

LIONEL BÉRARD-BERGERY

**Quelques exemples de variétés riemanniennes
où toutes les géodésiques issues d'un point sont
fermées et de même longueur suivis de quelques
résultats sur leur topologie**

Annales de l'institut Fourier, tome 27, n° 1 (1977), p. 231-249

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_1_231_0

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES EXEMPLES DE VARIÉTÉS RIEMANNIENNES OÙ TOUTES LES GÉODÉSQUES ISSUES D'UN POINT SONT FERMÉES ET DE MÊME LONGUEUR, SUIVIS DE QUELQUES RÉSULTATS SUR LEUR TOPOLOGIE

par Lionel BÉRARD BERGERY

1. Terminologie.

Toutes les variétés considérées seront différentiables (C^∞), compactes, connexes et de dimension $d (\geq 2$ en général). Soit M une variété, m un point de M et g une métrique riemannienne sur M . Dans cet article on appellera :

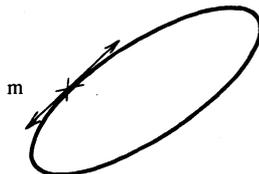
lacet géodésique de longueur ℓ en m , un arc de géodésique $c : [0, \ell] \rightarrow M$ de (M, g) , paramétré par la longueur d'arc et tel que $c(0) = c(\ell) = m$, $c(t) \neq m$ pour tout t de $]0, \ell[$.

géodésique fermée de longueur ℓ en m un lacet géodésique de longueur ℓ en m dont les vecteurs vitesses aux deux extrémités sont égaux (une telle géodésique est en particulier périodique et de période ℓ pour le paramétrage par la longueur d'arc).

Et on qualifiera de *simple* un lacet géodésique ou une géodésique fermée qui ne se recoupe pas lui-même en dehors de m (*c.a.d.* c est injective sur $[0, \ell[$).



Lacet géodésique non simple



Géodésique fermée simple

On dira qu'une variété riemannienne est une L_ℓ^m - (resp. SL_ℓ^m -, C_ℓ^m -, SC_ℓ^m -) variété si toutes les géodésiques issues de m sont des lacets géodésiques (resp. des lacets géodésiques simples, des géodésiques fermées, des géodésiques fermées simples) de longueur ℓ en m .

On dira qu'une variété riemannienne est une F_ℓ^m -variété si toutes les géodésiques issues de m reviennent en m à la longueur ℓ (sans être forcément des lacets géodésiques de longueur ℓ).

On dira enfin qu'une variété différentiable M est une L - (resp. SL -, C -, SC -, F -) variété si il existe sur M une métrique riemannienne g qui fasse de (M, g) une L_ℓ^m - (resp. SL_ℓ^m -, C_ℓ^m -, SC_ℓ^m -, F_ℓ^m -) variété pour un point m de M et une longueur ℓ .

2. Introduction.

En 1954, dans [1], R. Bott a montré qu'une SC -variété M vérifiait l'une des conditions suivantes :

$\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ et le revêtement universel de M est une sphère d'homotopie $\pi_1(M) = 0$ et l'anneau de cohomologie entière de M est un polynôme tronqué à une variable (*c.a.d.* M a même anneau de cohomologie entière qu'un espace symétrique compact de rang un).

En 1963, H. Samelson retrouve certaines de ces conclusions pour une C -variété, par une méthode très simple (que l'on utilisera au paragraphe 8 dans un cas particulier) [9].

En 1967, H. Nakagawa retrouve toutes les conclusions du théorème de Bott pour les L -variétés [8].

Inversement, en 1967, dans son étude sur les lieux conjugués d'ordre constant [14], F.W. Warner montre en particulier (à l'aide de la chirurgie métrique de A. Weinstein) que toute variété différentiable obtenue en recollant suivant leur bord un disque et un fibré en disques fermés (lorsque le bord du fibré est une sphère canonique) est une SL -variété (corollary 4.2. page 207 de [14]).

Mais on ne connaissait comme C -variétés que les sphères et projectifs canoniques.

Au paragraphe 3 de cet article, on donnera une construction qui précise celle de Warner et Weinstein à l'aide de la théorie des submersions riemanniennes.

Au paragraphe 4, on en déduira que certaines sphères exotiques sont des C'-variétés.

Aux paragraphes 5, 6 et 7, on étudiera des constructions possibles d'autres exemples de C'-variétés (pour lesquels malheureusement des difficultés liées à la classification des involutions différentiables des sphères ne nous permettront pas toujours de conclure).

Au paragraphe 8, on précisera les conclusions du théorème de Bott pour les L'-variétés à $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$, et on montrera qu'une C'-variété avec $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$ est difféomorphe à $P^d(\mathbb{R})$ (le projectif réel canonique), généralisant le théorème de K. Suguhara ([11] Theorem C' page 393) qui l'énonçait pour les SC'-variétés.

Rappelons que les variétés riemanniennes de courbure constante un différentes des sphères et projectifs réels sont des exemples de F_ξ^m -variétés (pour tout point m) qui ne peuvent pas être des L'-variétés d'après le théorème de Bott. On montrera cependant au paragraphe 9, à l'aide d'un théorème de D. Sullivan [12] que l'anneau de cohomologie rationnelle des F'-variétés est encore le même que celui des sphères et projectifs.

