

ELHANAN MOTZKIN

## **La décomposition d'un élément analytique en facteurs singuliers**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 27, n° 1 (1977), p. 67-82

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1977\\_\\_27\\_1\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_1_67_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LA DÉCOMPOSITION D'UN ÉLÉMENT ANALYTIQUE EN FACTEURS SINGULIERS

par Elhanan MOTZKIN

## 1. Introduction.

Soit  $K$  un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos. Une limite uniforme de fractions rationnelles sans pôles dans une partie  $A$  de  $K$  est dite *élément analytique* sur  $A$ . Un disque non-circonférencié maximal de  $CA$  est dit *trou* de  $A$ .

Etant donné un trou  $T$ , une fraction rationnelle  $R$  se factorise naturellement en un produit  $PQ$ , où tous les zéros et les pôles de  $P$  sont dans  $T$ , et tous les zéros et les pôles de  $Q$  sont dans  $CT$ .  $P$  sera dit le *facteur singulier* de  $R$  relatif au trou  $T$ . De plus,  $R$  est le produit de tous ses facteurs singuliers. On aimerait pouvoir généraliser aux éléments analytiques tout cela.

Nous définissons donc pour chaque trou  $T$  de  $A$  et chaque élément analytique  $f$  sur  $A$  un facteur singulier de  $f$  dans  $T$  qui contient, grosso modo, les pôles et les zéros de  $f$  dans  $T$ ; puis nous tâchons de reconstituer un élément analytique ayant les facteurs singuliers donnés dans les trous de  $A$ . Ce problème n'est pas sans analogie avec le problème étudié par M. Lazard [4]: trouver une fonction analytique dans une couronne ayant des zéros donnés. Mais l'analogie n'est que formelle: Lazard considère des fonctions analytiques qui ont une infinité de zéros dans la couronne considérée, alors que la condition qui nous permet d'affirmer que l'élément analytique  $f$  a des facteurs singuliers dans tous les trous de  $A$  implique que  $f$  n'a qu'un nombre fini de zéros dans  $A$ .

D'autre part, notre problème a des rapports étroits avec le problème de la décomposition additive d'un élément analytique suivant ses parties singulières (théorème de Mittag-Leffler [2]). Mais il n'est pas possible d'utiliser les fonctions exponentielle et logarithme pour passer d'une décomposition additive à une décomposition multiplicative (comme cela se fait pour le théorème de Weierstrass dans le cas complexe), car ces fonctions ont des domaines de convergence trop restreints.

Dans cet article, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément analytique ait un facteur singulier relatif à un trou donné non réduit à un point (théorème 1). Nous montrons dans quelles conditions les éléments analytiques sont assurés d'avoir des facteurs singuliers relatifs à tous les trous (théorème 2). Nous démontrons l'unicité du facteur singulier quand il existe (théorème 3).

Dans la section suivante (§ 6), après avoir décrit une classe importante d'éléments analytiques qui sont produits de leurs facteurs singuliers (lemme 1), nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément analytique se factorise en produit de ses facteurs singuliers (théorème 4).

Enfin dans la section § 7, nous donnons une application de ces résultats au prolongement analytique des solutions de l'équation différentielle  $u' - vu = 0$ .

Cette application, dans un cadre moins général, a été donnée par B. Dwork, et ce sont ses idées qui ont inspiré la présente étude.

## 2. Notations.

$K$  est un corps valué complet non-archimédien algébriquement clos.

On pose :

$$D(a, r^-) = \{x \in K ; |x - a| < r\} , \quad D(a, r^+) = \{x \in K ; |x - a| \leq r\}.$$

$A \subset \overline{K} = K \cup \{\infty\}$  est dit *infra-connexe* si, pour tout  $a \in K$ , l'adhérence dans  $\overline{R}_+$  de l'image de  $A$ , dans l'application  $x \rightarrow |x - a|$ , est un intervalle. On note cet intervalle  $|A|_a$ .

Notons  $\hat{A}$  le plus petit disque circonférencié contenant  $A$ . Le disque non-circonférencié  $T \subset A \cap \hat{A}$  est dit un *trou* de  $A$  si  $T$  est maximal.  $C\hat{A}$  est appelé le trou de  $A$  de centre  $\infty$ ; on le note  $T_\infty$ . On note  $\mathcal{T}(A)$  la famille des trous de  $A$ .

Un *élément analytique* sur  $A$  est la limite uniforme sur  $A$  d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$ . On note  $H(A)$  l'espace des éléments analytiques sur  $A$ . Pour  $f \in H(A)$ , on pose

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

( $\|f\|_A$  peut être infini et n'est donc pas une norme). Si pour tout ouvert  $B \subset A$  l'application naturelle  $H(A) \rightarrow H(B)$  est injective,  $A$  est dit *ensemble analytique*. Si  $B \subset A$  est un ouvert, et  $A$  est un ensemble analytique,  $f \in H(A)$  est dit le *prolongement analytique* de  $f|_B \in H(B)$  dans  $A$ .

