Annales de l'institut Fourier

Thomas A. W. Dwyer III

Dualité des espaces de fonctions entières en dimension infinie

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 4 (1976), p. 151-195

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_4_151_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 4 (1976), 151-195.

DUALITÉ DES ESPACES DE FONCTIONS ENTIÈRES EN DIMENSION INFINIE

par Thomas A. W. DWYER III

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article les propriétés topologiques et de dualité des espaces de fonctions holomorphes f dans des domaines localement convexes, satisfaisant à des conditions de croissance « à puissance p-ème sommable »

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_{r,\theta}^{p} < \infty,$$

où les $\|\hat{d}^n f(0)\|_{r,\theta}$ sont les normes des dérivées polynomiales $\hat{d}^n f(0)$ de f pour des types d'holomorphie divers au sens de [29], [30] et [10], par rapport à des (semi-) normes r dans le domaine de f: ces domaines sont des limites projectives d'espaces de Banach E_r, ou des limites inductives de leurs duals E'_r, avec des normes satisfaisant à des conditions de croissance convenables. Dans le cas des domaines de dimension finie la classification des fonctions entières f par des conditions de croissance du type $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)|^p < \infty$ équivaut à leur classification par rapport à des conditions de croissance du type $|f(z)| \leqslant c \exp \rho |z|^{p'}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$: si la première condition est satisfaite pour chaque $\rho > 0$ alors la seconde est aussi satisfaite, et vice-versa. Cette dernière classification a été employée dans [26] pour l'étude des équations différentielles d'ordre infini. En dimension infinie il faut employer la première classification, car il faut imposer des conditions de croissance aux normes des dérivées par rapport à des types d'holomorphie divers, dans l'étude de la dualité. (Les ρ^n pour des domaines localement convexes sont « absorbés » par les normes des polynômes, donc ils ne sont pas donnés explicitement.) Dans un autre article nous employons cette classification des fonctions entières pour étudier les opérateurs différentiels d'ordre infini dans des espaces localement convexes [19].

L'article est divisé en deux sections. Dans la section 1 nous introduisons les espaces $P_\theta({}^n E')$ des polynômes n-homogènes dans le dual d'une limite projective E d'espaces de Banach E_r, pour des types d'holomorphie $\dot\theta$ ayant un type dual $\dot\theta'$: $P_{\dot\theta}({}^nE')$ est considéré comme une limite projective des espaces de Banach $P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$. L'espace $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ est défini comme une limite inductive des espaces de Banach $P_{\dot\theta'}({}^nE_r)$ et on montre que $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ est isomorphe au dual de $P_{\dot\theta}({}^nE')$ (proposition 1.4.1). Nous introduisons aussi les espaces $P_\theta({}^nE)$ de polynômes n-homogènes dans E, pour des types d'holomorphie ayant un type dual θ'. Cet espace est considéré comme une limite inductive des espaces de Banach $P_\theta({}^nE_r)$. L'espace $P_{\theta'}({}^nE')$ est pour sa part défini comme une limite projective des espaces $P_{\theta'}({}^nE'_r)$, et on montre que $P_{\theta'}({}^nE')$ est isomorphe au dual de $P_\theta({}^nE)$ (proposition 1.5.1). Quand E est un espace de Fréchet-Schwartz alors on montre que $P_{\dot\theta}({}^nE')$ et $P_{\theta'}({}^nE')$ en sont aussi, et que $P_\theta({}^nE)$ ainsi que $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ sont des espaces de Silva. On montre d'ailleurs que les types compact et courant au sens de [10] se confondent dans ce cas (proposition 1.6.1 (*a*)). Si E est un espace de Fréchet nucléaire on montre que $P_{\dot\theta}({}^nE')$ et $P_{\theta'}({}^nE')$ en sont aussi, et que $P_\theta({}^nE)$ ainsi que $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ sont des espaces ultrabornologiques nucléaires. Dans ce cas on montre aussi que les types nucléaire et courant se confondent, donc « tous » les types d'holomorphie se confondent aussi (proposition 1.6.1 (*b*)).

