ANDRÉ REVUZ

Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 187-269

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__187_0>

FONCTIONS CROISSANTES ET MESURES SUR LES ESPACES TOPOLOGIQUES ORDONNÉS

par **André REVUZ**

INTRODUCTION

L'étude des fonctions dénombrablement additives d'ensemble, et surtout celle des fonctionnelles linéaires dont on sait qu'elles leur sont étroitement liées depuis les travaux de F. RIESZ et de RADON, a connu au cours des dernières décades un développement considérable. Le résultat central est l'extension du théorème de RIESZ au cas d'une fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions continues numériques définies sur un espace localement compact X et nulles hors d'un compact (variable avec la fonction) et d'une mesure de RADON définie sur X.

Par contre la notion simple de fonction d'ensemble croissante ($F(X) \geqslant F(Y)$ si $X \supset Y$) ou de fonctionnelle croissante ($F(x) \geqslant F(y)$ si $x(t) \geqslant y(t)$ quel que soit t dans l'ensemble de définition des fonctions x, y...,) ne semble pas avoir fait l'objet de recherches systématiques. Pourtant, parmi les fonctions d'ensemble croissantes figurent des éléments aussi importants que la capacité d'un ensemble.

C'est pourquoi, tandis que M. CHOQUET entreprenait ses récentes recherches sur la capacitabilité des ensembles boréliens, qui devaient le conduire à élargir la notion de capacité et à bâtir une théorie des ensembles K-boréliens et analytiques dans les espaces topologiques généraux, il m'engagea à étudier les fonctions d'ensemble et les fonctionnelles croissantes.

Partant du fait que toute fonction d'une variable réelle x, positive, non-décroissante et continue à droite, définie sur un segment $[a, b]$ peut être associée à une mesure de RADON positive sur $[a, b]$ telle que $f(x)$ soit la mesure du segment $[a, x]$, je me suis fixé pour première tâche de déterminer les fonctionnelles et fonctions d'ensemble croissantes pour lesquelles une circonstance analogue se produirait, et que l'on peut à bon droit considérer comme les plus simples.

L'étude gagnant d'autre part en généralité et en simplicité si l'on fait abstraction de la nature des éléments de l'espace sur lequel F est définie, il y a avantage à considérer des fonctions croissantes sur un espace topologique ordonné et le problème s'énonce alors de manière précise ainsi qu'il suit : F étant une fonction positive, croissante et continue à droite définie sur un espace topologique ordonné X, quelles conditions y a-t-il lieu d'imposer à F et à X, pour qu'il existe une mesure positive sur X pour laquelle l'ensemble $C_-(x_0)$ des x vérifiant l'inégalité ordinale $x \prec x_0$ soit mesurable et ait pour mesure $F(x_0)$. C'est à ce problème que nous donnons une solution dans le chapitre I en donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour F et suffisantes pour X, et en prenant successivement le mot mesure au sens de : fonction additive d'ensemble, fonction dénombrablement additive d'ensemble, mesure de Radon (ou mesure régulière de Borel suivant la terminologie de P. Halmos (Cf. Halmos, 1). Nous appelons totalement croissantes les fonctions F qui vérifient les conditions trouvées, qui consistent en inégalités exprimant que ce que l'on peut appeler assez naturellement les « différences » de F sur X sont toutes positives.

Dans le chapitre II, nous étudions d'abord à quelles conditions la théorie exposée dans le chapitre I pour des fonctions F réelles, s'étend au cas où F prend ses valeurs dans un groupe topologique ordonné Y. Puis nous introduisons une notion de fonction à variation bornée essentiellement fondée sur la structure d'espace ordonné de X et de groupe ordonné de Y. Les théorèmes sur l'association d'une fonction F et d'une mesure sur X telle que $F(x_0)$ soit la mesure de l'ensemble $C_-(x_0)$ s'étendent au cas des fonctions à variation bornée. La notion introduite coïncide avec la notion ordinaire lorsque Y et X sont la droite numérique R^1. Si Y est la droite numérique et si X est localement compact, les mesures correspondantes sont les mesures de Radon de signes quelconques sur X.

Les résultats relatifs à l'association à une fonction F d'une mesure dénombrablement additive n'ont pu être établis qu'au prix de la condition suivante imposée à X (axiome X_a) : $C_-(x)$ est compact pour tout $x \in X$. Cette restriction très forte ne peut malheureusement pas être levée sans précaution. Cependant nous étudions dans le § 3 du chapitre II deux cas où la théorie peut être développée avec des conditions plus faibles. (En fait, il s'agit d'espaces X que l'on peut en quelque sorte « compactifier partiellement ».)

Nous avons constamment pris dans ce travail le mot mesure au sens de fonction d'ensemble additive (simplement ou dénombrablement) parce qu'il nous a paru que c'était cet aspect qui se prêtait le mieux à l'étude du problème posé. Mais, un des intérêts essentiels d'une mesure est de permettre la définition d'une intégrale, et, s'il s'agit d'une mesure de Radon, de conduire aux fonctionnelles linéaires sur l'espace C(X, R) des fonctions numériques continues sur X, nulles hors d'un compact, variable avec la fonction. Notre résultat peut donc être présenté comme un théorème de « linéarisation » : à une fonction totalement croissante, continue à droite sur X, nous avons canoniquement associé une fonction linéaire continue sur C(X, R).

C'est à l'intégration à partir d'une fonction totalement croissante ou à variation bornée qu'est consacré le chapitre III. Mais auparavant, nous étudions un certain nombre d'exemples auxquels la théorie des deux premiers chapitres s'applique : les plus importants sont, sans doute, l'espace des compacts d'un espace localement compact et l'espace des fonctions continues sur un compact. Ce dernier ne satisfait pas à l'axiome X_a, mais en lui adjoignant les fonctions semi-continues supérieurement, on obtient un espace auquel la théorie s'applique. Quant au premier, dans le cas particulier de l'espace des compacts d'un espace compact, on obtient une remarquable dualité entre les fonctions totalement croissantes et les capacités d'ordre infini de M. Choquet (Cf. Choquet, 2).

Ces espaces légitiment par leur existence le choix des axiomes de la théorie, qui confèrent aux espaces qui les vérifient et que nous désignerons par $\mathfrak{X}$, une structure assez riche pour que l'on puisse y obtenir l'intégrale d'une fonction relative à une fonction à variation bornée, continue à droite, par un processus qui est une généralisation de l'intégration de Riemann-Stieltjes dans les espaces euclidiens. Cela permet, en particulier, d'obtenir une solution simple de ce qu'on peut appeler le problème des moments dans un espace $\mathcal{X}$ (étant donnée une fonctionnelle M définie sur une famille de fonctions continues φ sur un cône $C_{-}(x_0)$ de $\mathcal{X}$, à quelles conditions peut-on déterminer une fonction F totalement croissante (ou à variation bornée) et continue à droite sur $\mathcal{X}$ telle que l'on ait $M(\varphi) = \int \varphi \, dF$) et d'obtenir en même temps le théorème de Riesz dans les espaces $\mathcal{X}$.

C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Denjoy, dont les encouragements m'ont été précieux, et dont l'étude de l'œuvre, d'une beauté si pure, a été une part essentielle de ma formation, et à M. Choquet, qui a bien voulu m'associer à ses recherches et dont l'amitié vigilante ne cessa de s'intéresser aux miennes.

Je remercie vivement aussi M. Dubreil qui a accepté de me proposer le sujet de la seconde Thèse.

CHAPITRE PREMIER

LES FONCTIONS TOTALEMENT CROISSANTES

§ I. — Définitions. Notations.

1. Espace ordonné. — X sera dans tout ce travail un espace ordonné, c'est-à-dire qu'il existera entre certains couples de ses éléments une relation $x \prec y$ (lue x antérieur, ou inférieur à y) et telle que

$$\begin{array}{llll} x \prec x & \text{pour tout} & x \in X & \\ x \prec y & \text{et} \quad y \prec z & \Longrightarrow & x \prec z \\ x \prec y & \text{et} \quad y \prec x & \Longrightarrow & x = y \end{array}$$

$x \prec y$ n'est donc pas incompatible avec $x = y$, tandis que x non $\prec y$ l'est forcément. Nous ne supposons pas que l'on ait $x \prec y$ ou $y \prec x$ pour tout couple d'éléments; s'il en était ainsi, nous dirions que X est totalement ordonné.

Nous désignerons par $\{x;\ P\}$ l'ensemble des éléments x possédant une propriété P.

Nous appellerons cône positif de sommet x, $C_+(x)$, l'ensemble $\{y;\ y \in X,\ y \succ x\}$, cône négatif l'ensemble $C_-(x) = \{y;\ y \in X,\ y \prec x\}$. (L'expression de cône n'est parfaitement adéquate que si X est un espace vectoriel ordonné, mais nous l'utiliserons dans tous les cas à cause de sa commodité.)

Un élément sera dit maximal (resp. minimal) si $C_+(x) = \{x\}$ (resp. $C_-(x) = \{x\}$)($\{x\}$ étant l'ensemble constitué du seul élément x).

2. Mesures. — Nous renvoyons pour tout ce qui concerne la théorie de la mesure à l'excellente monographie de P. Halmos (Cf. Halmos, 1), et nous nous contentons de rappeler les définitions et résultats suivants :

Une famille de parties de X sera dite un anneau $\mathfrak{A}$, si, avec deux parties A et B elle contient leur réunion $A \cup B$ et leur différence symétrique $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$. Comme on a $(A \cup B) \Delta (A \Delta B) = A \cap B$, $\mathfrak{A}$ contient aussi l'intersection de deux quelconques de ses éléments, et comme $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$, $\mathfrak{A}$ peut être aussi défini comme une famille de parties contenant l'intersection et la différence symétrique de deux quelconques de ses éléments : $\mathfrak{A}$ a une structure algébrique d'anneau commutatif relativement à ces deux opérations, l'opération de groupe étant la différence symétrique. Remarquons enfin qu'en vertu de $A - B = A \Delta (A \cap B)$, $\mathfrak{A}$ contient aussi la différence de deux quelconques de ses éléments.

Une application $\mu : A \to \mu A$ de $\mathfrak{A}$ dans R^1, ou plus généralement dans un groupe abélien sera dite une mesure simplement additive (ou plus brièvement additive) si

$$A, B \in \mathfrak{A}, \qquad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu A \cup B = \mu A + \mu B.$$

On peut aussi envisager des mesures à valeurs dans $\overline{R}_+$ (demi-droite réelle positive compactifiée par $+\infty$). Les mesures simplement additives que nous considérerons seront au contraire finies, c'est-à-dire que $\mu A < +\infty$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$.

Une famille de parties de X sera dite un σ-anneau, $\mathfrak{A}$ si

$$A, B \in \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad A \Delta B \in \mathfrak{A}$$

et

$$A_i \in \mathfrak{A} \;\; i = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}.$$

Une application μ d'un σ-anneau $\mathfrak{A}$ dans R^1, ou dans un groupe topologique abélien sera dite une mesure dénombrablement additive ou σ-additive si

$$\left.\begin{matrix} A_i \in \mathfrak{A} \;\; i = 1, 2, \ldots \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mu \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i.$$

Une mesure réelle σ-additive est dite σ-finie si $\mu A = \infty$ n'est possible que s'il existe alors des ensembles A_i, $i = 1, 2 \ldots$, disjoints et appartenant à $\mathfrak{A}$ et tels que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\mu A_i < \infty$ pour tout i.

Une mesure réelle positive est dite complète si

$$N \in \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \mu N = 0 \quad \text{et} \quad F \subset N \quad \Longrightarrow \quad F \in \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \mu F = 0$$

μ étant une mesure réelle simplement additive sur un anneau $\mathfrak{A}$, on définit la mesure extérieure associée μ^* sur le σ-anneau $\mathfrak{B}$ des ensembles B ayant au moins un recouvrement dénombrable formé d'ensembles A de $\mathfrak{A}$, en posant

$$\mu^*\mathrm{B} = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu \mathrm{A}_i$$

pour tous les recouvrements de B.

Un ensemble E de $\mathfrak{B}$ est dit mesurable-μ si l'on a

$$\mu^*\mathrm{B} = \mu^*\mathrm{B} \cap \mathrm{E} + \mu^*\mathrm{B} \cap \complement \mathrm{E}$$

pour tout $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}$.

Les ensembles mesurables-μ forment un σ-anneau et le résultat fondamental que nous aurons à utiliser dans la suite est le suivant : Toute mesure réelle positive finie simplement additive μ sur un anneau $\mathfrak{A}$ est prolongeable d'une manière unique en une mesure réelle positive σ-additive σ-finie et complète sur le σ-anneau des ensembles mesurables-μ si et seulement si

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{A}_i \in \mathfrak{A}, & i = 1, 2, \ldots \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i \in \mathfrak{A} & \\ \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset & i \neq j \end{array}\right\} \Longrightarrow \mu \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \mathrm{A}_i$$

3. F(x) sera dans la suite une fonction définie sur X et prenant ses valeurs dans R^1, ou dans un espace vectoriel topologique ordonné, ou un groupe abélien topologique ordonné, ou un groupe abélien ordonné.

Par groupe abélien ordonné, nous entendons un groupe abélien G muni d'une structure d'ordre telle que

$$x, y, z \in \mathrm{G} \qquad x \prec y \quad \Longrightarrow \quad x + z \prec y + z.$$

Par espace vectoriel ordonné, nous entendons un espace vectoriel V sur le corps des réels muni d'une structure d'ordre telle que

$$\begin{array}{llll} x, y, z \in \mathrm{V} & x \prec y & \Longrightarrow & x + z \prec y + z, \\ x \in \mathrm{V}, \quad \lambda \in \mathrm{R}, & x \succ 0, & \lambda > 0 \Longrightarrow & \lambda x \succ 0. \end{array}$$

Aucun lien n'est prévu à priori entre la topologie et l'ordre sur les espaces vectoriels et groupes topologiques ordonnés.

4. **Topologie.** — Nous renvoyons pour tout ce qui concerne les définitions et les résultats de topologie générale que nous aurons à utiliser aux Éléments de Mathématiques de N. Bourbaki (Cf. Bourbaki, 1, 2, 3).

§ 2. — Les conditions nécessaires.

Notre but est de déterminer les conditions relatives à X et à F pour qu'il existe une mesure *positive* σ-additive μ définie sur un σ-anneau contenant les cônes $C_-(x)$ et telle que $\mu C_-(x) = F(x)$.

Nous supposons que F prend ses valeurs dans un groupe abélien ordonné, sur lequel positif a le sens de supérieur à l'élément neutre 0.

Nous obtiendrons, à fortiori, des conditions nécessaires en supposant que μ est simplement additive sur l'anneau $\mathfrak{A}$ engendré par les cônes $C_-(x)$ et sans faire d'hypothèses sur le signe de μ. Plaçons-nous dans ce cas et supposons que l'on ait $\mu C_-(x) = F(x)$.

$\mathfrak{A}$ contenant les $C_-(x)$ doit contenir les ensembles $C_-(x) \cap C_-(y)$ quel que soit le couple x, y d'éléments de X.

Nous supposerons désormais que X vérifie l'axiome suivant X_0: *Si* $C_-(x) \cap C_-(y) \neq \emptyset$, *il existe un élément* z *tel que* $C_-(x) \cap C_-(y) = C_-(z)$. Cet élément $z = \inf\ xy$ est le plus grand des éléments plus petits que x et y.

S'il n'en existe pas dans X, nous adjoindrons à X un élément ω antérieur à tous les autres. Dans ces conditions, la relation $C_-(x) \cap C_-(y) = \emptyset$ dans X est équivalente à $\omega = \inf\ xy$ dans $X \cup \{\omega\}$. Et nous prolongerons F à $X \cup \{\omega\}$ en posant $F(\omega) = 0$.

Il est clair que $\inf xy = \inf yx$ et que $\inf(\inf xy)z = \inf(x \inf yz)$ élément qui est le plus grand de ceux qui sont inférieurs à x, y et z et que l'on notera $\inf\ xyz$.

L'opération inf, définie sur tout $X \cup \{\omega\}$, y est donc commutative et associative. $X \cup \{\omega\}$ est un demi-treillis.

Dans ces conditions la différence $C_-(x) - C_-(y)$ qui appartient à $\mathfrak{A}$ est identique dans tous les cas à $C_-(x) - C_-(\inf xy)$. Sa mesure vaut $\mu(C_-(x) - C_-(\inf xy)) = F(x) - F(\inf xy)$ puisque $C_-(\inf xy) \subset C_-(x)$.

Plus généralement, étant donnés $n+1$ éléments $x, u_1, u_2, \ldots u_n$, de X, considérons l'ensemble

$$(1) \qquad C_-(x) - \bigcup_{i=1}^{n} C_-(u_i) = C_-(x) - \bigcup_{i=1}^{n} C_-(\inf xu_i)$$

Cet ensemble appartient à $\mathfrak{A}$. Nous désignerons par S les ensembles de ce type, et par $\mathcal{S}$ l'ensemble de tous les S (n prenant toutes les valeurs entières et $(x, u_1, \ldots, u_n)$ décrivant X^{n+1}) et des cônes $C_-(x)$ que nous considérerons comme des ensembles S correspondant à $n = 0$. Pour spécifier les éléments qui déterminent un ensemble S donné, on écrira $S(x; u_1, \ldots, u_n)$.

Un tel ensemble peut être également défini par

$$(2) \qquad S(x; u_1, \ldots, u_n) = \{y;\ y \prec x,\ y \text{ non } \prec u_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

On a déjà remarqué (1) que

$$(3) \qquad S(x; u_1, \ldots, u_n) = S(x; \inf xu_1, \ldots, \inf xu_n).$$

On pourrait se limiter pour définir les ensembles S au cas où $u_i \prec x$, $i = 1, \ldots, n$. D'autre part, il est clair que si $u_p \prec u_q$, on peut omettre l'élément u_p dans la détermination de S. Tout ensemble S non vide admet une *détermination canonique unique* satisfaisant à $u_p \prec x$, $i = 1, \ldots, n$ et u_i non $\prec u_j$ pour $i \neq j$. L'existence de cette détermination est évidente. Montrons en l'unicité.

Tout ensemble non vide S a un plus grand élément, son élément x, qui est par suite unique pour chaque S et que nous en appellerons le sommet. Supposons alors que S admette deux déterminations canoniques distinctes

$$S = S(x; u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = S(x; v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p).$$

Il est impossible que pour un couple u_i, v_j on ait $v_j \prec u_i$ et $v_j \neq u_i$, car $v_j \prec u_i$ exclut $u_i \prec v_k$, $k \neq j$ (sinon $v_j \prec v_k$, or la seconde détermination de S est canonique) et par suite entraîne u_i non $\prec v_j$, $j = 1, \ldots, p$, et comme $u_i \prec x$, $u_i \neq x$ (S non vide !) on aurait $u_i \in S$, ce qui est en contradiction avec l'existence de la première détermination canonique.

Mais si $v_j \prec u_i$, $v_j \neq u_i$ est impossible pour tout i et tout j on a v_{j_0} non $\prec u_i$, $i = 1, \ldots, n$. On en conclut comme plus haut $v_{j_0} \in S$, ce qui est incompatible avec $S = S(x; v_1, \ldots, v_p)$.

L'hypothèse de deux déterminations distinctes canoniques est donc absurde.

Mais nous ne nous astreindrons pas à ne considérer que des déterminations canoniques, car les calculs sur les ensembles S sont beaucoup plus souples si l'on définit tout S par un élément x d'une part et n éléments u_i d'autre part sans faire d'hypothèses restrictives sur les u_i.

Les formules (2) et (3) permettent d'écrire

$$(4) \quad S(x; u_1, \ldots, u_n) = S(x; \inf xu_1, \ldots, \inf xu_{n-1}) \\ - S(\inf xu_n; \inf xu_1u_n, \ldots, \inf xu_{n-1}u_n)$$

le deuxième ensemble étant contenu dans le premier.

C'est dire que $S(x; u_1, \ldots, u_n)$ s'obtient en retranchant successivement de $C_-(x)$ les ensembles

$$\begin{aligned} E_1(x) &= C_-(\inf xu_1) \\ E_2(x) &= C_-(\inf xu_2) - C_-(\inf xu_1u_2) = C_-(\inf xu_2) - E_1(\inf xu_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_p(x) &= C_-(\inf xu_p) - E_{p-1}(\inf xu_p) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n(x) &= C_-(\inf xu_n) - E_{n-1}(\inf xu_n) \end{aligned}$$

puisque cette décomposition est valable pour $n = 1$ et que si elle est vraie pour $n - 1$, (4) en prouve la validité pour n.

D'autre part la définition de chaque E_p prouve que

$$E_p(x) \subset C_-(\inf xu_p)$$

d'où

$$E_p(\inf xu_{p+1}) \subset C_-(\inf xu_pu_{p+1}) \subset C_-(\inf xu_{p+1})$$

et que par suite $E_p(x)$ est exprimé comme la différence de deux ensembles dont le second est inclus dans le premier.

$S(x; u_1, \ldots, u_n)$ peut donc être construit à partir de cônes négatifs en prenant des différences successives d'ensembles contenus l'un dans l'autre.

L'additivité de μ sur $\mathfrak{A}$ permet de déduire de (4)

$$(5) \quad \mu S(x; u_1, \ldots, u_n) = \mu S(x; \inf xu_1, \ldots, \inf xu_{n-1}) \\ - \mu S(\inf xu_n; \inf xu_1u_n, \ldots, \inf xu_{n-1}u_n)$$

ce qui permet d'établir

$$(6)\qquad \mu S = F(x) - \Sigma_1 F(\inf xu_i) + \Sigma_2 F(\inf xu_iu_j) + \cdots$$
$$+ \cdots + (-1)^p \Sigma_p F(\inf xu_{i_1} \ldots u_{i_p}) + \cdots + (-1)^n F(\inf xu_1 \ldots u_n)$$

Σ_p désignant la somme étendue à toutes les combinaisons de p des indices $1, 2, \ldots, n$.

La formule (6) est vraie pour $n = 1$, et si elle est vraie pour n-1, (5) montre qu'elle est vraie pour n.

Dans l'hypothèse de l'existence d'une mesure additive sur l'anneau engendré par les cônes $C_-(x)$, les S appartiennent donc à cet anneau et leur mesure est la quantité obtenue ci-dessus (6), que nous désignerons par $\Delta(S)$ et qui peut être considérée comme une différence n^e de F sur X.

Si l'on suppose $\mu \succ 0$, on obtient donc les conditions nécessaires $\Delta(S) \succ 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Nous dirons qu'une fonction $F(x)$ à valeurs dans un groupe abélien ordonné est totalement croissante si $\Delta(S) \succ 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Il est essentiel de remarquer que la valeur obtenue pour $\Delta(S)$ ne dépend que de l'ensemble S et non de la manière dont il est déterminé : il suffit de vérifier que l'on obtient la même valeur avec la détermination canonique et une détermination quelconque. Or, il est clair que le remplacement de u_i par $\inf xu_i$ ne modifie pas $\Delta(S)$. D'autre part, si par exemple $u_n \prec u_{n-1}$, on a $\inf u_n u_{n-1} = u_n$ et tous les termes où figure u_n disparaissent dans l'expression de $\Delta(S)$ car leur somme s'écrit

$$\begin{aligned} &- F(u_n) + \Sigma'_1 F(\inf u_i u_n) + \cdots + (-1)^p \Sigma'_p F(\inf u_{i_1} \ldots u_{i_p} u_n) \\ &\qquad + \cdots + (-1)^{n-1} F(\inf u_1 \ldots u_{n-2}\, u_n) + F(\inf u_{n-1} u_n) \\ &- \Sigma'_1 F(\inf u_i u_{n-1} u_n) + \cdots + (-1)^{p+1} \Sigma'_p F(\inf u_{i_1} \ldots u_{i_p} u_{n-1} u_n) \\ &\qquad + \cdots + (-1)^n F(\inf u_1 \ldots u_{n-2} u_{n-1} u_n) \end{aligned}$$

où Σ'_p représente la somme étendue à toutes les combinaisons de p des indices 1, 2, ..., n-2.

§ 3. — Les propriétés algébriques des ensembles S et des nombres $\Delta(S)$.

1. Nous supposons maintenant qu'une fonction $F(x)$ à valeurs dans un groupe abélien ordonné Y soit donnée, et qu'à

tout ensemble $S \in \mathcal{S}$, on ait fait correspondre la quantité $\Delta(S)$ définie au paragraphe précédent.

Nous allons établir le

THÉORÈME. — *Les réunions finies disjointes* $A = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ *d'ensembles* $S \in \mathcal{S}$ *forment un anneau* $\mathfrak{A}$, *sur lequel* $mA = \sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$ *est une mesure additive.*

2. La première partie de ce théorème est la conséquence des propositions suivantes :

1° *Etant donnés deux ensembles* S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$, *il existe 3 ensembles* S', S'', $S''' \in \mathcal{S}$ *deux à deux disjoints et tels que*

$$S_1 \cup S_2 = S' \cup S'' \cup S'''.$$

Soient, en effet,

$$S_1 = S(x_1;\ u_1, \ldots, u_p) \qquad \text{et} \qquad S_2 = S(x_2;\ v_1, \ldots, v_q).$$

On définit

$$S' = S(x_1;\ x_2,\ u_1, \ldots, u_p)$$
$$S'' = S(x_2;\ x_1,\ v_1, \ldots, v_q)$$
$$S''' = S(\inf x_1 x_2;\ \inf u_i v_j,\ i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q).$$

Il est clair que

$$S' \cap S'' = \emptyset, \quad \text{car} \quad x \in S' \Longrightarrow x \prec x_1 \quad \text{et} \quad x \in S'' \Longrightarrow x \text{ non } \prec x_1$$

et que

$$S' \cap S''' = \emptyset \quad \text{car} \quad x \in S' \Longrightarrow x \text{ non } \prec x_2 \quad \text{et} \quad x \in S''' \Longrightarrow x \prec x_2$$

(même raisonnement pour $S'' \cap S''' = \emptyset$).

D'autre part, $S' \subset S_1$ et $S'' \subset S_2$ sont évidents.

Il suffit pour terminer de prouver

$$\left.\begin{matrix} x \in S''' \\ x \notin S_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x \in S_2 \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{matrix} x \in S_1 \\ x \notin S' \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x \in S'''.$$

Prouvons d'abord la première implication :

$$x \in S''' \Longrightarrow x \prec \inf x_1 x_2 \Longrightarrow x \prec x_1.$$

Mais si $x \prec x_1$ et $x \notin S_1$, il existe un indice i tel que $x \prec u_i$. Or

$$x \in S''' \Longrightarrow x \text{ non } \prec \inf u_i v_j, \qquad j = 1, \ldots, q.$$

Ceci entraîne x non $\prec v_j$, $j = 1, \ldots, q$, car si pour un indice j, on avait $x \prec v_j$, cette relation jointe à $x \prec u_i$ impliquerait $x \prec \inf u_i v_j$. On a donc $x \prec \inf x_1 x_2 \prec x_2$ et x non $\prec v_j$, $j = 1, \ldots, q$, c'est-à-dire $x \in S_2$.

Passons à la seconde implication :

$$x \in S_1 \text{ et } x \notin S' \Longrightarrow x \prec x_1 \text{ et } x \prec x_2 \text{ et } x \text{ non} \prec u_i, \; i = 1, \ldots, p,$$

donc à fortiori

$$x \prec \inf x_1 x_2 \quad \text{et} \quad x \text{ non} \prec \inf u_i v_j,$$
$$i = 1, \ldots, p, \quad j = 1, \ldots, q, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \in S'''.$$

2° *L'intersection de deux ensembles* S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$ *est un ensemble* $S \in \mathcal{S}$.