Soient  $A$  un infra-connexe fermé dans  $\bar{K}$ ,  $T = D(a, r^-)$  un trou de  $A$ ,  $f$  un élément analytique sur  $A$ . On dit que  $f$  a un *facteur singulier*  $g$  dans  $T$  si

a) il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $(x - a)^m g \in H(CT)$ , ne s'annule pas dans  $CT$ , et tend vers 1 à l'infini.

b)  $f/g$  se prolonge analytiquement dans  $T$ , et le prolongement  $h$  ne s'annule pas dans  $T$ .

La définition du facteur singulier privilégiant l'infini, il nous faut une définition spéciale pour le trou  $T_\infty$ .

Si donc  $T = T_\infty$ ,  $f$  a un facteur singulier  $g$  dans  $T$  si

a')  $g \in H(\hat{A})$  et ne s'annule pas dans  $\hat{A}$ .

b')  $f/g$  se prolonge analytiquement en  $h$  dans  $T_\infty \setminus \{\infty\}$ ,  $h$  ne s'annule pas dans  $T_\infty \setminus \{\infty\}$ , et il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{-m} h$  tende vers 1 à l'infini.

*Notation* : Le facteur singulier de  $f$  relatif à  $T$  sera noté  $f^T$ .

*Note 1.* Pour les fractions rationnelles, l'existence et l'unicité des facteurs singuliers sont évidentes.

*Note 2.* Le facteur singulier n'est pas stable par transformation homographique, ni n'est transformé de façon naturelle. Considérons l'ensemble  $A = \{x \mid |x| = 1\}$ , le trou  $T = D(0, 1^-)$ , la fonction  $f(x) = x$ , et la transformation  $\varphi(x) = x/(x - 1)$ . Alors

$$f^T \circ \varphi = x/(x-1) \neq x = (f \circ \varphi)^{\varphi^{-1}(T)}.$$

*Exemple 0.* — Soit  $f$  une fraction rationnelle

$$R = c((\prod_i(x - a_i))/(\prod_j(x - b_j))).$$

Alors le facteur singulier de  $f$  relatif au trou  $T$  est

$$g = (\prod_{a_i \in T}(x - a_i))/(\prod_{b_j \in T}(x - b_j)).$$

Cet exemple montre la nécessité du facteur  $(x - a)^m$  dans la définition du facteur singulier.

*Remarque 0.* — Si  $B \subset A$ , et  $T$  est un trou à la fois de  $B$  et de  $A$ , alors pour un  $f \in H(A)$  possédant un facteur singulier  $g$  par rapport à  $T$ , la restriction  $f|_B$  de  $f$  à  $B$  aura également  $g$  comme facteur singulier par rapport à  $T$ .

### 3. Rappels.

a) *La fonction et le polygone de valuation.*

Pour  $a \in K$ ,  $P \in K[X]$ , et  $r \in \underline{\mathbb{R}}_+$ , on pose

$$|P|_a(r) = \sup_{|x-a|=r} |P(x)|.$$

Pour  $a \in K$ ,  $R = \frac{P}{Q} \in K(X)$ , et  $r \in \underline{\mathbb{R}}_+$ , on pose

$$|R|_a(r) = |P|_a(r)/|Q|_a(r).$$

Pour  $A$  infra-connexe,  $a \in \hat{A}$ ,  $f \in H(A)$ , et  $r \in |A|_a$ , on pose

$$|f|_a(r) = \lim_n |R_n|_a(r),$$

où  $\{R_n\}$  est une suite de fractions rationnelles sans pôles dans  $A$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $A$ . On montre que la limite existe et ne dépend pas de la suite considérée. Si  $|f - g|_a(r) < |f|_a(r)$ , alors  $|f|_a(r) = |g|_a(r)$ .

Si  $f \in H(D(a, r))$ ,  $K$  algébriquement clos implique que

$$\|f\|_{D(a,r)} = |f|_a(r).$$

C'est le *principe du maximum*.

Le graphe de  $(\log r, \log f_a(r))$  est dit le *polygone de valuation* de  $f$  relatif au point  $a$ . Il est linéaire par morceaux.

Si  $R \in K(x)$ , la pente à gauche (resp. à droite) de  $\log|R|_a$  au point  $r$  montre la différence entre le nombre de zéros et de pôles de  $R$  dans  $D(a, r^-)$  (resp.  $D(a, r^+)$ ). Le changement de pente de  $\log|R|_a$  au point  $r$  indique donc la différence entre le nombre de zéros et de pôles de  $R$  sur la circonférence  $|x - a| = r$ .

Si  $R \in K(x)$ ,  $A$  est un infra-connexe, et  $T$  un trou de  $A$ , alors  $m(R, T)$  désigne la différence entre le nombre de pôles et de zéros de  $R$  dans  $T$ . Si  $T = D(a, r)$ ,  $R' \in K(x)$  et  $|R - R'|_a(r) < |R|_a(r)$ , alors  $m(R, T) = m(R', T)$ .

b) *Le théorème de Mittag-Leffler* [2].