Dans la section 2 nous introduisons les espaces $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$, des fonctions f dans l'espace de Banach dual E'_r telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|^p_{r,\dot\theta} < \infty$ pour les normes $\| \ \|_{r,\dot\theta}$ des espaces $P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ correspondants. On montre que la transformation de Fourier-Borel est une isométrie du dual de $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ sur l'espace $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$, de fonctions dans E_r, défini de la même façon. On a le même résultat pour les espaces $F^{p'}_\theta(E_r)$ et son dual de Fourier-Borel $F^p_{\theta'}(E'_r)$ (propositions 2.1.3 et 2.1.6). Nous définissons $F^p_{\dot\theta}(E')$ comme une limite projective des espaces $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$, et $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ comme une limite inductive des espaces $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$, et on montre que $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ est le dual de Fourier-Borel de $F^p_{\dot\theta}(E')$ (proposition 2.4.1). On a le même résultat pour $F^{p'}_\theta(E)$ et son dual de Fourier-Borel $F^p_{\theta'}(E')$ (proposition 2.5.1). L'identité des *topologies* à travers la transformation de Fourier-Borel est obtenue pour certains types d'holomorphie. On obtient la « régularité » des bornées de $F_\theta^{p'}(E)$, donc on peut conclure que son dual est un espace de Fréchet quand E est de Fréchet, quand θ est le type dual d'un type d'holomorphie. Cela se vérifie même quand θ est le type nucléaire, au moins si les E_r sont hilbertiens. (C'est le type nucléaire qui est le plus convenable dans l'étude des équations de convolution.) Quand E est un espace de Fréchet-Schwartz on peut obtenir des conditions de croissance des normes et de compacité des applications canoniques $i_{rs}: E_s \to E_r$ dans la décomposition projective de E pour assurer que $F_\theta^p(E')$ et $F_{\theta'}^p(E')$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz et que $F_\theta^{p'}(E)$ et $F_{\theta'}^{p'}(E)$ sont des espaces de Silva. On a d'ailleurs dans ce cas l'égalité topologique des types compact et courant dans E', et des types nucléaire et intégral dans E (proposition 2.6.1 (*a*)). Si E est un espace de Fréchet nucléaire on peut obtenir des conditions de croissance des normes nucléaires des applications canoniques i_{rs} pour assurer que $F_\theta^p(E')$, $F_{\theta'}^p(E')$, $F_\theta^{p'}(E)$ et $F_{\theta'}^{p'}(E)$ sont des espaces nucléaires. Dans ce cas on obtient d'ailleurs l'identité topologique des espaces correspondants par rapport à tous les types d'holomorphie considérés (proposition 2.6.1 (*b*)).

Nous finissons cette introduction en donnant les relations entre ces espaces de fonctions et d'autres espaces étudiés récemment. En faisant $p = 1$ et θ le type nucléaire on retrouve les espaces $H_{Nb}(E')$ des fonctions « de type nucléaire borné » dans un dual de Fréchet de [27] [28]. On retrouve les résultats dans [9] quand $p = 1$ et E est nucléaire. Si E est un espace de Banach par rapport à une norme $\| \ \|$, on peut le représenter comme une limite projective des espaces de Banach E_r, où E_r est l'espace vectoriel E muni de la norme $x \to \|rx\|$, $r > 0$, et on retrouve les espaces $H_{\theta b}(E')$ dans des domaines de Banach de [1, 2], [6, 7], [22] [23] [24] et [31] [32], quand $p = 1$. (De manière plus générale, on place de cette façon l'étude des fonctions définies dans des espaces de Banach dans le cadre des domaines de Fréchet et leurs duals.) Quand $p = 2$ et θ est le type de Hilbert-Schmidt (les E_r étant supposés hilbertiens) on retrouve les « espaces de Fock holomorphes » de [14] [15] (où l'injectivité des i_{rs} avait été supposée, alors qu'elle n'est pas nécessaire). Si E est un espace hilbertien par rapport à un produit scalaire $(|)$, alors on peut le représenter comme une limite projective des espaces hilbertiens E_r, où E_r est l'espace vectoriel E muni du produit scalaire $(x, y) \longmapsto (rx|ry)$, $r > 0$. On retrouve ainsi les « espaces de Fischer-Fock » de [4], [5], [13] [16], [35] [36].

On peut considérer aussi les espaces $F_\theta^p(E', F)$ et $F_\theta^{p'}(E, F')$ des fonctions entre des espaces E et F, limites projectives d'espaces normés, et leurs duals, dans lesquels on peut étudier des équations différentielles et de convolution à valeurs vectorielles ([3], [17] quand $p = 1$ pour des espaces de Banach), mais nous laissons leur étude pour une autre occasion.

1. POLYNOMES DANS DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

1.0. Rappels sur les limites projectives.

Notre cadre d'étude est celui des limites projectives

$$E = \lim_{r} (E_r, i_{rs})$$

d'un système projectif $(E_r, i_{rs})_{r \leqslant s}$ d'espaces de Banach E_r, où les $i_{rs}: E_s \to E_r$ sont les applications linéaires canoniques du système projectif et les $i_r: E \to E_r$ sont les projections canoniques de E. On a donc les relations $i_r = i_{rs} \circ i_s$ pour $r \leqslant s$ et, pour chaque famille $({}^r x)$ dans le produit $\Pi_r E_r$ telles que $i_{rs}{}^s x = {}^r x$ pour $r \leqslant s$, il y a un $x \in E$ *et un seul*, tel que $i_r x = {}^r x$ pour chaque r. On supposera aussi que $i_r E$ est dense dans E_r pour chaque r, et que pour chaque $0 < \alpha < 1$ et chaque indice r il y a un indice $s > r$ tel que $\|i_{rs}\| \leqslant \alpha$. Si la topologie de E est déterminée déjà par une famille dénombrable (où même totalement ordonnée) de projections, alors E sera un espace de Fréchet. De la densité des images des i_r on déduit l'injectivité des applications transposées ${}^t i_{rs}$, donc les duals E'_r peuvent être considérés comme des sous-espaces vectoriels des E'_s, $s \geqslant r$. Un espace localement convexe séparé complet E quelconque peut être considéré comme une telle limite projective, où les E_r sont les complétés des espaces quotients de E par rapport aux semi-normes continues de E. On aura besoin de conditions de croissance du type $\|i_{rs}\| \leqslant \alpha^{r-s}$ pour $\alpha > 1$ et $r < s$ (quand le système projectif est supposé ordonné par des indices réels), et de même pour les normes nucléaires $\|i_{rs}\|_N$. On peut toujours obtenir des normes équivalentes dans les E_r, pour lesquelles ces inégalités sont satisfaites : en effet, si on suppose que pour chaque r il y a un $s > r$ tel que $\|i_{rs}\|_N < \infty$ alors pour les nouvelles normes