On a, en effet

$$S_1 \cap S_2 = S(\inf x_1 x_2; \; u_1, \ldots, u_p, \; v_1, \ldots, v_q).$$

3° *La différence de deux ensembles* S_1, $S_2 \in \mathcal{S}$ *est une réunion finie disjointe d'ensembles* $S \in \mathcal{S}$.

Comme $S_1 - S_2 = S_1 - S_1 \cap S_2$, on peut en vertu de la proposition précédente supposer que l'on a $S_2 \subset S_1$.

Mais dans ce cas, la décomposition étudiée en 1°,

$S_1 \cup S_2 = S' \cup S'' \cup S'''$ se réduit à $S_1 = S' \cup S'''$, car $S_2 \subset S_1 \Longrightarrow S'' = \emptyset$.

En outre $S' \cap S_2 = \emptyset$, donc $S_2 \subset S'''$ et $\inf x_1 x_2 = x_2$.

Il suffit donc de démontrer la proposition pour deux ensembles S de même sommet inclus l'un dans l'autre et pour lesquels nous reprenons la notation

$$S_1 = S(x; u_1, \ldots, u_p) \quad \text{et} \quad S_2 = S(x; v_1, \ldots, v_q).$$

Considérons alors les ensembles

$$S'_j = S(v_j; v_1, \ldots, v_{j-1}, u_1, \ldots, u_p) \quad j = 1, \ldots, q.$$

On a $S'_j \cap S'_k = \emptyset$ pour $j \neq k$. En effet, si, par exemple, $j < k$ on a

$$S'_j \subset C_-(v_j) \quad \text{et} \quad S_k \cap C_-(v_j) = \emptyset.$$

On a de même

$$S_2 \cap S'_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, q.$$

D'autre part, $y \in S_1$ et $y \notin S_2 \Longrightarrow y \prec x$ et y non $\prec u_i$, $i = 1, \ldots, p$

et $y \prec v_j$ pour au moins un indice j. Si j_0 est le plus petit de ces indices, on a $y \in S'_{j_0}$.

La décomposition

$$S_1 - S_2 = \bigcup_{j=1}^{p} S_j'$$

répond à la question.

Il résulte immédiatement de 1°, 2° et 3° que si A et B sont deux réunions finies disjointes d'ensembles S, il en est de même de leur réunion, de leur intersection et de leur différence donc aussi de leur différence symétrique. La première partie du théorème est prouvée.

3. Il reste à prouver que mA est une mesure sur $\mathfrak{A}$. L'additivité est évidente; le seul point à établir est que mA est bien définie, c'est-à-dire que deux décompositions distinctes de A en ensembles S disjoints donnent la même valeur de mA.

Il suffit d'établir pour cela l'additivité finie des $\Delta(S)$, c'est-à-dire

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \quad \text{et} \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \Delta(S) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$$

car si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} S_i = \bigcup_{k=1}^{p} S'_k \text{ avec } S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j \text{ et } S'_k \cap S'_l = \emptyset,\ k \neq l$$

$$\text{et} \quad mA = \sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i) \qquad \text{et} \quad m'A = \sum_{k=1}^{p} \Delta(S'_k),$$

on a aussi

$$S_i = \bigcup_{k=1}^{p} (S_i \cap S'_k) \text{ avec } (S_i \cap S'_k) \cap (S_i \cap S'_l) = S_i \cap S'_k \cap S'_l = \emptyset,\ k \neq l$$

$$S'_k = \bigcup_{i=1}^{n} (S_i \cap S'_k) \text{ avec } (S_i \cap S'_k) \cap (S_j \cap S'_k) = S_i \cap S_j \cap S'_k = \emptyset,\ i \neq j$$

d'où

$$mA = \sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i) = \sum_i \sum_k \Delta(S_i \cap S'_k) = \sum_k \sum_i \Delta(S_i \cap S'_k) = \sum_{k=1}^{p} \Delta(S'_k) = m'A.$$

Il reste à établir l'additivité finie des $\Delta(S)$.

Nous allons montrer, à cette fin, qu'on peut ordonner toute famille d'ensembles S deux à deux disjoints en posant $S_1 \prec S_2 \Leftrightarrow$ il existe $x \in S_1$ tel que $x \prec x_2$, x_2 sommet de S_2.

La relation est évidemment réflexive et transitive; et il est impossible que l'on ait à la fois $S_1 \prec S_2$ et $S_2 \prec S_1$ si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Supposons, en effet $S_1 \prec S_2$ et soient x_1 et x_2 les sommets respectifs de S_1 et S_2. Il existe x et y tels que $x \in S_1$, donc $x \prec x_1$, $y \in S_2$, donc $y \prec x_2$ et $x \prec y$ donc $x \prec \inf x_1 x_2$.

Mais $x \in S_1 \Longrightarrow C_+(x) \cap C_-(x_1) \subset S_1$, or $\inf x_1 x_2 \in C_+(x) \cap C_-(x_1)$ donc $\inf x_1 x_2 \in S_1$. L'hypothèse $S_2 \prec S_1$ impliquerait de même $\inf x_1 x_2 \in S_2$, ce qui contredit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Les ensembles S_i, deux à deux disjoints, dont la réunion constitue S, étant ainsi ordonnés, il existe, puisqu'ils sont en nombre fini, au moins l'un d'eux, soit S_n, qui n'est précédé par aucun autre. Soient, alors, $S(x_n; u_1, \ldots, u_p)$ la forme canonique de S_n et $S(x; v_1, \ldots, v_q)$ celle de S. Chaque u_i est alors soit un des éléments v_j, soit de la forme $\inf x_n v_j$.

On ne peut, en effet, avoir pour tout $j = 1, \ldots, q$, u_i non $\prec v_j$ et $u_i \neq v_j$, car u_i appartiendrait à S sans appartenir à S_n, et comme $u_i \prec x_n$ (détermination canonique de S_n !), il existerait un élément antérieur à S_n parmi les S_i.

Si d'autre part, pour un couple u_i, v_j, on a $u_i \prec v_j$, cela entraîne $u_i = v_j$ ou $u_i = \inf x_n v_j$. Dans le cas contraire, $\inf x_n v_j$ appartiendrait à S sans appartenir à S_n : même contradiction que plus haut.

En ajoutant au besoin aux éléments v_j des éléments de la forme $\inf x_n v_j$ (la détermination de S ne sera plus canonique !) on pourra donc toujours considérer que les u_i sont p des éléments $v_1, \ldots, v_q$ d'une détermination convenable de S, soit $u_i = v_i$, $i = 1, \ldots, p$. D'autre part, $S - S_n$ est un ensemble S qui s'écrit $S - S_n = S(x; x_n, v_{p+1}, \ldots, v_q)$.

Enfin, il nous sera plus commode, pour faire le calcul des $\Delta(S)$ d'utiliser les déterminations, en général non canoniques, suivantes :

$$S_n = S(x_n; v_1, \ldots, v_q) \qquad S - S_n = S(x; x_n, v_1, \ldots, v_q)$$

justifiées pour la première par le fait que

$$y \in S_n \quad \Leftrightarrow \quad y \in S \quad \text{et} \quad y \prec x_n$$

et pour la seconde que $v_j \prec x_n$ pour $j = 1, \ldots, p$.

L'égalité $\Delta(S) = \Delta(S_n) + \Delta(S - S_n)$ se vérifie alors sans peine : il suffit d'écrire les valeurs des $\Delta(S)$

$$\Delta(S) = F(x) - \Sigma_1 F(v_j) + \cdots + (-1)^k \Sigma_k F(\inf v_{i_1} \cdots v_{i_k}) \\ + \cdots + (-1)^q F(\inf v_1 \ldots v_q)$$

$$\Delta(S_n) = F(x_n) - \Sigma_1 F(\inf x_n v_j) + \cdots \\ + \cdots + (-1)^k \Sigma_k F(\inf x_n v_{i_1} \ldots v_{i_k}) + \cdots + (-1)^q F(\inf x_n v_1 \ldots v_q)$$

$$\Delta(S - S_n) = F(x) - F(x_n) - \Sigma_1 F(v_j) + \cdots \\ + \cdots + (-1)^k \Sigma_k F(\inf v_{i_1} \ldots v_{i_k}) + (-1)^{k+1} \Sigma_k F(\inf x_n v_{i_1} \ldots v_{i_k}) \\ + \cdots + (-1)^q F(\inf v_1 \ldots v_q) + (-1)^{q+1} F(\inf x_n v_1 \ldots v_q)$$

pour constater que les termes tels que $F(\inf x_n v_{i_1} \ldots v_{i_k})$ figurent avec le signe $(-1)^k$ dans $\Delta(S_n)$ et le signe $(-1)^{k+1}$ dans $\Delta(S - S_n)$.

Le procédé appliqué à S s'utilise sans changement pour $S - S_n$ et au bout de n opérations, on obtient la formule.

3. *Propriétés des* $\Delta(S)$ *si l'on suppose* $\Delta(S) \succ 0$ *pour tout* $S \in \mathcal{S}$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que si $\Delta(S) \succ 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}$:

1° $\Delta(S(x;\ u_1, \ldots, u_n))$ est une fonction croissante de x et décroissante de chaque u_i.

2° Plus généralement

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} S'_j \qquad S_i \cap S_k = \emptyset \quad i \neq k$$

entraîne

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i) \prec \sum_{j=1}^{m} \Delta(S'_j).$$

§ 4. — Extension de mA en une mesure σ-additive.

1. Nous nous limiterons dans ce paragraphe au cas où $F(x)$ est à valeurs réelles positives, et nous supposons que les conditions $\Delta(S) \geqslant 0$ sont satisfaites pour tout $S \in \mathcal{S}$.

L'extension de la mesure réelle positive mA définie sur l'anneau $\mathfrak{A}$ en une mesure σ-additive est possible si et seulement si

$$A \in \mathfrak{A}, \quad A_i \in \mathfrak{A}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Longrightarrow mA = \sum_{i=1}^{\infty} mA_i.$$

Comme les ensembles A sont des réunions finies disjointes d'ensembles S, cette condition est équivalente à la suivante :

$$S\in\mathcal{S},\quad S_i\in\mathcal{S},\quad S_i\cap S_j=\emptyset\ (i\neq j),\quad S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i\Longrightarrow\Delta(S)=\sum_{i=1}^{\infty}\Delta(S_i).$$

Nous allons montrer que cette condition est satisfaite moyennant les hypothèses sur X et sur $F(x)$ que nous indiquons ci-dessous.

2. Hypothèses sur X. — Nous présenterons deux groupes d'hypothèses sur X. Les premières X_a, X_b, X_c seront utilisées au paragraphe suivant où X sera supposé localement compact. Les secondes comportent X_b et des conditions $X_{a'}$, $X_{c'}$, respectivement plus faibles que X_a et X_c mais qui suffiront pour obtenir l'extensibilité de mA en une mesure σ-additive.

X est supposé muni d'une topologie $\mathfrak{T}$, non obligatoirement séparée à priori.

Soit $\mathfrak{V}(x)$ le filtre des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de $x\in X$. $\mathcal{V}(x)\cap C_+(x)$ n'est jamais vide (il contient au moins x), il engendre donc une base de filtre lorsque $\mathcal{V}(x)$ décrit $\mathfrak{V}(x)$: ce filtre $\mathfrak{V}_+(x)$ sera dit le filtre des voisinages à droite $\mathcal{V}_+(x)$ de x. Les filtres $\mathfrak{V}_+(x)$ satisfont aux axiomes des voisinages et définissent sur X une topologie $\mathfrak{T}_+$ déduite de $\mathfrak{T}$ et de la structure d'ordre de X, dans laquelle une famille de générateurs des ouverts est constituée des ensembles $O\cap C_+(x)$ où x décrit X et O la famille des ouverts de $\mathfrak{T}$. $\mathfrak{T}_+$ est une topologie plus fine que $\mathfrak{T}$.

Axiome X_a. — Quel que soit $x\in X$, $C_-(x)$ est compact pour $\mathfrak{T}$ (donc ne l'est pas pour $\mathfrak{T}_+$ si celle-ci est strictement plus fine que $\mathfrak{T}$).

Axiome $X_{a'}$. — Quel que soit $x\in X, C_-(x)$ est fermé et quasi-compact pour $\mathfrak{T}$.

Un espace topologique est quasi-compact si tout filtre sur cet espace a un point adhérent, sans que la séparation de l'espace soit postulée (Cf. Bourbaki, 1).

Il est immédiat que tout sous-espace fermé d'un espace quasi-compact est lui-même quasi-compact. Nous utiliserons le fait que tout espace quasi-compact vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue : Tout recouvrement ouvert de l'espace en contient un recouvrement ouvert fini.

Axiome X_b. — inf xy est continue à droite; c'est-à-dire : si inf $xy \neq \omega$, il existe pour tout $\mathfrak{V}_+(\inf xy)$, un $\mathfrak{V}_+(x)$ et un $\mathfrak{V}_+(y)$ tels que

$$\xi \in \mathfrak{V}_+(x), \eta \in \mathfrak{V}_+(y) \Longrightarrow \inf \xi\eta \in \mathfrak{V}_+(\inf xy)$$

si inf $xy = \omega$, il existe un $\mathfrak{V}_+(x)$ et un $\mathfrak{V}_+(y)$ tels que

$$\xi \in \mathfrak{V}_+(x), \eta \in \mathfrak{V}_+(y) \Longrightarrow \inf \xi\eta = \omega.$$

On peut encore exprimer X_b en considérant l'espace $\widehat{X} = X \cup \{\omega\}$ muni de la topologie $\widehat{\mathfrak{T}}_+$ définie par : $\mathfrak{B}_+(x)$ est une base du filtre des voisinages de x, si $x \in X$, et le filtre des voisinages de ω est l'ultrafiltre de ses surensembles et en disant que $x, y \rightarrow \inf xy$ est une application continue de $\widehat{X} \times \widehat{X}$ dans $\widehat{X}$.

Axiome X_c. — Pour tout $x \in X$, non maximal et tout $\mathfrak{V}_+(x)$, il existe $y \in \mathfrak{V}_+(x)$ tel que $C_-(x) \subset \mathring{C}(y)$ (intérieur de $C_-(y)$ pour $\mathfrak{T}$).

Axiome X_c. — Si $x \in C_-(y)$, il existe pour tout $\mathfrak{V}(x)$, un élément $z \in \mathfrak{V}_+(x) \cap C_-(y)$ tel que $C_-(x)$ soit inclus dans l'intérieur $\mathfrak{I}_y C_-(z)$ de $C_-(z)$ pour la topologie induite par $\mathfrak{T}$ sur $C_-(y)$.

3. **Remarques sur les axiomes précédents.** — $X_{a'}$ et X_a sont très restrictifs. Ils ne peuvent cependant pas être élargis sans précaution comme le prouve le contre-exemple suivant :

Considérons sur la droite numérique R^1, le semi-segment $0 < x \leqslant 1$ pour espace X. Posons $F(x) = x + 1$ et prenons $S = X$ et

$$S_n = \left\{ x;\ \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

On a

$$\Delta(S) = F(1) = 2 \quad \text{et} \quad \Delta(S_n) = F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et par suite $$\Delta(S) \neq \sum_1^\infty \Delta(S_n)$$

alors que les $\Delta(S)$ possèdent l'additivité finie. Il suffit évidemment d'adjoindre 0 à X et de poser $F(0) = 1$ pour obtenir l'égalité désirée. On a, par là, compactifié X. Nous verrons plus loin (ch. II, § 3) comment, dans certains cas, une compactification des cônes négatifs permet de relâcher un peu l'axiome $X_{a'}$ ou l'axiome X_a.

Le choix des axiomes X_a, X_b, X_c recevra une justification dans le fait qu'ils sont vérifiés par des espaces intéressants (Cf. ch. III, § 1). Mais on peut remarquer dès maintenant que X_c complète assez naturellement X_a dans le cas important où X est localement compact : le filtre des voisinages d'un compact possède alors une base constituée de compacts. Or X_c spécifie que pour les compacts particuliers $C_-(x)$, il existe des voisinages constitués eux aussi par des cônes négatifs. X_c entraîne même, avec X_a et X_b que $C_-(x)$ a, pour x non maximal, une base de voisinages formée de cônes négatifs. (Cf. Proposition 2 ci-dessous.)

Remarquons d'autre part que X_a et X_c entraînent que l'espace $X - \mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des points maximaux de X, est localement compact, et par suite en particulier séparé, pour la topologie induite par $\mathcal{T}$, même si X tout entier ne possède pas ces propriétés. En effet, si x n'est pas maximal les cônes $C_-(y)$ dont l'existence est garantie par X_c constituent des voisinages compacts de x.

Par contre, $X_{c'}$, même joint à X_a et à X_b n'entraîne même pas que la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $X - \mathcal{M}$ soit séparée, comme le prouve l'exemple suivant :

X est la réunion des deux segments A : $0 \leqslant a \leqslant 1$ et B : $2 \leqslant b \leqslant 3$.

L'ordre est l'ordre naturel sur A et sur B, mais $a \in A$ et $b \in B$ ne sont pas comparables.

Une base de voisinages de $a \in A$ est constituée des réunions des deux intervalles $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ de A et $(a + 2 - \varepsilon, a + 2 + \varepsilon)$ de B. Une base de voisinages de $b \in B$ est constituée des réunions des deux intervalles $(b - 2 - \varepsilon, b - 2 + \varepsilon)$ de A et $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ de B.

Cet exemple prouve en même temps que les axiomes X_a, X_b et $X_{c'}$, peuvent être satisfaits sans que X_c le soit. Un autre exemple du même fait est fourni par l'espace des suites $x = \{x_i\}$ réelles positives de carré sommable, considéré comme cône positif de l'espace de Hilbert des suites réelles de carré sommable ordonné par $x \prec y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots$ et muni de la topologie forte. X_a et X_b sont satisfaits, mais X_c ne l'est pas, car $\mathring{C}_-(x) = \emptyset$. En effet, un système fondamental de voisinages de $x \in X$ est constitué des ensembles

$$V(x, \varepsilon) = \left\{ z ;\ \sum_{1}^{\infty} (z_i - x_i)^2 < \varepsilon^2,\ 0 \leqslant z_i \right\}.$$

Si $x \prec y$, on a $x_i \leqslant y_i$ et d'autre part $\sum_1^\infty y_i^2 < \infty$. Pour ε donné, il existe un entier N tel que $\sum_N^\infty y_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}\cdot$ Si u est défini par $u_i = x_i$ pour $i \neq N$ et $u_N - x_N = \frac{\varepsilon}{2}$, on a $u \in V(x, \varepsilon)$ et $u \notin C_-(y)$. Par contre, X_c est satisfait; car si $x \in C_-(y)$, un système fondamental de voisinages de x pour la topologie induite sur $C_-(y)$ par $\mathcal{C}_+$ est constituée des ensembles

$$V_+(x, \varepsilon) = \left\{ z;\ \sum_1^\infty (z_i - x_i)^2 < \varepsilon^2,\ x_i \leqslant z_i \leqslant y_i \right\}.$$

Fixons ε. Il existe N tel que

$$\sum_N^\infty (y_i - x_i)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot$$

Posons pour $i < N$

$$u_i = x_i + \eta_i \qquad \text{avec} \qquad \sum_1^{N-1} \eta_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad 0 \leqslant \eta_i \leqslant y_i - x_i$$

pour $i \geqslant N$ $\qquad u_i = y_i.$

On a $\qquad u = \{u_i\} \in C_-(y) \qquad$ et $\qquad u \in V_+(x, \varepsilon).$

D'autre part, tout point $w = \{w_i\}$ vérifiant $w \prec x$ possède un voisinage $V_y(w, \zeta) = \left\{ t;\ \sum_1^\infty (t_i - w_i)^2 < \zeta^2,\ 0 \leqslant t_i \leqslant y_i \right\}$ relatif à la topologie induite par $\mathcal{C}$ sur $\underline{C}_-(y)$, et inclus en $\overset{\circ}{C}_-(u)$. Il suffit de prendre $0 < \zeta < \bar{\eta}$, où $\bar{\eta}$ est le plus petit des η_i non nuls; car $\sum_1^\infty (t_i - w_i)^2 < \zeta^2$ entraine

$$|t_i - w_i| < \zeta < \bar{\eta}, \qquad t_i < w_i + \bar{\eta} < x_i + \eta_i = u_i$$

pour $i < N$ et $\eta_i \neq 0$ et $t_i \leqslant y_i = u_i$ pour $i \geqslant N$, ou $i < N$ lorsque $x_i = y_i$; on a donc bien $C_-(x) \subset \mathcal{J}_y C_-(u)$.

Signalons enfin des conséquences des axiomes X_a, X_b, X_c qui nous seront utiles dans la suite :

Proposition 1. — *Si* X *vérifie* X_a, X_b, X_c *l'intersection des cônes* $C_-(z)$ *dont l'intérieur* $\overset{\circ}{C}_-(z)$ *contient un cône* $C_-(x)$ *donné est* $C_-(x)$ *lui-même.*

En effet, l'ensemble des éléments z contenus dans un voisinage $\mathcal{V}_+(x)$ décrit, en vertu de X_c, la base d'un filtre $\mathcal{F}$ convergeant vers x pour $\mathcal{T}_+$, lorsque $\mathcal{V}_+(x)$ décrit $\mathfrak{V}_+(x)$. Or, s'il existait y tel que $y \in C_-(z)$ pour tout z et $y \notin C_-(x)$, inf yz qui est continue à droite convergerait vers inf yx suivant $\mathcal{F}$. Mais inf. $yz = y$, donc $y = \inf yx$($X - \mathcal{M}$ est séparé pour $\mathcal{T}$, donc à fortiori pour $\mathcal{T}_+$!), ce qui contredit $y \notin C_-(x)$.

Remarque 1. — X_a n'intervient que pour assurer la séparation de $X - \mathcal{M}$, et peut donc être remplacé dans les hypothèses de la proposition 1 par « $X - \mathcal{M}$ est séparé ».

Remarque 2. — Le résultat énoncé est vrai plus généralement de la famille des cônes $C_-(z)$ dont l'intérieur contient $C_-(x)$, les éléments z appartenant aux ensembles d'un filtre convergeant vers x pour $\mathcal{T}_+$: en particulier, s'il existe des suites décroissantes (x_n) tendant vers x, on a pour une telle suite $C_-(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_-(x_n)$.

Proposition 2. — *Étant donné un compact* K *de* X *tel que* $C_-(x) \subset \mathring{K}$, *il existe un élément* $y \in X$ *tel que*

$$C_-(x) \subset \mathring{C}_-(y) \subset C_-(y) \subset K.$$

Sinon, en effet, quel que soit z tel que $\mathring{C}_-(z) \supset C_-(x)$, on aurait $C_-(z) - K \neq \emptyset$. On peut d'autre part, se limiter à la considération des éléments z antérieurs à l'un d'entre eux z_0. Dans ces conditions les ensembles $C_-(z) - K$ décrivent la base d'un filtre sur $C_-(z_0) - \mathring{K}$ qui est compact. Le filtre admet donc au moins un point adhérent u. On a $u \in C_-(z_0) - \mathring{K}$, donc $u \notin C_-(x)$.

Il existe alors en vertu de la proposition 1 précédente, un élément z_1 tel que $u \notin C_-(z_1)$ et en vertu de la compacité de $C_-(z_1)$ un voisinage $\mathcal{V}(u)$ tel que $\mathcal{V}(u) \cap C_-(z_1) = \emptyset$, ce qui est incompatible avec la définition de u.

4. Hypothèses sur F. — Nous avons vu au paragraphe 2 de ce chapitre qu'il était nécessaire de supposer F totalement croissante (ce qui sous-entend F positive, les cônes négatifs étant considérés comme des ensembles S particuliers pour lesquels $\Delta(S) = F(x)$). Nous prolongeons F à $\widehat{X}$ en posant $F(\omega) = 0$.

On suppose d'autre part F continue à droite, c'est-à-dire continue sur $\widehat{X}$ muni de la topologie $\widehat{\mathcal{C}}_+$.

Cette condition est nécessaire pour qu'il existe une mesure μ σ-additive telle que $\mu C_-(x) = F(x)$ lorsque X vérifie X_a, X_b, X_c et le premier axiome de dénombrabilité, car dans ce cas en tout point $x \in X$ la topologie $\mathcal{C}_+$ peut s'exprimer par la convergence de suites décroissantes vers x, et on a vu (Remarque 2 ci-dessus) qu'alors $C_-(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_-(x_n)$, d'où μ étant σ-additive, $\mu C_-(x) = \lim\limits_n \mu C_-(x_n)$.

La condition est encore nécessaire pour que μ soit une mesure de Radon telle que $\mu C_-(x) = F(x)$, lorsque X est localement compact et vérifie X_a, X_b, X_c, en vertu de la proposition 2 ci-dessus et de la régularité des mesures de Radon (Voir ch. I, § 5, 1).

5. Théorème. — *Si* X *satisfait à* $X_{a'}$, X_b *et* $X_{c'}$ *et si* F *est réelle, positive, totalement croissante et continue à droite, alors*

$$S = \bigcup_{1}^{\infty} S_i, \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad i \neq j, \qquad \textit{entraîne} \qquad \Delta(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta(S_i).$$

Démonstration. — 1° Comme $\Delta(S_i) \geqslant 0$, on a pour tout n

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(S_i) \leqslant \Delta(S).$$

La somme $\sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i)$ est donc finie et vérifie

$$\sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i) \leqslant \Delta(S). \tag{1}$$

2° Soit $S(x; u_1 \ldots, u_p)$ la forme canonique de S. Dans toute cette démonstration, les ensembles considérés sont inclus dans $C_-(x)$, les complémentaires sont pris relativement à $C_-(x)$ et les topologies sont les topologies induites sur $C_-(x)$.

En vertu de $X_{c'}$ on peut trouver dans tout $\mathcal{V}_+(u_i)$ un élément v_i tel que $C_-(u_i) \subset \mathring{C}_-(v_i)$, si $S' = S(x; v_1, \ldots, v_p)$, on a $S' \subset S$. S' est l'intersection de $C_-(x)$ et des complémentaires des $C_-(v_i)$ or, puisque $C_-(u_i) \subset \mathring{C}_-(v_i)$, l'adhérence du complémentaire de $C_-(v_i)$ est incluse dans le complémentaire de $C_-(u_i)$. On a donc $\overline{S'} \subset S$, et comme $\overline{S'}$ est fermé dans le quasi compact $C_-(x)$, $\overline{S'}$ est quasi compact.

D'autre part $|\Delta(S') - \Delta(S)|$ est inférieure à une somme finie de différences du type

$$F(\inf x v_{i_1} \dots v_{i_k}) - F(\inf x u_{i_1} \dots u_{i_k})$$

qui sont toutes positives, s'annulent pour $v_i = u_i (i = 1, \dots, p)$ et sont des fonctions continues sur $\widehat{X^p}$ muni de la topologie produit déduite de $\widehat{\mathcal{T}_+}$.

On peut donc choisir les v_i tels que $|\Delta(S') - \Delta(S)| < \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné. On a donc, puisque $S' \subset S$.

$$(2) \qquad \Delta(S') \leqslant \Delta(S) \leqslant \Delta(S') + \varepsilon.$$

3° Puisque $\overline{S'} \subset S$ et $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $\overline{S'}$ est recouvert par les S_i.