3. Une construction.

Soit $\xi(\pi : E \rightarrow N)$ un fibré vectoriel (réel) différentiable de dimension p sur une variété différentiable sans bord N de dimension n . On notera $D(\xi)$, $S(\xi)$, $P(\xi)$ l'espace total des fibrés en disques fermés D^p , sphères S^{p-1} , et projectifs réels $P^{p-1}(\mathbb{R})$ sur N associés à ξ , et $\tau(\xi)$ l'involutions sans point fixe sur $S(\xi)$ induite par l'antipodie : $x \rightarrow -x$ vectorielle dans chaque fibre de ξ . Le quotient de $S(\xi)$ par $\tau(\xi)$ est évidemment $P(\xi)$. On fera dans la suite l'une ou l'autre des hypothèses :

(A) – Il existe un difféomorphisme σ de $S(\xi)$ sur la sphère canonique S^{n+p-1} .

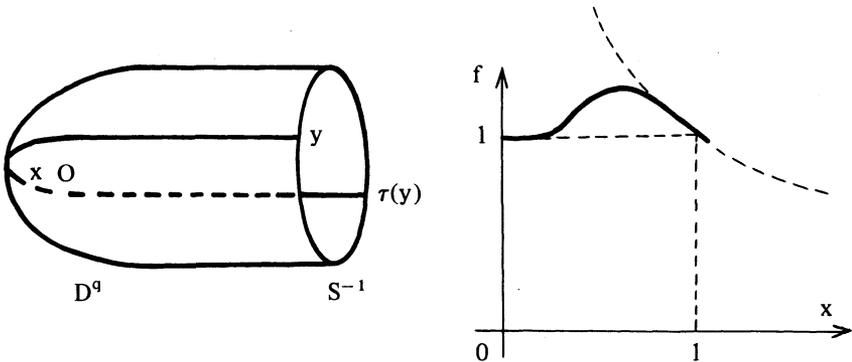
(B) – Il existe un difféomorphisme σ de $S(\xi)$ sur la sphère canonique S^{n+p-1} tel que $\sigma \cdot \tau(\xi) \cdot \sigma^{-1}$ soit exactement l'antipodie canonique $\tau : x \rightarrow -x$ de S^{n+p-1} .

On forme alors la variété différentiable $X(\xi, \sigma)$ en recollant le disque fermé D^{n+p} et $D(\xi)$ suivant leur bord S^{n+p-1} et $S(\xi)$ par le difféomorphisme σ .

La construction de Warner et Weinstein citée dans l'introduction dit que, si (ξ, σ) vérifie (A), alors $X(\xi, \sigma)$ est une SL' -variété. On va démontrer le :

THEOREME 1. — Si (ξ, σ) vérifie (B), alors $X(\xi, \sigma)$ est une SC' -variété.

Démonstration. — Pour tout entier q , on choisit une fois pour toutes une métrique riemannienne g_q sur le disque fermé D^q , invariante sous l'action naturelle du groupe $O(q)$ et produit près du bord S^{q-1} (voir figure ci-dessous). Pour cela, il suffit par exemple de multiplier la métrique induite sur $D^q = \{x \in \mathbb{R}^q; |x| \leq 1\}$ par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^q , par la fonction $f(\rho)$ où ρ est la distance euclidienne à l'origine O et f une fonction réelle d'une variable réelle valant 1 au voisinage de 0 et identique à x^{1-q} au voisinage de 1. On remarque alors que les géodésiques de g_q passant par O vont d'un point y du bord S^{q-1} à son antipode $\tau(y)$, et qu'elles sont toutes de même longueur totale $2 \int_0^1 f(x) dx$ que l'on peut choisir égale à 3 par exemple.



Soit g_N une métrique riemannienne quelconque sur N . D'après une construction due à J. Vilms [13], il existe sur $D(\xi)$ une métrique riemannienne g telle que la fibration : $(D(\xi), g) \rightarrow (N, g_N)$ soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques isométriques à (D^p, g_p) . On remarque que g est produit près du bord et qu'une

géodésique de g issue d'un point y du bord $S(\xi)$ perpendiculairement à celui-ci reste dans la fibre de y et aboutit au point $\tau(\xi)y$, à la longueur 3.

On met ensuite sur $S^{n+p-1} \times [0, 1]$ une métrique riemannienne g' telle que :

a) la deuxième projection $S^{n+p-1} \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ soit une submersion riemannienne de la métrique g' sur la métrique canonique de $[0, 1]$,

b) les structures riemanniennes g'_t induites sur les fibres $S^{n+p-1} \times \{t\}$ forment une déformation C^∞ entre les métriques g'_0 restriction de g_{n+p} au bord S^{n+p-1} de D^{n+p} et g'_1 image réciproque par σ^{-1} de la restriction de g à $S(\xi)$,