$$\| \ \|'_r : = \alpha^r \|i_{rs}\|_N^{s/(r-s)} \| \ \|_r$$

(dans E_r, $\| \ \|_r$) et $\| \ \|'_s : = \alpha^s \|i_{rs}\|_N^{r/(r-s)} \| \ \|_s$ (dans E_s, $\| \ \|_s$), on montre sans difficulté que la nouvelle norme nucléaire de i_{rs} est $\|i_{rs}\|'_N \leqslant \alpha^{r-s}$. On a de même pour les normes $\| \ \|'_r = \alpha^r \|i_{rs}\|^{s/(r-s)} \| \ \|_r$ et $\| \ \|'_s = \alpha^s \|i_{rs}\|^{r/(r-s)}$, qui nous donnent la nouvelle norme $\|i_{rs}\|' \leqslant \alpha^{r-s}$ pour i_{rs}.

Nous n'utilisons pas les limites « surjectives » de [11] [12], car leurs duals ne sont pas bien connus, et nous voulons employer les propriétés limites de factorisation *unique* (cf. ci-dessus).

1.1. Polynômes dans E'_r et E_r.

Soit $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ l'espace de Banach des polynômes n-homogènes $E'_r \to C$ du type d'holomorphie $\dot\theta$ au sens de [10] et [29] [30], mais défini par rapport à la dualité de E'_r avec E_r, pas avec E''_r. (Ainsi le type compact $P_{\dot C}(^nE'_r)$ vient du symétrisé de $E_r \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_r$ et le type nucléaire $P_{\dot N}(^nE'_r)$ du symétrisé de $E_r \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_r$.) On supposera que $\dot\theta$ a un type dual $\dot\theta'$ au sens de [11]. L'espace $P_f(^nE'_r)$ engendré par les polynômes $x^n : x' \longmapsto \langle x, x' \rangle^n : = x'(x)^n$ pour $x \in E_r$ et $x' \in E'_r$ est donc dense dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$, $P_{\dot N}(^nE'_r)$ est continûment plongé dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$, et la formule

$$J_r T(x) : = T(x^n) \quad \text{pour} \quad T \in P_{\dot\theta}(^nE'_r)'$$

donne une isométrie $J_r : P_{\dot\theta}(^nE'_r)' \to P_{\dot\theta'}(^nE_r)$. Par conséquence, $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ et $P_{\dot\theta'}(^nE_r)$ sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire $\langle , \rangle_r$ telle que $|\langle P_n, P'_n\rangle_r| \leqslant \|P_n\|_{r,\dot\theta}\|P'_n\|_{r,\dot\theta}$, où $\|P_n\|_{r,\theta}$ est la norme de $P_n \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ et $\|P'_n\|_{r,\dot\theta'}$ celle de $P'_n \in P_{\dot\theta'}({}^nE_r)$, et cette forme est caractérisée par

$$\langle x^n, P'_n\rangle_r = P'_n(x).$$

On supposera aussi que $\|P_n\|_r \leqslant \|P_n\|_{r,\dot\theta}$ pour $P_n \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ et $\|u.v\|_{r,\dot\theta} \leqslant \|u\|\,\|v\|$ pour $u, v \in E_r$. Soit $i_n^{rs}P_n : = P_n \circ {}^ti_{rs}$. On supposera que $P_n \longmapsto i_n^{rs}P_n$ donne une application linéaire continue $i_n^{rs} : P_{\dot\theta}({}^nE'_s) \to P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$, avec la norme $\|i_n^{rs}\| \leqslant \|i_{rs}\|^n$. En définissant aussi ${}^{rs}i_nP'_n : = P'_n \circ i_{rs}$ on a par transposition une application linéaire continue

$${}^{rs}i_n : P_{\dot\theta'}({}^nE_r) \to P_{\dot\theta'}({}^nE_s)$$

avec la norme $\|{}^{rs}i_n\| \leqslant \|i_{rs}\|^n$.

