\
& && \quad i < r < k \,, \qquad (3) \\
&= \ell_k^{-1} . \ell_i^{-1} . \ell_k . x . \ell_k^{-1} . \ell_i . \ell_k && \text{si } x \in G_k \,, \\
&= x && \text{si } x \in G_j \,, \\
& && \quad j < i \text{ ou } k < j.
\end{aligned}
$$

LEMME 7. – *Il existe un unique homomorphisme $\alpha_{i,k} : G \longrightarrow G$ satisfaisant aux relations (3). C'est un isomorphisme et il appartient à Γ.*

L'unicité est immédiate. L'existence résulte du fait que m est invariant par les Int (ℓ_j). L'homomorphisme $\alpha_{i,k}$ est un isomorphisme dont l'inverse est défini par :

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,k}^{-1}(x) &= \ell_i \,.\, \ell_k \,.\, \ell_i^{-1} \,.\, x \,.\, \ell_i \,.\, \ell_k^{-1} \,.\, \ell_i^{-1} && \text{si } x \in G_i\,, \\
&= \ell_i \,.\, \ell_k \,.\, \ell_i^{-1} \,.\, \ell_k^{-1} \,.\, x \,.\, \ell_k \,.\, \ell_i \,.\, \ell_k^{-1} \,.\, \ell_i^{-1} && \text{si } x \in G_r\,,\ i < r < k, \\
&= \ell_i \,.\, x \,.\, \ell_i^{-1} && \text{si } x \in G_k\,, \\
&= x && \text{si } x \in G_j\,,\ j < i \text{ ou } k < j.
\end{aligned} \tag{4}$$

Il est immédiat que $\alpha_{i,k}(m) = m$; on vérifie que $\alpha_{i,k}(\ell) = \ell$ en développant $\ell = \ell_1 \,.\, \ldots \,.\, \ell_n$.

Soit $\mathbf{K}_n$ le groupe des tresses colorées de E. Artin et soient $A_{i,k}$ $(i < k)$ les générateurs de $\mathbf{K}_n$ (cf. [7], p. 173).

PROPOSITION 5. – *Il existe un unique homomorphisme $\tau : \mathbf{K}_n \longrightarrow \Gamma$ tel que $\tau(A_{i,k}) = \alpha_{i,k}$ pour tous i, k tels que $i < k$. Il est injectif.*

L'unicité est immédiate. Pour démontrer l'existence de τ, il suffit de vérifier que les $\alpha_{i,k}$ satisfont au système de relations entre les $A_{i,k}$ qui définit $\mathbf{K}_n$ ([7], p. 174). J'ai fait cette vérification qui ne demande qu'un peu de patience. On peut aussi raisonner comme dans la proposition 7 ci-dessous. Le sous-groupe $\tau(\mathbf{K}_n)$, que nous noterons A, opère dans le sous-groupe L de G engendré par les ℓ_i et qui est libre de base (ℓ_i). L'opération de $\mathbf{K}_n$ dans ce groupe étant l'opération habituelle qui est fidèle (loc. cit.), on voit que τ est injectif.

Remarque. – Indiquons sans démonstration comment l'automorphisme $\alpha_{i,k}$ peut être relevé dans $\pi_1(\mathcal{C}\,, \mathrm{Id})$. Décrivons d'abord un relèvement de $\alpha_{i,i+1}$. Faisons glisser le nœud k_{i+1}, qu'on imagine très petit, le long du nœud k_i, puis revenons à la position initiale en faisant glisser le nœud k_i devenu très petit, le long du nœud k_{i+1} (fig. 4). Dans le cas général où $k \neq i + 1$, on effectue la même opération entre k_i et k_k, le nœud $k_{i+1} \# \ldots \# k_{k-1}$ étant placé dans une boule faisant corps avec la ficelle.