Nous allons remplacer les S_i par des ensembles S'_i tels que $\overline{S'}$ soit recouvert par les ouverts $\mathring{S}'_i$.

Soit $S(x_i; u_1^i \dots, u_{p_i}^i)$ la forme canonique de S_i. Si $x_i = x$, ce qui a certainement lieu pour un indice i et un seul (on peut toujours supposer qu'aucun ensemble S_i n'est vide), S_i est le complémentaire du fermé $\bigcup_{p-1}^{p_i} C_-(u_p^i)$ et est ouvert pour la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $C_-(x)$. Pour cet indice, on prendra $S'_i = S_i$.

Si $x_i \neq x$, en tout $\mathcal{V}_+(x_i)$ il existe, en vertu de $X_{c'}$, un élément x'_i tel que $C_-(x_i) \subset \mathring{C}_-(x'_1)$. S_i est inclus dans l'ouvert

$$\left(\bigcup_{n=1}^{p_i} \complement C(u_p^i)\right) \cap \mathring{C}_-(x'_i)$$

qui n'est autre que $\mathring{S}'_i$ si l'on pose $S'_i = S(x'_i; u_1, \dots, u_{p_i}^i)$.

Mais on a $\Delta(S'_i) - \Delta(S_i) = F(x'_i) - F(x_i)$, la détermination de S_i et, par suite, celle de S'_i, étant canoniques. En vertu de la continuité à droite de $F(x)$, on peut donc choisir x'_i tel que

$$0 < \Delta(S'_i) - \Delta(S_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}\cdot$$

Ceci étant, le quasi compact $\overline{S'}$ est recouvert par les intérieurs des S'_i, donc par un nombre fini d'entre eux. Il existe

n indices $i_1, \ldots, i_n$ tels que $\overline{S'} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathring{S}_{i_k}$, à fortiori $S' \subset \bigcup_{k=1}^{n} S'_{i_k}$ on a donc

$$\Delta(S') \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta(S'_{i_k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta(S_{i_k}) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leqslant \sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i) + \varepsilon$$

c'est-à-dire, en vertu de (2)

$$\Delta(S) \leqslant \sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i) + 2\varepsilon$$

et, ε étant arbitraire

$$\Delta(S) \leqslant \sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i)$$

ce qui, rapproché de (1) donne

$$\Delta(S) = \sum_{1}^{\infty} \Delta(S_i).$$

Nous pouvons énoncer le théorème :

Si F *est une fonction réelle positive, totalement croissante et continue à droite sur un espace topologique ordonné* X *satisfaisant à* $X_{a'}$, X_b et $X_{c'}$ *il existe sur* X *une mesure positive complète σ-additive σ-finie* μ *pour laquelle les cônes négatifs* $C_-(x)$ *sont mesurables et ont pour mesure* $F(x)$.

6. Masses ponctuelles.

Définition. — Nous disons que la mesure μ a une masse ponctuelle en x, si l'ensemble $\{x\}$ est mesurable et a une mesure non nulle.

Désignons par $\mathcal{S}_x$ l'ensemble de tous les ensembles S non vides de sommet x.

Si $\mu\{x\}$ existe, on a $0 \leqslant \mu\{x\} \leqslant \Delta(S)$ pour tout $S \in \mathcal{S}_x$. On a donc $\mu\{x\} \leqslant \inf(\Delta(S)\,;\, S \in \mathcal{S}_x) = a$.

Sans faire alors d'hypothèses sur la mesurabilité de $\{x\}$, supposons d'abord $a = 0$. $\{x\}$ est inclus dans les ensembles d'une suite S_n tels que $\lim_n \Delta(S_n) = 0$, dont l'intersection est mesurable et a pour mesure 0 ; μ étant complète, $\{x\}$ est donc alors mesurable et a pour mesure 0.

Supposons maintenant $a > 0$, et étudions la restriction de μ à $C_-(x)$. Posons $\overline{F}(y) = F(y)$ pour $y \neq x$ et $\overline{F}(x) = F(x) - a$, et désignons par $\bar{\Delta}(S)$ la différence de $\bar{F}$ relative à $S \subset C_-(x)$; on aura encore pour tout $S \subset C_-(x)$, $\bar{\Delta}(S) \geqslant 0$, car si S n'a pas x pour sommet $\bar{\Delta}(S) = \Delta(S)$ et si le sommet de S est x, $\bar{\Delta}(S) = \Delta(S) - a \geqslant 0$, en vertu de la définition de a.

$\bar{F}$ est d'autre part continue à droite sur $C_-(x)$, il existe donc une mesure $\bar{\mu}$ définie sur $C_-(x)$, identique à μ sur $C_-(x) - \{x\}$ et telle que $\bar{\mu}C_-(x) = F(x) - a$. Si $S \in \mathcal{S}_x$, on a l'égalité

$$\bar{\mu}(C_-(x) - S) = \mu(C_-(x) - S)$$
et
$$\sup [\bar{\mu}(C_-(x) - S); S \in \mathcal{S}_x] = F(x) - a.$$

Il existe donc une suite d'ensembles $S_n \in \mathcal{S}_x$ tels que

$$\Gamma = \bigcup_1^\infty [C_-(x) - S_n]$$

qui est un ensemble mesurable-($\bar{\mu}$ ou μ) ait pour mesure ($\bar{\mu}$ ou μ) $F(x) - a$. $C_-(x) - \Gamma$ est mesurable-μ et sa mesure est nulle.

Il en est de même pour sa partie $C_-(x) - \{x\} - \Gamma$ dont la mesure μ, et par suite aussi la mesure $\bar{\mu}$ qui lui est égale, est nulle. On a donc $\mu[C_-(x) - \{x\}] = F(x) - a$, $\{x\}$ est mesurable et $\mu\{x\} = a$. D'où le théorème :

Pour la mesure μ dont l'existence a été établie au numéro précédent, l'ensemble $\{x\}$ est mesurable pour tout $x \in X$ et sa mesure vaut $\mu\{x\} = \inf \{\Delta(S);\ S \in \mathcal{S}_x\}$.

Remarque. — Si $\sup \{F(y);\ y \prec x, y \neq x\} = F(x)$, on a évidemment $a = 0$; mais la réciproque est fausse, comme le prouve l'exemple d'un espace discret comprenant les points x, $y \prec x$, $z \prec x$ et $\inf yz$ et d'une fonction F vérifiant $F(x) - F(y) - F(z) + F(\inf yz) = 0$, avec $F(y) = F(z) \prec F(x)$.

7. Nous terminerons ce paragraphe en établissant la :

Proposition. — Si X satisfait à $X_{a'}$, $X_{c'}$, et à l'axiome de séparation de Fréchet (tout ensemble constitué d'un seul point est fermé) pour $\mathfrak{T}_+$, tout ouvert (pour $\mathfrak{T}$) contient un ensemble S non vide ayant pour sommet un élément donné de l'ouvert.

Soit, en effet, O un ouvert et $x \in O$. Le cône $C_-(x)$ est quasi-compact, et fermé; le fermé $K = C_-(x) - O$ est un quasi-compact inclus en $C_-(x)$. De même pour tout $S \in \mathcal{S}_x$, $\bar{S} \cap K$ est un quasi-compact inclus en $C_-(x)$.

Soit alors y un élément arbitraire de K. On a $y \in C_-(x)$ et en vertu de X_c, il existe en tout $\mathcal{V}_+(y) \cap C_-(x)$ un élément z tel que $C_-(y) \subset \mathfrak{I}_x C_-(z)$. D'autre part, $y \in K$ entraîne $y \neq x$ et il existe $\mathcal{V}_+(y)$ tel que $x \notin \mathcal{V}_+(y)$ (Axiome de Fréchet). On peut donc supposer $z \neq x$. Par suite, $S(x, z) \neq \emptyset$ et puisque l'on a $C_-(y) \subset \mathfrak{I}_x C_-(z)$, $y \notin \bar{S}(x, z)$. Il en résulte $\bigcap_{S \in \mathcal{S}_x} \bar{S} \cap K = \emptyset$.

Il y a donc un nombre fini de fermés $\bar{S}_i \cap K$ sur le quasi-compact K dont l'intersection est vide, $S_i \in \mathcal{S}_x$, $i = 1, \dots, n$. Mais $S_0 = \bigcap_{i=1}^{n} S_i \in \mathcal{S}_x$ et $S_0 \cap K = \emptyset$, donc $S_0 \subset O$.

Remarque. — Nous démontrerons un résultat plus fort pour les points de $X - \mathcal{M}$, en supposant vérifiés X_a, X_b et X_c. Mais le résultat précédent conservera son intérêt parce qu'il concerne *tous* les points x de X.

§ 5. X localement compact.

1. Nous supposons dans ce paragraphe que $F(x)$ est réelle, positive, totalement croissante et continue à droite sur un espace X satisfaisant à X_a, X_b, X_c et de plus *localement compact*. Nous allons prouver que, sous des conditions supplémentaires à imposer à l'ensemble $\mathcal{M}$ des points maximaux de X, la mesure complète σ-additive définie au paragraphe précédent est une mesure de Radon positive.

Appelons, selon P. Halmos, « étendue régulière » (regular content) la restriction à la famille $\mathcal{K}$ des compacts K de X d'une mesure de Radon positive sur X. Cette étendue ν possède les propriétés suivantes

$$(1) \qquad 0 \leqslant \nu K < +\infty$$
$$(2) \qquad \nu K_1 \cup K_2 \leqslant \nu K_1 + \nu K_2$$

et

$$\nu K_1 \cup K_2 = \nu K_1 + \nu K_2 \qquad \text{si} \qquad K_1 \cap K_2 = \emptyset$$
$$(3) \qquad \nu K = \inf(\nu K_1 ;\ K \subset \dot{K}_1) \quad \text{(régularité !)}.$$

Réciproquement, à une telle étendue correspond une mesure de Radon positive unique dont elle soit la restriction à K. (Cf. Halmos, 1).

Il nous suffira donc de prouver la proposition suivante :

Il existe une étendue régulière ν *définie sur* $\mathcal{K}$ *et telle que* $\nu C_-(x) = F(x)$.

La mesure de Radon associée est, en effet, une extension de ν en une mesure complète σ-additive, c'est aussi une extension de $\nu C_-(x)$ (restriction de ν aux cônes $C_-(x)$), ou ce qui est équivalent, une extension complète σ-additive de mA, mais en vertu de l'unicité de ces extensions, elles sont identiques.

2. Nous allons d'abord établir quelques importantes conséquences des axiomes X_a, X_b et X_c.

PROPOSITION 1. — X_a, X_b et X_c *entraînent* :

X_d : $C_-(y) \cap C_+(x)$ *est fermé* (*donc compact*) *pour tout couple d'éléments* x, $y \in X$.

Supposons $K = C_-(y) \cap C_+(x)$ non vide et soit $x_0 \in \overline{K} \cap \complement K$. On a $x_0 \in C_-(y)$, x_0 n'est pas maximal. Parmi les voisinages de x_0 figurent des ensembles du type $\mathring{C}_-(y_0)$, avec $\mathring{C}_-(y_0) \supset C_-(x_0)$ et quel que soit y_0 possédant cette propriété, il existe z tel que $z \in K$ et $z \in \mathring{C}_-(y_0)$. On en déduit $x \prec y_0$ ou, ce qui est équivalent $x = \inf xy_0$. En vertu de la continuité à droite de $\inf xy$, de X_c et du fait que $X - \mathcal{M}$ est séparé (car localement compact, Cf., § 4, n° 3), il en résulte $x = \inf xx_0$, donc $x \prec x_0$. Comme on a déjà $x_0 \prec y$, on a bien $x_0 \in K$.

REMARQUE. — La conclusion plus forte « $C_+(x)$ est fermé » ne découle pas de X_a, X_b, X_c, comme le prouve l'exemple suivant :

X est le carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ de R^2 avec la topologie de R^2.

L'ordre est l'ordre produit habituel sauf pour le point (1, 1) qui n'est comparable à aucun autre.

PROPOSITION 2. — *Si pour* $x \in X - \mathcal{M}$, $U(x)$ *désigne l'ensemble des éléments* y *tels que* $\mathring{C}_-(y) \supset C_-(x)$, X_a, X_b, X_c *entraînent* :

X_e : $C_-(y) \cap C_+(x)$ *engendre une base du filtre* $\mathfrak{V}_+(x)$ *lorsque* y *décrit* $U(x)$.

Il s'agit de prouver que si O est un ouvert contenant x, il existe un $y \in U(x)$ tel que $\mathring{C}_-(y) \cap C_+(x) \subset O$.

Si cela n'est pas, pour tout $y \in U(x)$, l'ensemble

$$E(y) = C_+(x) \cap C_-(y) - O$$

est non vide. Considérons un y_0 fixe de $U(x)$. $E(y)$ engendre une base de filtre $\mathcal{E}$ sur le compact $K = C_-(y_0) \cap C_+(x)$, car si y et $z \in U(x)$, on a $\inf yz \in U(x)$ et $E(\inf yz) = E(y) \cap E(z)$. $\mathcal{E}$ a donc un point adhérent x_0 sur K.

Si $x_0 \neq x$, l'ensemble $C_+(x_0) \cap C_-(y)$ est fermé et l'ensemble $\mathring{C}_-(y) \cap C_+(x) - (C_+(x_0) \cap C_-(y))$ est un voisinage à droite de x qui contient un élément $y_1 \in U(x)$ tel que $x_0 \notin C_-(y_1)$. Mais $C_-(y_1)$ étant compact, il existe un voisinage de x_0 disjoint de $C_-(y_1)$ donc de $E(y_1)$ et x_0 ne peut être point adhérent de $\mathcal{E}$.

Il faudrait donc $x_0 = x$, mais c'est absurde puisque $E(y) \cap O = \emptyset$ par définition.

Proposition 3. X_a, X_b, X_c *entraînent*:

X_f: *Tout point* $x \in X - \mathcal{M}$ *a une base de voisinages formée d'intérieurs d'ensembles* S.

Soient, en effet, $x \in X - \mathcal{M}$ et O un ouvert contenant x. En vertu de X_e, il existe $y \in U(x)$ tel que $C_-(y) \cap C_+(x) \subset O$.

L'ensemble $C_-(y) - O$ est un compact K. S'il est vide, X_f est vrai pour x. Supposons $K \neq \emptyset$.

Soit $z \in K$. On a $z \notin C_+(x) \cap C_-(y)$ et en vertu d'un raisonnement fait ci-dessus (Proposition 2), il existe u tel que $z \in \mathring{C}_-(u)$ $\overline{C_-(u) \cap C_+(x)} = \emptyset$. On a donc $z \notin \overline{S}(y, u)$ et $C_+(x) \cap \mathring{C}_-(y) \subset \mathring{S}(y, u)$. La famille des fermés $K \cap \overline{S}$ où S décrit la famille $\mathcal{S}_y(x)$ des ensembles S de sommet y dont l'intérieur contient x a donc une intersection vide, ils sont inclus dans le compact K, il existe donc un nombre fini d'ensembles $K \cap \overline{S}$ dont l'intersection est vide. Si S_i, $i = 1, \ldots, n$ sont les ensembles S correspondants, pour $S_0 = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, on a $x \in \mathring{S}_0 \subset S_0 \subset O$.

Ce résultat est à rapprocher de la proposition établie § 4, n° 7.

3. *Plaçons-nous d'abord dans le cas où* $\mathcal{M}$ *est vide.* X_a et X_c entraînent alors la compacité locale de X.

Nous posons $\nu K = \inf(mA;\ K \subset A,\ A \in \mathfrak{A})$ où $\mathfrak{A}$ est l'anneau des réunions finies disjointes A d'ensembles $S \in \mathcal{S}$, et nous allons montrer que νK est une étendue régulière sur $\mathcal{K}$, telle que $\nu C_-(x) = F(x)$.

1° $\nu C_-(x) = F(x)$ pour tout $x \in X$ est évident.

2° $0 \leqslant \nu K < +\infty$.

La première inégalité est évidente. Établissons la seconde.

Tout point de K possède un voisinage de la forme $\mathring{C}_-(x)$ (X_c !) K possède donc un recouvrement fini constitué d'ensembles $\mathring{C}_-(x_i)$ $i = 1, \dots, n$. On a si $A = \bigcup_{i=1}^{n} C_-(x_i)$.

$$\nu K \leqslant mA \leqslant \sum_{1}^{n} F(x_i) < +\infty.$$

3° Pour tout couple K_1, K_2, $\nu K_1 \cup K_2 \leqslant \nu K_1 + \nu K_2$.

En effet si $A_1 \supset K_1$ et $A_2 \supset K_2$,

$$A_1 \cup A_2 \supset K_1 \cap K_2 \qquad \text{et} \qquad mA_1 \cup A_2 \leqslant mA_1 + mA_2.$$

4° Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $\nu K_1 \cup K_2 = \nu K_1 + \nu K_2$.

En effet, si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, il existe deux ouverts disjoints O_i tels que $K_i \subset O_i (i = 1,2)$. En vertu de X_f, K_1 et K_2 possèdent des recouvrements ouverts finis constitués d'ensembles S inclus respectivement en O_1 et O_2. Il existe donc deux ensembles A_i tels que ($K_i \subset A_i$ $i = 1,2$) et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Étant donné $\varepsilon > 0$ d'autre part, il existe un ensemble $A \supset K_1 \cup K_2$ et tel que $\nu K_1 \cup K_2 \leqslant mA < \nu K_1 \cup K_2 + \varepsilon$.

Si $A'_i = A \cap A_i$, on a $K_i \subset A'_i$ ($i = 1,2$) et $A'_1 \cap A'_2 = \emptyset$.

D'où $\nu K_1 + \nu K_2 \leqslant mA'_1 + mA'_2 \leqslant mA < \nu K_1 \cup K_2 + \varepsilon$ ce qui entraîne $\nu K_1 + \nu K_2 \leqslant \nu K_1 \cup K_2$ et par suite l'égalité en vertu de 3°.

5°. $\nu K = \inf (\nu K_1 ; K \subset \mathring{K}_1)$ (régularité de νK !).

Pour le prouver, nous montrerons qu'on peut donner de νK une autre définition qui nous sera également utile dans la suite.

On définit une mesure intérieure $\nu_* O$ sur l'ensemble des ouverts O de X en posant $\nu_* O = \sup (mA ; A \subset O, A \in \mathfrak{A})$. Cette mesure possède la propriété évidente : $O_1 \subset O_2 \Longrightarrow \nu_* O_1 \leqslant \nu_* O_2$.

Je dis qu'on a alors $\nu K = \inf (\nu_* O ; O \supset K)$.

En effet, d'une part tout ouvert O contenant K contient un ensemble A dont l'intérieur contient K (conséquence de X_f). Par suite

$$\inf (mA ; A \supset K) \leqslant \inf(\nu_* O ; O \supset K).$$

D'autre part, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un ensemble $A \supset K$ tel que $\nu K \leqslant mA < \nu K + \varepsilon$. A est une réunion finie d'ensembles S_i.

En remplaçant le sommet x_i de chaque S_i par un élément x'_i situé dans un voisinage à droite convenable de x_i, on obtient des ensembles S'_i tels que si A' est leur réunion on ait $K \subset A \subset \mathring{A}'$ et $mA \leqslant mA' < \nu K + \varepsilon$. $\mathring{A}'$ est donc un ouvert contenant K et vérifiant $\nu K \leqslant mA \leqslant \nu\mathring{A}' \leqslant mA' < \nu K + \varepsilon$. On a donc bien $K = \inf(\nu_* O ; O \supset K)$.

La régularité de K résulte alors immédiatement du fait que K admet un système fondamental de voisinages compacts.

Nous pouvons énoncer le théorème :

Si l'espace topologique ordonné X *satisfait aux axiomes* X_0, X_a, X_b, X_c *et n'a pas de points maximaux, il est localement compact et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle* F *ait pour valeur la mesure* $\mu C_-(x)$ *du cône négatif* $C_-(x)$, *où* μ *est une mesure de Radon positive sur* X, *est que* F *soit totalement croissante et continue à droite.*

4. Supposons à présent $\mathcal{M}$ non vide. Nous devons faire l'hypothèse que X est localement compact, qui n'est plus automatiquement réalisée. En outre, la conclusion que la mesure μ définie par $F(x)$ est une mesure de Radon ne peut pas être obtenue sans hypothèse supplémentaire comme le prouve le contre-exemple suivant :

X est l'ensemble des points (ξ, η) de R^2 vérifiant $\xi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$, $\xi + \eta \leqslant 1$. La topologie est induite par celle de R^2, l'ordre est défini par $(\xi_1, \eta_1) \prec (\xi_2, \eta_2) \Longleftrightarrow \xi_1 \leqslant \xi_2$ et $\eta_1 \leqslant \eta_2$. F est définie par $F(\xi, \eta) = \xi\eta + 1$ si $\xi + \eta = 1$ et $F(\xi, \eta) = \xi\eta$ si $\xi + \eta < 1$. Toutes les hypothèses permettant d'affirmer l'existence d'une mesure μ σ-additive telle que $\mu C_-(x) = F(x)$ sont satisfaites et X est localement compact, mais μ n'est pas une mesure de Radon car le compact constitué du segment porté par $\xi + \eta = 1$ n'est pas mesurable (chacun de ses points porte la masse ponctuelle 1). Si l'on ne conservait de ce segment que les points d'abscisse 0 et $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, l'intersection de X par $\xi + \eta = 1$ serait un compact mesurable de mesure infinie et μ ne serait encore pas une mesure de Radon.

5. L'axiome X_c entraîne que $\mathcal{M}$ soit fermé.

Soit, en effet, x un point adhérent à $\mathcal{M}$ et n'appartenant pas à $\mathcal{M}$. En vertu de X_c, il existe y tel que $C_-(x) \subset \mathring{C}_-(y)$.

Si $\mathcal{V}(x)$ est un voisinage de x ne contenant pas y, $\mathcal{V}(x) \cap \mathring{C}_-(y)$ est aussi un voisinage de x, qui doit contenir un élément $z \in \mathcal{M}$ ($x \in \overline{\mathcal{M}}$!). Mais on aurait $z \prec y$, $z \neq y$, ce qui contredit $z \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ étant fermé, pour tout compact $K \in \mathcal{K}$, $K \cap \mathcal{M}$ est compact.

Si μ est une mesure de Radon, $\mu K \cap \mathcal{M}$ existe et est finie.

D'où en particulier, la condition nécessaire suivante, que nous supposerons vérifiée dans la suite : Pour tout compact, $K \in \mathcal{K}$, la somme des masses ponctuelles portées par $K \cap \mathcal{M}$ est finie et $K \cap \mathcal{M}$ contient donc au plus une infinité dénombrable de supports de masses ponctuelles. (La condition est évidemment valable pour K entier et pas seulement pour $K \cap \mathcal{M}$, mais c'est sous la forme indiquée que nous l'utiliserons explicitement).

Nous supposerons que pour tout compact $K \subset \mathcal{M}$ et tout voisinage compact $\mathcal{V}(K)$ de K, $X - \mathcal{M} - \mathcal{V}(K)$ est dépourvu de points maximaux relativement à lui-même. Il en est ainsi, en particulier, si X est connexe. Supposons, en effet, que x soit un point maximal de $X - \mathcal{M} - \mathcal{V}(K)$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}(x)$ de x disjoint de $\mathcal{M}$ qui est fermé et de $\mathcal{V}(K)$ qui est compact. Dans $\mathcal{V}(x) \cap C_+(x)$, il existe d'après X_c un point y tel que $C_-(x) \subset \mathring{C}_-(y)$. Comme x est maximal dans $\mathcal{V}(x) \cap C_+(x)$, y ne peut être que x lui-même. $C_-(x)$ est donc d'une part compact donc fermé, d'autre part ouvert $(C_-(x) = \mathring{C}_-(x))$, ce qui est impossible si X est connexe.

Dans ces conditions, $X' = X - \mathcal{M} - \mathcal{V}(K)$ est un sous-espace de X qui satisfait aux axiomes X_a, X_b, X_c, et est dépourvu de points maximaux, donc est localement compact. La restriction de F à X' est positive, totalement croissante et continue à droite.

La restriction à X' de la mesure μ qu'elle détermine est donc une mesure de Radon sur X'.

Si K est un compact de X, O un ouvert contenant $K \cap \mathcal{M}$ et $\mathcal{V}(K \cap \mathcal{M})$ un voisinage compact de $K \cap \mathcal{M}$ inclus en O, le compact $K - O$ est donc mesurable sur X'. Si μ est mesure de Radon sur X tout entier, on a $\mu(K - O) \leqslant \mu K$ et par suite

$$\sup\left[\mu(K-O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})\right] < \infty$$

en désignant généralement par $\mathcal{O}(K)$ l'ensemble des ouverts contenant un compact K.

Réciproquement, nous allons montrer que si les deux conditions nécessaires que nous avons relevées : Pour tout $K \in \mathcal{K}$,

1° la somme des masses ponctuelles portées par $K \cap \mathcal{M}$ est finie,

2° $\sup [\mu(K - O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})] < \infty$

sont satisfaites, alors μ est une mesure de Radon sur X.

Il suffit pour cela de prouver que

$$\nu K = \sup [\mu(K - O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})] + \sum_i \mu\{x_i\}$$

où (x_i) est la suite finie ou infinie des supports de masses ponctuelles contenus dans $K \cap \mathcal{M}$, est une étendue régulière sur $\mathcal{K}$, pour laquelle $\nu C\_(x) = F(x)$.

D'après nos hypothèses, νK est finie. On vérifie aisément que $\nu K_1 \cup K_2 \leqslant \nu K_1 + \nu K_2$ avec égalité si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Enfin $\nu C\_(x) = F(x)$ résulte immédiatement du fait que pour le compact $C\_(x)$ le filtre engendré par $C\_(x) \cap O$, $O \in \mathcal{O}(\{x\})$ a une base formée d'ensembles $S \in \mathcal{S}_x$ (Théorème du § 4, 7) et tenant compte de la valeur de la masse ponctuelle $\mu\{x\}$, on a si $x \in \mathcal{M}$, $F(x) = \mu\{x\} + \sup [\mu(C\_(x) - S); S \in \mathcal{S}_x] = \nu C\_(x)$.

Il reste à vérifier la régularité de ν, c'est-à-dire

$$\nu K = \inf (\nu K_1;\ K \subset \mathring{K}_1).$$

La démonstration se fait en deux étapes :

1° Pour tout $O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})$, définissons comme au n° 3 la mesure intérieure $\nu_* O = \sup (mA; A \in \mathfrak{A},\ A \subset O)$.

Il existe alors un O tel que $\nu_* O < \infty$.

Sinon, considérons un voisinage compact $\mathcal{V}_1$ de $K \cap \mathcal{M}$, et soit O_1 son intérieur. Donnons-nous un nombre positif N, il existe $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \subset O_1$ tel que $mA_1 > 2N + \sum_i \mu\{x_i\}$ puisque $\nu_* O_1 = \infty$.

A_1 est réunion finie disjointe d'ensembles S. Un nombre fini d'entre eux ont peut-être leur sommet sur $K \cap \mathcal{M}$. Si $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont ces points, il est possible de trouver des ensembles S_i les ayant respectivement pour sommets et tels que

$$\Delta(S_i) < \sum_i \mu\{x_i\} + N \quad \text{(cf. § 4.6).}$$

L'ensemble $B_1 = A_1 - \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ appartient à $\mathfrak{A}$ et $mB_1 > N$.