On peut aussi définir $P_\theta({}^nE_r)$ directement pour un type d'holomorphie θ dans E_r ayant un type dual θ' dans E'_r, donc $P_f({}^nE_r)$ (engendré par les $x'^n : x \longmapsto \langle x, x'\rangle^n$) sera dense dans $P_\theta({}^nE_r)$, et $P_N({}^nE_r)$ (engendré par le symétrisé de $E'_r \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E'_r$) sera continûment plongé dans $P_\theta({}^nE_r)$. Il est donc possible de définir l'isométrie

$$J'_rP_\theta({}^nE_r)' \to P_{\dot\theta'}({}^nE'_r)$$

par $J'_rT(x') : = T(x'^n)$. Les mêmes inégalités pour i_n^{rs} et ${}^{rs}i_n$ données ci-dessus restent vraies.

Nous nous rappelons que le type d'holomorphie dual du type nucléaire $\dot N$ dans E'_r (resp. N dans E_r) est le type courant dans E_r (resp. E'_r) (de tous les polynômes homogènes continus pour la norme du sup. sur la boule unitaire); que le type dual du type compact $\dot C$ dans E'_r (resp. C dans E_r) est le type intégral I dans E_r (resp. I dans E'_r) (des polynômes donnés par des mesures de Radon de la boule unitaire dans le domaine dual); et que le type dual du type de Hilbert-Schmidt $\dot H$ dans E'_r (resp. H dans E_r) est le type de Hilbert-Schmidt H dans E_r (resp. H dans E'_r), dans le sens de [22] [23] [29] [30], [10] et [13]. (Si les E_r sont des espaces hilbertiens alors le type intégral (I) est le même que le type nucléaire (N) [38, prop. 49,6 et théorème 48.5] : le type nucléaire dans E_r sera donc un type dual, le dual du type compact $\dot C$.)

Toutes les hypothèses sur les types $\dot\theta$ dans les E'_r et θ dans les E_r décrites ci-dessus sont satisfaites par les types nucléaire et compact (et de Hilbert-Schmidt dans le cas hilbertien).

Pour $\dot\theta$ et θ satisfaisant aux conditions ci-dessus on a $\|x_1 \ldots x_n\|_{r,\dot\theta} \leqslant \|x_1\| \ldots \|x_n\|$ où $x_i \in E_r$ et

$$\|x'_1 \ldots x'_n\|_{r,\theta} \leqslant \|x'_1\| \ldots \|x'_n\|$$

où $x'_i \in E'_r$. Pour les types duals on a :

Proposition 1.1.1. —

$$\|x'_1 \ldots x'_n\|_{r,\dot\theta'} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|x'_1\| \ldots \|x'_n\|$$

pour $x'_i \in E'_r$ *et*

$$\|x_1 \ldots x_n\|_{r,\theta'} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|x_1\| \ldots \|x_n\|$$

pour $x_i \in E_r$.

Démonstration. — $J_r^{-1}(x'_1 \ldots x'_n) \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)'$ est donnée par $P \longmapsto L(x'_1, \ldots, x'_n)$ pour chaque $P \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$, où L est la forme n-linéaire symétrique associée à P, comme on peut vérifier immédiatement. Comme

$$\|x'_1 \ldots x'_n\|_{r,\dot\theta'} := \sup \{J_r^{-1}(x'_1 \ldots x'_n)P : \|P\|_{r,\dot\theta} \leqslant 1\}$$

et

$$\begin{aligned}|J_r^{-1}(x'_1 \ldots x'_n)P| &= |L(x'_1 \ldots x'_n)| \\ &\leqslant \|L\|_r\|x'_1\| \ldots \|x'_n\| \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|P\|_r\|x'_1\| \ldots \|x'_n\| \\ &\leqslant n^n \frac{1}{n!} \|P\|_{r,\dot\theta}\|x'_1\| \ldots \|x'_n\|\end{aligned}$$

(où L est la forme associée à P, donc $\|L\|_r \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|P\|_r$ par [29, § 3, p. 7]) on conclut qu'en effet

$$\|x'_1 \ldots x'_n\|_{r,\dot\theta'} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|x'_1\| \ldots \|x'_n\|.$$

On a la même démonstration pour $x_1, \ldots, x_n$ dans E_r et θ'. ▌

Remarque. — Si $\dot\theta = \dot N$ (resp. $\theta = N$) le type dual $\dot\theta'$

(resp. θ') est le type courant, et le facteur $n^n \frac{1}{n!}$ ci-dessus peut être remplacé par 1, de même pour les types compact, intégral et de Hilbert-Schmidt.

1.2. Polynômes dans E′.

Soit $P_{\dot\theta}(^nE')$ l'espace des fonctions $P : E' \to C$ telles que $i_n^r P : = P \circ {}^t i_r \in P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ pour chaque r, avec la topologie la moins fine (nécessairement localement convexe) qui rend continues les applications $i_n^r : P \longmapsto i_n^r P$ de $P_{\dot\theta}(^nE')$ dans les $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$. Alors $(P_{\dot\theta}(^nE'), i_n^r)_r$ est limite projective du système projectif $(P_{\dot\theta}(^nE'_r), i_n^{rs})_{r \leqslant s}$: en effet, l'application $\varphi : P_{\dot\theta}(^nE') \to \{(^rP)_r : {}^rP \in P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ et $i_n^{rs\,s}P = {}^rP$ pour $r \leqslant s\}$ donnée par $P \longmapsto (i_n^r P)_r$ est un isomorphisme linéaire tel que $P \in P_{\dot\theta}(^nE')$ si et seulement si $i_n^r P : = {}^rP = \Pi_r \varphi(P)$ pour toutes les projections $\Pi_r : (^rP)_r \longmapsto {}^rP$. Soit aussi $P_f(^nE')$ l'espace vectoriel engendré par les polynômes

$$x^n : x' \longmapsto \langle x, x' \rangle^n,$$

où $x \in E$ et $x' \in E'$. Alors on a :