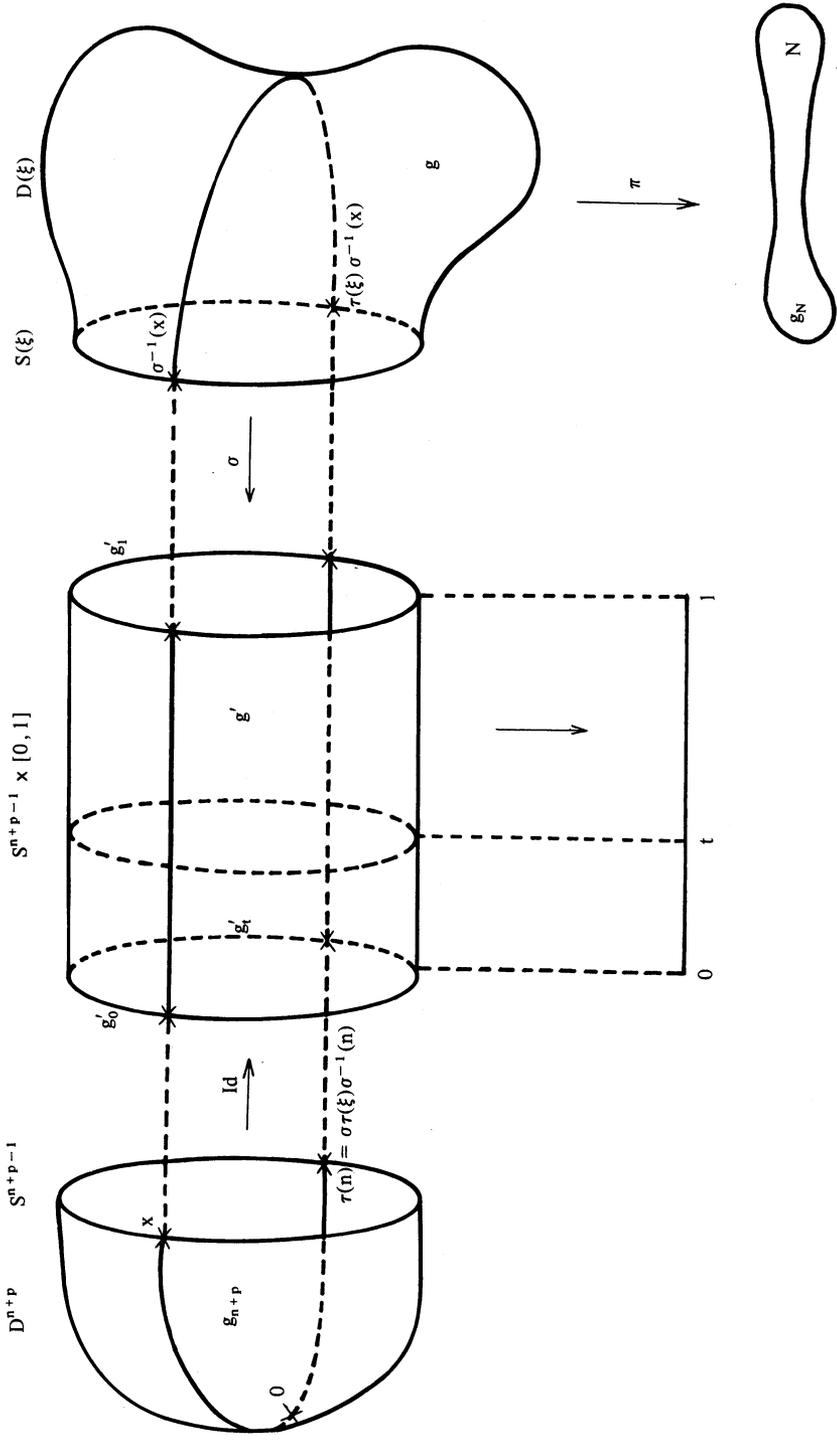
c) g' est produit près des bords, *c.a.d.* la déformation g'_t est constante aux voisinages de 0 et 1,

d) les lignes $\{x\} \times [0, 1]$ sont perpendiculaires aux fibres *c.a.d.* la distribution horizontale de la submersion de a) est tangente à ces lignes.

Dans [3], R. Hermann a montré que dans l'espace total d'une submersion riemannienne, les géodésiques qui sont horizontales en un point sont horizontales partout et se projettent en vraie grandeur sur les géodésiques de la base. On voit donc que les courbes $t \rightarrow (x, t)$ sur $S^{n+p-1} \times [0, 1]$ sont exactement les géodésiques horizontales de g' , qu'elles sont perpendiculaires aux deux bords et de longueur constante égale à 1.

On peut alors former $X(\xi, \sigma)$ en recollant D^{n+p} , $S^{n+p-1} \times [0, 1]$ et $D(\xi)$ à l'aide de l'identité de S^{n+p-1} (bord de D^{n+p}) sur $S^{n+p-1} \times \{0\}$, (l'un des bords de $S^{n+p-1} \times [0, 1]$) et du difféomorphisme σ de $S(\xi)$ (bord de $D(\xi)$) sur $S^{n+p-1} \times \{1\}$ (l'autre bord de $S^{n+p-1} \times [0, 1]$). Les métriques riemanniennes g_{n+p} , g' et g sont produits près des bords et on a fait ce qu'il fallait pour que l'identité et σ soient des isométries entre les bords qu'ils identifient. On peut donc recoller ces trois métriques riemanniennes en une métrique riemannienne g'' sur $X(\xi, \sigma)$ et on constate alors que les géodésiques de g'' issues de 0 sont des lacets géodésiques de longueur $3 + 2 + 3 = 8$ constante.

Jusqu'à ce point, on a seulement utilisé l'hypothèse (A) et on a retrouvé le résultat de Warner. Mais si de plus (ξ, σ) vérifie



(B), on constate que ces géodésiques sont fermées : en effet une géodésique issue de 0 passant par x de S^{n+p-1} arrive en x perpendiculairement à S^{n+p-1} et continue donc vers le point $(x, 1)$ qui s'identifie à $\sigma^{-1}(x)$ sur $S(\xi)$ et de même passe par les points $\tau(\xi) \circ \sigma^{-1}(x)$ de $S(\xi)$ et $\sigma \circ \tau(\xi) \circ \sigma^{-1}(x)$ de S^{n+p-1} ; elle se referme donc puisque l'hypothèse (B) dit exactement que ce point est l'antipode $\tau(x)$ de x sur S^{n+p-1} (voir figure page 236).

4. Cas des sphères d'homotopie.

On sait que toute sphère d'homotopie de dimension $d \geq 5$ peut s'écrire $X(\xi, \sigma)$ avec ξ un espace vectoriel de dimension d considéré comme un fibré vectoriel de dimension d sur un point, et σ un difféomorphisme (éventuellement exotique) de S^{d-1} . D'où immédiatement le :

COROLLAIRE 1. — *Toute sphère d'homotopie de dimension $d \geq 5$ est une SL'-variété.*

Comme $\tau(\xi)$ est ici simplement l'antipodie canonique τ de S^{d-1} , on voit que (ξ, σ) vérifie (B) si et seulement si σ commute à τ .