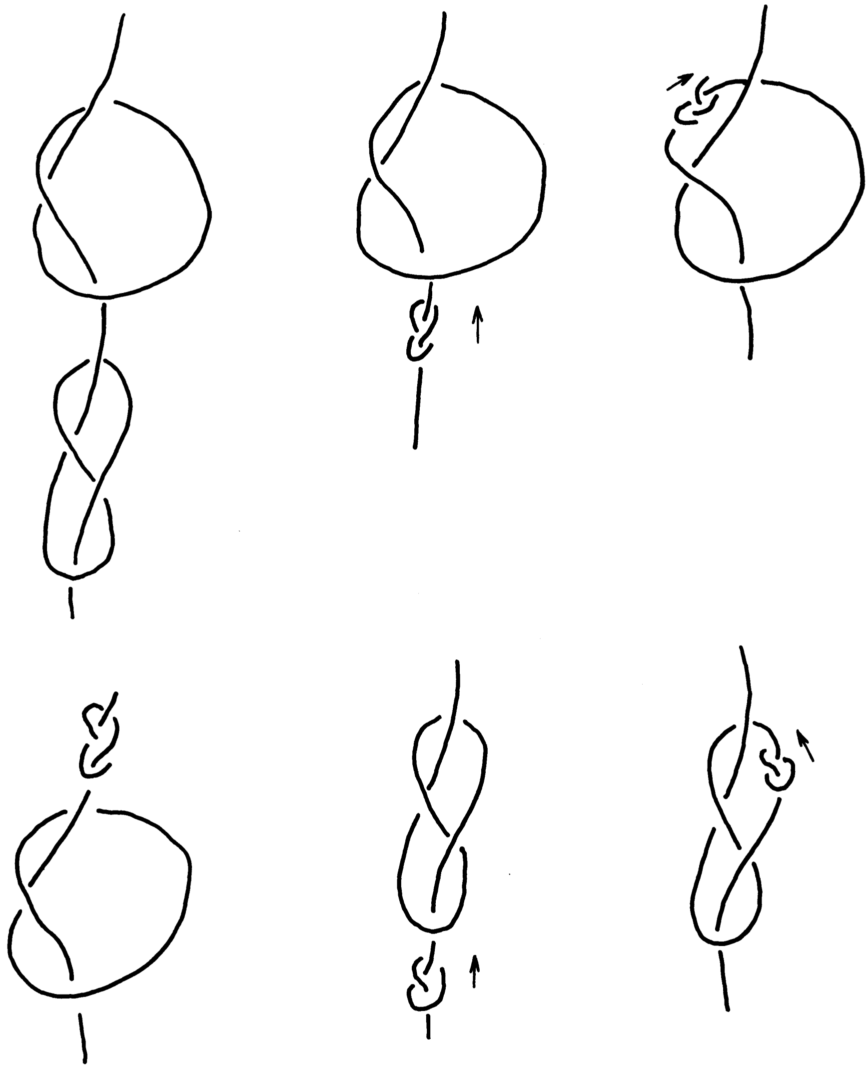

Fig. 4

Dans le cas où des nœuds k_i et k_k de la décomposition de k ont même type, on peut trouver d'autres automorphismes extérieurs. Soit, en effet, $\gamma_{i,k} : G_i \longrightarrow G_k$ un isomorphisme respectant m et tel que $\gamma_{i,k}(\ell_i) = \ell_k$. Il existe un unique automorphisme $\beta_{i,k}$ de G tel que :

$$
\begin{aligned}
\beta_{i,k}(x) &= \gamma_{i,k}(x) && \text{si} \quad x \in G_i\,, \\
&= \ell_k^{-1}.\,\ell_i.\,x.\,\ell_i^{-1}.\,\ell_k && \text{si} \quad x \in G_r\,,\quad i < r < k\,, \\
&= \ell_k^{-1}.\,\gamma_{i,k}^{-1}(x).\,\ell_k && \text{si} \quad x \in G_k\,, \\
&= x && \text{si} \quad x \in G_j\,,\ j < i \ \text{ ou } \ k < j.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