PROPOSITION 1.2.1. — *$i_n^r P_f(^nE')$ (donc $i_n^r P_{\dot\theta}(^nE')$) est dense dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$.*

Démonstration. — Pour ${}^rP \in P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ et $\rho > 0$ soit

$$N_\rho : = \{{}^rQ \in P_{\dot\theta}(^nE'_r) : \|{}^rQ - {}^rP\|_{r,\dot\theta} \leqslant \rho\}.$$

Par densité de $P_f(^nE'_r)$ dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ il y a un $\sum_{i=1}^m {}^ru_i^n$, ${}^ru_i \in E_r$, dans N_ρ. Par densité de i_rE dans E_r il y a des suites $(u_{ij})_j$ où $u_{ij} \in E$ telles que $i_r u_{ij} \to {}^ru_i$ quand $j \to \infty$. Par continuité de la multiplication des polynômes de la forme $u_1 \ldots u_n$, donc de $P_{\dot\theta}(^1E'_r) \times \cdots \times P_{\dot\theta}(^1E'_r) \to P_{\dot\theta}(^nE'_r)$, on a

$$(i_r u_{ij})^n \to {}^ru_i^n,$$

donc $i_n^r \sum_{i=1}^m u_{ij}^n \to \sum_{i=1}^m {}^ru_i^n$, quand $j \to \infty$, Alors $i_n^r \sum_{i=1}^m u_{ij}^n$, un élément de $i_n^r P_f(^nE'_r)$, est dans N_ρ pour j suffisamment grand. ▌

Corollaire 1. — *Les transposés* ${}^t i_n^r$ *sont injectifs et*

$$P_{\dot\theta}({}^nE')' = U_r {}^t i_n^r P_{\dot\theta}({}^nE_r')'.$$

Démonstration. — L'injectivité des ${}^t i_n^r$ vient de la densité de $i_n^r P_{\dot\theta}({}^nE')$ dans $P_{\dot\theta}({}^nE_r')$. Évidemment on a l'inclusion $\supset$. Dans l'autre direction soit $T \in P_{\dot\theta}({}^nE')'$: il y a un r et un $K_r > 0$ tels que $|T(P)| \leqslant K_r \|i_n^r P\|_{r,\dot\theta}$ pour chaque

$$P \in P_{\dot\theta}({}^nE'),$$

car les $P \longmapsto \|i_n^r P\|_{r,\dot\theta}$ donnent la topologie de $P_{\dot\theta}({}^nE')$. On peut définir un ${}^rT \in P_{\dot\theta}({}^nE_r')'$ par ${}^rT({}^rP) := \lim_j T(P_{(j)})$ où $P_{(j)} \in P_{\dot\theta}({}^nE')$ et $i_n^r P_{(j)} \to {}^rP$ quand $j \to \infty$ pour chaque ${}^rP \in P_{\dot\theta}({}^nE_r')$, toujours possible par densité de $i_n^r P_{\dot\theta}({}^nE')$ dans $P_{\dot\theta}({}^nE_r')$. On vérifie sans difficulté que ${}^rT({}^rP)$ est indépendant du choix de $(P_{(j)})_j$, que $\|{}^rT\| \leqslant K_r$ et que ${}^t i_n^r {}^rT = T$. ▌

Remarque. — Si E est réflexif et i_r injectif (possible s'il y a des normes continues sur E) on obtient la densité de ${}^t i_r E_r'$ dans E'. Dans ce cas i_n^r sera injective et

$$P \longmapsto \|i_n^r P\|_{r,\dot\theta}$$

sera une norme continue sur $P_{\dot\theta}({}^nE')$. Le complété de $P_{\dot\theta}({}^nE')$ pour cette norme sera $P_{\dot\theta}({}^nE_r')$, donc $P_{\dot\theta}({}^nE')$ sera un espace « dénombrablement normé » au sens de Gelfand si tous les i_r sont injectifs [21]. En général on n'a que des semi-normes $P \longmapsto \|i_n^r P\|_{r,\dot\theta}$ mais la topologie limite projective sera déterminée par ces semi-normes. $P_{\dot\theta}({}^nE')$ est contenu dans l'espace $P({}^nE')$ des polynômes homogènes continus dans E'. Si le système projectif est dénombrable alors les bornés de E' sont des images des bornés des E_r', et dans ce cas le plongement de $P_{\dot\theta}({}^nE')$ dans $P({}^nE')$ est continu pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E'.

Corollaire 2. — $P_f({}^nE')$ *est dense dans* $P_{\dot\theta}({}^nE')$.