F. Laudenbach m'a fourni la proposition suivante et je tiens à le remercier ici d'avoir bien voulu s'intéresser à ce problème.

PROPOSITION 1 (F. Laudenbach). — *Tout élément du sous-groupe $2 \Theta_{2n}$ du groupe Θ_{2n} des sphères d'homotopie orientées de dimension $2n$ peut être représenté par un difféomorphisme σ de S^{2n-1} qui commute à l'antipodie.*

On en déduit immédiatement le :

COROLLAIRE 2. — *Tout élément de $2 \Theta_{2n}$ est une SC'-variété.*

Exemple. — $\Theta_{10} = \mathbf{Z}_6$ donc il existe au moins une sphère exotique de dimension 10 (correspondant à 2 ou 4 dans \mathbf{Z}_6 suivant l'orientation qu'on lui met) qui est une SC'-variété.

Remarque. — Si σ représente l'élément Σ de Θ_{2n+1} , alors $\tau \circ \sigma \circ \tau$

représente l'élément $-\Sigma$, (c.a.d. la même sphère, mais avec l'orientation opposée), donc seuls les éléments d'ordre 2 de Θ_{2n+1} pourraient éventuellement être représentés par des difféomorphismes commutant à l'antipodie.

Démonstration de la proposition 1. — Soit η un difféomorphisme de S^{2n-1} conservant l'orientation. Il existe un difféomorphisme η' isotope à η dont le support est strictement contenu dans l'hémisphère nord de S^{2n-1} . On forme alors $\tau \circ \eta' \circ \tau$: son support est strictement contenu dans l'hémisphère sud, donc η' et $\tau \circ \eta' \circ \tau$ commutent. On pose $\sigma = \tau \circ \eta' \circ \tau \circ \eta'$. Comme τ est isotope à l'identité (on est en dimension $2n-1$ impaire), σ est isotope à η^2 et on a : $\tau \circ \sigma = \tau \circ \tau \circ \eta' \circ \tau \circ \eta' = \tau \circ \eta' \circ \tau \circ \eta' \circ \tau = \sigma \circ \tau$.

5. D'autres exemples.

Les sphères exotiques du paragraphe précédent nous permettent aussi de construire d'autres exemples par somme connexe. On notera $M \# M'$ la somme connexe des variétés M et M' .

COROLLAIRE 3. — Si (ξ, σ) vérifie (B) et si η est un difféomorphisme de S^{n+p-1} commutant à l'antipodie et représentant l'élément Σ de Θ_{n+p} , alors $(\xi, \eta \circ \sigma)$ vérifie (B) et $X(\xi, \eta \circ \sigma) = X(\xi, \sigma) \# \Sigma$ est une SC'-variété.

Démonstration. — On a $\sigma \circ \tau(\xi) \circ \sigma^{-1} = \tau$ et $\eta \circ \tau = \tau \circ \eta$, d'où :

$$\begin{aligned} \eta \circ \sigma \circ \tau(\xi) \circ (\eta \circ \sigma)^{-1} &= \eta \circ (\sigma \circ \tau(\xi) \circ \sigma^{-1}) \circ \eta^{-1} = \eta \circ \tau \circ \eta^{-1} = \\ &= \tau \circ \eta \circ \eta^{-1} = \tau. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier :

COROLLAIRE 4. — Si Σ est un élément de $2\Theta_{2n}$ (resp. $2\Theta_{4n}$, $2\Theta_{16}$), alors $P^n(C) \# \Sigma$, $P^{2n}(R) \# \Sigma$ (resp. $P^n(H) \# \Sigma$, $P^2(Ca) \# \Sigma$) sont des SC'-variétés.

On remarque que les exemples explicites obtenus sont homéomorphes aux exemples canoniques. On va maintenant essayer d'en construire qui ne le soient pas.

6. Cas des variétés du type d'homologie de $P^2(H)$ ou $P^2(Ca)$.

Si une variété simplement connexe a même anneau de cohomologie entière que $P^2(H)$ (resp. $P^2(Ca)$), elle admet d'après S. Smale ([10] Th 6.3 page 396) une fonction de Morse à 3 points critiques, donc d'après J. Eells et N.H. Kuiper [2] elle est réunion d'un disque et d'un fibré en disques de dimension 4 (resp. 8) sur une sphère canonique de dimension 4 (resp. 8). Il y a une infinité dénombrable de telles variétés : les fibrés vectoriels de dimension 4 sur S^4 (resp. 8 sur S^8) sont classifiés par un couple d'entiers (h, j) et l'espace total du fibré en sphères correspondant est une sphère canonique si et seulement si $h + j = 1$ et de plus $\frac{h(h-1)}{2} \equiv 0 \pmod{28}$ (resp. $\pmod{8128}$) ; on recolle alors le fibré en disques correspondant avec un disque à l'aide d'un difféomorphisme ζ de S^7 (resp. S^{15}) sur l'espace total du fibré en sphères. On obtient les variétés $X_h^{8,\zeta}$ (resp. $X_h^{16,\zeta}$) dans les notations de Eells et Kuiper, avec h vérifiant la relation de congruence ci-dessus.

Remarque. — A vrai dire, Eells et Kuiper ne démontrent pas que toutes les variétés $X_h^{16,\zeta}$ sont bien des variétés différentiables (pour h vérifiant la relation de congruence), mais P. Vogel m'a assuré qu'il pouvait le démontrer.