Soient  $A$  infra-connexe,  $f \in H(A)$  et  $f$  tend vers 0 à l'infini. Pour chaque  $T \in \mathfrak{C}(A)$ , il existe un unique  $f_T \in H(CT)$ , tel que  $f_T$  tende vers 0 à l'infini, et  $f = \sum_{T \in \mathfrak{C}(A)} f_T$ , la série convergeant uniformément sur  $A$ . On a de plus

$$\|f\|_A = \sup_{T \in \mathfrak{C}(A)} \|f_T\|_{CT}.$$

$f_T$  est dite *partie singulière* de  $f$  relative au trou  $T$ .

Soient  $f \in H(A)$  et  $T = D(a, r^-)$  un trou de  $A$ . On pose

$$s(f, T) = |f|_a(r).$$

Si  $T = T_\infty = \{x \in K ; |x - a| > r\}$ , on pose  $s(f, T_\infty) = |f|_a(r)$ .

Or il résulte facilement de la démonstration de P. Robba du théorème de Mittag-Leffler ([2], lemme 4.5) que l'estimation

$$\|f_T\|_{CT} \leq \|f\|_A$$

peut être améliorée. En fait on a :

$$\|f_T\|_{CT} \leq s(f, T). \tag{*}$$

#### 4. Existence du facteur singulier.

THEOREME 1. — Soit  $A$  un infra-connexe fermé dans  $\overline{K}$ ,  $T$  un trou de  $A$ ,  $f$  un élément analytique sur  $A$ . Alors  $f$  possède un facteur singulier relatif à  $T$ , si et seulement si,  $s(f, T) > 0$ .

*Démonstration.*

a) La condition est nécessaire. — On suppose donc que  $f$  a le facteur singulier  $g$  relatif à  $T$  et que  $f/g = h$  se prolonge dans

$$T = D(a, r^-).$$

Notons que  $r > 0$ ,  $T$  étant ouvert. Alors, pour tout  $\rho \geq r$ ,

$$|(x - a)^m g|_a(\rho) = 1,$$

car  $(x - a)^m g$  n'a ni zéros, ni pôles dans  $CT$  ;  $\log |(x - a)^m g|_a$  n'a donc pas de changements de pente dans  $CT$ , et comme c'est 0 à la limite, c'est 0 partout dans  $CT$ .

Ainsi  $|g|_a(\rho) = \rho^{-m}$ ,  $\rho \geq r$ . De même,  $|h|_a(\rho) = \sigma$ ,  $\rho \leq r$ , où  $\sigma$  est une constante non nulle. D'où

$$|f|_a(r) = |h|_a(r) \cdot |g|_a(r) = \sigma r^{-m} \neq 0.$$

$$\text{Or } s(f, T) = |f|_a(r).$$

b) La condition est suffisante. — On suppose donc que  $s(f, T) > 0$ . Nous allons d'abord construire le facteur singulier  $g$ . Considérons d'abord deux fractions rationnelles  $R$  et  $R'$ . Soient  $P = R^T$ ,  $Q = R/P$ ,  $P' = (R')^T$  et  $Q' = R'/P'$ .

Supposons maintenant que

$$|R - R'|_a(r) < |R|_a(r) = s(R, T) = s(R', T).$$

Alors les fonctions de valuation  $|R|_a(\rho)$  et  $|R'|_a(\rho)$  coïncident au voisinage de  $r$ . Donc  $m(R, T) = m(R', T)$ . Alors

$$|(x - a)^{m(R, T)} P|_a(\rho) = 1 \quad \text{et} \quad |(x - a)^{m(R, T)} P'|_a(\rho) = 1, \quad \rho \geq r,$$

pour les raisons données pour l'égalité analogue dans la partie a) de la démonstration. Donc

$$|P|_a(r) = |P'|_a(r) = r^{-m(R, T)}.$$

Ainsi

$$|Q|_a(r) = |Q'|_a(r) = r^{m(R, T)} \cdot s(R, T).$$

On a alors

$$\left| \frac{P}{P'} - \frac{Q'}{Q} \right|_a(r) = \left| \frac{R - R'}{P' Q'} \right|_a(r) = \frac{|R - R'|_a(r)}{s(R, T)}. \quad (1)$$

Or tous les pôles de  $Q'/Q$  sont dans  $CT$ , tous les pôles de  $P/P'$  sont dans  $T$ , et  $((x - a)^{m(R, T)} P)/((x - a)^{m(R', T)} P') = P/P'$  tend vers 1 à l'infini. Il s'ensuit que  $(P/P') - 1$  est la partie singulière de  $(R - R')/P'Q$  relative à  $T$ . Nous avons donc (par le principe du Maximum et par l'inégalité  $(*)$  de § 3b) :

$$\left\| \frac{P}{P'} - 1 \right\|_{CT} = \left| \frac{P}{P'} - 1 \right|_a(r) \leq (|R - R'|_a(r))/(s(R, T)). \quad (2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|(x - a)^{m(R, T)} P(x) - (x - a)^{m(R', T)} P'(x)\|_{CT} \\ \leq (|R - R'|_a(r))/(s(R, T)). \end{aligned} \quad (2')$$