Démonstration. — Soit $P \in P_{\dot\theta}({}^nE')$, avec ${}^rP := i_n^r P$, et soit N un voisinage de P : comme les $P \longmapsto \|i_n^r P\|_{r,\dot\theta}$ sont des semi-normes continues, on a $\rho > 0$ tel que

$$\{Q \in P_{\dot\theta}({}^nE') : \|i_n^r Q - i_n^r P\|_{r,\dot\theta} \leqslant \rho\} \subset N$$

(en supposant par simplicité un système saturé de semi-normes). De la proposition 1.2.1 il y a un $P_f \in P_f({}^nE')$ tel que $\|i_n^r P_f - i_n^r P\|_{r,\dot\theta} \leqslant \rho$, donc $i_n^r P_f \in N$. ▌

1.3. Polynômes dans E.

Soit $P_\theta({}^nE)$ l'espace des fonctions $P' : E \to \mathbf{C}$ admettant une représentation de la forme $P' = {}^ri_n{}^rP' : = {}^rP' \circ i_r$ où ${}^rP' \in P_\theta({}^nE_r)$, pour un r au moins, avec la topologie localement convexe la plus fine qui rend continues les applications ${}^ri_n : {}^rP' \longmapsto {}^ri_n{}^rP'$ des $P_\theta({}^nE_r)$ dans $P_\theta({}^nE)$. Alors

$$(P_\theta({}^nE), {}^ri_n)_r$$

est limite inductive localement convexe du système inductif $(P_\theta({}^nE_r), {}^{rs}i_n)_{r\leqslant s}$: en effet, si on écrit $({}^rP', r) \sim ({}^sP', s)$ quand il y a un u et un ${}^uP$, tels que ${}^rP' = {}^{ur}i_n{}^uP'$ et ${}^sP' = {}^{us}i_n{}^uP'$, alors l'espace quotient $u_r\{({}^rP', r) : {}^rP' \in P_\theta({}^nE_r)\}/\sim$, avec la structure linéaire et topologique usuelle [20, § 23, sec. 3, p. 116], est limite inductive des $P_\theta({}^nE_r)$ par rapport aux applications $\Pi'_r : {}^rP' \longmapsto ({}^rP', r)^{\sim}$ (classe d'équivalence de $({}^rP', r)$ pour $\sim$) [20, loc, cit.]. On a l'isomorphisme

$$\varphi' : \mathrm{U}_r\{({}^rP', r)\}/r \to P_\theta({}^nE)$$

donné par $\varphi'(({}^rP', r)^{\sim}) : = {}^ri_n{}^rP'$, tel que $\varphi'^{-1}(P') = \Pi'_r{}^rP'$ si et seulement si $P' = {}^ri_n{}^rP'$. On n'a pas en général la densité dans $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ des polynômes de type fini, c'est-à-dire, de l'espace $P_f({}^nE)$ engendré par les polynômes

$$x'^n : x \longmapsto \langle x, x' \rangle^n,$$

où $x \in E$ et $x' \in E'$. Mais comme θ est supposé tel que $P_f({}^nE_r)$ est dense dans $P_\theta({}^nE)$ on a :

PROPOSITION 1.3.1. — *$P_f({}^nE)$ est dense dans $P_\theta({}^nE)$.*

Démonstration. — Soit $P' \in P_\theta({}^nE)$, donc il y a un r et un ${}^rP' \in P_\theta({}^nE_r)$ tels que $P' = {}^ri_n{}^rP'$. Soit N un voisinage de P' : comme ${}^ri_n$ est continu, $({}^ri_n)^{-1}N$ est un voisinage de ${}^rP'$ dans $P_\theta({}^nE_r)$ et par densité de $P_f({}^nE_r)$ il y a un ${}_rP'_f \in P_f({}^nE_r)$ dans $({}^ri_n)^{-1}N$, donc ${}^ri_n{}^rP'_f \in N$. Mais un tel

${}^{r}\mathrm{P}'_{f}$ a la forme $\sum_{i=1}^{m} {}^{r}u_i'^{n}$ où ${}^{r}u'_i \in \mathrm{E}'_r$, c'est-à-dire,

$$ {}^{r}i_n{}^{r}\mathrm{P}'_f = \sum_{i=1}^{m} ({}^{t}i_r{}^{r}u'_i)^n, \quad \text{où} \quad {}^{t}i_r u'_i \in \mathrm{E}', $$

et alors ${}^{r}i_n{}^{r}\mathrm{P}'_f \in \mathrm{P}_f({}^n\mathrm{E}) \cap \mathrm{N}$. ▌

Remarque. — Comme les $i_r\mathrm{E}$ sont denses dans les E_r on a immédiatement l'injectivité des ${}^{r}i_n$, dans $\mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E})$ et dans $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$. On a aussi que $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$ et $\mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E})$ sont continûment plongés dans l'espace $\mathrm{P}({}^n\mathrm{E})$ de tous les polynômes n-homogènes continus dans E, avec la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E : en effet, les applications $\mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E}_r) \to \mathrm{P}({}^n\mathrm{E}_r) \to \mathrm{P}({}^n\mathrm{E})$ sont évidemment continues. On a le même résultat pour $\dot\theta'$.