On a donc le :

COROLLAIRE 5. — *Toute variété simplement connexe qui a même anneau de cohomologie entière que $P^2(H)$ ou $P^2(Ca)$ est une SL -variété.*

Remarque. — En particulier, d'après Eells et Kuiper, il y en a qui n'ont pas même type d'homotopie que $P^2(H)$ ou $P^2(Ca)$.

On aurait des SC -variétés si on savait si l'involution $\tau(\xi)$ correspondante est l'antipodie canonique. Dans le cas des $X_h^{8,\zeta}$, K.H. Mayer a montré dans [6] que cette involution vérifie les propriétés suivantes : son invariant de Browder-Livesay est nul et son invariant spinoriel vaut $\pm(2h-1) \pmod{16}$ soit ± 1 pour $\frac{h(h-1)}{2} \equiv 0 \pmod{28}$, *c.a.d.* il est le même que celui de l'antipodie

canonique. De plus, dans le même article, Mayer montre que ces deux invariants classifient les involutions sans point fixe de S^7 à ceci près qu'ils ne distinguent pas une involution τ' de l'unique involution τ'' telle que $S^7/\tau' = S^7/\tau'' \# \Sigma_{14}$ où Σ_{14} est l'élément d'ordre 2 dans $\Theta_7 = \mathbb{Z}_{28}$. On remarque que pour $h = 0$, on a $X_0^{8,1d} = \mathbb{P}^2(\mathbb{H})$ via la fibration de Hopf et l'antipodie canonique. Il serait bien étonnant que pour tous les autres h possibles, on obtienne l'unique autre involution possible, mais la question est (autant que je sache) ouverte.

7. Cas des variétés du type d'homologie de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

D'après W. Klingenberg ([4] page 535 Th. 2.6), si M simplement connexe a même anneau de cohomologie que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, elle a aussi même type d'homotopie. Pour ces variétés, D. Montgomery et C.T. Yang ont défini dans [7] un invariant (index à valeurs dans \mathbb{Z} si n est impair, invariant de Arf à valeurs dans \mathbb{Z}_2 si n est pair) et montré que M est de la forme $X(\xi, \sigma)$ si et seulement si cet invariant est nul. Plus précisément, ils montrent que l'invariant s'annule si et seulement si une équivalence d'homotopie de M sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ induit une équivalence d'homotopie d'une sous-variété N de M sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Mais alors il est évident que M est la réunion d'un disque et du fibré normal en disques sur cette sous-variété.

COROLLAIRE 6. — *Si M a même type d'homotopie que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et si son invariant de Montgomery-Yang est nul, alors M est une SL-variété.*

Remarque. — Cet invariant peut aussi s'identifier avec une "obstruction de scindement" au sens de Sullivan ou un "index virtuel" au sens de Hirzebruch.

De plus, soit ξ le fibré normal de la sous-variété N de M construite ci-dessus. Ce fibré est l'image réciproque du fibré normal de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par l'équivalence d'homotopie. On a $S(\xi) = S^{2n-1}$ et pour avoir la condition (B), il faudrait que

$$P(\xi) = \mathbb{P}^{2n-1}(\mathbb{R})$$

Or, d'après [7] page 188, l'invariant de Montgomery-Yang de N est égal à l'invariant de Browder-Livesay de $P(\xi)$. Donc une première condition pour avoir (B) est que l'invariant de Montgomery-Yang de N soit lui aussi nul. Si on veut poursuivre l'étude de la condition (B), on tombe malheureusement de nouveau sur des problèmes liés à la classification des involutions de la sphère. On peut remarquer cependant qu'en dimension suffisamment grande, il y a une infinité de structures différentiables sur le type d'homotopie de $P^n(C)$ pour lesquelles les deux premiers invariants ci-dessus sont nuls, alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de structures différentiables sur le type d'homotopie de $P^{2n-1}(R)$ dont l'invariant de Browder-Livesay est nul, mais ce n'est pas suffisant pour conclure.

8. Cas des variétés non simplement connexes.

On va préciser la conclusion du théorème de Bott dans le cas des L - et C -variétés non simplement connexes. D'après S. Lopez de Medrano [5] IV 3.1, si $\pi_1(M) = Z_2$ et si le revêtement universel de M est une sphère d'homotopie, alors M a le type d'homotopie du projectif réel de même dimension. On aura besoin du :

LEMME 1. — *Soit M une L^m -variété riemannienne non simplement connexe. Alors deux lacets géodésiques de longueur ℓ en m distincts ne se recoupent pas en dehors de m et tout lacet géodésique de longueur ℓ en m est simple. En particulier, M est une SL^m -variété.*

Démonstration. — Soit E l'ensemble des points de M différents de m par où passent au moins deux lacets géodésiques distincts de longueur ℓ en m ou bien par où passe au moins deux fois le même lacet de longueur ℓ en m . Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que E est vide.

a) On voit d'abord que m n'appartient pas à l'adhérence de E . Soit en effet a_i une suite de points de E tendant vers m . On peut supposer que les a_i sont tous dans la boule de centre m et de rayon le rayon d'injectivité i_m de M en m . Puisque a_i est dans E , il existe un vecteur unitaire u_i en m tel que la géodésique de condition initiale (m, u_i) arrive en a_i à la longueur ℓ_i vérifiant $\epsilon < \ell_i < \ell - \epsilon$ où ϵ est un nombre fixé vérifiant $0 < \epsilon < i_m$. Quitte à extraire

une sous-suite, (u_i, ℓ_i) converge dans le compact $S(m) \times [\epsilon, \ell - \epsilon]$ (où $S(m)$ est la sphère unité dans $T_m M$) vers une limite (v, r) avec donc $\epsilon \leq r \leq \ell - \epsilon$. Alors la géodésique de condition initiale (m, v) revient en m à la longueur r , ce qui contredit l'hypothèse L_q^m .