(1) et (2) impliquent

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q'}{Q} - 1 \right|_a(r) &= \left| \frac{Q'}{Q} - \frac{P}{P'} + \frac{P}{P'} - 1 \right|_a(r) \\ &\leq \max \left\{ \left| \frac{Q'}{Q} - \frac{P}{P'} \right|_a(r), \left| \frac{P}{P'} - 1 \right|_a(r) \right\} \leq \frac{|R - R'|_a(r)}{s(R, T)} \end{aligned} \quad (3)$$

et par suite, par le principe du maximum,

$$\|Q' - Q\|_T \leq r^{m(R, T)} |R - R'|_a(r). \quad (4)$$

Maintenant, considérons une suite de fractions rationnelles  $(R_n)$  sans pôles dans  $A$ , convergeant uniformément sur  $A$  vers  $f$ . Comme par hypothèse  $s(f, T) > 0$ , pour tous  $k, n$  assez grands on a

$$\|R_n - f\|_A \leq \epsilon < s(f, T) = |f|_a(r), \quad \|R_k - f\|_A \leq \epsilon.$$

En particulier, on a  $|R_n - f|_a(r) \leq \epsilon$ ,  $|R_k - f|_a(r) \leq \epsilon$  et donc

$$|R_n - R_k|_a(r) \leq \epsilon.$$

Alors

$$|R_k|_a(r) = |R_n|_a(r) = |f|_a(r) = s(f, T) = s(R_n, T) = s(R_k, T).$$

Donc

$$m(R_n, T) = m(R_k, T) \quad \text{pour tous } k, n \text{ assez grands.} \quad (5)$$

On notera cette valeur commune  $m(f, T)$ .



Soient  $P_n = (R_n)^T$ ,  $Q_n = R_n/P_n$ ,  $P_k = (R_k)^T$  et  $Q_k = R_k/P_k$ .  
On a alors, par (2')

$$\|(x-a)^{m(f,T)} P_n(x) - (x-a)^{m(f,T)} P_k(x)\|_{CT} \leq \frac{\epsilon}{s(f,T)}. \quad (6)$$

La suite  $\{(x-a)^{m(f,T)} P_n\}$  est donc une suite de Cauchy convergeant uniformément dans CT vers un élément analytique que nous noterons  $(x-a)^{m(f,T)} g$ .  $g$  est alors le facteur singulier recherché, car, pour tout  $n$ ,

$$|(x-a)^{m(f,T)} P_n(x)| = 1, \quad \forall x \in CT,$$

ce qui implique que

$$|(x-a)^{m(f,T)} g(x)| = 1, \quad \forall x \in CT. \quad (7)$$

Donc  $g(x) \neq 0$  dans CT. D'autre part, pour tout  $n$ ,

$$(x-a)^{m(f,T)} P_n(x)$$

tend vers 1 à l'infini, donc  $(x-a)^{m(f,T)} g(x)$  tend vers 1 à l'infini.

Il nous reste à démontrer que  $h = f/g$  se prolonge dans T. On a, par (4),

$$\|Q_n - Q_k\|_T \leq r^{m(f,T)} |R_n - R_k|_a(r) \leq r^{m(f,T)} \epsilon.$$

On observe, d'autre part, que, pour tout  $\rho > r$ ,

$$\|R_k\|_{A \cap D(a, \rho)} = \|f\|_{A \cap D(a, \rho)}$$

(car  $\|R_k - f\|_A \leq \epsilon < s(f, T) \leq \|f\|_A$ ), que

$$\|P_k - P_n/P_k\|_{A \cap D(a, \rho)} \leq \epsilon/s(f, T)$$

(par (2)), que

$$\|1/P_n\|_{A \cap D(a, \rho)} \leq \max\{r^{m(f,T)}, \rho^{m(f,T)}\},$$

et que

$$(\|f\|_{A \cap D(a, \rho)})/(s(f, T)) \geq 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|Q_n - Q_k\|_{A \cap D(a, \rho)} &\leq \max \left\{ \left\| \frac{R_n - R_k}{P_n} \right\|_{A \cap D(a, \rho)}, \left\| R_k \frac{P_k - P_n}{P_k P_n} \right\|_{A \cap D(a, \rho)} \right\} \\ &\leq \|f\|_{A \cap D(a, \rho)} \cdot \frac{\epsilon}{s(f, T)} \max\{r^{m(f,T)}, \rho^{m(f,T)}\}. \end{aligned}$$

Donc la suite  $\{Q_n\}$  est une suite de Cauchy convergeant uniformément dans  $(A \cup T) \cap D(a, \rho)$  vers un élément analytique  $h$ . Comme  $Q_n = R_n/P_n$  converge vers  $f/g$  dans  $A \cap D(a, \rho)$ , cela montre que  $h$  est le prolongement analytique de  $f/g$  dans  $T$ . Finalement, comme, pour tout  $n$ ,  $Q_n$  ne s'annule pas dans  $T$ , il en est de même pour  $h$ .