C'est l'automorphisme qui résulte de la transposition de k_i et k_k en faisant glisser k_k le long de k_i. On vérifie immédiatement que $\beta_{i,k} \in \Gamma$ et qu'on a les relations :

$$
\beta_{i,k}^2 = \alpha_{i,k} \tag{6}
$$

Choisissons, pour tous les couples (i, k), tels que k_i et k_k aient même type, un isomorphisme $\gamma_{i,k} : G_i \longrightarrow G_k$ respectant m, tel que $\gamma_{i,k}(\ell_i) = \ell_k$, et ceci de telle sorte que l'on ait :

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{i,i} = \mathrm{Id}(G_i), \\
&\gamma_{k,h} \circ \gamma_{i,k} = \gamma_{i,h}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

pour tous les triplets (i, k, h) tels que les isomorphismes précédents soient définis.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait une partition de $[1, n]$ en segments consécutifs $[i_{j-1} + 1, i_j]$, $1 \leqslant j \leqslant q$, telle que les noeuds k_i pour $i \in [i_{j-1} + 1, i_j]$ soient tous les noeuds d'un même type dans la décomposition de k. Dans le groupe des tresses B_n, considérons le sous-groupe H_n des tresses qui ne mélangent les brins qu'à l'intérieur des paquets $[i_{j-1} + 1, i_j]$, autrement dit le sous-groupe de B_n engendré par les σ_i tels que $i \neq i_j$ (notations de [7], p. 173). Le groupe H_n est isomorphe au groupe produit des groupes de tresses à $i_j - i_{j-1}$ brins ($j = 1, \dots, q$).

PROPOSITION 6. — *Il existe un unique homomorphisme $\sigma : H_n \longrightarrow \Gamma$ tel que $\sigma(\sigma_i) = \beta_{i,i+1}$ pour tout i tel que $\sigma_i \in H_n$. Il est injectif.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 5. L'unicité est immédiate ; l'existence résulte de la vérification des relations entre les σ_i dans chaque facteur de H_n (moins pénible que pour la proposition 5) ; l'injectivité provient de la fidélité de l'opération de H_n dans L.

Soient $B \subset \Gamma$ le sous-groupe image de H_n et $C = A . B$ le groupe engendré par les $\alpha_{i,k}$ et les $\beta_{i,k}$. Soit d'autre part $T_n \subset B_n$ le groupe des tresses colorées par paquets correspondant à la partition en les $[i_{j-1} + 1 , i_j]$ de $[1,n]$. On a $T_n = K_n . H_n$ (et ceci même au sens où tout $t \in T_n$ s'écrit $t = k.h$ avec $k \in K_n$ et $h \in H_n$). On peut aussi décrire T_n de la manière suivante. Soit $\pi : B_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ l'homomorphisme canonique du groupe des tresses dans le groupe symétrique. Soit $\mathfrak{S}_n' \subset \mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations σ telles que k_i et $k_{\sigma(i)}$ aient même type pour tout i. On a $T_n = \pi^{-1} (\mathfrak{S}_n')$.

Proposition 7. — *Les homomorphismes σ et τ se recollent et se prolongent en un isomorphisme $\theta : T_n \longrightarrow C$.*

Montrons d'abord que σ et τ coïncident sur $H_n \cap K_n$. Le groupe $H_n \cap K_n$ s'identifie au produit des groupes de tresses colorées correspondant à chaque paquet $[i_{j-1} + 1 , i_j]$. La vérification, pour chaque facteur, nous ramène donc au cas où tous les noeuds k_i sont de même type. Dans ce cas, σ et τ coïncident sur K_n en vertu des relations (6) et de la relation :

$$\alpha_{i,k} = M_{i,k}^{-1} . \alpha_{k-1,k} . M_{i,k} \text{ pour } i < k$$

où

$$M_{i,k} = \beta_{k-2,k-1} . \dots . \beta_{i,i+1}$$

La relation (8) se vérifie encore manuellement à l'aide des formules (3) et (5). Il résulte de la fidélité de l'opération de B_n dans L que $\sigma(H_n \cap K_n) = A \cap B$.