1.4. Dualité entre $\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')$ et $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$.

PROPOSITION 1.4.1. — *Il y a un isomorphisme linéaire* J *et un seul, de* $\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')'$ *sur* $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$, *tel que* ${}^{t}i_n^r \circ \mathrm{J}_r^{-1} = \mathrm{J}^{-1} \circ {}^{r}i_n$ *pour chaque* r, *donné par* $\mathrm{JT}(x) = \mathrm{T}(x^n)$ *pour chaque*

$$ \mathrm{T} \in \mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')'. $$

J *est borné sur les parties fortement bornées de* $\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')'$ *si* E *est métrisable, et l'isomorphisme est topologique pour la topologie dual forte si* $\dot\theta$ *est aussi un type réflexif,* J^{-1} *étant toujours continu.*

PROPOSITION 1.4.1'. — $\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')$ *et* $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$ *sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire* $\langle , \rangle$ *et une seule, satisfaisant à* $\langle x^n, \mathrm{P}'_n\rangle = \mathrm{P}'_n(x)$ *pour chaque* $\mathrm{P}'_n \in \mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$ *et* $x \in \mathrm{E}$. Si $\mathrm{P}'_n = {}^{r}i_n{}^{r}\mathrm{P}'_n$ *où* ${}^{r}\mathrm{P}'_n \in \mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E}_r)$ *et* ${}^{r}\mathrm{P} = i_n^r\mathrm{P}$ *où* $\mathrm{P} \in \mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')$ *alors on a* $\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}'_n\rangle = \langle {}^{r}\mathrm{P}_n, {}^{r}\mathrm{P}'_n\rangle_r$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E})$ est limite inductive des $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E}_r)$ par rapport aux ${}^{r}i_n$ on obtient, à partir des applications ${}^{t}i_n^r \circ \mathrm{J}_r^{-1}$ des $\mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E}_r)$ dans $\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')'$ avec la topologie dual forte, une application linéaire continue et une seule, $\mathrm{J}^{-1} : \mathrm{P}_{\dot\theta'}({}^n\mathrm{E}) \to \mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}')'$, satisfaisant à ${}^{t}i_n^r \circ \mathrm{J}_r^{-1} = \mathrm{J}^{-1} \circ {}^{r}i_n$

pour chaque r. Comme les ${}^t i_n^r$, J_r^{-1} et ${}^r i_n$ sont injectives (corollaire 1 de la proposition 1.2.1 et la remarque suivant la proposition 1.3.1), on conclut l'injectivité de J^{-1} : en effet, si $J^{-1}P' = 0$ et $P' = {}^r i_n {}^r P'$ alors

$$({}^t i_n^r \circ J_r^{-1})({}^r P') = J^{-1}P' = 0,$$

donc $P' = 0$. La surjectivité de J^{-1} vient de la surjectivité des J_r^{-1} ainsi que de la décomposition

$$P_{\dot\theta}({}^n E')' = \mathrm{U}_r {}^t i_n^r p_{\dot\theta}({}^n E_r')'$$

(corollaire 1 de la proposition 1.2.1) : en fait, chaque $T = {}^t i_n^r {}^r T$ où ${}^r T \in P_{\dot\theta}({}^n E_r')'$ est l'image de ${}^r i_n J_r {}^r T$ par J^{-1}. De plus, J^{-1} est l'inverse de J donnée par $JT(x) : = T(x^n)$ pour chaque $T \in P_{\dot\theta}({}^n E')'$ et $x \in E$, car si $P' = {}^r i_n {}^r P'$ où ${}^r P' \in P_{\dot\theta'}({}^n E_r)$ alors $J(J^{-1}P)(x) = J_r^{-1} {}^r P'((i_r x)^n) = {}^r i_n {}^r P'(x) = P'(x)$ par définition des J_r. Si la topologie de E est donnée par un système dénombrable d'indices alors $P_{\dot\theta}({}^n E')$ sera de Fréchet, donc les bornés de son dual fort seront des images par les ${}^t i_n^r$ des bornés dans les $P_{\dot\theta'}({}^n E_r')'$ correspondants. Il en suit que J est borné sur les bornés de $P_{\dot\theta}({}^n E')'$ (dual fort), car le même est vrai par continuité pour les J_r. Si $P_{\dot\theta}({}^n E')$ est réflexif alors son dual fort sera bornologique, dont on déduit que J (ainsi que J^{-1}) est continu. Enfin, la forme $\langle\ ,\ \rangle$ est donnée par $\langle P_n, P_n' \rangle : = (J^{-1}P_n')(P_n)$. ▌