Ceci achève la démonstration lorsque  $T \neq T_\infty$ . La démonstration pour le cas  $T = T_\infty$  est analogue.

La condition pour l'existence d'un facteur singulier dépend donc à la fois de  $f$  et de  $T$ . Existe-t-il une condition portant uniquement sur  $T$  assurant que tout élément analytique  $f$  sur  $A$  a un facteur singulier relatif à  $T$  ?

THEOREME 2. — Soit  $A$  un ensemble analytique fermé dans  $\bar{K}$ , et soit  $T$  un trou de  $A$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Quel que soit  $f \in H(A)$ ,  $f \not\equiv 0$ ,  $f$  a un facteur singulier relatif à  $T$ .

b)  $A \cup T$  est un ensemble analytique.

*Démonstration.* — D'abord notons qu'il se peut que  $A$  soit analytique et que  $A \cup T$  soit non-analytique. En effet, soit  $r_n$  une suite croissante de réels tendant vers 1. Soit

$$\Gamma_n = \{x \mid |x| = r_n\} \quad \text{et} \quad A = D(0, 1^-) \setminus \bigcup_n \Gamma_n.$$

$A$  est quasi-connexe, et donc analytique (voir [1]). Les classes résiduelles sont des trous de  $A$ . Soit  $T$  une classe résiduelle quelconque. Alors  $A \cup T$  n'est pas analytique.

b) implique a). — Soient donc  $f \not\equiv 0$ ,  $f \in H(A)$ . Il suffit de montrer que  $s(f, T) > 0$ , car alors on pourra appliquer le théorème 1. Or si  $s(f, T) = 0$ , d'après § 3 (\*), la partie singulière de  $f$  relative au trou  $T$  est nulle, et donc  $f$  se prolonge analytiquement dans  $T$ . Mais nous avons par le principe du maximum :

$$\|f\|_T = s(f, T) = 0.$$

$f$  est donc identiquement nulle dans  $T$ . Comme  $A \cup T$  est analytique par hypothèse, cela veut dire que  $f$  est identiquement nulle dans  $A \cup T$ . Mais ceci contredit l'hypothèse que  $f \not\equiv 0$  dans  $A$ .

a) implique b). — Il suffit de montrer que si  $A \cup T$  n'est pas analytique, alors il existe un  $f \in H(A)$ ,  $f \neq 0$ , vérifiant  $s(f, T) = 0$ . Or  $A \cup T$  n'étant pas analytique, il existe un  $f \in H(A \cup T)$ ,  $f \neq 0$ ,  $f$  identiquement nulle au voisinage d'un point  $a \in A \cup T$ . Si  $a \in A$ , alors, comme  $A$  est analytique,  $f$  est identiquement nulle dans  $A$  et par conséquent  $s(f, T) = 0$  et donc  $f$  est identiquement nulle dans  $T$  (par le principe du maximum), ce qui contredit l'hypothèse  $f \neq 0$ . Donc  $a \in T$ ; mais comme  $T$  est analytique,  $f$  est identiquement nulle dans  $T$ , donc  $s(f, T) = 0$ . Il reste à montrer que  $f$  n'est pas l'élément 0 de  $H(A)$ . Mais ceci est évident, car  $f \equiv 0$  dans  $T$  et  $f \equiv 0$  dans  $A$  impliquent que  $f \equiv 0$  dans  $A \cup T$ , contrairement à l'hypothèse.

### 5. Unicité du facteur singulier.

THEOREME 3. — Soient  $A \subset K$ ,  $T = D(a, r)$  un trou de  $A$ ,  $f \in H(A)$ , et supposons que  $f$  ait un facteur singulier relatif à  $T$ . Alors le facteur singulier est unique.

*Démonstration.* — Supposons  $A$  borné et soit  $f \in H(A)$  ayant un facteur singulier  $g$  relatif au trou  $T = D(a, r^-)$ . Il résulte du théorème 1 que  $s(f, T) > 0$ . Notons  $g_1$  le facteur singulier de  $f$  relatif à  $T$  construit dans la démonstration du théorème 1. Nous allons montrer que  $g = g_1$ .

Soit  $f = gh$  la décomposition de  $f$  associée à  $g$ . Pour chaque  $n = 1, 2, 3, \dots$ , choisissons des fractions rationnelles  $G_n$  et  $H_n$  sans pôles dans  $T$ , resp.  $A \cup T$ , telles que

$$\|(x - a)^m (g - G_n)\|_{CT} \leq \frac{1}{n},$$

$$\|h - H_n\|_{A \cup T} \leq \frac{1}{n},$$

et que  $(x - a)^m G_n(x)$  soit égale à 1 à l'infini.