On peut remplacer chacun des ensembles S constituant B_1 par un ensemble S' inclus dans S avec $\overline{S'} \subset S$ et tel que $\mu S'$ diffère d'aussi peu qu'on le veut de $\Delta(S)$. On obtient ainsi un compact C_1 inclus en B_1 et tel que $\mu C_1 > N$.

D'autre part, C_1 est contenu dans la réunion d'un nombre fini de compacts $C\_(x)$ disjoints de $K \cap \mathcal{M}$. $K \cap \mathcal{M}$ possède donc un voisinage compact $\mathcal{V}_2$ disjoint de C_1. Soit O_2 son intérieur.

On recommence le même raisonnement pour O_2. Le processus se poursuit indéfiniment et conduit à une suite de voisinages compacts $\mathcal{V}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{V}_n \supset \ldots$ de $K \cap \mathcal{M}$ et à une suite de compacts $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ deux à deux disjoints et tels que $\mu C_n > N$ pour tout n, et $C_n \subset \mathcal{V}_n$.

Considérons alors l'ensemble

$$C = \left(\bigcup_1^\infty C_n\right) \cup \left(\bigcap_1^\infty \mathcal{V}_n\right).$$

Cet ensemble est compact, car si $\mathcal{F}$ est un filtre sur C, ou bien un élément de $\mathcal{F}$ est disjoint d'un $\mathcal{V}_n$, soit $\mathcal{V}_{n_0+1}$ et $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\bigcup_1^{n_0} C_n$ qui est compact : $\mathcal{F}$ a un point adhérent sur C, ou bien tout élément E de $\mathcal{F}$ rencontre tout $\mathcal{V}_n$. Les ensembles $\overline{E} \cap \mathcal{V}_n$ sont des compacts inclus dans le compact $\mathcal{V}_1$. Aucune intersection finie de tels ensembles ($E \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$) n'est vide, par suite $\bigcap_{E \in \mathcal{F}} \overline{E} \cap \left(\bigcap_1^\infty \mathcal{V}_n\right) \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ a encore un point adhérent sur C.

Mais pour ce compact $\sup[\mu(C - O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})] > nN$ pour tout n, ce qui contredit une de nos hypothèses.

2° Nous montrons maintenant qu'il existe un ouvert $O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})$. tel que $\nu_* O < \sum_i \mu\{x_i\} + \varepsilon$ (ε positif donné à priori).

En effet, soit $O_1 \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})$, $\nu_* O_1$ étant finie, on peut trouver A tel que $mA > \nu_* O_1 - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Procédant comme on vient de le faire, on remarque que si A contient des points de $K \cap \mathcal{M}$, ce n'en peut être qu'un nombre fini et on peut retrancher de A un nombre fini d'ensembles S_i ayant ces points pour sommets et tels que

$$\sum_1^n \Delta(S_i) < \sum_i \mu\{x_i\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe un ouvert $O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})$ disjoint de $B = A - \bigcup_1^n S_i$ et pour O on a $\nu_* O < \nu_* O_1 - \left(\nu_* O_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \sum_i \mu\{x_i\} + \frac{\varepsilon}{2}$ soit $\nu_* O < \sum_i \mu\{x_i\} + \varepsilon$.

Ce résultat a pour conséquence évidente que l'on peut aussi définir l'étendue νK par $\nu K = \inf[\mu(K - O) + \nu_* O ; O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})]$ et par conséquent aussi par $\nu K = \inf[\nu_* O;\ O \in \mathcal{O}(K)]$.

La régularité de νK en résulte immédiatement.

Il est clair d'autre part que νK finie implique $\sum_i \mu\{x_i\} < \infty$ et $\sup[\mu(K - O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})] < \infty$. On peut donc énoncer le théorème :

Si X *satisfait aux axiomes* X_0, X_a, X_b, X_c, *possède des points maximaux, mais est localement compact et connexe, pour que la mesure* μ *associée à une fonction* F *totalement croissante et continue à droite soit une mesure de Radon, il faut et il suffit que* $\nu K = \inf[\nu_* O;\ O \in \mathcal{O}(K)]$ *soit finie pour tout* $K \in \mathcal{K}$; *condition équivalente à l'ensemble des deux suivantes:*

1° *La somme des masses ponctuelles portées par* $K \cap \mathcal{M}$ *est finie pour tout* $K \in \mathcal{K}$.

2° *sup* $[\mu(K - O);\ O \in \mathcal{O}(K \cap \mathcal{M})] < \infty$ *pour tout* $K \in \mathcal{K}$.

6. Nous allons voir que dans certaines circonstances, des deux conditions énoncées ci-dessus, celle relative aux masses ponctuelles est suffisante.

Nous remarquons d'abord que la famille des ensembles $\bigcup_{x \in \mathcal{M}} S(x)$, où $S(x) \in \mathcal{S}_x$ est la base d'un filtre $\mathfrak{S}$ plus fin que le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de $\mathcal{M}$. Cela résulte immédiatement du théorème du § 4, 7. En général, $\mathfrak{S}$ est strictement plus fin que $\mathfrak{V}$ (se reporter à l'exemple donné plus haut du triangle $0 \leqslant \xi$, $0 \leqslant \eta$, $\xi + \eta \leqslant 1$ de R^2). Mais il peut arriver que $\mathfrak{S}$ coïncide avec $\mathfrak{V}$: c'est le cas si X a un plus grand élément, ou plus généralement si X est la réunion d'un nombre fini de cônes négatifs (non disjoints pour que l'exemple ait un intérêt). Nous allons prouver le théorème :

Les conditions 1° et 2° du théorème précédent (n° 5) se réduisent à la première, si $\mathcal{M}$ est dénombrable et possède une base de voisinages de la forme $\bigcup\limits_{\ni x \mathcal{M}} \mathrm{S}(x)$, $\mathrm{S}(x) \in \mathcal{S}_x$.

(x_i) étant la suite des supports de masses ponctuelles contenus dans $\mathcal{M}$, posons $a = \Sigma(\mu\{x_i\}\,;\, x_i \in \mathrm{K} \cap \mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de $\mathrm{K} \cap \mathcal{M}$ et soit

$$b = \Sigma(\mu\{x_i\}\,;\, x_i \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}).$$

On a : $b < +\infty$ par hypothèse et $a \leqslant b$. On peut exclure de $(\mathcal{V}\text{-}\mathrm{K}) \cap \mathcal{M}$ un nombre fini de points x_i de telle sorte que la somme $\Sigma\mu\{x_i\}$ étendue aux points restants soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, (ε positif donné à priori). Et il existe un voisinage compact $\mathcal{V}_1$ de $\mathrm{K} \cap \mathcal{M}$ ne contenant aucun des points exclus. Pour chacun des points x_i appartenant à $\mathcal{V}_1$, on peut trouver un ensemble $\mathrm{S}(x_i)$ de sommet x_i et tel que

$$\Delta(\mathrm{S}(x_i)) < \mu\{x_i\} + \frac{\varepsilon}{3.2^i} \quad (\S\ 4,\ 6).$$

Pour chaque point x_n de $\mathcal{M}$ ne portant pas de masse ponctuelle, on peut choisir un ensemble $\mathrm{S}(x_n)$ de sommet x_n et tel que $\Delta(\mathrm{S}(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3.2^n}$. Enfin, pour chaque point x de $\mathcal{M} - \mathcal{V}_1$ et portant une masse ponctuelle, on peut choisir un voisinage $\mathcal{V}(x)$ disjoint de $\mathcal{V}_1$ qui est compact.

La réunion des ensembles $\mathrm{S}(x_i)$, $\mathrm{S}(x_n)$ et $\mathcal{V}(x)$ est un voisinage de $\mathcal{M}$. Son intersection avec $\mathcal{V}_1$ est un voisinage de $\mathrm{K} \cap \mathcal{M}$, et pour l'intérieur O de ce voisinage, on a

$$\nu_*\mathrm{O} < a + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{3.2^i} + \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{3.2^n} = a + \varepsilon.$$

$\mu(\mathrm{K} - \mathrm{O})$ est finie (mesure de Radon sur $\mathrm{X} - \mathcal{M} - \mathcal{V}_2(\mathrm{K} \cap \mathcal{M})$, où $\mathcal{V}_2(\mathrm{K} \cap \mathcal{M})$ est un voisinage compact de $\mathrm{K} \cap \mathcal{M}$ inclus en O) et on a $\nu\mathrm{K} \leqslant \mu(\mathrm{K} - \mathrm{O}) + \nu_*\mathrm{O} < +\infty$ c. q. f. d.

Soulignons enfin pour terminer que pour tous les énoncés précédents concluant à l'existence d'une mesure μ telle que

$\mu C_{-}(x) = F(x)$, la condition « F totalement croissante » est toujours *nécessaire* (ch. I, § 2) et que la condition « F continue à droite » l'est si X satisfait au premier axiome de dénombrabilité (ch. I, § 4, 4), pour que μ soit une mesure σ-additive, et est nécessaire (indépendamment des axiomes de dénombrabilité) lorsque X satisfait à X_a et X_c, pour que μ soit une mesure de Radon (régularité de l'étendue νK pour les compacts $C_{-}(x)$).

CHAPITRE II

EXTENSIONS DE LA THÉORIE

§ 1. — F prend ses valeurs dans un groupe topologique ordonné.

1. Nous nous sommes attachés dans les derniers paragraphes du précédent chapitre, à déterminer les conditions relatives à X permettant l'extension de la mesure $m\mathrm{A}$ en une mesure σ-additive.

Les propriétés de $m\mathrm{A}$ étaient valables lorsque F prenait ses valeurs dans un groupe abélien quelconque, mais nous nous sommes restreints pour l'étude de l'extension, au cas où F était à valeurs réelles positives.

Nous allons maintenant chercher à quelles conditions il faut soumettre l'espace Y des valeurs de F pour que l'on puisse conserver les résultats (et les méthodes) de la théorie faite dans le Chapitre précédent.

Des mesures prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel ont été étudiées par divers auteurs (Cf. Nikodym, 1; E. Hille, 1).

Ce n'est pas la théorie de la mesure en elle-même qui conduit à choisir pour Y un espace vectoriel, mais son application à l'intégration des fonctions prenant leurs valeurs dans le corps sur lequel Y est un espace vectoriel, grâce à quoi l'application $f \rightarrow \int f d\mu$ conserve le caractère de linéarité qu'elle a lorsque f et μ sont à valeurs réelles. Cependant dans ce qui suit immédiatement seule la structure de groupe abélien de Y interviendra. Mais, comme l'extension d'une mesure simplement additive en une mesure σ-additive implique la notion de limite, et que d'autre part, notre théorie est fondée sur la notion d'ordre, nous chercherons à particulariser Y parmi les groupes abéliens topologiques ordonnés.

La théorie de l'extension d'une mesure réelle positive m (définition d'une mesure extérieure associée, des ensembles mesurables, de la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables) et les démonstrations du Chapitre précédent reposent sur les points suivants (outre la structure de groupe topologique de R^1) :

1° On peut définir $\sum_1^\infty mE_n$ comme limite finie ou infinie de $\sum_1^p mE_n$.

2° On peut définir $\inf a_\iota$, $\iota \in I$ ensemble d'indices dont la puissance peut être supérieure au dénombrable.

3° Si le nombre b est inférieur aux nombres a_ι, $\iota \in I$ et si pour un filtre $\mathcal{F}$ sur I, $\lim_{\mathcal{F}} a_\iota = a$, alors $b \leqslant a$.

Les propriétés correspondantes pour un groupe topologique ordonné sont :

1° Toute suite croissante ou bien a une limite ou bien n'a aucune valeur d'adhérence.

2° et 3° ont le même énoncé formel.

Si ces propriétés sont vérifiées par Y, les démonstrations se transposent immédiatement. (Nous le montrerons un peu plus loin pour la démonstration du ch. I, § 4.)

2. La condition 3° est équivalente à la condition : dans Y tout cône positif $C_+(b)$ est fermé.

En effet, si $C_+(b)$ est fermé, et si $a \notin C_+(b)$, il existe un voisinage $\mathfrak{V}(a)$ disjoint de $C_+(b)$, et un élément F de $\mathcal{F}$ tel que si $\iota \in F$, on ait $a_\iota \in \mathfrak{V}(a)$ et par suite $a_\iota \notin C_+(b)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc forcément $a \in C_+(b)$.

Si $C_+(b)$ n'est pas fermé, on peut trouver un filtre sur $C_+(b)$ convergeant vers un point a tel que $a \in \overline{C_+(b)}$ et $a \notin C_+(b)$ et 3° n'est pas satisfait.

Comme Y est un groupe topologique ordonné, l'ensemble $C_-(b^{-1}) = \{x;\ x^{-1} \in C_+(b)\}$ est également fermé : les cônes négatifs de Y sont fermés.

La condition 2° peut s'exprimer ainsi : tout ensemble d'éléments positifs (supérieurs à l'élément neutre) admet un inf. : élément qui est le plus grand de tous ceux qui sont plus petits que tous les éléments de l'ensemble. Comme Y est un groupe ordonné, c'est équivalent à : tout ensemble borné inférieurement (resp. supérieurement) possède un inf. (resp. un sup.), en d'autres termes : Y est complètement réticulé.

Examinons alors la condition 1°. Si une suite croissante est bornée, en vertu de 2°, elle admet un sup. Si la suite a une limite, on a certainement $\lim_n a_n = \sup_n a_n$, en vertu de 3°. Car, si $a = \lim_n a_n$, 3° implique $a \in C_-(\sup_n a_n)$ et d'autre part on a $a_n \in C_-(a)$, car quels que soient n et $m > 0$, $a_{n+m} \in C_+(a_n)$ et 3° implique alors $a \in C_+(a_n)$; pour tout n, donc $a \in C_+(\sup_n a_n)$.

Dans ces conditions 1° impose : Si la suite croissante a_n est bornée supérieurement, $\lim_n a_n$ existe, et 2° et 3° entraînent alors : $\sup_n a_n$ existe et vaut $\lim_n a_n$.

Si la suite croissante a_n n'est pas bornée, 3° entraîne qu'elle est sans valeur d'adhérence. En effet, pour tout point $a \in Y$, il y aura n_0 tel que $a \notin C_+(a_{n_0})$ et un voisinage $\mathcal{V}(a)$ disjoint de $C_+(a_{n_0})$ et comme $a_{n_0+m} \in C_+(a_{n_0})$ pour $m > 0$, a ne peut être une valeur d'adhérence de la suite a_n.

Comme dans le cas $Y = R^1$, on peut ajouter à Y un élément $+\infty$ qui par définition sera limite de toute suite croissante non bornée et pour lequel on définira l'addition suivant la loi

$$a + (+\infty) = +\infty \qquad \text{et} \qquad +\infty + (+\infty) = +\infty.$$

Évidemment, ce nouvel élément détruit la structure de groupe. Il faudra examiner à part les formules où il interviendra, mais il possède les mêmes propriétés formelles que l'élément $+\infty$ de la droite réelle achevée.

Finalement nos conditions se ramènent aux suivantes :

Y_a. Y est un groupe topologique complètement réticulé.

Y_b. Les cônes $C_+(a)$ et $C_-(a)$ sont fermés pour tout $a \in Y$.

Y_c. Toute suite croissante bornée supérieurement a_n admet une limite (qui est $\sup_n a_n$).

3. Désignons par $\mathcal{T}_i$ la topologie pour laquelle les ensembles $C_+(a)$ et $C_-(a)$ constituent une famille de générateurs des fermés quand a décrit Y et par $\mathcal{T}_{\sigma c}$ la plus fine des topologies pour lesquelles toute suite croissante (resp. décroissante) a pour limite $\sup_n a_n$ (resp. $\inf_n a_n$). Ces deux topologies sont définies uniquement à partir de la structure réticulée de Y.

La topologie $\mathcal{T}$ de Y est caractérisée par

1) Elle est plus fine que $\mathcal{T}_i$ et moins fine que $\mathcal{T}_{\sigma c}$.

2) Y est un groupe topologique pour $\mathcal{T}$.

La propriété 2) est vérifiée pour la topologie $\mathcal{T}_\sigma$ moins fine que $\mathcal{T}_{\sigma c}$ et définie comme la plus fine de celles pour lesquelles une suite a_n a pour limite a si

$$a = \inf_m \sup_{n>m} a_n = \sup_m \inf_{n>m} a_n$$

(Cf. Birkhoff, 1). On ne sait pas si elle l'est pour $\mathcal{T}_i$ (Cf. Birkhoff, 1). La question se pose de savoir si elle l'est pour toutes celles qui sont comprises entre $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_{\sigma c}$.

Remarquons que $\mathcal{T}_\sigma$ et $\mathcal{T}_{\sigma c}$ coïncident si $\mathcal{T}_{\sigma c}$ satisfait à (2) et à la condition (3) : Si la suite croissante a_n a pour limite 0, il existe pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de 0 un indice $n(\mathcal{V})$ tel que $C_+(a_n) \cap C_-(0) \subset \mathcal{V}$ pour $n > n(\mathcal{V})$.

Soient en effet u_n et v_n deux suites respectivement croissante et décroissante, tendant vers 0 et encadrant une suite z_n. On a $u_n \prec z_n$ et $u_n \prec 0$, $z_n \prec v_n$ et $0 \prec v_n$ donc

$$u_n \prec \inf z_n 0 \prec 0 \prec \sup z_n 0 \prec v_n.$$

D'autre part, $z_n = \inf z_n 0 + \sup z_n 0$. Soit alors $\mathcal{V}$ un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}_{\sigma c}$ et, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux voisinages de 0 tels que $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$. Soit n_1 le nombre associé à $\mathcal{V}_1$ par (3). On a $\inf z_n 0 \in \mathcal{V}_2$ pour $n > n_1$.

Comme $\mathcal{T}_{\sigma c}$ satisfait par hypothèse à 2), il existe aussi n_2 tel que $C_-(v_n) \cap C_+(0) \subset \mathcal{V}_2$ pour $n > n_2$. On en déduit pour $n > n_2$ $\sup z_n 0 \in \mathcal{V}_2$ et pour $n > \sup n_1 n_2$, $z_n \in \mathcal{V}$. Une suite convergente pour $\mathcal{T}_\sigma$ l'est donc alors aussi pour $\mathcal{T}_{\sigma c}$, ce qui, en vertu des définitions de ces deux topologies entraîne leur identité. Mais la condition (3) peut n'être pas satisfaite.

Exemple : Y est l'espace des suites de carré sommable réelles $x = (x^i)$. L'ordre est donné par $x \prec y \Leftrightarrow x^i \leqslant y^i$, $i = 1, 2, \ldots$

Un voisinage de 0 est l'ensemble des x vérifiant $\|x\| < \varepsilon$ si au moins deux x^i sont différents de 0 et tels que $|x^i| < \varepsilon_i$, si x^i seul est différent de 0, $\varepsilon > 0$ et la suite positive ε_i caractérisent le voisinage. 3) n'est pas satisfaite : prendre $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ et la suite x_n avec $x_n^i = \frac{1}{ni}$. Cette topologie est moins fine que $\mathcal{T}_{\sigma c}$ et elle est strictement plus fine que $\mathcal{T}_\sigma$, car la suite z_n définie par $z_n^i = \frac{\delta_n^i}{ni}$ ($\delta_n^i = 1$ si $n = i$, $= 0$ si $n \neq i$) qui converge vers 0 pour $\mathfrak{C}_\sigma$, ne converge pas ici ([1]).

4. Démonstration du Théorème du ch. I, § 4, dans le cas où Y est un groupe topologique ordonné satisfaisant à Y_a, Y_b, Y_c.

Soit $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

On a par hypothèse $\sum_1^n \Delta(S_i) \prec \Delta(S)$ quel que soit n, par suite (Y_c !) $\sum_1^\infty \Delta(S_i) = \lim_n \sum_1^n \Delta(S_i)$ existe et est inférieur à $\Delta(S)$.

Soit $\mathfrak{V}$ un voisinage de 0 en Y. Si $S = S(x; u_1, \ldots, u_p)$, il est possible de déterminer des éléments $v_i \succ u_i$ tels que $\overline{C_-(u_i)} \subset \dot{C}_-(v_i)$ et tels que si $S' = S(x; v_1, \ldots, v_p)$, on ait $\overline{S'} \subset S$ avec

$$\Delta(S') \prec \Delta(S) \qquad \text{et} \qquad \Delta(S') - \Delta(S) \in \mathfrak{V}'.$$

Il existe d'autre part deux voisinages $\mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{V}''$ tels que $\mathfrak{V}' + \mathfrak{V}'' \subset \mathfrak{V}$ et une suite de voisinages $\mathfrak{V}_i$ de 0 tels que

$$\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \ldots + \mathfrak{V}_n \subset \mathfrak{V}'$$

quel que soit n.

On peut associer à tout ensemble S_i un ensemble S'_i déduit de S_i en en remplaçant le sommet x_i par un élément $x'_i \succ x_i$ tel que

$$S_i \subset \dot{S}'_i \quad \Delta(S_i) \prec \Delta(S) \quad \Delta(S'_i) - \Delta(S_i) \in \mathfrak{V}_i.$$

Les $\dot{S}'_i$ constituent un recouvrement ouvert du compact $\overline{S'}$, on peut en extraire un recouvrement fini $\dot{S}'_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, q)$.

On aura donc

$$\Delta(S') \prec \sum_{j=1}^{q} \Delta(S'_{i_j})$$

En prenant n assez grand pour que $i_j < n$ $(j = 1, \ldots, q)$, on aura à fortiori.

$$\Delta(S') \prec \sum_{i=1}^{n} \Delta(S'_i).$$

([1]) Il y a lieu de remarquer que la topologie définie dans cet exemple sur l^2 n'est pas compatible avec la structure de groupe de l^2. Le problème se pose de savoir si $\mathfrak{C}_{\sigma c}$ peut satisfaire à la condition (2) sans satisfaire à la condition (3).

Or,

$$\sum_1^n \Delta(S'_i) - \sum_1^n \Delta(S_i) \in \mathcal{V}'.$$

Et il existe n_0 tel que pour $n > n_0$, on ait

$$\sum_1^n \Delta(S_i) - \sum_1^\infty \Delta(S_i) \in \mathcal{V}''.$$

On a donc $\Delta(S') - \Delta(S) \in \mathcal{V}$ d'une part, et d'autre part pour n assez grand

$$\sum_1^n \Delta(S'_i) - \sum_1^\infty \Delta(S_i) \in \mathcal{V}' + \mathcal{V}'' \subset \mathcal{V} \qquad \text{avec} \qquad \Delta(S') \prec \sum_1^n \Delta(S'_i)$$

ceci ayant lieu quel que soit $\mathcal{V}$ entraîne $\Delta(S) \prec \sum_1^\infty \Delta(S_i)$ (condition 3° du n° 1) qui joint à $\sum_1^\infty \Delta(S_i) \prec \Delta(S)$ entraîne

$$\Delta(S) = \sum_1^\infty \Delta(S_i).$$

5. Terminons ce paragraphe par quelques mots relatifs au cas où Y est un espace vectoriel ordonné sur un corps $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ qui est isomorphe à un sous-espace de Y est aussi ordonné et si l'on désigne par 0 l'élément unité de l'opération de groupe de Y, on exige en outre d'avoir

$$\lambda \in \mathcal{R}, \qquad \lambda \succ 0 \qquad \text{et} \qquad y \in Y, \qquad y \succ 0 \Rightarrow \lambda y \succ 0.$$

Ceci implique λ, $\mu \in \mathcal{R}$, $\lambda \succ 0$, $\mu \succ 0 \Rightarrow \lambda + \mu \succ 0$ et $\lambda\mu \succ 0$ c'est-à-dire que l'ordre de $\mathcal{R}$ en fait un corps ordonné.

Parmi les corps ordonnés, le plus important, et peut-être actuellement le seul pratiquement intéressant, est le corps des réels, auquel nous nous limiterons dans la suite. Dans ces conditions, il n'y a pas à faire de théorie particulière pour le cas où Y est un espace vectoriel topologique ordonné défini sur le corps des réels : dès l'instant que Y, en tant que groupe topologique ordonné satisfait aux axiomes Y_a, Y_b, Y_c, la théorie précédente s'y applique.

§ 2. — Fonctions à variation bornée.

1. Nous supposons dans ce paragraphe que l'espace Y des valeurs de la fonction F satisfait aux axiomes Y_a et Y_b du paragraphe précédent et à l'axiome Y_{c_1} suivant plus fort que Y_c.

Y_{c_1} : Pour tout ensemble E de Y, muni de l'ordre induit par celui de Y, filtrant à gauche et borné, le filtre de ses sections commençantes converge vers $\inf(x;\, x \in E)$.

Pour tout $y \in Y$, nous posons $y^+ = \sup y0$, $y^- = \sup(-y)0$ et $|y| = y^+ + y^-$. On a les relations bien connues

$$y = y^+ - y^- \qquad (y+z)^+ \prec y^+ + z^+$$
$$(y+z)^- \prec y^- + z^- \qquad |y+z| \prec |y| + |z|.$$

Ne faisant aucune hypothèse sur le signe de $F(x)$, nous considérons un ensemble $S \in \mathcal{S}$, et l'ensemble $\mathfrak{L}$ des partitions π de S en un nombre fini $n (n = 1, 2, \ldots)$ d'ensembles S_i deux à deux disjoints. On a

$$\sum_1^n |\Delta(S_i)| = \sum_1^n \Delta(S_i)^+ + \sum_1^n \Delta(S_i)^-$$

$$\Delta(S) = \sum_1^n \Delta(S_i) = \sum_1^n \Delta(S_i)^+ - \sum_1^n \Delta(S_i)^-.$$

Posons

$$P(S,\ \pi) = \sum_1^n \Delta(S_i)^+, \qquad N(S,\ \pi) = \sum_1^n \Delta(S_i)^-$$

$$V(S,\ \pi) = \sum_1^n |\Delta(S_i)|.$$

On a

$$P(S,\ \pi) \prec V(S,\ \pi) \qquad \text{et} \qquad N(S,\ \pi) \prec V(S,\ \pi).$$

Nous faisons alors l'hypothèse que l'ensemble des $V(S,\ \pi)$ pour S fixe et π décrivant $\mathfrak{L}$ est borné supérieurement.

Y étant complètement réticulé, il existe trois éléments V (S), P (S) et N (S) définis par

$$V(S) = \sup\{V(S, \pi);\ \pi \in \mathfrak{L}\}, \quad P(S) = \sup\{P(S, \pi);\ \pi \in \mathfrak{L}\},$$
$$N(S) = \sup\{N(S,\ \pi);\ \pi \in \mathfrak{L}\}.$$

En vertu de Y_{c_1} ces trois éléments peuvent être définis comme limites. En effet, on peut ordonner $\mathfrak{X}$ en posant $\pi_1 \prec \pi_2$ si et seulement si les ensembles S constituant π_2 résultent eux-mêmes de partitions finies effectuées sur les ensembles S constituant π_1. L'intersection de deux ensembles S étant un ensemble S, il est clair que $\sup \pi_1\pi_2$ est défini quelles que soient π_1 et π_2. $\mathfrak{X}$ est donc un ordonné filtrant à droite. On a d'autre part $\pi_1 \prec \pi_2 \Longrightarrow V(S, \pi_1) \prec V(S, \pi_2)$ (conséquence de $|y + z| \prec |y| + |z|$) et les relations analogues pour $P(S)$ et $N(S)$.