Pour plus de commodité, on va démontrer que les isomorphismes $\overline{\tau} : A \longrightarrow K_n$ et $\overline{\sigma} : B \rightarrow H_n$, inverses de τ et σ respectivement, se recollent et se prolongent en un isomorphisme $\overline{\theta} : C \longrightarrow T_n$. On sait déjà que $\overline{\tau}$ et $\overline{\sigma}$ coïncident sur $A \cap B$. Il en résulte un homomorphisme $\overline{\tau} * \overline{\sigma} : A *_{A \cap B} B \longrightarrow B_n$. Cet homomorphisme passe au quotient par l'application canonique $\rho : A *_{A \cap B} B \longrightarrow A.B$. En effet, un élément du noyau de ρ opère trivialement dans le groupe L donc appartient au noyau de $\overline{\tau} * \overline{\sigma}$. L'application $\overline{\tau} * \overline{\sigma}$ induit donc un épimorphisme $\overline{\theta} : A . B \longrightarrow K_n . H_n$, soit $\overline{\theta} : C \longrightarrow T_n$.

Il reste à démontrer l'injectivité de $\overline{\theta}$. Soit $\omega \in C$; on a :

$$\omega(x) = w_i(\ell_1 , \dots , \ell_n) . \gamma_i(x) . w_i(\ell_1 , \dots , \ell_n)^{-1} \quad \text{pour} \quad x \in G_i,$$

où w_i est un mot en les lettres ℓ_j, ℓ_j^{-1}, et γ_i un composé de $\gamma_{j,k}$. D'après les conditions (7) sur les $\gamma_{j,k}$, on a donc $\gamma_i = \gamma_{i,h}$ pour un certain h.

On remarque, par récurrence sur le nombre des α et β composant ω et compte tenu des formules (3) et (5), que le degré total de ℓ_h dans w_i est 0. Par définition de $\overline{\theta}$, on a $\overline{\theta}(\omega)(\ell_i) = w_i . \ell_h . w_i^{-1}$. Supposons que $\overline{\theta}(\omega) = 1$ dans B_n. On a $\ell_i = w_i . \ell_h . w_i^{-1}$, d'où il résulte que $h = i$ car ℓ_i n'est conjugué d'aucun autre générateur ℓ_k de L. En outre, w_i est une puissance de ℓ_i car ℓ_i ne commute qu'à ses puissances. Comme le degré total de ℓ_i dans w_i est 0, on en déduit que w_i est le mot vide et que $\omega = \mathrm{Id}$. D'où la proposition.

Remarque. – Pour démontrer la proposition 7, on pourrait aussi recourir à l'image géométrique dans $\pi_1(\mathcal{C}, \mathrm{Id})$ et démontrer qu'un élément de A.B ne dépend que de la tresse qu'il définit. La démonstration algébrique qu'on a donnée a le mérite de prouver cette assertion géométrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BURDE et H. ZIESCHANG, Eine Kennzeichnung der Torusknoten, *Math. Annalen*, 167 (1966), 169-176.

[2] J. CERF, Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. S.M.F.*, 89 (1961).

[3] J. CERF, La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}(S_3))$, Séminaire Cartan, 15e année (1962-1963).

[4] R. FOX, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962).

[5] A. GRAMAIN, Rapport sur la théorie classique des nœuds, Séminaire Bourbaki n° 485 (juin 1976).

[6] F. LAUDENBACH, Topologie de la dimension 3, homotopie et isotopie, *Astérisque*, 12 (1974).

[7] W. MAGNUS, A. KARRASS et D. SOLITAR, Combinatorial group theory, Interscience Publish., New-York (1966).

[8] L. NEUWIRTH, Knot groups, *Ann. of Math. Studies* n° 56, Princeton Univ. Press (1965).

[9] D. NOGA, Ueber den Aussenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen, *Math. Zeitsch.*, 101 (1967), 131-141.

[10] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.*, 87 (1968), 56-88.

Manuscrit reçu le 10 mars 1976
Proposé par J.L. Koszul.

André GRAMAIN,
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
37200 Tours.