Alors pour  $n$  assez grand,  $(x - a)^m G_n$  ne s'annule pas dans  $CT$  et  $H_n$  ne s'annule pas dans  $T$  (de même que  $(x - a)^m g$  et  $h$ , resp.). D'autre part, comme  $A$  est borné,  $g$  appartient à  $H(A)$ , et l'on voit que  $R_n = G_n H_n$  converge vers  $f$  dans  $H(A)$ . De plus, pour  $n$  assez grand,  $G_n$  est le facteur singulier de  $R_n$  relatif à  $T$ . Il résulte

alors de l'inégalité (2') de la démonstration du théorème 1 que  $(x - a)^m G_n$  converge vers  $(x - a)^m g_1$  dans CT, ce qui montre que  $g_1 = g$ .

Le cas du trou  $T_\infty$  se traite de façon similaire.

Si A n'est pas borné, rappelons que  $T = D(a, r^-)$ , et choisissons  $\rho > r$ . Alors  $B = A \setminus D(a, \rho^-)$  est borné, T est un trou de B, et d'après la remarque 0, tout facteur singulier  $g$  de  $f \in H(A)$  relatif à T est facteur singulier de  $f|_B$ . Par conséquent l'unicité dans le cas non-borné résulte de l'unicité dans le cas borné.

## 6. Décomposition en produit de facteurs singuliers.

Si  $f$  a un facteur singulier  $f^T$  relatif à chaque trou T, peut-on reconstituer  $f$  comme produit de ses facteurs singuliers ? La réponse est oui si A est un infra-connexe fermé (dans  $\bar{K}$ ) et si  $f$  est quasi-inversible.

LEMME 1. — Soit A un infra-connexe fermé, et soit  $f \in H(A)$  tel que

$$s = \inf_{T \in \mathfrak{C}(A)} s(f, T) > 0.$$

Alors il existe un polynôme F, dont les zéros sont les zéros de  $f$  dans A, tel que  $f = F \prod_{T \in \mathfrak{C}(A)} f^T$ , le produit convergeant uniformément sur A. (Si  $\infty \in A$ , les éventuels zéros de  $f$  situés à l'infini sont laissés de côté par F).

*Démonstration.* — Commençons par montrer que le produit  $\prod_{T \in \mathfrak{C}(A)} f^T$  converge uniformément sur A.

Soit R une fraction rationnelle sans pôles dans A telle que  $\|R - f\|_A \leq \epsilon < s$ . Alors d'après ce qu'on a vu ((5) dans la démonstration du théorème 1), on a

$$m(f, T) = m(R, T).$$

Mais comme dans presque tous les trous (c'est-à-dire dans tous sauf un nombre fini) R n'a ni zéros ni pôles, on a  $m(f, T) = 0$  et  $R^T = 1$  pour presque tous les trous T de  $\mathfrak{C}(A)$ .

D'autre part, en faisant tendre  $k$  vers l'infini dans la majoration (6) de § 4, on voit que l'on a pour tous les  $T$

$$\|(x - a)^{m(f, T)} (f^T - R^T)\|_{CT} \leq \frac{\epsilon}{s(f, T)} \leq \frac{\epsilon}{s}.$$

Comme  $m(f, T) = m(R, T) = 0$  et  $R^T = 1$  pour presque tous les trous  $T$  de  $\mathfrak{C}(A)$ , on a pour presque tous les trous  $T \in \mathfrak{C}(A)$

$$\|f^T - 1\|_A \leq \|f^T - 1\|_{CT} \leq \frac{\epsilon}{s}.$$

Ceci montre que le produit  $\prod f^T$  converge uniformément sur  $A$ .

Posons donc  $g = \prod_{T \in \mathfrak{C}(A)} f^T$ . Ce qui nous reste à démontrer, est que  $f/g$  est un polynôme dont les zéros sont les zéros de  $f$ .

Fixons un  $S \in \mathfrak{C}(A)$ ,  $S \neq T_\infty$ , et notons  $G^S = \prod_{T \in \mathfrak{C}(A), T \neq S} f^T$ . Alors  $G^S$  converge uniformément sur  $A \cup S$ , car si  $T \neq S$ , alors, comme plus haut,

$$\|f^T - 1\|_{A \cup S} \leq \|f^T - 1\|_{CT} \leq \frac{\epsilon}{s}.$$

On va noter  $\Delta$  le disque  $\hat{A}$  si  $A$  est borné, et un disque quelconque contenant  $S$  si  $A$  n'est pas borné. Soit  $\rho$  le diamètre de  $\Delta$  et soit  $r_T$  le diamètre de  $T$ . Alors on a, par (7)

$$\inf_{x \in (S \cup A) \cap \Delta} |G^S(x)| \geq \prod_{T \neq S} \inf(r_T^{-m(f, T)}, \rho^{-m(f, T)}).$$

Comme  $m(f, T) = 0$  pour presque tout  $T$ , presque tous les termes du produit valent 1. Le produit est donc strictement positif, ce qui montre que  $1/G^S$  est un élément analytique dans  $(A \cup S) \cap \Delta$ . On a donc, dans  $A \cap \Delta$ ,

$$f/g = (f/f^S) (1/G^S).$$

Mais  $f/f^S \in H((A \cup S) \cap \Delta)$  tout comme  $1/G^S$ , donc  $f/g$  se prolonge dans  $S$ . (Ceci est équivalent à dire que la partie singulière  $(f/g)_S$  de  $f/g$  relative au trou  $S$  est nulle).