$V(S)$ est donc la limite de $V(S, \pi)$ suivant le filtre des sections finissantes de $\mathfrak{X}$, ce que nous écrirons $V(S) = \lim_{\mathfrak{X}} V(S, \pi)$ et de même $P(S) = \lim_{\mathfrak{X}} P(S, \pi)$ et $N(S) = \lim_{\mathfrak{X}} V(S, \pi)$.

Comme d'autre part

$$\Delta(S) = P(S, \pi) - N(S, \pi)$$
$$V(S, \pi) = P(S, \pi) + N(S, \pi)$$

on a pour les limites

$$\Delta(S) = P(S) - N(S)$$
$$V(S) = P(S) + N(S)$$

Nous dirons que la fonction $F(x)$ à valeurs dans Y est à variation bornée si $V(S)$, et par suite $P(S)$ et $N(S)$ sont définies pour tout $S \in \mathcal{S}$. Alors $V(S)$, $P(S)$ et $N(S)$ seront respectivement appelées variation, variation positive et variation négative de $F(x)$ sur S.

2. Les trois fonctions V, P, N définies sur $\mathcal{S}$ sont additives, c'est-à-dire

$$S = S_1 \cup S_2 \text{ et } S_1 \cap S_2 = \emptyset \Longrightarrow f(S) = f(S_1) + f(S_2) \quad (f = V, P, N).$$

Il est clair, en effet, qu'à une partition π_1 de S_1 et une partition π_2 de S_2 correspond une partition $\pi = \pi_1 + \pi_2$ de S qui induit π_1 sur S_1 et π_2 sur S_2. Mais, inversement, étant donnée une partition π de S, on peut trouver une partition π_1, de S_1 et une partition π_2 de S_2 telles que $\pi \prec \pi_1 + \pi_2$. Si π est constituée d'ensembles S_i, π_1 est constituée des ensembles $S_1 \cap S_i$ et π_2 des ensembles $S_2 \cap S_i$.

On peut en particulier, définir V, P, N pour les cônes négatifs $C_-(x)$. On posera $f(C_-(x)) = f(x)$ $(f = V, P, N)$. On a donc $F(x) = P(x) - N(x)$. D'autre part, en vertu de l'additivité de f, on a $f(S) = \Delta(S, f)$ et comme $f(S)$ est positive pour tout $S \in \mathcal{S}$, on voit que les trois fonctions $V(x)$, $P(x)$ et $N(x)$ sont positives et totalement croissantes sur X. On peut donc énoncer le théorème :

Toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions totalement croissantes positives.

La réciproque est immédiate.

F peut évidemment se mettre d'une infinité de façons sous la forme $P_1 - N_1$, où P_1 et N_1 sont deux fonctions totalement croissantes positives. Mais les fonctions trouvées plus haut, P et N, sont les plus petites, ce qui les caractérise.

Il est clair, en effet, que si $F = P_1 - N_1$, on a

$$V(x, F) \prec V(x, P_1) + V(x, N_1)$$

Comme $F = P - N$, on a $P_1 - P = N_1 - N = G$.

D'autre part,

$$V(x, P_1) = P_1(x), V(x, N_1) = N_1(x) \quad \text{et} \quad V(x, F) = P(x) + N(x).$$

On a donc $P + N \prec P + N + 2G$, d'où $G \succ 0$.

3. Théorème. — *Si* F, *supposée à variation bornée, est continue à droite, il est en de même de* V, P *et* N *si* X *satisfait aux axiomes* X_b *et* X_c.

Il suffit de le prouver pour $V(x)$.

Fixons $x_0 \in X - \mathcal{M}$, et un voisinage à droite $\mathcal{V}_+(x_0)$. Il existe $y_0 \in \mathcal{V}_+(x_0)$ tel que $C_-(x_0) \subset \dot{C}_-(y_0)$, par suite pour tout $\mathcal{V}_+(x_0)$, $\mathcal{V}_+(x_0) \cap C_-(y_0)$ est aussi un voisinage à droite de x_0 : on peut se limiter aux voisinages $\mathcal{V}_+(x_0) \subset C_-(y_0)$.

Soit alors $a = V(y_0) - V(x_0) = \sup\{V(S(y_0; x_0), \pi);\ \pi \in \mathfrak{L}\}$, $\mathfrak{L}$ étant ici l'ensemble de toutes les partitions finies de $S(y_0; x_0)$ en ensembles S.

Étant donné un voisinage $\mathcal{V}(0)$ dans Y, il existe un voisinage $\mathcal{W}(0)$ tel que $\overset{2}{\mathcal{W}} \subset \mathcal{V}$ et une partition π_1 de $S(y_0; x_0)$ telle que $V(S(y_0; x_0), \pi_1) \in \mathcal{W}(a)$.

Soit d'autre part un élément $y \in X$ tel que $x_0 \prec y \prec y_0$, $x_0 \neq y$.

Si $S = S(x; u_1, \ldots, u_n)$ supposé sous forme canonique est un élément de π_1, on a

$$S' = S \cap S(y; x_0) = S(\inf xy; u_1, \ldots, u_n, x_0)$$
$$S' = S(\inf xy; u_1, \ldots, u_n) - S(\inf xy; \inf u_1 x_0, \ldots, \inf u_n x_0).$$

Par suite, $\Delta(S')$ est somme d'un nombre fini de termes de la forme $\delta = F(\inf yz) - F(\inf x_0 z)$ et on a $|\Delta(S')| \prec \Sigma|\delta|$.

Les ensembles S' sont en nombre fini lorsque S décrit π_1, à chacun d'eux correspond un nombre fini de δ, d'autre part l'opération inf est continue à droite et $F(x)$ est continue à droite.

On peut donc déterminer un voisinage à droite $\mathcal{V}_+(x_0)$ tel que $y \in \mathcal{V}_+(x_0) \Longrightarrow \Sigma|\Delta(S')| \in \mathcal{W}(0)$.

Lorsque S décrit π_1, les ensembles $S - S'$ décrivent une partition π_2 de $S(y_0; y)$ pour laquelle

$$V(S(y_0;\ y),\ \pi_2) - V(S(y_0;\ x_0),\ \pi_1) \in \mathcal{W}(0).$$

Par suite

$$V(S(y_0; y),\ \pi_2) \in \mathcal{V}(a).$$

Or

$$V(S(y_0; y),\ \pi_2) \prec V(y_0) - V(y)$$

$V(y_0) - V(y)$ est donc supérieur à la valeur d'une fonction qui converge vers $V(y_0) - V(x_0)$ suivant le filtre produit de $\mathfrak{B}_+(x_0)$ et du filtre des sections finissantes de l'ordonné filtrant des partitions π de $S(y_0;\ x_0)$. Il en résulte qu'aucune valeur d'adhérence de $V(y_0) - V(y)$ suivant $\mathfrak{B}_+(x_0)$ ne peut être inférieure à $V(y_0) - V(x_0)$. Or, on a précisément toujours

$$V(y_0) - V(y) \prec V(y_0) - V(x_0).$$

Il en résulte $\lim_{\mathfrak{B}_+(x_0)} V(y_0) - V(y) = V(y_0) - V(x_0)$ c. q. f. d.

En appelant encore mesure de Radon sur un espace X localement compact, une mesure μ σ-additive et complète à valeurs dans Y, définie sur le plus grand σ-anneau possible contenant les compacts de X et telle que $\mu K = \inf \{\mu K_1;\ K \subset \dot{K}_1\}$ on peut résumer les résultats obtenus jusqu'ici dans le cas où X est localement compract, en énonçant le

Théorème. — *Si la fonction* F *définie sur un espace localement compact ordonné* X *satisfaisant à* X_a, X_b, X_c, *prend ses valeurs dans un groupe topologique* Y *satisfaisant à* Y_a, Y_b, Y_{c_1}, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $F(x)$ *soit la valeur pour* $C_-(x)$ *d'une mesure de Radon sur* X *est que* F *soit à variation bornée et continue à droite.*

4. La notion de fonction à variation bornée que nous avons introduite ici est essentiellement fondée sur la structure

d'ordre possédée par les espaces X et Y. Il serait intéressant de la comparer aux notions de fonctions à variation bornée que l'on peut définir pour les applications de R^1 dans un espace vectoriel normé. (Cf. E. Hille, 1.)

On peut d'abord remarquer que les notions de fonctions à variation bornée définies par Hille s'étendent au cas d'un espace X étudié ici : il suffit de faire jouer aux ensembles S le rôle des intervalles de R^1, et on obtient pour les espaces X de ce travail les définitions suivantes :

Définitions. — Une fonction sur X, à valeurs dans Y, espace vectoriel normé est à variation bornée (V. B.) si pour un $S \in \mathcal{S}$ donné quelconque, on a pour tous les choix d'un nombre fini n d'ensembles S_i vérifiant

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{n} S_i \subset S, \quad n = 1, 2, \quad \ldots$$

$$\sup \left\| \sum_{1}^{n} \Delta(S_i) \right\| \prec +\infty.$$

Une fonction sur X, à valeurs dans Y sera dite à variation fortement bornée (V. B. F.) si pour toutes les partitions finies en ensembles S_i d'un ensemble S donné quelconque on a

$$\sup \sum_{1}^{n} \|\Delta(S_i)\| \prec +\infty.$$

Nous désignerons par V. B. O. (variation bornée selon l'ordre) la propriété que nous avons définie dans ce paragraphe.

Nous comparerons ces diverses propriétés, en supposant que Y est un espace vectoriel ordonné normé, défini sur le corps des réels, satisfaisant à Y_a, Y_b, Y_{c_1} et à l'axiome suivant : $Y_N : y, z \in Y, 0 \prec y \prec z \Longrightarrow \|y\| \leqslant \|z\|$.

Lemme. — Dans les conditions ci-dessus, on a $\|y\| \leqslant 2\||y|\|$ pour tout $y \in Y$.

En effet, on a $|y| = y^+ + y^-$ et comme $|y|$, y^+ et y^- sont positifs, Y_N implique $\|y^+\| \leqslant \||y|\|$ et $\|y^-\| \leqslant \||y|\|$. L'énoncé résulte alors de $y = y^+ - y^-$.

Théorème — 1. Dans les conditions ci-dessus, l'implication V. B. O. $\Longrightarrow$ V. B. est vraie.

2. Si de plus, Y est réflexif, on a aussi V. B. F. $\Longrightarrow$ V. B. O.

DÉMONSTRATION. — 1. Soit un ensemble $S \in \mathcal{S}$ et des ensembles S_i vérifiant $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} S_i \subset S$

Il existe une partition de S en ensemble $S_j (j = 1, \ldots, m;\ m \geqslant n)$ comprenant les $S_i (S_j = S_i,\ 1 \leqslant j = i \leqslant n)$.

On a par hypothèse $\sum_j |\Delta(S_j)| \prec V(S)$.

Or
$$\left|\sum_i \Delta(S_i)\right| \prec \sum_i |\Delta(S_i)| \prec \sum_j |\Delta(S_j)|$$

et, en vertu du lemme
$$\left\|\sum_i \Delta(S_i)\right\| \leqslant 2 \left\|\left|\sum_i \Delta(S_i)\right|\right\| \leqslant 2\,\|V(S)\|.$$

2. On a par hypothèse, pour toute partition finie d'un ensemble S en ensembles S_i, $\sum_i \|\Delta(S_i)\| < K$, K réel positif. On en déduit $\sum_i \||\Delta(S_i)|\| < 2K$ et à fortiori $\left\|\sum_i |\Delta(S_i)|\right\| < 2K$.

L'ensemble des $\sum_i |\Delta(S_i)|$ correspondant à toutes les partitions finies de S en ensembles S_i est filtrant à droite (pour la relation d'ordre induite par celle de Y). Il en est de même de l'ensemble des cônes positifs $C_+\left(\sum_i |\Delta(S_i)|\right)$ ordonné par inclusion. Les traces de ces cônes sur la sphère $\|y\| = 2K$ ne sont jamais vides et constituent une base de filtre. Si Y est réflexif (isomorphe à son bidual fort), cette sphère est faiblement compacte et possède un point faiblement adhérent à la base de filtre : y_0.

Or, un cône positif dans Y est fortement fermé (Y_b) et est convexe, donc faiblement fermé (Cf. Dieudonné et Schwartz 1).

Par suite, $y_0 \in C_+\left(\sum_i |\Delta(S_i)|\right)$ pour toute partition finie de S, ce qui établit la proposition.

L'implication inverse V.B.O. $\Longrightarrow$ V.B.F. est inexacte, même dans des cas très simples, comme le prouve l'exemple suivant : X est le segment [0, 1] avec l'ordre ordinaire.

Y est l'espace de Hilbert l^2 des suites réelles de carré sommable $y = (y_i)$. L'ordre sur Y est donné par $y \prec z \Longleftrightarrow y_i \leqslant z_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Soit e_n le vecteur $\left(\frac{\delta_i^n}{i}\right)$ $(\delta_i^n = 1$ si $n = i$, $= 0$ si $n \neq i)$ et e le vecteur $\left(\frac{1}{i}\right)$.

Soit θ_n une suite réelle strictement croissante et tendant vers un. Considérons l'application $y(x)$ de X dans Y définie par

$$y(x) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x < \theta_1$$

$$y(x) = \sum_1^m e_n + \frac{x - \theta_m}{\theta_{m+1} - \theta_m} e_{m+1} \quad \text{si} \quad \theta_m \leqslant x < \theta_{m+1}$$

$$y(1) = e.$$

Pour une partition arbitraire de $[0, 1]$ en semi-segments x_j, x_{j+1}, $(x_0 = 0,\ x_p = 1)$, on a

$$\sum_{j=0}^{p-1} |y(x_{j+1}) - y(x_j)| = y(1) = e.$$

Par contre, en prenant $x_j = \theta_j$ pour $j = 1, \ldots, p$ on a

$$\sum_{j=0}^{p-1} \|y(x_{j+1}) - y(x_j)\| = \sum_1^p \frac{1}{i}\cdot$$

somme qui n'est pas bornée supérieurement.

A noter que pour l'espace l^2 précédent, V.B. $\Longrightarrow$ V.B.O., ceci résulte du fait que $\| |y| \| = \|y\|$ et que l'ordre qui a été adopté est lié à une base orthonormale.

§ 3. Affaiblissement de l'axiome X_a.

1. Des trois conditions imposées à l'espace X, une des plus sévères est X_a. Il serait souhaitable de pouvoir l'affaiblir, en restreignant au besoin la classe des fonctions F. Nous étudions ci-dessous deux hypothèses plus larges que X_a. La première très naturelle, n'est utilisable que si l'on impose une condition supplémentaire à F. La seconde ne restreint pas la classe des fonctions F.

2. Remplaçons X_a par les conditions

X_{α_1} : Pour tout couple x, $y \in X$, $C_+(x) \cap C_-(y)$ est compact (éventuellement vide).

$X_{\alpha'_1}$: Pour tout $x \in X$, il existe y tel que $x \in C^0_+(y)$.

Les trois conditionx X_{α_1}, $X_{\alpha'_1}$ et X_c entraînent aisément que X est localement compact.

Considérons les ensembles $\complement C_+(y)$, $y \in X$. Si l'intersection d'un nombre fini de tels ensembles était vide, il existerait p éléments y_i, $i = 1, \ldots, p$ tels que $\bigcup_{i=1}^{p} \complement C_+(y_i) = X$, et X_{α_1} entraînerait X_a.

Nous supposerons que les intersections finies d'ensembles $\complement C_+(y)$ ne sont jamais vides. Leur famille est donc la base d'un filtre $\mathcal{C}$.

Soit, alors un cône négatif $C_-(x_0)$ et sur $C_-(x_0)$ un filtre $\mathcal{F}$ sans point adhérent. Pour tout $y \in X$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $C_+(y) \cap F = \emptyset$. C'est évident, si $C_+(y) \cap C_-(x_0) = \emptyset$, puisque $\mathcal{F}$ est un filtre sur $C_-(x_0)$. Si $C_+(y) \cap C_-(x_0) \neq \emptyset$ et si $C_+(y) \cap F \neq \emptyset$ quel que soit $F \in \mathcal{F}$, la famille des $C_+(y) \cap F$ serait la base d'un filtre sur $C_+(y) \cap C_-(x_0)$ qui serait plus fin que $\mathcal{F}$ et aurait un point adhérent en vertu de X_{α_1}, contrairement à l'hypothèse faite sur $\mathcal{F}$.

Tout filtre sur un cône négatif qui n'a pas de point adhérent est donc plus fin que $\mathcal{C}$.

Supposons alors que $\lim_{\mathcal{C}} F(x)$ existe et soit h sa valeur. F prenant ses valeurs dans le cône positif d'un espace Y satisfaisant à Y_a, Y_b, Y_c est supposée totalement croissante et continue à droite.) On a $h \prec F(x)$ pour tout $x \in X$, puisque $C_-(x) \subset \complement C_+(x)$.

Adjoignons à X un élément θ de telle sorte que l'espace $\{\theta\} \cup X = \widetilde{X}$ possède les propriétés suivantes :

1° $\theta \prec x$ pour tout $x \in X$.

2° Une base du filtre des voisinages de θ en $\widetilde{X}$ est constituée des ensembles $G \cup \{\theta\}$ où G décrit $\mathcal{C}$.

3° Les voisinages de $x \in X$ en X en sont voisinages en $\widetilde{X}$.

On pose enfin $F(\theta) = h$.

Si $\widetilde{C_-(x)}$ est le cône négatif de sommet x en $\widetilde{X}$, il est compact car il est séparé en vertu de $X_{\alpha'_1}$ et de X_c et si $\mathcal{F}$ est un filtre sans point adhérent sur $C_-(x)$, il converge vers θ sur $\widetilde{C_-(x)}$. F est continue à droite sur $\widetilde{X}$, et elle vérifie $\Delta(S) \succ 0$, pour tout $S \in \widetilde{\mathcal{S}}$, car si $S = S(x, \theta)$, on a $\Delta(S) = F(x) - F(\theta) \succ 0$ et si $S = S(x, u_1, \ldots, u_n, \theta)$, on a, en posant $S_1 = S(x; u_1, \ldots, u_n)$ et en utilisant le fait que $\inf \theta x = \theta$ pour tout $x \in X$

$$\Delta(S) - \Delta(S_1) = -F(\theta)(1 - C_n^1 + \cdots + (-1)^p C_n^p + \cdots + (-1)^n) = 0$$

$\tilde{X}$ et le prolongement de F à $\tilde{X}$ vérifient donc les conditions des théorèmes du chapitre précédent. Le point θ porte la masse ponctuelle h, ce qui permet d'énoncer le théorème :

Si l'espace X *satisfait aux axiomes* X_{a_1}, $X_{a'_1}$, X_b *et* X_c, *si* $\mathcal{M} = \emptyset$, *si* F *à valeurs dans le cône positif d'un groupe* Y *satisfaisant à* Y_a, Y_b, Y_c *est totalement croissante et continue à droite sur* X *et admet une limite* h *suivant le filtre des complémentaires des cônes positifs de* X, *il existe une mesure de Radon positive* μ *sur* X, *qui est localement compact, telle que* $\mu C_-(x) = F(x) - h$.

Ce résultat s'étend immédiatement au cas $\mathcal{M} \neq \emptyset$ (sous les conditions indiquées au ch. I, § 5 et 6) et au cas d'une fonction à *variation bornée* sur X, à condition de supposer que Y vérifie Y_{c_1} et que non seulement $F(x)$ mais aussi $V(x)$ admet une limite suivant le filtre $\mathcal{C}$.

Remarque. — Si $C_+(y)$ est compact quel que soit y, l'adjonction de θ réalise une compactification classique de l'espace localement compact X. La méthode utilisée ici a l'avantage dans le cas général de faire intervenir le filtre $\mathcal{C}$ moins fin que le filtre Φ des complémentaires des compacts, l'existence de $\lim_{\mathcal{C}} F(x)$ étant alors une condition plus large que celle de $\lim_{\Phi} F(x)$.

3. Nous remplaçons maintenant X_a par la condition :
X_{a_2} : A tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ défini sur un cône négatif $C_-(x_0)$ et n'ayant aucun point adhérent sur ce cône, correspond un filtre $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ (variable avec $\mathcal{F}$), également sans point adhérent, dont une base est constituée de cônes négatifs, qui est moins fin que $\mathcal{F}$ et tel que pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe au moins un élément $x(F) \in F$ tel que $C_-(x(F)) \in \mathcal{C}$.

Remarquons que les axiomes X_{a_2}, X_b et X_c sont vérifiés si X est une dendrite privée de ses extrémités et munie d'un ordre et d'une topologie évidentes.

Nous supposerons encore que l'espace des valeurs de F est un groupe satisfaisant à Y_a, Y_b, Y_{c_1} et que F est bornée inférieurement sur X.

4. Soit donc $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sans point adhérent sur un cône négatif $C_-(x_0)$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, considérons l'ensemble $G(F)$ des

points $x(F)$. $G(F)$ n'est jamais vide et on a

$$G(F_1 \cap F_2) \subset G(F_1) \cap G(F_2).$$

L'ensemble des $G(F)$ constitue la base $\mathfrak{G}$ d'un filtre plus fin que $\mathcal{F}$, donc identique à $\mathcal{F}$. L'image de $\mathfrak{G}$ par F est une base d'ultrafiltre $F(\mathfrak{G})$ sur Y. Cet ultrafiltre est plus fin que le filtre des sections commençantes de l'ordonné filtrant à gauche $\{F(x); C_-(x)\in\mathcal{C}\}$; F étant bornée inférieurement sur X, et Y vérifiant Y_{c_1}, il en résulte que F admet une limite suivant tout ultrafiltre $\mathcal{F}$ sans point adhérent sur un cône négatif.

Soit Ω l'ensemble de ces ultrafiltres.

Nous poserons $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$, si quels que soient $F_1\in\mathcal{F}_1$ et $F_2\in\mathcal{F}_2$ il existe $x_1(F_1)$ et $x_2(F_2)$ avec $x_1(F_1) \prec x_2(F_2)$.

X_{α_2} entraîne que la relation $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$ peut s'énoncer de manière équivalente : quels que soient $F_1\in\mathcal{F}_1$, $F_2\in\mathcal{F}_2$ et $x_2(F_2)$ il existe $x_1(F_1) \prec x_2(F_2)$. Car, en vertu de X_{α_2} si $x(_2F_2)$ est donné, $C_-(x_2(F_2)) \cap F_2 = F'_2\in\mathcal{F}_2$ et d'après la définition de $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$, il existe $x_1(F_1)$ et $x'_2(F'_2)$ tels que $x_1(F_1) \prec x'_2(F'_2)$, or $x'_2(F'_2) \prec x_2(F_2)$.

Sous cette seconde forme, on voit immédiatement que la relation $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$ est transitive. Elle entraîne évidemment

$$\lim_{\mathcal{F}_1} F(x) \prec \lim_{\mathcal{F}_2} F(x).$$

Considérons alors la relation R : « $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_2 \prec \mathcal{F}_1$ »

R est évidemment symétrique, réflexive et transitive.

Soient θ les éléments de $\Theta = \Omega/R$.

Nous allons adjoindre à X, les éléments θ, en étendant à $X \cup \Theta$ l'ordre et la topologie de X.

Nous posons $\theta \prec x$, $\theta\in\Theta$, $x\in X$ s'il existe un $\mathcal{F}\in\theta$ tel que $F\in\mathcal{F} \Longrightarrow C_-(x) \cap F\in\mathcal{F}$

X_{α_2} rend alors impossible $x \prec \theta$ pour $x\in X$, $\theta\in\Theta$.

Nous posons

$$\theta_1 \prec \theta_2 \quad \text{si} \quad \mathcal{F}_1\in\theta_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2\in\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2.$$

Ces deux définitions font de $X \cup \Theta$ un ensemble ordonné (vérification immédiate).

Nous devons maintenant définir l'opération inf sur $X \cup \Theta$. Les deux cas à envisager sont celui de inf θx et celui de inf $\theta_1\theta_2$. Traitons le deuxième. Le premier s'en déduira.

1° Supposons d'abord que quels que soient $\mathcal{F}_1\in\theta_1$, $\mathcal{F}_2\in\theta_2$ et $F_1\in\mathcal{F}_1$, $F_2\in\mathcal{F}_2$, il existe $x_1(F_1)$ et $x_2(F_2)$ tels que inf $x_1x_2 \neq \omega$.

Dans ces conditions, l'ensemble (F_1, F_2) engendré par les éléments $\inf x_1x_2$ ainsi définis n'est jamais vide et engendre une base de filtre $\mathfrak{B}$ lorsque F_1 et F_2 décrivent respectivement $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. $\mathfrak{B}$ plus fin que $\mathcal{C}(\mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_2)$ est, comme eux, sans point adhérent. Je dis que tous les ultrafiltres plus fins que $\mathfrak{B}$ sont équivalents (mod. R). Il suffit, pour cela, de prouver que pour deux quelconques d'entre eux, on a $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2$.

Or, soit $\inf x_1x_2$ un élément appartenant à un ensemble $B_2 \in \mathfrak{B}_2$

$$(x_1 = x_1(F_1), \qquad F_1 \in \mathcal{F}_1, \qquad x_2 = x_2(F_2), \qquad F_2 \in \mathcal{F}_2).$$

On a $B_{12} = C_-(\inf x_1x_2) \cap (F_1, F_2) \in \mathfrak{B}$, car $C_-(x_1) \cap F_1 \in \mathcal{F}_1$ et $C_-(x_2) \cap F_2 \in \mathcal{F}_2$; donc B_{12} contient un ensemble $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ puisque $\mathfrak{B}_1$ est plus fin que $\mathfrak{B}$. Ceci entraîne $\mathfrak{B}_1 \prec \mathfrak{B}_2$. Tous les ultrafiltres plus fins que $\mathfrak{B}$ définissent donc un élément θ. Je dis que $\theta = \inf \theta_1\theta_2$.

Cela résulte des deux propriétés suivantes :

a) $\theta \prec \theta_1$, $\theta \prec \theta_2$. Évident.

b) $\theta' \prec \theta_1$ et $\theta' \prec \theta_2 \Longrightarrow \theta' \prec \theta$.

En effet, soit $\inf x_1x_2$, $(x_1 = x_1(F_1)$, $x_2 = x_2(F_2)$, $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2)$ un élément d'un ensemble de $\mathcal{F} \in \theta$. Quels que soient $\mathcal{F}' \in \theta'$ $F' \in \mathcal{F}'$ et $\xi_1 \in C_-(x_1) \cap F_1$, $\xi_2 \in C_-(x_2) \cap F_2$ il existe $x_1'(F') \prec \xi_1$ et $x_2'(F') \prec \xi_2$.

Mais $C_-(x_1') \cap C_-(x_2') \cap F' \in \mathcal{F}'$ et est inclus dans F'.

Il existe donc $x'(F')$ tel que $x' \prec x_1' \prec x_1$ et $x' \prec x_2' \prec x_2$.

On a $x' \prec \inf x_1x_2$, ce qui établit la proposition.

2° Si, au contraire, il existe $\mathcal{F}_1 \in \theta_1$, $\mathcal{F}_2 \in \theta_2$, $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2$ avec $\inf x_1x_2 = \omega$ pour tout $x_1(F_1)$ et tout $x_2(F_2)$, nous poserons $\inf \theta_1\theta_2 = \omega$.

La même construction donnera $\inf \theta x$, si dans ce qui précède, on remplace les éléments $x_1(F_1)$ par l'élément fixe x.

Il est clair enfin que si $\inf xy = \omega$, x, $y \in X$, cette relation subsiste sur $X \cup \Theta$.