b) On voit ensuite que E est ouvert. En effet, d'après Nakagawa ([9] corollary 3.2), m n'a pas de point conjugué sur toutes les géodésiques issues de m ayant la longueur ℓ , donc l'exponentielle en m est régulière sur la boule ouverte de rayon ℓ dans l'espace tangent à M en m , et en particulier c'est un difféomorphisme local dans ce domaine. Si a est un point de E , l'image réciproque de a par cette exponentielle restreinte contient au moins quatre points, donc il existe un voisinage U de a dont l'image réciproque contient au moins quatre isomorphes de U distincts, et alors U est contenu dans E .

c) Soit enfin c un lacet géodésique de longueur ℓ en m rencontrant E . L'intersection $c \cap E$ est un ouvert de c . Soit a le point de l'adhérence de $c \cap E$ le plus proche de m le long de c (ou l'un d'eux si il y en a deux). Le point a n'est pas dans $c \cap E$. Soit a_i une suite de points de $c \cap E$ tendant vers a . On voit facilement qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini des a_i qui soient des points multiples de c . On les enlève et alors pour tout a_i , il existe une géodésique de condition initiale (m, u_i) distincte de c qui passe par a_i à la longueur ℓ_i avec $\ell_i < \ell$. Quitte à extraire une sous-suite, la suite (u_i, ℓ_i) converge vers (v, r) et la géodésique de condition initiale (m, v) arrive en a à la longueur r . Comme a n'est pas dans E , cette géodésique ne peut être que c (parcourue dans un sens ou dans l'autre), mais alors a serait conjugué de m le long de c . Donc E est vide.

On en déduit la caractérisation suivante :

THEOREME 2. — *Si M n'est pas simplement connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) M est une L -variété
- ii) M est une SL -variété
- iii) il existe (ξ, σ) vérifiant (A) tel que $M = X(\xi, \sigma)$

iv) M a le type d'homotopie du projectif réel de même dimension et son invariant de Browder-Livesay est nul.

Démonstration. — i) \Leftrightarrow ii) d'après le lemme ci-dessus.

iii) \Leftrightarrow iv) est une conséquence immédiate des résultats de S. Lopez de Medrano ([5] page 56).

iii) \Rightarrow ii) d'après la construction du paragraphe 3.

ii) \Rightarrow iii) : on déduit facilement du lemme que si N est le lieu des points à distance $\frac{\ell}{2}$ de m sur les géodésiques issues de m , alors N est une sous-variété de codimension un de M et M est la réunion du disque de rayon $\frac{\ell}{4}$ en m et du fibré normal en disques de rayon $\frac{\ell}{4}$ à N dans M .

Pour les C^r -variétés, on a un résultat plus précis :

THEOREME 3. — *Toute C^r -variété non simplement connexe est une SC^r -variété et est difféomorphe au projectif réel de même dimension.*

Remarque. — On rappelle que le fait qu'une SC^r -variété non simplement connexe soit difféomorphe au projectif réel est dû à Suguhara [11]. On va en donner ici une démonstration légèrement différente utilisant la méthode de Samelson pour la démonstration du théorème de Bott.

Démonstration du théorème 3. — Soit M une C^m -variété riemannienne non simplement connexe, de dimension d . D'après le lemme, c'est une SC^m -variété. On munit alors $P^d(\mathbb{R})$ d'une métrique riemannienne proportionnelle à la métrique canonique à courbure constante un et telle que la période commune des géodésiques toutes fermées de $P^d(\mathbb{R})$ soit ℓ . On choisit un point p de $P^d(\mathbb{R})$ et une isométrie vectorielle φ de $T_p P^d(\mathbb{R})$ sur $T_m M$. On forme alors l'application de Samelson f ainsi :

On envoie d'abord p sur m . Maintenant tout point x de $P^d(\mathbb{R})$ distinct de p est sur une et une seule géodésique fermée passant par p , de vecteur unitaire $u(x)$ en p , soit

$$x = \exp_p(r(x) u(x)) = \exp_p(\ell - r(x)) (-u(x)),$$

avec $0 < r(x) < \ell$. On pose

$$f(x) = \exp_m(r(x) \varphi(u(x))) = \exp_m((\ell - r(x)) \varphi(-u(x))).$$

Les deux expressions sont compatibles puisque

$$\varphi(-u(x)) = -\varphi(u(x))$$

et les vecteurs v et $-v$ engendrent la même géodésique fermée dans M . D'après le lemme, f est une bijection. C'est d'autre part un difféomorphisme local, puisque les deux exponentielles \exp_p et \exp_m sont régulières jusqu'au retour des géodésiques à la longueur ℓ . Donc f est un difféomorphisme.

Remarque. — Il existe des variétés différentiables du type d'homotopie de $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ dont l'invariant de Browder-Livesay est nul, et qui ne sont pas difféomorphes à $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, donc il existe des SL -variétés qui ne sont pas des C -variétés.

En comparant ce théorème au corollaire 4 du paragraphe 5, on a immédiatement le :

COROLLAIRE 7. — Si $\Sigma \in 2\Theta_{2n}$ ($n \neq 2$), alors

$$\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R}) \# \Sigma = \mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R}).$$

Inversement, d'après un résultat de Browder (voir [5] page 74), on sait que $\mathbb{P}^{4n-1}(\mathbb{R}) \# \Sigma$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^{4n-1}(\mathbb{R})$ si Σ est un élément non nul du sous-groupe $b\mathbb{P}^{4n}$ de Θ_{4n-1} formé des sphères qui bordent une variété parallélisable ($n \neq 1$), donc en appliquant le théorème 3 et le corollaire 3 du paragraphe 5, on obtient le :

COROLLAIRE 8. — Les difféomorphismes de S^{4n-2} qui représentent l'élément d'ordre 2 de $b\mathbb{P}^{4n}$ dans Θ_{4n-1} ($n \neq 1$) ne peuvent pas commuter à l'antipodie.