On voit de même que  $f/g$  se prolonge analytiquement dans  $(A \cup T_\infty) \cap D$  pour tout disque  $D$  borné. Il en résulte que  $f/g$  est une fonction entière. On sait par ailleurs que, si  $m$  désigne  $\sum_{T \in \mathfrak{C}(A)} m(f, T)$ ,

alors  $x^{-m} \frac{f(x)}{g(x)}$  tend vers une constante quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Car si  $\infty \notin A$ , alors

$$x^{-m} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{-m(f, T_\infty)} f}{f^{T_\infty}} \prod_{T \neq T_\infty} \frac{1}{x^{m(f, T)} f^T}$$

et  $x^{m(f, T)} f^T \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$  pour chaque  $T$  puisque  $(x - a)^{m(f, T)} f^T \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$ ; et si  $\infty \in A$ , alors

$$\frac{x^{-m}}{g} f = f \prod \frac{1}{x^{m(f, T)} f^T},$$

où  $x^{m(f, T)} f^T \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $f$  est borné à l'infini. Le théorème de Liouville nous dit alors que  $f/g$  est un polynôme  $F$  de degré  $m$ .

Comme  $f/g$  ne s'annule pas dans les trous de  $A$ , tous les zéros de  $F$  sont situés dans  $A$  et sont des zéros de  $f$ . Réciproquement, un zéro de  $f$  dans  $A$  est forcément un zéro de  $F$ , car  $g$  ne s'annule pas dans  $A$ .

**THEOREME 4.** — Soit  $A$  un infra-connexe fermé et soit  $f \in H(A)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a)  $f$  a un facteur singulier  $f^T$  relatif à chaque trou  $T$  de  $A$  et

$$f = F \prod_{T \in \mathfrak{C}(A)} f^T,$$

$F$  étant un polynôme et le produit convergeant uniformément sur  $A$ .

b)  $f$  a un nombre fini de zéros  $a_1, \dots, a_n$  dans  $A$  (chacun compté avec son ordre de multiplicité), et  $f = \prod_i (x - a_i) g$ , où  $g$  et  $1/g$  sont des éléments analytiques sur  $A$ . (Si  $\infty \in A$  et si  $f$  a un zéro d'ordre  $k$  à l'infini, la formule devient  $f = (1/(x - a)^k) \prod_i (x - a_i) g$ , avec  $a \notin A$ ). Autrement dit,  $f$  est quasi-inversible <sup>(1)</sup>.

*Démonstration.*

a) implique b).

Cas 1.  $\infty \notin A$ . — Alors  $A$  fermé implique  $A$  borné.  $g = \prod_{T \in \mathfrak{C}(A)} f^T$  est un élément analytique sur  $A$ , puisque le produit converge uniformément sur  $A$ . D'autre part,  $g$  est borné inférieurement en module sur  $A$  par une constante  $> 0$ , puisque, pour presque tous les  $T \in \mathfrak{C}(A)$ ,

(1) Dans [5] A. Escassut a caractérisé les infra-connexes fermés  $A$  pour lesquels tout le  $f \in H(A)$  est quasi-inversible.

$|f^T(x)| = 1$  sur  $A$ , et, dans les autres cas  $|f^T(x)| = |x - \alpha|^{-m(g,T)}$ , où  $\alpha \in T$ . Comme  $\alpha \notin A$ ,  $|f^T(x)| \geq c > 0$ , puisque  $A$  est fermé et borné.

*Cas 2.*  $\infty \in A$ . — Soit  $k$  l'ordre de multiplicité de  $f$  à l'infini et soit  $a \in A$ . Comme précédemment,  $\prod_{T \in \mathfrak{G}(A)} f^T$  est un élément analytique sur  $A$  qui a un zéro d'ordre  $k$  à l'infini. Donc si

$$g = (x - a)^k \prod_{T \in \mathfrak{G}(A)} f^T,$$

alors  $g$  est un élément analytique sur  $A$  non-nul à l'infini, et  $g$  est borné inférieurement par une constante  $> 0$  dans le complémentaire d'un disque borné convenable  $D$ . Dans  $D \cap A$  on a vu dans le lemme que  $g$  est borné inférieurement en module par une constante  $> 0$ , il en est donc de même sur  $A$ .