5. Topologie sur $X \cup \Theta$. — Il s'agit à présent de faire de l'ensemble ordonné $X \cup \Theta$ un espace topologique ordonné $\widetilde{X}$ dont la topologie vérifie un des systèmes d'axiomes utilisés au chapitre précédent et induise sur X la topologie que celui-ci avait initialement. Nous affecterons d'un tilda toutes les notations désignant des éléments relatifs à $\widetilde{X}$ $(\widetilde{C_-(x)}, \widetilde{\mathcal{V}(x)} \ldots)$, les mêmes notations sans tilda désignant les éléments de même définition sur X.

Pour atteindre notre but, nous devrons renforcer l'axiome X_{α_2}.

Nous le ferons de deux manières, et étudierons deux topologies sur $X \cup \Theta$:

La première $\mathcal{T}_1$ assurera sur $\widetilde{X}$ la vérification des axiomes $X_{a'}$, X_b et X_c si X satisfait X_{α_2}, X_b, X_c et l'axiome suivant $X_{\alpha'_2}$: $C_-(x)$ est fermé pour tout $x \in X$.

La seconde, $\mathcal{T}_2$, assurera sur $\widetilde{X}$ la vérification des axiomes X_a, X_b, X_c si X satisfait X_b, X_c et les axiomes X_{α_3} (renforcement de X_{α_2}) et X_{α_3} (renforcement de $X_{\alpha'_2}$) suivants :

X_{α_3} : Même énoncé que X_{α_3} à cela près que $\mathcal{C}$ a cette fois une base constituée de cônes $C_-(x)$ d'intérieur non vide et que tout $F \in \mathcal{F}$ contient un $x(F)$ tel que $C_-(x(F)) \in \mathcal{C}$ et $\mathring{C}_-(x(F)) \cap F \in \mathcal{F}$.

$X_{\alpha'_3}$: $C_-(x)$ est fermé et séparé pour tout $x \in X$.

6. Étudions d'abord $\mathcal{T}_1$.

Considérons le filtre intersection des ultrafiltres $\mathcal{F} \in \theta$, θ fixe. Il possède une base $\mathfrak{G}(\theta)$ formée d'éléments G tels que pour tout $x \in G$, $C_-(x) \cap G \in \mathfrak{G}(\theta)$ (conséquence du fait que tout $\mathcal{F} \in \theta$ possède une base jouissant de la même propriété relativement à $\mathcal{F}$, et que les filtres appartenant à θ sont liés par la relation $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_2 \prec \mathcal{F}_1$).

En vertu de X_c, il existe pour tout $x \in G$, un $y \in X$ tel que $\mathring{C}_-(y) \supset C_-(x)$. Soit alors l'ensemble

$$\mathcal{V}(\theta) = \mathring{C}_-(y) \cup (\Theta \cap \widetilde{C_-(x)}) \quad \theta \in \Theta.$$

Sa trace sur X en est un ouvert. Et, lorsque y varie de façon à vérifier toujours $\mathring{C}_-(y) \supset C_-(x)$, que x décrit G et que G décrit $\mathfrak{G}(\theta)$, $\mathcal{V}(\theta)$ décrit une base de filtre qui satisfait aux axiomes des voisinages ouverts et que nous prendrons comme base des voisinages ouverts de θ.

Cette définition des voisinages de θ, pour $\theta \in \Theta$, assure que tout filtre sans point adhérent sur un cône négatif de X a pour points adhérents sur $\widetilde{X}$ les éléments θ auxquels appartiennent les ultrafiltres plus fins que lui.

Mais il reste d'une part à définir les voisinages $\widetilde{\mathcal{V}(x)}$ des points x de X et à s'assurer que sur tout cône $\widetilde{C_-(x_0)}$ tout filtre a un point adhérent, ce qui n'est pas encore garanti pour les filtres sur $\widetilde{C_-(x_0)} \cap \Theta$, (ou $\widetilde{C_-(\theta_0)} \cap \Theta$, ce qui est équivalent).

Soit donc Ψ un tel filtre, d'éléments Φ. Associons-lui le filtre $\mathcal{F}(\Psi)$ dont une base est décrite par les ensembles $F(\Phi, G(\theta))$ associés respectivement à un choix de Φ dans Ψ et de G dans $\mathfrak{G}(\theta)$ pour chaque $\theta \in \Phi$. Si $G(\theta)$ est l'élément ainsi associé à θ, on prend $F(\Phi, G(\theta)) = \cup \{G(\theta), \theta \in \Phi\}$. La base de $\mathcal{F}(\Psi)$ est décrite lorsque G décrit $\mathfrak{G}(\theta)$ et que Φ décrit Ψ. Si $\mathcal{F}(\Psi)$ n'a pas de point adhérent sur $C_-(x_0)$, il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}(\Psi)$ qui converge vers un élément $\theta_0 \prec x_0$. Dans ces conditions Ψ a θ_0 pour point adhérent. Sans quoi, il existerait un Φ disjoint d'un $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)}$ et pour $\theta \in \Phi$, un ensemble $G(\theta)$ disjoint de $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)}$, par suite un ensemble $F(\Phi, G(\theta))$ disjoint de $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)}$ ce qui est absurde. Si donc Ψ n'a pas de point adhérent sur Θ, c'est que $\mathcal{F}(\Psi)$ en a un sur $C_-(x_0)$. Soit x_1 un tel point et $\mathfrak{V}(x_1)$ un de ses voisinages dans X. Considérons l'ensemble des $\theta \in \Theta$ tels que $G \cap \mathfrak{V}(x_1) \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathfrak{G}(\theta)$, et soit $\widetilde{\mathfrak{V}(x_1)}$ la réunion d'un voisinage de cet ensemble sur Θ et de $\mathfrak{V}(x_1)$. La famille des $\widetilde{\mathfrak{V}(x_1)}$ est une base de filtre et les traces de $\widetilde{\mathfrak{V}(x_1)}$ sur Θ et sur X contiennent respectivement un ouvert de chaque espace. Le filtre peut donc être pris pour filtre des voisinages de x_1 dans $\widetilde{X}$.

Si $x \in X$ n'est point adhérent d'aucun filtre du type $\mathcal{F}(\Psi)$, le filtre des voisinages de x dans X en sera base de voisinages dans $\widetilde{X}$.

Avec la topologie ainsi définie sur $X \cup \Theta$ par les voisinages de chaque point, tout filtre sur un cône négatif de $\widetilde{X}$ a donc un point adhérent et il est clair d'autre part que tout cône négatif sur $\widetilde{X}$ est fermé : $\widetilde{X}$ vérifie l'axiome X_a.

Montrons que l'opération inf est continue à droite sur $\widetilde{X}$. Nous nous limiterons au cas $\theta = \inf \theta_1\theta_2$.

Un voisinage à droite de θ contient toujours un ensemble du type $\mathring{C}_-(y) \cap \widetilde{C_-(\theta)}$ contenant lui-même un élément $\inf x_1x_2$ avec $x_i \in G_i$, $G_i \in \mathfrak{G}(\theta_i)$, $i = 1,2$. x_1 et x_2 appartenant à X et l'opération inf étant continue à droite sur X, il existe deux éléments y_1, y_2 tels que $\mathring{C}_-(y_i) \supset C_-(x_i)$ et $\inf y_1y_2 \in \mathring{C}_-(y)$ d'où résulte aisément la proposition.

Il est enfin évident que X_c est satisfait par la topologie $\mathcal{T}_1$.

7. Étudions maintenant la topologie $\mathcal{T}_2$.

Le filtre intersection des ultrafiltres $\mathcal{F} \in \theta$ a cette fois une base $\mathfrak{G}(\theta)$ formée d'éléments G tels que si $x \in G$, $C^0_-(x) \cap G \in \mathfrak{G}(\theta)$. Nous choisirons alors pour éléments d'une base de voisinages ouverts de $\theta_0 \in \Theta$, les ensembles

$$\widetilde{\mathfrak{V}}(\theta_0, x, x') = \left(\mathring{C}_-(x) - C_-(x')\right) \cup \left((\widetilde{C_-(x)} - \widetilde{C_-(x')}) \cap \Theta\right)$$

où x décrit G et G décrit $\mathfrak{G}(\theta_0)$, et x' décrit $G' - \widetilde{C_+(\theta_0)}$, G′ décrit $\mathfrak{G}(\theta')$ et θ' décrit $\Theta - \widetilde{C_+(\theta_0)}$.

En vertu de X_{α_3} et $X_{\alpha'_3}$, tout $\widetilde{\mathfrak{V}}(\theta_0, x, x')$ a pour trace sur X un ouvert non vide de X. D'autre part, $\widetilde{\mathfrak{V}}(\theta_0, x, x')$ est un voisinage $\widetilde{\mathfrak{V}}(\theta, x, x')$ pour chaque élément θ de Θ qu'il contient, car si $\theta \prec x$, θ non $\prec x'$ il existe $G \in \mathfrak{G}(\theta)$ tel que $G \subset C_-(x)$ et $G \cap C_-(x') = \emptyset$. Enfin le filtre $\widetilde{\mathfrak{B}(\theta_0)}$ des voisinages de θ_0 ainsi défini est moins fin que $\mathfrak{G}(\theta_0)$, car si $\theta \in \Theta - \widetilde{C_+(\theta_0)}$, il existe $G \in \mathfrak{G}(\theta)$, $x \in G$ et $G_0 \in \mathfrak{G}(\theta_0)$ tels que $G_0 \cap C_-(x) = \emptyset$.

La définition formelle des voisinages $\widetilde{\mathfrak{V}(x)}$ des éléments $x \in X$ sera la même que pour $\mathcal{T}_1$. Le fait que tout filtre sur un cône négatif de $\widetilde{X}$ ait un point adhérent est assuré comme dans le cas de $\mathcal{T}_1$, puisque $\widetilde{\mathfrak{B}(\theta)}$ est moins fin que $\mathfrak{G}(\theta)$.

Ce qu'il faut prouver en outre, cette fois, c'est que $\mathcal{T}_2$ induit une topologie séparée sur tout cône $\widetilde{C_-(u)}$, $u \in \widetilde{X}$.

Nous commençons par établir quelques résultats relatifs à $\widetilde{\mathfrak{B}(\theta)}$.

Proposition 1. — *Le filtre $\mathfrak{B}(\theta_0, \Theta)$ des voisinages de θ_0 sur Θ a une base formée de voisinages à droite.*

En effet, dans le cas contraire tout $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)} \cap \Theta$ contiendrait des $\theta \notin \widetilde{C_+(\theta_0)}$. L'ensemble non vide $(\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)} - \widetilde{C_+(\theta_0)}) \cap \Theta$ décrirait la base $\mathfrak{B}$ d'un filtre Ψ sur Θ. Le filtre $\mathcal{F}(\Psi)$ associé est plus fin que tout filtre $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} \in \theta_0$, il n'a pas de point adhérent sur X. Tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathcal{F}(\Psi)$ doit vérifier l'axiome X_{α_3}. Or, l'existence du filtre $\mathcal{C}(\mathfrak{U})$ est impossible, car quel que soit l'élément θ appartenant à un ensemble $B \in \mathfrak{B}$, il existe $G \in \mathfrak{G}(\theta)$, $x \in G$ et $G_0 \in \mathfrak{G}(\theta_0)$ tels que $C_-(x) \cap G_0 = \emptyset$. La réunion de ces cônes $C_-(x)$, lorsque θ décrit B, contient un ensemble de $\mathcal{F}(\Psi)$, et par conséquent un ensemble U de $\mathfrak{U}$. Pour tout point x de U, il existe donc un ensemble G_0 (variant avec x) et tel que $G_0 \cap C_-(x) = \emptyset$. Il suffit donc de considérer l'ensemble $B_1 \epsilon \mathfrak{B}$ correspondant au voisinage $\widetilde{\mathcal{V}}(\theta_0, x_0, x)$ où x_0 est un élément choisi arbitrairement dans G_0 pour être sûr que $C_-(x) \cap U$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$, puisqu'il est disjoint d'ensembles de $\mathcal{F}(\Psi)$ correspondants à B_1.

Nous désignerons toujours dans la suite par $\mathcal{V}(\theta, \Theta)$ un voisinage à droite de θ sur Θ. Il est clair dans ces conditions que si $\theta_1 \epsilon \mathcal{V}(\theta_0, \Theta)$, l'ensemble non vide $\{\theta; \theta_0 \prec \theta \prec \theta_1\}$ est inclus dans $\mathcal{V}(\theta_0, \Theta)$.

Proposition 2. — *Si* $\theta_1 \neq \theta_2$, θ_1 et θ_2 *ont sur* $\widetilde{X}$ *des voisinages disjoints.*

Si $\theta_1 \neq \theta_2$, on a par exemple, $\theta_1 \notin \widetilde{C_+(\theta_2)}$ et il existe $G_1 \epsilon \mathfrak{G}(\theta_1)$ $x_1 \epsilon G_1$ et $G_2 \epsilon \mathfrak{G}(\theta_2)$ tels que $C_-(x_1) \cap G_2 = \emptyset$. Dans ces conditions tout voisinage $\widetilde{\mathcal{V}}(\theta_1, x_1, x_1')$ sera disjoint des voisinages $\widetilde{\mathcal{V}}(\theta_2, x_2\, x_1)$ pour tout $x_2 \epsilon G_2$.

Remarquons que c'est ici qu'intervient le renforcement apporté par X_{α_3} à l'axiome X_{α_2}. Sans lui, il faudrait prendre pour trace sur X d'un voisinage ouvert de $\theta \epsilon \Theta$, $\mathring{C}_-(y) - C_-(x')$ avec $\mathring{C}_-(y) \supset C_-(x)$ pour que cette trace soit un ouvert de X. Mais on ne peut garantir que $C_-(x_1) \cap G_2 = \emptyset$ implique

$$\mathring{C}_-(y_1) \cap G_2 = \emptyset$$

pour un y_1 convenable, à partir des seules hypothèses alors en jeu, et la séparation de $\widetilde{X}$ n'est plus assurée.

Proposition 3. — *Si* $\theta_1 \notin \mathcal{V}(\theta_0, \Theta)$, *il existe* $\mathcal{V}(\theta_1\, \Theta)$ *tel que* $\mathcal{V}(\theta_1, \Theta) \cap \mathcal{V}(\theta_0, \Theta) = \emptyset$.

En effet, si $\theta_1 \prec \theta_0$, on sait qu'il existe un $\mathcal{V}(\theta_1, \Theta)$ tel que $\theta_0 \epsilon \mathcal{V}(\theta_1, \Theta)$. Si $\mathcal{V}(\theta_1, \Theta)$ rencontrait $\mathcal{V}(\theta_0, \Theta)$, θ_2 étant un de leurs points communs, on aurait $\theta_0 \prec \theta_2$, $\theta_1 \prec \theta_2$. Mais $\mathcal{V}(\theta_1, \Theta)$ contenant θ_2 contiendrait tout θ vérifiant $\theta_1 \prec \theta \prec \theta_2$, donc en particulier θ_0, ce qui est absurde.

Si $\theta_0 \prec \theta_1$, on voit de même que tout $\mathcal{V}(\theta_1, \Theta)$ est disjoint d'un $\mathcal{V}(\theta_0, \Theta)$ ne contenant pas θ_1.

Si θ_0 et θ_1 ne sont pas en relation d'ordre, il existe, par exemple un élément $x_0 \epsilon X$ tel que $\theta_0 \prec x_0$ et $C_-(x_0) \cap \widetilde{C_+(\theta_1)} = \emptyset$, d'où l'existence immédiate de deux voisinages disjoints.

Les voisinages à droite $\mathcal{V}(\theta, \Theta)$ dont l'ensemble est une base du filtre des voisinages de θ sur Θ, sont donc à la fois ouverts et fermés sur θ. Θ est totalement discontinu pour la topologie $\mathfrak{T}_2$. Ceci a pour conséquence que si $\mathfrak{V}(\theta, \Theta)$ est disjoint d'un ensemble $E \subset \Theta$, il est disjoint d'un voisinage de E sur Θ, car $\Theta - \mathfrak{V}(\theta, \Theta)$ est un tel voisinage.

Nous achevons maintenant d'établir que $\widetilde{X}$ est séparé en démontrant les propositions suivantes :

PROPOSITION 4. — $\theta_0 \in \Theta$ *et* $x \in X$ *ont des voisinages disjoints sur* $\widetilde{X}$.

En effet, il existe $G \in \mathfrak{G}(\theta_0)$ et $x_0 \in G$ tels que $x \notin C_-(x_0)$, sans quoi le filtre $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ associé à chaque $\mathcal{F} \in \theta_0$ par l'axiome X_{α_3} aurait x pour point adhérent. Mais $C_-(x_0)$ étant fermé ($X_{\alpha'_3}$!), il existe un voisinage $\mathfrak{V}(x)$ disjoint de $C_-(x_0)$. L'ensemble des θ pour lesquels la trace de $\mathfrak{G}(\theta)$ sur $\mathfrak{V}(x)$ est une base de filtre est disjoint de $C_-(x_0)$ et par suite d'un voisinage $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)}$ que nous pouvons supposer avoir pour trace sur Θ un voisinage à droite $\mathfrak{V}(\theta_0, \Theta)$, cet ensemble possède donc un voisinage sur Θ disjoint de $\mathfrak{V}(\theta_0, \Theta)$. La réunion de ce voisinage et de $\mathfrak{V}(x)$ est un $\widetilde{\mathfrak{V}(x)}$ disjoint de $\widetilde{\mathfrak{V}(\theta_0)}$.

PROPOSITION 5. — *Deux points distintcs* x_1, x_2 *de* $C_-(u)$ *ont des voisinages disjoints sur* $\widetilde{X}$.

Si pour un des points $\mathfrak{V}(x) = \widetilde{\mathfrak{V}(x)}$ pour un voisinage $\mathfrak{V}(x)$, la propriété résulte de la séparation de $C_-(u)$.

Supposons donc que $\widetilde{\mathfrak{V}(x_1)} \cap \Theta$ et $\widetilde{\mathfrak{V}(x_2)} \cap \Theta$ ne sont jamais vides.

Un des points n'est pas antérieur à l'autre, soit, par exemple, x_1 non $\prec x_2$. Remarquons alors que le résultat que nous avons établi au chapitre I, § 3.4, sous l'hypothèse que X vérifie X_a, X_b et X_c est encore valable si l'on suppose que X vérifie X_b et X_c et que tout cône négatif est séparé, car X_a n'intervenait que pour assurer, en conjonction avec X_b et X_c, la séparation de $X - \mathcal{M}$, et à fortiori celle de tout cône négatif.

Il existe donc y_2 tel que $\mathring{C}_-(y_2) \supset C_-(x_2)$ et $x_1 \notin \mathring{C}_-(y_2)$.

Soit d'autre part y_1 tel que $\mathring{C}_-(y_1) \supset C_-(x_1)$.

Prenons $\mathfrak{V}(x_1) = \mathring{C}_-(y_1) - C_-(y_2)$ et $\mathfrak{V}(x_2) = C_-(y_2)$.

Il est clair que $\widetilde{C_-(y_1)} - \widetilde{C_-(y_2)}$ et $\widetilde{C_-(y_2)}$ sont chacun voisinages sur Θ des points θ qu'ils contiennent. On peut les prendre pour voisinages $\widetilde{\mathcal{V}(x_1)}$ et $\widetilde{\mathcal{V}(x_2)}$, car si un point θ est tel que $G \cap \mathcal{V}(x_2) \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathfrak{G}(\theta)$ on aura $\theta \in \widetilde{C_-(y_2)}$, et il existera $G \in \mathfrak{G}(\theta)$ tel que $G \subset C_-(y_2)$ ce qui entraîne que les points θ tels que $G \cap \mathcal{V}(x_1) \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathfrak{G}(\theta)$ appartiennent bien à $\widetilde{C_-(y_1)} - \widetilde{C_-(y_2)}$.

Les voisinages trouvés $\widetilde{\mathcal{V}(x_1)}$ et $\widetilde{\mathcal{V}(x_2)}$ étant disjoints, la proposition est établie.

L'espace $\widetilde{X}$ satisfait donc à l'axiome X_a. On s'assure sans difficulté qu'il satisfait à X_b et X_c.

Prolongement de F *à* $\widetilde{X}$. — Le prolongement se fait de la même manière dans les deux cas ($\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$).

Si F est positive, totalement croissante et continue à droite, on la prolonge à $\widetilde{X}$ en posant

$$F(\theta) = \lim_{\mathcal{F}} F(x) \quad \text{pour tout} \quad \mathcal{F} \in \theta$$

Sur $\widetilde{X}$, F demeure positive et continue à droite, d'où il résulte que si elle vérifie $\Delta(S) \succ 0$ sur X, elle le vérifie encore sur $\widetilde{X}$.

Si F est à variation bornée et continue à droite sur X, elle y est la différence de deux fonctions positives, totalement croissantes et continues à droite (car X satisfait à X_b et X_c Cf. ch. II, § 2, n° 3) P et N que l'on prolongera comme indiqué ci-dessus et on posera $F(\theta) = P(\theta) - N(\theta)$. Le prolongement de F à $\widetilde{X}$ sera à variation bornée et continu à droite sur $\widetilde{X}$. Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Si X *satisfait aux axiomes* $X_{\alpha'_2}$ $X_{\alpha_2}$$X_b$, X_c, *il est possible de le plonger dans un espace* $\widetilde{X}$ *satisfaisant à* $X_{a'}$, X_b *et* X_c.

Si X *satisfait aux axiomes* X_{α_3}, $X_{\alpha'_3}$, X_b, X_c, *il est possible de le plonger dans un espace* $\widetilde{X}$ *satisfaisant à* X_a, X_b et X_c.

Dans les deux cas, une fonction positive, totalement croissante et continue à droite, ou une fonction à variation bornée continue à droite sur X, *peut être prolongée en une fonction de même nature sur* $\widetilde{X}$.

CHAPITRE III

APPLICATIONS

§ 1. — Exemples d'espaces X.

1. X *est* R_+^n, $\overline{R}^n$, $\overline{R}^M$. *Répartition de probabilité.*

Le cas le plus simple est celui où X est le cône positif R_+^n de R^n ordonné par $x \prec y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tous les axiomes X_0, X_a, X_b, X_c sont satisfaits.

Les fonctions à variation bornée, au sens où nous les avons définies (ch. II, § 2) sont alors identiques aux fonctions à variation bornée au sens de Vitali (mais, même dans ce cas simple, il semble que les ensembles S soient d'un emploi plus souple que les « intervalles » utilisés dans la définition de Vitali (Cf. Picone et Viola. 1).

R^n entier ne satisfait pas à l'axiome X_a, mais il satisfait aux axiomes X_{a_1}, $X_{a'_1}$ et, par suite, se prête à la théorie faite (ch. II, § 3, n° 1) pour les fonctions réelles $F(x_1, \ldots, x_n)$ qui admettent une limite finie h_0 lorsqu'une quelconque des variables x_i tend vers $-\infty$, quel que soit le comportement des autres. Lorsqu'en outre, F admet une limite finie h_1 lorsque toutes les variables tendent vers $+\infty$ F est une fonction de répartition bornée dans R^n. Si $h_0 = 0$ et $h_1 = 1$, on a une fonction de répartition de probabilité.

Les derniers cas examinés sont des cas particuliers de fonctions F définies sur $\overline{R}^n$, produit de n espaces identiques à la droite numérique achevée (compactification par adjonction des éléments $+\infty$ et $-\infty$). $\overline{R}^n$ vérifie évidemment les axiomes X_0, X_a, X_b, X_c.

Il en est de même de l'espace $\overline{R}^M$ où M est un ensemble d'indices μ de puissance quelconque, l'ordre étant donné par

$$x \prec y \Leftrightarrow x_\mu \leqslant y_\mu \quad \text{pour tout } \mu \in M$$

Cet espace a été considéré par Kolmogoroff (Cf. Kolmogoroff 1) et la construction d'une répartition de probabilité qu'il y effectue rentre dans le cadre de notre théorie, avec cette restriction que la fonction F n'est pas définie pour tout $x \in \overline{R}^M$, mais seulement dans un sous-espace U : ensemble des points dont un nombre fini de coordonnées ne valent pas $+\infty$. La théorie exposée ici s'étend aisément à une telle situation, à condition que l'axiome X_b soit vérifié sur U, et que l'axiome X_c soit vérifié lorsqu'on astreint les sommets des cônes qu'il fait intervenir à appartenir à U, ce qui est le cas dans la théorie de Kolmogoroff.

Il est clair que, plus généralement, les fonctions réelles positives totalement croissantes et continues à droite définies sur un espace X satisfaisant à X_0, X_a, X_b, X_c et possédant un élément minimal x_0 et un élément maximal x_1, et telles que $F(x_0) = 0$, $F(x_1) = 1$, peuvent être considérées comme des fonctions de répartition de probabilité

2. X *est le cône positif d'un espace de Hilbert ordonné.*

Une autre généralisation immédiate de R^n_+ est le cône positif de l'espace l^2 des suites réelles $x = (x_i)$ de carré sommable, ordonné par $x \prec y \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Il satisfait à X_0, X_a, X_b, X_c. (Cf. Ch. I. § 4, n° 3.)

Cet exemple nous servira à montrer qu'il ne faut pas espérer en général obtenir pour les fonctions à variation bornée sur des espaces ordonnés les propriétés qu'elles ont sur R^n, hors celles que la théorie se préoccupait explicitement de conserver : ainsi, alors que les fonctions analytiques réelles sur R^n_+ (ou sur un cône négatif de R^n_+) y sont à variation bornée, il n'en est pas de même des fonctions analytiques réelles sur l^2.

Ceci résulte de ce qu'un polynome réel, continu, homogène et du second degré, qui est une foncton analytique (Cf. Hille 1) n'est déjà pas en général à variation bornée.

Un tel polynome $P(x)$ est une fonction réelle continue sur l^2, telle que $P(a + \alpha h)$ soit, pour a et h fixes, un polynome au sens usuel, du second degré au plus en α, et que $P(\alpha x) \equiv \alpha^2 P(x)$ pour tout x et tout α. $P(x)$ est continu s'il existe un nombre $M > 0$ tel que $|P(x)| < M\|x\|^2$. Un tel polynome n'est autre que le produit scalaire $< Ax, x >$ où A est un opérateur linéaire symétrique continu.

Si e_i est le vecteur de l^2 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i^e qui vaut 1, on a $x = \sum_i x_i e_i$, A peut être représenté par une matrice (a_{ij}) et on a $P(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$.

Si l'on pose $x^n = \sum_1^n x_i\, e_i$, on a $P(x) = \lim_n P(x^n)$.

Or, $P(x^n) = P_1(x^n) - P_2(x^n)$, si $P_1(x^n) = \Sigma' a_{ij} x_i x_j$ où Σ' désigne la somme étendue aux indices $i, j \leqslant n$ pour lesquels $a_{ij} > 0$ et $P_2(x^n) = - \Sigma'' a_{ij} x_i x_j$ où Σ'' désigne la somme étendue aux indices $i, j \leqslant n$ pour lesquels $a_{ij} < 0$.

Si $P(x)$ est à variation bornée sur l^2, il l'est à fortiori sur l'espace R^n sous-tendu par $e_1, \ldots, e_n$ et comme $P_1(x^n)$ et $P_2(x^n)$ y sont totalement croissants et s'annulent pour $x^n = 0$, $P_1(x^n) - P_2(x^n)$ est la décomposition canonique de $P(x^n)$ dont la variation dans le cube $0 \prec x \prec x^n$ de R^n est $V(x^n) = P_1(x^n) + P_2(x^n)$.