Ce résultat complète un peu la remarque qui suit le corollaire 2 du paragraphe 4.

9. Etude des F' -variétés.

Les variétés riemanniennes compactes à courbure constante positive et différentes des sphères et projectifs réels sont des exemples (en dimension impaire) de F'_ℓ^m -variétés (pour tout point m) qui ne peuvent pas être des L' -variétés d'après le théorème de Bott. Un autre exemple en dimension paire est donné par le Z_2 -quotient non orientable du projectif complexe de dimension complexe impaire.

On commence par rappeler quelques faits connus sur les F' -variétés :

PROPOSITION 2. — *Si M est une F' -variété, alors M est compacte et $\pi_1(M)$ est fini. En particulier le revêtement universel \tilde{M} de M est aussi une F' -variété.*

Démonstration. — Si M est une F'_ℓ^m -variété, alors \exp_m est définie sur tout $T_m M$ donc M est complète d'après le théorème de Hopf-Rinow. Puis M est compacte puisque tout point de M est à une distance de m inférieure ou égale à $\frac{\ell}{2}$.

On remarque ensuite que deux géodésiques de longueur ℓ issues de m sont homotopes à m fixé en tant que lacets topologiques : il suffit en effet de considérer la famille de telles géodésiques engendrées par une famille de vecteurs tangents en m joignant les deux vecteurs initiaux des géodésiques données. En particulier une géodésique issue de m de longueur ℓ est homotope à elle-même parcourue en sens inverse. Donc toute géodésique issue de m de longueur 2ℓ est homotopiquement triviale dans $\pi_1(M, m)$. Maintenant, dans toute classe d'homotopie de $\pi_1(M, m)$, il existe une géodésique de m à m minimisant la longueur des lacets de cette classe ; et la longueur d'une telle géodésique est inférieure à 2ℓ , car sinon on pourrait toujours enlever une partie homotopiquement triviale. Enfin les longueurs de ces géodésiques représentent les distances d'un point m_1 au-dessus de m dans le revêtement universel riemannien \tilde{M} de M aux autres points de l'image réciproque de m . Cette image réciproque est discrète et bornée dans \tilde{M} complète, donc elle n'a qu'un nombre fini de points et $\pi_1(M, m)$ est fini.

Comme toute géodésique issue de m et de longueur 2ℓ est homotopiquement triviale, son relèvement à partir de m_1 revient en m_1 à la longueur 2ℓ . Donc M est une $F_{2\ell}^{m_1}$ -variété (l'exemple du projectif réel montre que \tilde{M} n'est pas forcément une $F_{\ell}^{m_1}$ -variété).

THEOREME 4. — *Si M est une F -variété, alors l'anneau de cohomologie rationnelle de M a un et un seul générateur.*

Démonstration. — Si M est une F_{ℓ}^m -variété, m est en particulier conjugué à lui-même et d'ordre $d - 1$ le long de toute géodésique de longueur ℓ de m à m . Tout champ de Jacobi nul à l'origine le long d'une telle géodésique s'annule à nouveau à l'extrémité et plus généralement, en itérant, il s'annule à toute longueur multiple de ℓ . D'autre part, en appliquant le théorème de Sard à \exp_m restreinte au disque fermé de centre 0 et de rayon ℓ dans $T_m M$, on voit qu'il existe un point p de M , voisin de m , tel que p ne soit pas conjugué à m le long de toute géodésique de m à p et de longueur inférieure à ℓ . Alors il n'y a qu'un nombre fini de telles géodésiques : en effet, si il y en avait une infinité, on pourrait prendre une suite u_i de vecteurs unitaires en m et une suite r_i de longueurs inférieures ou égales à ℓ telles que la géodésique engendrée par u_i arrive en p à la longueur r_i . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (u_i, r_i) converge vers (u, r) et alors p serait conjugué à m le long de la géodésique engendrée par u et de longueur r .

On note alors c_0, c_1, \dots, c_n les $n + 1$ géodésiques distinctes de m à p de longueur inférieure à ℓ , ordonnées par leurs indices $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ entre m et p . On rappelle que l'indice d'une géodésique entre m et p est la somme des ordres des points conjugués à m le long de la géodésique *avant* le point p (qui n'est pas compté). On a $\lambda_0 = 0$ puisqu'il y a une géodésique minimisante, et d'autre part $\lambda_n = \lambda$ est l'indice commun de *toutes* les géodésiques issues de m et de longueur ℓ . En effet, m est conjugué à lui-même d'ordre maximal $d - 1$ le long de toute géodésique de longueur ℓ . D'après les propriétés classiques de continuité des points conjugués le long d'une famille de géodésiques issues d'un point, on voit que les points conjugués à m ne peuvent pas "traverser" la longueur ℓ et que le nombre de ces points avant la longueur ℓ est constant sur toute géodésique issue de m . Enfin on voit que $\lambda_n = \lambda$ en considérant

la géodésique minimisante de m à p , en la prolongeant jusqu'à la longueur ℓ et en prenant cette partie prolongée parcourue en sens inverse.

Maintenant, p n'est conjugué de m le long d'aucune géodésique : en effet toute géodésique de m à p repasse un certain nombre de fois par m avant de se terminer à travers l'une des c_i , et les champs de Jacobi nuls en m s'annulent de nouveau chaque fois qu'on repasse en m ; or p n'est pas conjugué à m le long des c_i . Plus précisément pour toute géodésique de m à p , il existe un entier k tel que sa longueur soit strictement comprise entre $k\ell$ et $(k + 1)\ell$; il y a exactement $n + 1$ géodésiques de m à p vérifiant cette inégalité et leurs indices sont exactement les entiers $\lambda_i + k(d - 1 + \lambda)$.