Dans les deux cas, on a que  $1/g$  est un élément analytique sur  $A$ . Il reste à montrer que les zéros de  $F$  appartiennent à  $A$  et sont les zéros de  $f$  dans  $A$ . En effet,  $f = F \prod_{T \in \mathfrak{G}(A)} f^T$  implique

$$f^T = F^T \cdot \left( \prod_{T \in \mathfrak{G}(A)} f^T \right)^T = F^T f^T,$$

car  $(f^T)^S = 1$  si  $T \neq S$  et  $(f^T)^T = f^T$ . Donc  $F^T = 1$ ,  $\forall T \in \mathfrak{G}(A)$ , c'est-à-dire que tous les zéros de  $F$  sont dans  $A$ . Réciproquement, chaque zéro de  $f$  dans  $A$  est forcément un zéro de  $F$ .

b) implique a).

On suppose donc que  $g = f/\prod_i(x - a_i)$  est un élément analytique sur  $A$ , et que  $1/g$  l'est également. Alors on a, pour tout  $T \in \mathfrak{G}(A)$ ,

$$s(g, T) = \frac{1}{s((1/g), T)} \geq \frac{1}{\|1/g\|_A} = s > 0,$$

ce qui d'après le lemme 1 entraîne la décomposition multiplicative de  $g$ , et donc de  $f$ .

## 7. Application.

**PROPOSITION 1.** — Soit  $A$  un infra-connexe fermé. Soit  $u$  un élément analytique sur  $A$  tel que  $u'/u = v$  soit également un élément analytique sur  $A$ . Soient  $T$  un trou de  $A$ . Si  $v$  se prolonge dans  $T$  (et  $v(\infty) = 0$  lorsque  $T = T_\infty$ ), alors  $u$  se prolonge également dans  $T$ .

*Démonstration.*

a) Si  $s(u, T) = 0$ , alors on sait que  $u$  se prolonge par 0 dans  $T$  (voir théorème 2, (b  $\Rightarrow$  a), et § 6, remarque 1).

b) Supposons  $s(u, T) > 0$ . Alors  $u$  a un facteur singulier  $g$  relatif à  $T$  (théorème 1), et  $h = u/g$  se prolonge dans  $T$ . Alors

$$g'/g + h'/h = u'/u = v.$$

Considérons d'abord le cas où  $T \neq T_\infty$ .

Alors  $h'/h$  est un élément analytique dans  $A \cup T$ , donc sans pôles dans  $T$ , et  $g'/g$  est un élément analytique dans  $CT$  tendant vers 0 à l'infini (comme on le voit en considérant le développement en série de Laurent de  $g$  dans  $CT$  et en remarquant que ce développement n'a qu'un nombre fini de termes non-nuls avec exposant positif). Il en résulte que la partie singulière  $v_T$  de  $v$  relative au trou  $T$  est précisément  $v_T = g'/g$ .

Mais dire que  $v$  se prolonge dans  $T$ , c'est dire que  $v_T = 0$ . Donc  $g' = 0$ . Donc  $g = 1$ . Donc  $u = h$ . Mais  $h$  se prolonge dans  $T$ .

Si  $T = T_\infty$ ,  $h'/h$  est un élément analytique dans  $A \cup T_\infty$  sans pôles dans  $T_\infty$  et tendant vers 0 à l'infini, et  $g'/g$  est un élément analytique dans  $T_\infty$ . Comme  $v$  tend vers 0 à l'infini, il en résulte que la partie singulière  $v_\infty$  de  $v$  relative au trou  $T$  est précisément  $v_\infty = g'/g$ . La démonstration se termine alors comme précédemment.

*Remarque.* — Dans le cas où  $T = T_\infty$  et  $v(\infty) \neq 0$ ,  $u$  ne se prolonge pas dans  $T_\infty$  comme on le voit en considérant le cas de l'exponentielle :  $A = D(0, r^-)$ ,  $r < p^{-1/p-1}$ ,  $u = \exp x$ ,  $v = 1$ .

*Conjecture.* — Soit  $A$  un infra-connexe fermé, et soit

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n, \quad \text{où } a_i \in H(A), \quad i = 1, \dots, n.$$

Supposons  $u \in H(A)$  telle que  $Lu = 0$ , et soit  $T$  un trou de  $A$ . Si tous les  $a_i$  se prolongent dans  $T$ , alors  $u$  se prolonge dans  $T$ . (voir [3]).



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. MOTZKIN et P. ROBBA, Prolongement analytique en analyse  $p$ -adique Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux 1968/69, exposé n° 3.
- [2] P. ROBBA, Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets. "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", *Astérisque*, n° 10 (1973) 109-218.
- [3] P. ROBBA, Prolongement des solutions d'une équation différentielle  $p$ -adique, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 269 (1974), 153-154.
- [4] M. LAZARD, Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, *I.H.E.S. Publ. Math.*, n° 14 (1962).
- [5] A. ESCASSUT, Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse de 3<sup>e</sup> Cycle, Fac. Sci. de Bordeaux (1970).

Manuscrit reçu le 7 juillet 1975

Révisé le 13 décembre 1976

Proposé par J. Martinet.

Elhanan MOTZKIN,  
194, rue du Château des Rentiers  
75013 Paris.