Si $P(x)$ est à variation bornée sur l^2, sa variation $V(x)$ y est une fonction continue et on a $V(x) = \lim_n V(x^n)$.

Ceci exige que les sommes, infinies cette fois, $\Sigma' a_{ij} x_i x_j$ et $\Sigma'' a_{ij} x_i x_j$ aient un sens et que l'opérateur B correspondant à la matrice $b_{ij} = |a_{ij}|$ soit continu. Or, A peut être continu sans que B le soit. Tel est le cas pour $a_{ij} = \dfrac{\sin (i-j)\theta}{i-j}$, $i \neq j, 0 < \theta < \pi$, $a_{ii} = 0$. (Cf. Schur 1).

3. X *est l'espace des compacts d'un espace localement compact* E. Sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides d'un espace localement compact E, nous définirons un ordre et une topologie qui en feront un espace localement compact satisfaisant aux axiomes X_0, X_a, X_b, X_c.

La relation d'ordre sur $\mathcal{K}$ est la relation d'inclusion dans E.

Si $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}$ et est inf $K_1 K_2$.

Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, on a bien $C_-(K_1) \cap C_-(K_2) = \emptyset$, l'ensemble vide de E est l'élément ω que l'on peut adjoindre à $\mathcal{K}$ (ch. I, § 2).

La topologie sera définie par les voisinages d'un élément arbitraire K_0, comme suit :

A un recouvrement ouvert fini $\Omega = (\omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de K_0 associons l'ensemble

$$\mathcal{V}(K_0, \Omega) = \left\{ K;\ K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i\ ,\ \omega_i \cap K \neq \emptyset\ \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Lorsque Ω décrit l'ensemble des recouvrements ouverts finis de K_0, $\mathcal{V}(K_0, \Omega)$ décrit une base de filtre. En effet, l'ensemble $\mathcal{V}(K_0, \Omega) \cap \mathcal{V}(K_0, \Omega')$ qui n'est pas vide est de la forme $\mathcal{V}(K_0, \Omega_1)$ car si K en est un élément, on a

$$K \subset \left(\bigcup_i \omega_i\right) \cap \left(\bigcup_j \omega_j'\right)$$

si $\Omega = (\omega_i)$ et $\Omega' = (\omega_j')$ d'une part, et $K \cap \omega_i \neq \emptyset$, $K \cap \omega_j' \neq \emptyset$ $(i = l, ..., n;\ j = l, ..., m)$ d'autre part. Ω_1 est le recouvrement constitué de ceux des ensembles $\omega_i \cap \omega_j (i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m)$ qui ne sont pas vides.

On prendra la base de filtre ainsi définie comme ensemble des voisinages ouverts de K_0. (Les axiomes des voisinages ouverts sont évidemment satisfaits).

Le filtre $\mathfrak{B}_+(K_0)$ des voisinages à droite de K_0 a une base constituée des ensembles $\mathcal{V}_+(K_0, O) = \{K;\ K_0 \subset K \subset O\}$ où O est un ouvert de E.

Les axiomes suivants de notre théorie sont satisfaits :

X_a. $C\_(K)$ est compact. Cela revient à dire que $\mathcal{K}$ est compact, si E l'est, ce qui est exact (Cf. par exemple Choquet 1).

X_b. inf K_1K_2 est continue à droite.

Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, il existe O_1 et O_2 ouverts en E contenant respectivement K_1 et K_2 et tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Si $K = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ et si O est un ouvert contenant K, les ensembles $K_1 - O$ et $K_2 - O$ sont deux compacts disjoints, pour lesquels il existe deux ouverts disjoints O_1' et O_2' les contenant respectivement.

Dès lors, en prenant $O_1 = O \cup O_1'$ et $O_2 = O \cup O_2'$, il est clair que

$$\left.\begin{matrix} K_1' \in \mathcal{V}_+(K_1, O_1) \\ K_2' \in \mathcal{V}_+(K_2, O_2) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow K_1' \cap K_2' \in \mathcal{V}_+(K, O)$$

X_c. E étant localement compact, tout ouvert O contenant un compact K, contient un compact K' dont l'intérieur contient K.

Enfin $\mathcal{K}$ qui est compact, si E l'est, est localement compact dans le cas général (Cf. Choquet 1). Cela résulte d'ailleurs aussi de ce qu'alors $\mathcal{K}$ est dépourvu d'élément maximal et vérifie X_a, X_b, et X_c (Cf. Ch. I, § 4, n° 3).

Si donc F (K) est une fonction réelle positive définie sur les compacts d'un espace localement compact E, elle sera canoniquement associée à une mesure de Radon positive si elle est totalement croissante et continue à droite. Ces deux conditions se traduisent aisément en revenant à E. La première, en particulier, donne :

Pour tout système de $n+1$ compacts K, K_1, ..., K_n, on doit avoir

$$(1) \quad F(K) - \Sigma_1 F(K \cap K_i) + \cdots + (-1)^p \Sigma_p F(K \cap K_{i_1} \ldots \cap K_{i_p}) + \cdots + (-1)^n F(K \cap K_1 \ldots \cap K_n) > 0$$

étant entendu que l'on pose $F(\emptyset) = 0$ et que Σ_p désigne la somme étendue aux combinaisons de p des indices 1, 2, ..., n.

Si E *est compact*, F(E) est défini, et la fonction $\varphi(O)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de E, par $\varphi(O) = F(E) - F(\complement O)$ vérifie pour tout système de $n+1$ ouverts O, O_1, ..., O_n

$$(2) \quad F(E) - \varphi(O) - \Sigma_1[F(E) - \varphi(O \cup O_i)] + \cdots + (-1)^p \Sigma_p[F(E) - \varphi(O \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_p})] + \cdots + (-1)^n[F(E) - \varphi(O \cup O_1 \cup \ldots \cup O_n)] \geqslant 0$$

ce qui peut s'écrire

$$(3) \quad (-1)^{n+1}\{\varphi(O \cup O_1 \cup \ldots \cup O_n) - \Sigma_{n-1}\varphi(O \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_{n-1}}) + \cdots + (-1)^k \Sigma_{n-k}\varphi(O \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_{n-k}}) + \cdots + (-1)^n \varphi(O)\} \geqslant 0.$$

Des inégalités du type (3) ont été obtenues par M. Choquet (Cf. Choquet 2) dans son étude des capacités généralisées (comprenant la capacité relative au potentiel newtonien), où il a désigné par fonction alternée d'ordre infini sur une famille additive d'ensembles toute fonction vérifiant l'inégalité (3) pour tout système de $n+1$ ensembles et par fonction monotone d'ordre infini sur une famille multiplicative d'ensembles, toute fonction vérifiant (1) pour tout système de $n+1$ ensembles, n prenant dans les deux cas toute valeur entière positive.

Dans ce qui précède, nous avons utilisé les propriétés de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{O}$ d'être respectivement des familles multiplicative et additive, mais pour les intersections et réunions finies, seules en cause ici, $\mathcal{K}$ est aussi une famille additive et $\mathcal{O}$ une famille multiplicative. Par suite, on peut aussi à une fonction alternée F sur $\mathcal{K}$, faire correspondre une famille monotone sur $\mathcal{O}$, en posant

$$\varphi(\complement K) = F(E) - F(K).$$

D'autre part, la relation $O = \complement K$ établissant une correspondance biunivoque entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{O}$, permet de définir sur $\mathcal{O}$ une topologie et un ordre images de ceux de $\mathcal{K}$ et pour lesquels tous les axiomes de notre théorie seront satisfaits.

On en déduit que toute fonction alternée et continue à droite F(K) sur $\mathcal{K}$ correspond de manière canonique à une mesure de Radon μ sur $\mathcal{O}$ de telle sorte que

$$F(K) = F(E) - \mu C_{-}(\complement K).$$

(Résultats corrélatifs relativement aux fonctions définies sur $\mathcal{O}$).

4. X *est un espace de fonctions continues.*

1. Soit X l'ensemble des fonctions réelles continues x sur un espace compact T. On peut y définir un ordre, en posant

$$x \prec y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t) \qquad \text{pour tout } t \in T$$

inf xy est défini pour tout couple x, y.

Si nous prenons pour topologie, celle de la convergence uniforme dans T, les axiomes X_b et X_c sont satisfaits, mais X_a ne l'est en général pas. Il le sera, sans que X_0, X_b, X_c cessent de l'être, si l'on restreint X à une famille équicontinue de fonctions x.

On peut plus généralement supposer que les fonctions x prennent leurs valeurs dans un espace uniforme ordonné satisfaisant lui-même aux axiomes X_a, X_b, X_c.

2. Au lieu de restreindre l'ensemble X des fonctions x pour satisfaire X_a, il peut être plus intéressant au contraire, de plonger X dans un espace plus vaste vérifiant X_a.

Nous le ferons, en procédant comme suit :

Limitons nous tout d'abord, aux fonctions continues réelles positives définies sur un compact quelconque T et associons à chaque fonction x l'ensemble $K(x)$ des points (t, u) de $T \times R$ défini par $0 \leqslant u \leqslant x(t)$.

Cet ensemble est compact dans $T \times R$ qui est localement compact.

Considérons l'adhérence $\widetilde{X}$ dans $\mathcal{K}(T \times R)$ de l'ensemble des $K(x)$.

Soit $K \in \widetilde{X}$, si $(t, u) \in K$, on a $(t, v) \in K$ dès que $0 \leqslant v \leqslant u$. K est donc défini par une relation du type $0 \leqslant u \leqslant y(t)$ et la compacité de K entraîne que $y(t)$ est semi-continue supérieurement.

Réciproquement, si $y(t)$ est semi-continue supérieurement, le compact $K = \{(t, u); t \in T, 0 \leqslant u \leqslant y(t)\}$ appartient à $\widetilde{\check{X}}$.

Nous allons, en effet, montrer que dans tout voisinage de K (dans $\mathfrak{K}(T \times R)$), il existe un ensemble $K(x)$ contenant K, autrement dit, tout voisinage à droite de K dans $\mathfrak{K}(T \times R)$ contient un ensemble $K(x)$. Soit Ω l'ouvert de $(T \times R)$ déterminant ce voisinage à droite. Il faut trouver x tel que $K \subset K(x) \subset \Omega$.

Or, quel que soit $t_0 \in T$, on peut trouver une fonction $x_{t_0}(t)$ continue telle que $K(x_{t_0}) \supset K$ et $(t_0, x_{t_0}(t_0)) \in \Omega$ (ceci est possible si T est uniformisable, à fortiori si T est compact (Cf. Bourbaki 2). Mais comme x_{t_0} est continue, il existe un voisinage $V(t_0)$ de t_0 tel que $t \in V(t_0) \Longrightarrow (t, x_{t_0}(t)) \in \Omega$. T peut être recouvert par un nombre fini de voisinages $V(t)$, correspondant aux points $t_i (i = 1, \ldots, n)$. La fonction $x = \inf(x_{t_i}; i = 1, \ldots, n)$ est continue et vérifie $K(x) \supset K$ et $K(x) \subset \Omega$.

Nous prendrons pour espace $\widetilde{\check{X}}$, l'ensemble des fonctions réelles positives semi-continues supérieurement avec la topologie correspondant à celle des compacts de $(T \times R)$: des considérations très voisines de celles qui viennent d'être immédiatement développées montrent que cette topologie est celle de la structure uniforme dont une base du filtre des entourages est constituée des ensembles de couples (x, y) de fonctions semi-continues supérieurement, associés à chaque recouvrement ouvert fini (O_i) de T et à chaque nombre positif ε de la manière suivante :

Il existe en tout O_i une valeur t_i telle que $|x(t_i) - y(t_i)| < \varepsilon$ et pour $t \in O_i$, $x(t)$ et $y(t)$ demeurent inférieurs à $\sup(x(t_i), y(t_i)) + \varepsilon$.

La topologie induite par celle-ci sur X et celle de la convergence uniforme conduisent à la même topologie à droite $\mathfrak{T}_+$ sur X, ce qui suffit, puisque c'est pour $\mathfrak{T}_+$ que F est continue.

Les axiomes de la théorie sont satisfaits sur X :

X_0 : $\inf xy$ est toujours défini.

X_a : Le cône $C_-(K_0)$ de l'espace $\mathfrak{K}(T \times R)$ y est compact. Son intersection avec $\check{X}$ qui est fermé est donc compacte : cette intersection est le cône négatif $\widetilde{C_-(\check{K}_0)}$ de K_0 dans $\widetilde{\check{X}}$.

X_b : $\inf xy$ étant continue à droite dans $\mathcal{K}(T \times R)$ l'est dans son sous-espace $\widetilde{X}$.

X_c. On a montré que pour tout $y \in X$, il existe une fonction continue x contenue dans un voisinage à droite donné de y. Et si z est la fonction continue définie par $z(t) = x(t) + \varepsilon$, $z > 0$, on a $K(x) \subset \mathring{K}(z)$. Il en résulte que X_c est satisfait : si l'on se donne un voisinage de y petit d'ordre V, il suffit de prendre x dans un voisinage d'ordre W de y, et z dans un voisinage d'ordre W de x, avec $W \circ W \subset V$.

Le prolongement de F à $\widetilde{X}$ se fait très simplement :

Si y est semi-continue supérieurement, on pose

$$F(y) = \inf (F(x); \qquad x \succ y, \qquad x \in X)$$

F demeure évidemment continue à droite et si elle vérifiait $\Delta(S) \succ 0$ pour tout S sur X, elle le vérifie aussi sur $\widetilde{X}$.

Si F était à variation bornée sur X, elle y était la différence de deux fonctions totalement croissantes P et N que l'on prolonge comme ci-dessus, ce qui fournit le prolongement de F.

La restriction $x \succ 0$ que nous avons introduite au début des développements précédents peut être remplacée sans modification des raisonnements ni des résultats par $x - x_0$, où x_0 est une fonction continue donnée. On peut s'affranchir de toute restriction de cette nature si, par contre, on se limite aux fonctions F bornées inférieurement ainsi que leurs variations. (Cf. Chap. II, § 3, n° 2).

3. Les résultats du numéro précédant peuvent être généralisés.

Considérons, en effet, l'espace $X = \mathcal{C}(T, E)$ des applications continues d'un espace compact T dans un espace uniforme ordonné E dont la topologie satisfait à X_a, X_b, X_c et qui est dépourvu d'éléments maximaux, donc localement compact. Nous supposons que $\mathcal{C}(T, E)$ est muni de la structure uniforme de la convergence uniforme dans T. L'ordre sur X étant toujours donné par

$$x \prec y \iff x(t) \prec y(t) \quad \text{pour tout } t \in T$$

X satisfait à X_b et X_c, mais pas en général à X_a. Cependant, l'ensemble $K(x)$ des points (t, u) de $T \times E$ défini par $u \prec x(t)$ est un compact de l'espace localement compact $T \times E$.

Si l'on identifie X et l'ensemble des compacts $K(x)$ muni de la topologie et de l'ordre induits par ceux de $\mathcal{K}(T \times E)$ (l'application $x \to K(x)$ est un isomorphisme pour l'ordre et la topologie) on peut plonger X dans l'adhérence $\widetilde{X}$ de l'ensemble des $K(x)$ dans $\mathcal{K}(T \times E)$, $\widetilde{X}$ est alors un espace vérifiant X_a, X_b et X_c.

Les éléments de $\widetilde{X}$ sont des sous-ensembles de $T \times E$ du type $\{(t, u);\ u \prec y(t)\}$ où $y(t)$ est une fonction semi-continue supérieurement, si l'on désigne par là, une application de T dans E possédant la propriété suivante : Pour tout $t_0 \in T$, il est possible de faire correspondre à tout voisinage à droite $\mathcal{V}_+(y(t_0))$ de $y(t_0)$ dans E, un voisinage $\mathcal{V}(t_0)$ de t_0 dans T tel que si $t \in \mathcal{V}(t_0)$ il existe $z(t) \in \mathcal{V}_+(y(t_0))$ tel que $y(t) \prec z(t)$. (En vertu de X_c satisfait par E, on peut supposer que l'élément $z(t)$ est le même pour tout $t \in \mathcal{V}(t_0)$).

Mais on ne peut pas en général prouver que, réciproquement, tout ensemble $\{(t, u);\ u \prec y(t)\}$ où $y(t)$ est semi-continue supérieurement appartient à $\widetilde{X}$.

On le peut, dans le cas où E est le cône positif R^n_+ d'un espace euclidien réel, comme le prouvent les résultats suivants :

Proposition 1. — Si T est un espace uniformisable, il existe pour tout $t_0 \in T$ et tout voisinage $\mathcal{V}(t_0)$, une fonction continue $f(t)$ à valeurs dans R^n_+ prenant la valeur α en t_0 et la valeur β sur $\complement \mathcal{V}(t_0)$ et décrivant le segment $\alpha\beta$ quand t décrit T, α et β étant choisis arbitrairement dans R^n_+.

Il existe, en effet, une fonction numérique continue $g(t)$ à valeurs dans $[0,1]$ et vérifiant $g(t_0) = 0$ et $g(t) = 1$ sur $\complement \mathcal{V}(t_0)$, il suffit de poser $f(t) = \alpha + (\beta - \alpha)\, g(t)$.

Proposition 2. — Étant donnée une fonction semi-continue supérieurement $y(t)$ définie sur un compact T et à valeurs dans R^n_+, il existe pour tout $t_0 \in T$ et tout voisinage à droite de $y(t_0)$ dans R^n_+ une fonction $x(t)$ continue dans T à valeurs dans R^n_+ et vérifiant $x(t) \succ y(t)$ pour tout $t \in T$ et $x(t_0) \in \mathcal{V}_+(y(t_0))$.

En effet, $y(t)$ est bornée sur T (car $y(t)$ l'est au voisinage de tout point et T est compact et R^n_+ réticulé.) Soit Y une borne de $y(t)$. D'autre part, un voisinage à droite de $y(t_0)$ est de la forme $\mathring{C}_-(z_0) \cap C_+(y(t_0))$, et il existe un voisinage $\mathcal{V}(t_0)$ tel que

$$t \in \mathcal{V}(t_0) \Longrightarrow y(t) \prec y(t_0) + \frac{1}{4}(z_0 - y(t_0)).$$

La fonction continue $x(t)$ prenant la valeur

$$x(t_0) = y(t_0) + \frac{1}{2}(z_0 - y(t_0))$$

en t_0 et la valeur Y sur $\complement \mathcal{V}(t_0)$ et décrivant le segment $[x(t_0), Y]$ répond à la question.

A partir de là, le fait que tout ensemble $\{(t, u); u \prec y(t)\}$ pour $y(t)$ semi-continue supérieurement appartient à $\widetilde{X}$, ainsi que les propriétés de X s'établissent comme dans le cas numérique. Nous pouvons énoncer :

L'espace ordonné X *des applications positives continues d'un compact* T *dans* R^n, *peut être plongé dans l'espace* $\widetilde{X}$ *des applications semi-continues supérieurement, positives, de* T *dans* R^n, *muni de la structure uniforme dont une base du filtre des entourages est constituée des ensembles* $U(\Omega, \varepsilon)$ *associés respectivement à un recouvrement ouvert fini* $\Omega = (O_i)$ *de* T *et à un nombre positif* ε, *de la manière suivante* : $(x, y) \in U(\Omega, \varepsilon)$ *est équivalent à* : *pour tout* O_i, *il existe* $t_i \in O_i$ *tel que* $\|x(t_i) - y(t_i)\| < \varepsilon$ *et pour tout* $t \in O_i$, *on a* $\sup x(t)y(t) \prec \sup x(t_i)y(t_i) + \varepsilon \vec{u}$ *où* $\vec{u}$ *désigne le vecteur de* R^n *dont toutes les coordonnées valent* $1/\sqrt{n}$. *La topologie correspondante de* $\widetilde{X}$ *vérifie* X_a, X_b *et* X_c *et induit sur* X *une topologie qui n'est pas celle de la convergence uniforme, mais admet même topologie à droite que cette dernière.*

Remarque. — Il est possible de plonger X dans un espace $\overline{X}$ dont la topologie vérifie X_a, X_b et X_c et induise celle de la convergence uniforme sur X. Il suffit de prendre pour $\overline{X}$ l'adhérence dans $\mathcal{K}(T \times R)$ des « graphes » des fonctions $x(t)$. Cette adhérence est constituée des compacts $(z, y) = \{(t, u); z(t) \prec u \prec y(t)\}$ où z est une fonction semi-continue inférieurement et y une fonction semi-continue supérieurement. L'ordre sera celui des fonctions y et la valeur de F pour (z, y) sera la valeur donnée ci-dessus à $F(y)$. Mais, cet espace n'étant pas à proprement parler un espace fonctionnel (on peut considérer que ses éléments sont des couples de fonctions), l'extension étudiée dans le présent paragraphe paraît à priori plus commode.

§ 2. — Intégration relative à une fonction à variation bornée.

Nous allons définir dans ce paragraphe une intégration des fonctions numériques relativement à une fonction totalement croissante ou à variation bornée à valeurs dans un espace vectoriel complètement réticulé sur le corps des réels, intégration qui généralise l'intégration de Riemann-Stieltjes dans R^n.

Nous envisagerons successivement trois cas, avec des hypothèses de plus en plus riches.

1. *Fonctions numériques intégrables sur un cône négatif d'un espace ordonné.*

Nous considérons un espace ordonné X satisfaisant au seul axiome X_0. Cela suffit pour que l'on puisse définir sur X la famille $\mathcal{S}$ des ensembles S, et des fonctions totalement croissantes parmi les fonctions sur X à valeurs dans un espace vectoriel complètement réticulé sur le corps des réels, Y.

Soit F une telle fonction et φ une fonction numérique sur X. Considérons un cône négatif fixe $C_-(x_0)$ de X et supposons que $\varphi(x)$ soit bornée sur $C_-(x_0)$. Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des partitions finies π de $C_-(x_0)$ en ensembles $S \in \mathcal{S}$. Pour une telle partition $\pi = (S_i)$, $i = 1, \ldots, n$, si m_i et M_i désignent respectivement le minimum et le maximum de $\varphi(x)$ sur S_i, on peut calculer ce qu'il est naturel d'appeler encore ici les sommes de Cauchy-Riemann $\sigma(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta(S_i)$ et $\Sigma(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta(S_i)$. $F(x)$ étant totalement croissante, on a $\sigma(\pi) \prec \Sigma(\pi)$.

Pour deux partitions π_1, π_2 telles que $\pi_1 \prec \pi_2$ (Cf. Ch. II, § 2, 1) on a $\sigma(\pi_1) \prec \sigma(\pi_2) \prec \Sigma(\pi_2) \prec \Sigma(\pi_1)$.

D'où quelles que soient π_1 et π_2 : $\sigma(\pi_1) \prec \Sigma(\pi_2)$

Y étant complètement réticulé, on en déduit l'existence de

$$\sup\{\sigma(\pi)\,;\ \pi \in \mathfrak{L}\} \qquad \text{et} \qquad \inf\{\Sigma(\pi)\,;\ \pi \in \mathfrak{L}\}$$

avec l'inégalité $\sup\{\sigma(\pi)\,;\ \pi \in \mathfrak{L}\} \prec \inf\{\Sigma(\pi)\,;\ \pi \in \mathfrak{L}\}$.

On peut à partir de là définir les fonctions intégrables relativement à $F(x)$ comme celles pour lesquelles les deux quantités définies ci-dessus sont égales, leur valeur commune étant la valeur de l'intégrale qu'il est naturel de noter par $\int_{C_-(x_0)} \varphi(x)\, dF$.

Ceci s'étend au cas d'une fonction à variation bornée F. Au chapitre II, § 2, nous avons défini les fonctions à variation bornée parmi les fonctions à valeurs dans un espace satisfaisant à Y_a, Y_b et Y_{c_1}. Mais si, comme nous le faisons pour le moment, nous n'exigeons nulle continuité de F, il suffit pour définir une fonction à variation bornée et obtenir la propriété fondamentale qu'elle soit la différence de deux fonctions totalement croissantes, que Y soit un groupe complètement réticulé.

En effet, de $\Delta(S) = P(S, \pi) - N(S, \pi)$ on déduit

$$\sup\{P(S, \pi);\ \pi\epsilon\mathfrak{L}\} = \sup\{N(S, \pi);\ \pi\epsilon\mathfrak{L}\} + \Delta(S)$$

c'est-à-dire $\Delta(S) = P(S) - N(S)$.

De même, de

$$V(S, \pi) = P(S, \pi) + N(S, \pi) = 2N(S, \pi) + \Delta(S),$$

on déduit

$$V(S) = 2N(S) + \Delta(S) = P(S) + N(S).$$

Enfin la démonstration de l'additivité de P(S), N(S) ne faisait intervenir que leur définition comme bornes supérieures respectives de $P(S, \pi)$, $N(S, \pi)$, $V(S, \pi)$ (Cf. Ch. II, § 2, n° 2).

On pourra donc définir une fonction intégrable relativement à une fonction à variation bornée F, comme une fonction intégrable relativement à ses deux variations P et N et poser

$$\int_{C_{-}(x_0)} \varphi(x)\, dF = \int_{C_{-}(x_0)} \varphi(x)\, dP - \int_{C_{-}(x_0)} \varphi(x)\, dN.$$

L'ensemble des fonctions intégrables relativement à une fonction à variation bornée donnée, à valeurs dans Y, est un espace vectoriel sur le corps des réels et l'intégrale en réalise un homomorphisme dans Y.

Nous nous sommes placés dans ce qui précède sur un cône négatif : rien ne serait modifié si l'on se plaçait sur un ensemble S ou sur un ensemble A de l'anneau $\mathfrak{A}$ des réunions finies disjointes d'ensembles S.

2. *Fonctions numériques intégrables sur un cône négatif d'un espace $\mathfrak{X}$.*

Désignons par $\mathfrak{X}$ tout espace vérifiant X_0, X_a, X_b, X_c.

Nous supposons maintenant que $F(x)$ et $\varphi(x)$ sont définies sur un espace $\mathfrak{X}$, et que $F(x)$ est à valeurs dans un espace vectoriel sur le corps des réels vérifiant Y_a et Y_b.

Nous allons montrer qu'alors toute fonction continue $\varphi(x)$ est intégrable relativement à toute fonction à variation bornée sur tout cône négatif $C_{-}(x_0)$.

Nous supposons d'abord F totalement croissante.

$C_{-}(x_0)$ étant compact, $\varphi(x)$ y est bornée. Pour la même raison $C_{-}(x_0)$ est uniformisable. Comme les ensembles S d'intérieur non vide forment une base des ouverts de $\mathcal{X} - \mathcal{M}$, et que si x_0 est maximal, le théorème du ch. I, § 4, n° 7 permet d'affirmer que les ensembles S de sommet x_0 forment pour la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur $C_{-}(x_0)$ une base des voisinages ouverts de x_0, il existe des recouvrements ouverts de $C_{-}(x_0)$ constitués d'ensembles S petits d'ordre U, quel que soit l'entourage U de $C_{-}(x_0)$.

Les réunions finies disjointes d'ensembles S formant un anneau (Cf. Ch. I, § 3, n° 1), il existe des partitions finies de $C_{-}(x_0)$ en ensembles S petits d'ordre U (partitions fines d'ordre U).