Soit $C(m, p)$ l'espace des chemins différentiables par morceaux de m à p . L'intégrale de l'énergie est une fonction de Morse dont les points critiques sont exactement les géodésiques de m à p ; ces points critiques sont non dégénérés puisque p n'est pas conjugué à m , et leurs indices sont aussi les entiers $\lambda_i + k(d - 1 + \lambda)$. En particulier, le nombre de points critiques d'indice j donné est borné par $n + 1$ quel que soit j , et donc tous les nombres de Betti de $C(m, p)$ sont bornés par $n + 1$. Alors $C(m, m)$ et $C(m, p)$ sont deux fibres de la fibration de Serre : $C(m, M) \rightarrow M$, où $C(m, M)$ est l'espace des chemins différentiables par morceaux issus de m dans M et l'application associe à un chemin son extrémité ; donc $C(m, p)$ et $C(m, m)$ ont même type d'homotopie.

Les nombres de Betti de $C(m, m)$ sont donc bornés et un théorème de D. Sullivan [12], p. 46, nous dit alors que l'anneau de cohomologie rationnelle de M n'a qu'un générateur.

Note. — L'emploi du théorème de Sullivan pour étudier les F -variétés m'a été suggéré par D. Gromoll que je tiens à remercier ici.

10. Commentaires.

a) On ne connaît pas d'exemple de F -variété simplement connexe qui ne soit pas une L -variété. On conjecture qu'une $F_{\mathbb{Q}}^m$ -variété riemannienne simplement connexe est en fait une $L_{\mathbb{Q}}^m$ -variété.

b) Les variétés riemanniennes obtenues par la construction du paragraphe 3 ont toutes un lieu de coupure confondu avec le lieu conjugué (pour m) et celui-ci est "sphérique" au sens de Warner [14]. Mais les L_q^m -variétés ne sont pas forcément de cette forme : si l'on prend par exemple une surface de Zoll et si l'on se place en un point qui n'est pas sur l'axe de rotation, le lieu de coupure et le lieu conjugué ne sont pas en général confondus et sont différents d'un point (ce qu'on obtient par la construction dans le cas de S^2) (voir [4]' 4.4.6). On peut donc se demander si les sphères exotiques qui ne peuvent pas être des C -variétés par la construction (parce que les difféomorphismes correspondants ne peuvent commuter à l'antipodie) ne pourraient pas être des C -variétés par une autre construction.

c) On peut utiliser une construction équivalente à celle du paragraphe 3 pour construire d'autres configurations curieuses de géodésiques : soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels sur deux variétés compactes N et N' et soit σ un difféomorphisme des fibrés en sphères $S(\xi)$ et $S(\xi')$. On peut recoller les fibrés en disques fermés $D(\xi)$ et $D(\xi')$ à l'aide de σ et mettre sur la variété M obtenue une métrique riemannienne telle que toute géodésique issue perpendiculairement à la sous-variété N (considérée comme l'image de la section nulle dans $D(\xi)$) revienne dans N à la longueur constante ℓ en passant par N' à la longueur $\frac{\ell}{2}$. Et toutes ces géodésiques seront fermées dès que $\tau(\xi) \circ \sigma = \sigma \circ \tau(\xi')$. Inversement il y a des analogues des théorèmes de Bott et de Warner pour ce genre de configuration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOTT, On manifolds all of whose geodesics are closed, *Ann. of Math.*, 60 (1954), 375-382.
- [2] J. EELLS and N.H. KUIPER, Manifolds which are like projective planes, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 14 (1962), 181-222.
- [3] R. HERMANN, A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle, *Proc. A.M.S.*, 11 (1960), 236-242.

- [4] W. KLINGENBERG, Manifolds with restricted conjugate locus, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 527-547.
- [4]' W. KLINGENBERG, Lectures on closed geodesics, (Livre en préparation)
- [5] S. LÓPEZ de MEDRANO, Involutions on manifolds, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1971.
- [6] K.H. MAYER, Fixpunktfreie Involutionsen von 7-sphären, *Math. Ann.*, 185 (1970), 250-258.
- [7] D. MONTGOMERY and C.T. YANG, Free differentiable actions on homotopy spheres, Proc. of Conf. on transformation groups, New Orleans 1967, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1968.
- [8] H. NAKAGAWA, A note on theorems of BOTT and SAMELSON, *J. Math. Kyoto Univ.*, 7-2 (1967), 205-220.
- [9] H. SAMELSON, On manifolds with many closed geodesics, *Portugaliae Mathematica*, 22 (1963), 193-196.
- [10] S. SMALE, On the structure of manifolds, *Amer. J. of Math.*, 84 (1962), 387-399.
- [11] K. SUGUHARA, On the cut locus and the topology of Riemannian manifolds, *J. Math. Kyoto Univ.*, 14-2 (1974), 391-411.
- [12] D. SULLIVAN, Differential forms and the topology of manifolds, *Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology*, Tokyo 1973, p. 37-51, Edited by Akio Mattori, Tokyo University Press 1975.
- [13] J. VILMS, Totally geodesic maps, *J. of Diff. Geom.*, 4 (1970), 73-79.
- [14] F. W. WARNER, Conjugate loci of constant order, *Ann. of Math.*, 86 (1967), 192-212.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1976

Proposé par J.L. Koszul

Lionel BERARD BERGERY,

UER de Mathématiques

Université Nancy I

Case Officielle 140

54037 Nancy Cedex.