Si φ est continue, il est possible, $\varepsilon > 0$ étant donné, de trouver un entourage U tel que $0 \leqslant M_i - m_i \leqslant \varepsilon$ pour tous les ensembles S_i d'une partition fine d'ordre U. Pour une telle partition, on aura donc

$$0 \prec \Sigma(\pi) - \sigma(\pi) \prec \varepsilon F(x_0)$$

à fortiori

$$0 \prec \inf\{\Sigma(\pi);\ \pi \in \mathcal{L}\} - \sup\{\sigma(\pi);\ \pi \in \mathcal{L}\} \prec \varepsilon F(x_0)$$

ε étant arbitraire, ceci entraîne, en vertu de Y_b l'égalité

$$\inf\{\Sigma(\pi);\ \pi \in \mathcal{L}\} = \sup\{\sigma(\pi);\ \pi \in \mathcal{L}\}.$$

Extension immédiate au cas où $F(x)$ est à variation bornée, et au cas où l'intégrale est calculée sur un ensemble $A \in \mathfrak{A}$.

On pourra définir en outre l'intégrale de $\varphi(x)$ sur un compact K quelconque en posant

$$\int_K \varphi(x)\, dF = \inf\left\{\int_A \varphi(x)\, dF;\ K \subset A,\ A \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Si $\varphi(x) \equiv 1$, $\int_A dF$ n'est autre que la mesure simplement additive mA définie Ch. I, § 3.

De même, si $F(x)$ est totalement croissante, $\int_K dF$ est une étendue sur la famille $\mathcal{K}$ des compactes de $\mathcal{X}$, car deux compacts disjoints de $\mathcal{X}$ peuvent être contenus dans deux ensembles A disjoints. Mais ce n'est pas une étendue régulière (seules les deux premières conditions du ch. I, § 4, n° 1 sont satisfaites par $\int_K dF$).

Aucune hypothèse de continuité n'ayant été faite jusqu'à présent dans ce paragraphe, il est impossible d'aller au delà, c'est-à-dire d'associer à F une mesure σ-additive.

3. F *est continue à droite.*

Nous supposerons donc maintenant que F est continue à droite et que Y vérifie Y_a, Y_b et Y_{c_1}.

Il en résulte d'abord que les quantités définies comme bornes supérieures ou inférieures peuvent l'être comme limites.

On a $\sup\{\sigma(\pi);\ \pi\in\mathcal{F}\} = \lim_{\mathcal{F}} \sigma(\pi)$ où $\mathcal{F}$ désigne le filtre dont une base est constituée des sections finissantes de l'ensemble ordonné des partitions de $C_-(x_0)$ en ensembles S.

On peut, par suite, écrire

$$\int_{C_-(x_0)} \varphi(x)\, dF = \lim_{\mathcal{F}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta(S_i)$$

où ξ_i est un élément arbitraire de S_i.

On peut écrire aussi

$$\int_K \varphi(x)\, dF = \lim_{\mathfrak{A}(K)} \int_A \varphi(x)\, dF$$

où $\mathfrak{A}(K)$ est le filtre ayant pour base les ensembles A contenant K.

La continuité à droite de F entraîne d'autre part, qu'on peut associer à F une mesure de Radon μ.

Et il y a égalité entre l'intégrale $\int_K \varphi(x)\, dF$ que nous avons définie ci-dessus et l'intégrale $\int_K \varphi(x)\, d\mu$ obtenue comme limite des sommes de Lebesgue : $\lim_{\varepsilon\to 0} \Sigma l_i \mu\{x; x\in K,\ l_i \leqslant \varphi(x) < l_{i+1}\}$ où les nombres l_i tels que $0 < l_{i+1} - l_i < \varepsilon$ divisent le segment $[a, b]$ déterminé par les valeurs extrêmes de $\varphi(x)$ sur K.

Si K est un cône négatif, l'équivalence des deux définitions s'établit comme dans le cas classique des fonctions continues numériques de variable réelle. Elle s'étend au cas d'un compact quelconque, grâce à la régularité de μ.

Nous pouvons donc énoncer :

Soit, sur un espace $\mathcal{X}$ une fonction F *à variation bornée, continue* *à droite, à valeurs dans un espace vectoriel sur le corps des réels vérifiant* Y_a, Y_b *et* Y_{c_1} *et* μ *la mesure de Radon associée à* F. *Si* $\varphi(x)$ *est une fonction numérique continue sur* $\mathcal{X}$, *l'intégrale* $\int_A \varphi(x)\, d\mu$ *étendue à un ensemble de l'anneau* $\mathfrak{A}$ *des réunions finies disjointes d'ensembles* S *peut être calculée par le processus de Riemann-Stieltjes adapté à un espace ordonné comme indiqué ci-dessus. L'intégrale* $\int_K \varphi(x)\, d\mu$ *étendue à un compact* K *quelconque peut être calculée comme limite d'intégrales* $\int_A \varphi(x)\, d\mu$.

La notation $\int \varphi(x)\, d\mathrm{F}$ sera utilisée chaque fois que l'on voudra rappeler le mode de calcul exposé ci-dessus.

Remarque. — Nous avons supposé ci-dessus φ définie et continue sur $\mathcal{X}$ tout entier. Les résultats contiennent cependant le cas où φ n'est définie et continue que sur le compact K sur lequel on calcule l'intégrale. Car, on peut alors associer à φ une fonction continue sur tout $\mathcal{X}$ et ayant la même intégrale que φ sur K. Soit, en effet, V un voisinage compact de K, il existe une fonction numérique, à valeurs dans [0,1], et continue, g, égale à φ sur K et à 0 sur $\mathrm{V} - \mathring{\mathrm{V}}$; g admet un prolongement $\bar{g}$ continu sur $\mathcal{X}$ valant 0 sur $\complement \mathrm{V}$. La fonction $\bar{g}$ répond à la question.

§ 3. — Fontionnelles linéaires sur les espaces $\mathcal{X}$.

1. Il est possible, dans le cadre de la théorie développée dans ce chapitre, de donner une solution simple du problème suivant qui contient comme cas particulier le problème classique des moments dans un espace euclidien :

Nous supposons donnée une famille Φ de fonctions continues à valeurs réelles, φ, définies sur un cône négatif $C_-(x_0)$ d'un espace $\mathcal{X}$, et une fonctionnelle $M(\varphi)$ à valeurs dans Y, espace vectoriel topologique ordonné sur le corps des réels, satisfaisant à Y_a, Y_b et à l'axiome suivant :

Y_{c_2} : Si E est un ensemble filtrant à gauche pour lequel $0 = \inf\{x;\, x \in E\}$ [1], il existe pour tout voisinage à droite $\mathcal{V}_+(0)$ un élément $x \in E$ tel que $C_+(0) \cap C_-(x) \subset \mathcal{V}_+(0)$.

[1] Étendant aux ensembles filtrants le langage utilisé pour les suites, nous dirons qu'un tel ensemble converge vers 0.

Y_{c_2} entraîne Y_{c_1}. La question se pose de savoir si un espace vectoriel topologique complètement réticulé peut vérifier Y_{c_1} sans vérifier Y_{c_2}.

Nous cherchons alors à déterminer une fonction F définie sur $\mathfrak{X}$, à valeurs dans Y, totalement croissante et continue à droite telle que l'on ait $M(\varphi) = \int_{C_-(x_0)} \varphi\, dF$ pour toute $\varphi \in \Phi$.

Nous noterons au fur et à mesure les hypothèses que nous ferons sur Φ et sur M.

2. Nous construisons d'abord l'espace vectoriel Φ_1 sur R^1 engendré par Φ, c'est-à-dire l'ensemble des éléments

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i; \qquad \varphi_i \in \Phi, \qquad \alpha_i \in R^1, \qquad n = 1, 2, \dots$$

et nous prolongeons M à Φ_1 en posant

$$(1) \qquad M(\Sigma \alpha_i \varphi_i) = \Sigma \alpha_i M(\varphi_i).$$

Notre première condition sera la possibilité de ce prolongement, c'est-à-dire : si $\Sigma \alpha_i \varphi_i \in \Phi$, la valeur de M, donnée à priori, par hypothèse, doit vérifier (1) ; en d'autres termes

$$\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0, \qquad \varphi_i \in \Phi \implies \Sigma \alpha_i M(\varphi_i) = 0.$$

Tous les éléments de Φ_1 sont des fonctions continues numériques sur $C_-(x_0)$ et Φ_1 peut être ordonné par

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \iff \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in C_-(x_0).$$

La seconde condition que nous imposerons à M est la suivante :

(2) M est positive, c'est-à-dire $\varphi \in \Phi$, $\varphi \succ 0 \implies M(\varphi) \succ 0$.

La nécessité des conditions énoncées ci-dessus est évidente.

3. Nous allons prolonger Φ_1 en un espace vectoriel $\widehat{\Phi}$ sur R^1 comprenant toutes les fonctions caractéristiques ψ_x des cônes négatifs $C_-(x)$, $x \in C_-(x_0)$. $\widehat{\Phi}$ est l'ensemble des éléments

$$\varphi + \sum_{1}^{m} \beta_j \psi_{x_j}; \qquad \varphi \in \Phi_1, \qquad \beta_j \in R^1, \qquad m = 1, 2, \dots$$

Nous ordonnons $\widehat{\Phi}$ comme nous l'avons fait pour Φ_1.

Il s'agit maintenant de prolonger M à $\widehat{\Phi}$ en lui conservant ses caractères de positivité et de linéarité.

Pour cela, nous supposons réalisée une bonne ordination de $C_-(x_0)$.

Si α y est le rang de $x \in C_-(x_0)$, nous désignerons par ψ_α la fonction caractéristique de $C_-(x)$.

Si x_1 est le premier élément dans cette ordination, nous posons

$$M(\psi_1) = \inf\{M(\varphi);\ \varphi \in \Phi_1,\ \varphi \succ \psi_1\}.$$

Pour que cette définition ne soit pas illusoire, il faut qu'il existe des éléments $\varphi \in \Phi_1$ supérieurs à ψ_1. Nous ferons l'hypothèse : Φ_1 contient une fonction à valeurs strictement positives (une constante, par exemple). Cette hypothèse rend en même temps effective la condition (2).

Puis nous définissons M par linéarité sur l'espace vectoriel Φ_2 engendré par Φ_1 et ψ_1. M est alors positive sur Φ_2.

Soit en effet, $f = \varphi + \beta\psi_1$ un élément positif de cet espace et $M(f) = M(\varphi) + \beta M(\psi_1)$ la valeur correspondante de M.

Si β est positif, il est clair que $M(f)$ l'est.

Si β est négatif, on a $\beta'\psi_1 \prec \varphi$ avec $\beta' = -\beta$, $\beta' > 0$.

D'où $\psi_1 \prec \frac{1}{\beta'}\varphi$ et, de par la définition de $M(\psi_1)$

$$M(\psi_1) \prec \frac{1}{\beta'}M(\varphi), \text{ c'est-à-dire } M(f) \succ 0.$$

α et α_0 désignant des nombres ordinaux transfinis, si M est positive sur tout Φ_α, pour $\alpha < \alpha_0$ (¹), elle l'est sur leur réunion Φ_{α_0} qui est l'espace vectoriel engendré par Φ_1 et l'ensemble des ψ_α pour $\alpha < \alpha_0$. On définira alors $M(\psi_{\alpha_0})$ par

$$M(\psi_{\alpha_0}) = \inf\{M(\psi);\ \psi \in \Phi_{\alpha_0},\ \psi \succ \psi_{\alpha_0}\}$$

et Φ_{α_0+1} étant l'espace engendré par Φ_{α_0} et ψ_{α_0}, on démontre comme pour Φ_2 que M, prolongée par linéarité à Φ_{α_0+1}, y est positive.

M est donc linéaire et positive sur $\widehat{\Phi}$.

Si l'on pose $F(x) = M(\psi_x)$, il est clair que la fonction F est totalement croissante, car $\Delta(S) = M(\psi_s)$ si ψ_s est la fonction caractéristique de l'ensemble S, et $\psi_s \in \widehat{\Phi}$, $\psi_s \succ 0$.

(¹) Nous écrivons $>$ pour l'inégalité des nombres ordinaux, avec la convention que $\alpha_0 > \alpha$ implique $\alpha \neq \alpha_0$.

4. Nous allons prouver la proposition : F *est continue à droite*. Soit x un élément de $C_-(x_0)$ et α son rang dans la bonne ordination utilisée au numéro précédent.

$M(\psi_\alpha)$ est la limite vers laquelle converge l'ensemble filtrant à gauche décrit par inf $\{M(\bar{\psi}_i)\,;\ \bar{\psi}_i \in \Phi_\alpha,\ \bar{\psi}_i \succ \psi_\alpha,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il résulte de Y_{c_2} que si $\mathcal{V}_+(0)$ est un voisinage à droite ouvert de 0 dans Y (intersection d'un ouvert contenant 0 et de $C_+(0)$), il existe un nombre fini de fonctions $\bar{\psi}_i$ du type $\bar{\psi}_i = \varphi_i + \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij}\psi_{\alpha_j}$, $\alpha_j < \alpha$, $\varphi_i \in \Phi_1$ telles que

$$\inf\,\{M(\bar{\psi}_i])\,;\ i = 1, \ldots, n\} - M(\psi_\alpha) \in \mathcal{V}_+(0).$$

Utilisant alors le fait que si $z_1, \ldots, z_n$ décrivent dans Y des filtrants à gauche convergeant respectivement vers $y_1, \ldots, y_n$, inf $z_1 \ldots z_n$ décrit un filtrant à gauche convergeant vers inf $y_1 \ldots y_n$ et que $\mathcal{V}_+(0)$ est voisinage à droite ouvert de tous ses points, on peut, s'il existe des coefficients $\lambda_{ij} > 0$, déterminer pour les fonctions ψ_{α_j} correspondantes des fonctions $\varphi_j \in \Phi_1$ et des fonctions $\psi_{\alpha_{jk}}$, $\alpha_{jk} < \alpha_j$, en nombre fini telles que

$$\inf M[\varphi_i + \Sigma'\lambda_{ij}\psi_{\alpha_j} + \Sigma''\lambda_{ij}(\varphi_j + \Sigma\mu_{jk}\varphi_{\alpha \cdot k})] - M(\psi_\alpha) \in \mathcal{V}_+(0)$$

où Σ' (resp. Σ'' désigne la somme étendue aux coefficients $\lambda_{ij} < 0$ (resp. > 0).

S'il existe des $\mu_{jk} > 0$, on recommence l'opération pour les $\psi_{\alpha_{jk}}$ correspondantes, et ainsi de suite.

On obtient ainsi des suites décroissantes de nombres ordinaux :

$$\alpha_j > \alpha_{jk} > \alpha_{jkl} > \cdots$$

Mais une telle suite ne peut être que finie. Le processus décrit ci-dessus doit donc s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations. C'est dire que l'on aboutit au résultat suivant :

Il existe un nombre fini de fonctions $\psi_m = \varphi_m - \sum_{n=1}^{n_m} \lambda_{mn}\psi_{\alpha_n}$ où tous les coefficients λ_{mn} sont positifs et telles que

$$\inf_m M(\bar{\psi}_m) - M(\psi_\alpha) \in \mathcal{V}_+(0).$$

On peut enfin trouver $\eta > 0$, tel que si $\chi_m = (1 + \eta)\bar{\psi}_m$, on ait $\inf_m M(\chi_m) - M(\psi_\alpha) \in \mathcal{V}_+(0)$.

Considérons alors l'ensemble filtrant à gauche engendré par les éléments $M(\chi)$ avec $\chi = (1+\eta)\left(\varphi - \sum_1^n \lambda_i \psi_{\alpha_i}\right)$ où $\varphi \epsilon \Phi_1$, $\alpha_i < \alpha$, λ_i réel positif, η réel positif,

$$n = 1, 2, \ldots \text{ et } \psi_\alpha \prec \varphi - \sum_1^n \lambda_i \psi_{\alpha_i}.$$

Cet ensemble est borné inférieurement par $M(\psi_\alpha)$, il converge donc vers un élément $y_0 \succ M(\psi_\alpha)$. Mais, en vertu de Y_b (les cônes positifs de Y sont fermés) et du résultat obtenu ci-dessus y_0 ne peut être que $M(\varphi_\alpha)$. En vertu de Y_{c_2}, il existe donc un élément $y_1 = \inf_m M(\chi_m)$ de cet ensemble tel que

$$(1) \qquad C_-(y_1 - M(\psi_\alpha)) \cap C_+(0) \in \mathcal{V}_+(0).$$

Or, les fonctions ψ_{α_i} sont semi-continues supérieurement (compacité des cônes négatifs de $\mathcal{X}$), les fonctions φ sont continues et par suite les fonctions χ_m sont semi-continues inférieurement (positivité des coefficients λ_i !). Posons alors $\chi = \inf_m \chi_m$, χ est aussi une fonction semi-continue inférieurement sur $C_-(\chi_0)$.

L'ensemble $\{u; u \epsilon \mathcal{X}, \ \chi(u) > 1\}$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ contenant $C_-(x)$. Il contient donc un compact K dont l'intérieur contient $C_-(x)$. Il existe, par suite, (Ch. I, § 4, nº 3. Prop. 2) un élément $u_0 \epsilon \mathcal{X}$ tel que $C_-(x) \subset \mathring{C}_-(u_0) \subset C_-(u_0) \subset K$. Pour tout $v \epsilon C_+(x) \cap C_-(u_0)$ on aura $\psi_v \prec \chi$, $F(v) \prec y_1$, ce qui, en vertu de la relation (1) ci-dessus, établit la continuité à droite de F au point x.

5. Théorème. — *Dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe, si l'espace vectoriel* Φ_1 *sur le corps des réels engendré par* Φ *contient une fonction strictement positive, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction* F *répondant à la question est que le prolongement par linéarité de* M *à* Φ_1 *soit possible et donne une fonctionnelle positive.*

La nécessité est évidente. Avant de démontrer que la condition est suffisante, établissons le

Lemme : *La base de filtre sur* Y *engendrée par les ensembles* $C_-(u) \cap C_+(-u)$, *où* u *décrit un ensemble filtrant à gauche convergeant vers* 0, *converge elle-même vers* 0.

Soit $v \epsilon C_-(u) \cap C_+(-u)$, on a $0 \prec v^+ \prec u$ et $0 \prec v^- \prec u$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de 0, et $\mathcal{V}$ un voisinage symétrique de 0 tel que $\mathfrak{V} + \mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$. Il est possible de trouver u tel que

$$C_{-}(u) \cap C_{+}(0) \subset \mathfrak{V} \cap C_{+}(0).$$

On aura alors $v^{+} \in \mathfrak{V}$ et $v^{-} \in \mathfrak{V}$. d'où $v \in \mathfrak{W}$.

Passons à la démonstration du théorème :

Étant donnée une fonction $\varphi \in \Phi$, considérons une partition finie de $C_{-}(x_0)$ en ensembles S_i tels que φ ait une oscillation inférieure à $\varepsilon > 0$ donné sur chaque S_i.

Formons la somme

$$\sum_i \varphi(\xi_i)\Delta(S_i), \qquad \xi_i \in S_i.$$

C'est la valeur de M pour la fonction

$$\sum_i \varphi(\xi_i)\psi_{S_i} = \overline{\psi}$$

qui appartient à $\widehat{\Phi}$.

On a

$$-\varepsilon\psi_{x_0} \prec \varphi - \overline{\psi} \prec \varepsilon\psi_{x_0}.$$

D'où

$$-\varepsilon F(x_0) \prec M(\varphi) - M(\overline{\psi}) \prec \varepsilon F(x_0).$$

En vertu du lemme précédent, ceci entraîne que $M(\varphi)$ soit la limite de $\sum_i \varphi(\xi_i)\Delta(S_i)$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ (Cf., § 2, nº 3) c. q. f. d.

6. Nous ne nous sommes pas préoccupés dans ce qui précède de l'unicité à une constante additive près, de la fonction F. Celle-ci sera assurée si Φ est « assez vaste », c'est-à-dire si Φ_1 est partout dense sur l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions numériques continues sur $C_{-}(x_0)$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Dans ces conditions, M peut être prolongée à $\mathcal{C}$, et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}$, on a $M(\varphi) = \int_{C_{-}(x)} \varphi \, dF$.

Si $G = F_1 - F_2$ n'est pas constante, il existe un ensemble $S = S(x; u)$ pour lequel $\Delta(S, G) \neq 0$.

G est à variation bornée, soit V sa variation totale (en tant que fonction définie sur l'anneau $\mathfrak{A}$).

Si y décrit $U(x)$ $(C_{-}(y) \supset \mathring{C}_{-}(x))$, si v décrit $U(u)$ et si $S_1 = S(x; v)$ et $S_2 = S(y; u)$, $V(S_2 - S_1)$ décrit un ensemble filtrant à gauche $\mathcal{V}$ dans Y. $\mathcal{V}$ est borné inférieurement par 0.

Mais F_1 et F_2 étant continues à droite, il en est de même de G et de V. Il est par conséquent possible de choisir y et v de façon que $V(S_2 - S_1)$ appartienne à un voisinage donné de 0. Par suite, c'est vers 0 que converge V, et $\mathcal{V}_+(0)$ étant donné, il est possible de choisir y et v de telle sorte que

$$C_-(V(S_2 - S_1)) \cap C_+(0) \subset \mathcal{V}_+(0).$$

Mais on a d'autre part, $\bar{S}_1 \subset \mathring{S}_2$. S_1 et $C_-(x_0) - \mathring{S}_2$ sont deux compacts disjoints. Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}$ avec $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ sur tout $C_-(x_0)$, $\varphi(x) = 1$ sur S_1 et $\varphi(x) = 0$ hors de S_2.

On doit avoir pour cette fonction, comme pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}$

$$\int_{C_-(x_0)} \varphi \, dG = 0.$$

Or, $\int_{C_-(x_0)} \varphi \, dG$ est la somme de la valeur de la mesure définie par G pour S_1 (mesure dont la différence avec $\Delta(S, G)$ a une valeur absolue inférieure à $V(S_2 - S_1)$ et d'un terme dont la valeur absolue est également inférieure à $V(S_2 - S_1)$. Il résulte donc du lemme établi au numéro précédent que l'égalité $\int_{C_-(x_0)} \varphi \, dG = 0$ est incompatible avec $\Delta(S, G) \neq 0$.

7. Nous avons traité les problèmes précédents sur un cône négatif fixe $C_-(x_0)$ d'un espace $\mathcal{X}$ [fonctions $\varphi \in \Phi$ continues sur $C_-(x_0)$, intégrale $\int \varphi \, dF$ calculée sur $C_-(x_0)$], mais la solution aurait été la même sur une réunion finie de cônes négatifs, ou plus généralement sur un compact fixe quelconque de $\mathcal{X}$. (Cf. la remarque à la fin du n° 3 du § 2).

Elle s'étend aussi sans difficulté au cas où Φ est la famille $\mathcal{C}_K$ des fonctions numériques continues φ sur $\mathcal{X}$, nulles hors d'un compact $K(\varphi)$ variable avec φ (ou au cas où Φ est partout dense sur la famille précédente munie de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{X}$).

La fonctionnelle $M(\varphi)$ permet, en effet, de définir la fonction F sur toute réunion finie Γ de cônes négatifs, et si F a été définie de la sorte sur Γ et F_1 sur Γ_1, le théorème d'unicité permet de conclure $F(x) = F_1(x)$ pour tout $x \in \Gamma \cap \Gamma_1$.

Tout point $x \in \mathcal{X}$ appartenant à au moins un ensemble Γ, F sera définie de manière unique sur $\mathcal{X}$ tout entier et permettra d'écrire

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi \, dF = \int_{K(\varphi)} \varphi \, dF = M(\varphi)$$

Enfin, le cas de fonctionnelles linéaires non positives à valeurs dans Y se ramène au cas précédent, comme dans le cas des fonctionnelles réelles.

Si l'on désigne par fonctionnelle linéaire relativement bornée M une application linéaire de $\mathcal{C}_K$ dans Y telle que

$$|\varphi| \prec \varphi_0 \Longrightarrow |M(\varphi)| \prec M(\varphi_0)$$

la démonstration du théorème : « Pour que M soit relativement bornée il faut et il suffit qu'elle soit la différence de deux fonctionnelles linéaires positives » faite dans le cas $Y = R^1$ (Cf. Bourbaki 4) se transpose immédiatement au cas des espaces Y envisagés ici.

Nous pouvons donc conclure par ce théorème :

Toute fonctionnelle linéaire M, *à valeurs dans un espace* Y, *relativement bornée sur l'espace des fonctions numériques continues* φ *sur un espace* $\mathcal{X}$, *nulles hors d'un compact (variable avec* φ*) peut s'exprimer d'une manière unique par* $M(\varphi) = \int \varphi\, dF$ *où* F *est une fonction à variation bornée, continue à droite sur* $\mathcal{X}$ *à valeurs dans* Y.

BIBLIOGRAPHIE

G. Birkhoff (1) Lattice theory. *Am. Math. Soc. Col. Pub. XXV.*

N. Bourbaki (1) Topologie générale. Ch. I et II, *Act. Sc. et Ind.*, 858 1142.
(2) Topologie générale. Ch. IX, *Act. Sc. et Ind.*, 1045.
(3) Topologie générale. Ch. X, *Act. Sc. et Ind.*, 1084.
(4) Intégration. Ch. II, *Act. Sc. et Ind.*, 1175.

G. Choquet (1) Convergences. *Ann. Univ. Grenoble* (Nouvelle série), XXIII
(2) Capacités. *C. R.*, t. 234, n° 1 (p. 35-37) ; n° 4 (p. 383-385) ; n° 5 (p. 498-450) ; n° 8 (p. 784-786).

J. Dieudonné et Schwartz (1) La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, I.

P. Halmos (1) *Measure theory*, New-York, 1950.

E. Hille (1) Functional Analysis and semi-groups, *Am. Math. Soc. Col. Pub., XXXI.*

Kolmogoroff (1) *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Erg. d. Math.* 2.

O. Nikodym (1) Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole, *Mém. Acad. Bruxelles*, 2e série, 17.

M. Picone et T. Viola (1) *Lezioni sulla teoria moderna dell' integrazione*, Ed. Sci. Einaudi, 1952.

A. Revuz (1) Sur une représentation canonique de certaines fonctionnelles croissantes. *C. R.*, t. 231, p. 22-24.

(2) Représentation canonique par des mesures de Radon des fonctions numériques totalement croissantes sur les espaces topologiques ordonnées. *C. R.*, t. 231, p. 1731-1735.

Schur (1) Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. *Jour. f. Math.*, 140.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — LES FONCTIONS TOTALEMENT CROISSANTES ([1]). 191

§ 1. Définitions. Notations 191
§ 2. Les conditions nécessaires 194
§ 3. Les propriétés algébriques des ensembles S et des nombres $\Delta(S)$ 197
§ 4. Extension de mA en une mesure σ-additive 202
§ 5. X localement compact 212

CHAPITRE II : EXTENSIONS DE LA THÉORIE 223

§ 1. F prend ses valeurs dans un groupe topologique ordonné.... 223
§ 2. Fonctions à variation bornée 229
§ 3. Affaiblissement de l'axiome X_a 235

CHAPITRE III : APPLICATIONS 246

§ 1. Exemples d'espaces X 246
§ 2. Intégration relative à une fonction à variation bornée...... 256
§ 3. Fonctionnelles linéaires sur les espaces $\mathfrak{X}$ 260

BIBLIOGRAPHIE 267

([1]) Les résultats du premier chapitre ont fait l'objet de deux notes aux C.-R. (Cf. REVUZ, 1, 2).