Remarques. — Si les E_r ont la forme $L^p(X, \mu_r)$, où (X, μ_r) est un espace de mesure, et les $P_n \in P_{\dot\theta}({}^n E_r')$ ont la forme $P_n(x') = \int \ldots \int p_n(t_1, \ldots, t_n) x'(t_1) \ldots x'(t_n)\, d\mu_r(t_1) \ldots d\mu_r(t_n)$ où $p_n \in L^p(X^n, \mu_r \otimes \cdots \otimes \mu_r)$ et $\|P_n\|_{r,\dot\theta} : = \|P_n\|_{L^p}$ (p_n choisi symétrique), alors les $P_{\dot\theta}({}^n E_r')$, donc aussi $P_{\dot\theta}({}^n E')$, seront réflexifs. Si les E_r sont hilbertiens et θ est le type de Hilbert-Schmidt on a aussi la réflexivité. On verra plus bas que $P_{\dot\theta}({}^n E')$ peut être réflexif même si les $P_{\dot\theta}({}^n E_r')$ n'en sont pas (c'est quand E est un espace de Fréchet-Schwartz). Sans la réflexivité on ne sait pas quand $P_{\dot\theta}({}^n E')$ est distingué, donc quand J est continu. De la continuité de J^{-1} on obtient néanmoins le suivant :

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 1.4.1. — *Si la topologie de* E *est donnée par une famille dénombrable d'indices alors les* *bornés de* $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$ *sont des images par les* ${}^r i_n$ *des bornés dans les* $P_{\dot{\theta}'}({}^nE_r)$, *donc* $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$ *est séparé et son dual fort est un espace de Fréchet.*

Démonstration. — Soit S un borné de $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$: alors $J^{-1}S$ est borné dans le dual fort de $P_{\dot{\theta}}({}^nE')$ par continuité de J^{-1}. Comme $P_{\dot{\theta}}({}^nE')$ satisfait ici au premier axiome de dénombrabilité (limite projective dénombrable) alors les bornés de son dual fort sont des images par les ${}^t i_n^r$ des bornés dans les $P_{\dot{\theta}}({}^nE_r')'$. Alors il y a un r et une partie bornée S_r' de $P_{\dot{\theta}}({}^nE_r')'$ tels que $J^{-1}S = {}^t i_n^r S_r'$, donc $S = {}^r i_n (J_r S_r')$ (car $J \circ {}^t i_n^r = {}^r i_n \circ J_r$, comme peut être vérifié sans difficulté). Par continuité de $J_r : P_{\dot{\theta}}({}^nE_r')' \to P_{\dot{\theta}'}({}^nE_r)$ on sait que $J_r S_r'$ est borné dans $P_{\dot{\theta}'}({}^nE_r')$, c'est-à-dire, S est l'image par ${}^r i_n$ d'un borné. De l'injectivité des ${}^r i_n$ (remarque suivant la proposition 1.3.1) on a donc, par [20, § 23, nº 5, p. 123] que $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$ est séparé, et par [34, Ch 4 :, § 4, prop. 15] on conclut que son dual fort est la limite projective des $P_{\dot{\theta}'}({}^nE_r)'$ par les applications ${}^t({}^r i)$, étant donc un espace de Fréchet. ▌

Remarque. — En particulier, si les E_r sont des espaces hilbertiens alors $P_N({}^nE)$ est le dual par J de $P_{\dot{C}}({}^nE')$ (car les types nucléaire et intégral dans les E_r se confondent, donc les bornés de $P_N({}^nE)$ sont « réguliers » (c'est-à-dire, sont les images des bornés des $P_N({}^nE_r)$, donc $P_N({}^nE)$ est séparé et son dual fort est un espace de Fréchet. On verra ci-dessous (proposition 1.6.1 (*a*)) que le même énoncé est vrai si les E_r sont des espaces de Banach avec la propriété d'approximation et les i_{rs} sont compactes : dans ce cas le dual de $P_N({}^nE)$ sera un espace de Fréchet-Schwartz (en supposant la dénombrabilité des indices).

1.5. Dualité entre $P_\theta({}^nE)$ et $P_{\theta'}({}^nE')$.

PROPOSITION 1.5.1. — *Il y a un isomorphisme linéaire* J' *et un seul, de* $P_\theta({}^nE)'$ *sur* $P_{\theta'}({}^nE')$, *tel que* $J_r' \circ {}^t({}^r i_n) = i_n^r \circ J'$ *pour chaque* r, *donné par* $J'T(x') = T(x'^n)$ *pour chaque* $T \in P_\theta({}^nE)'$.

L'isomorphisme est topologique pour la topologie de $P_\theta({}^nE)'$

si E *est métrisable et* θ *est un type dual,* J′ *étant toujours continu.*

On peut écrire d'autre façon :

PROPOSITION 1.5.1′. — $P_{\theta'}({}^n E')$ *et* $P_\theta({}^n E)$ *sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire* $\langle \, , \, \rangle$ *et une seule, telle que* $\langle P_n, x'^n \rangle = P_n(x')$ *pour chaque* $P_n \in P_{\theta'}({}^n E')$ *et* $x' \in E'$. *Si* $P'_n = {}^r i_n {}^r P'_n$ *où* ${}^r P'_n \in P_\theta({}^n E_r)$ *et* ${}^r P_n = i^r_n P_n$ *où* $P_n \in P_{\theta'}({}^n E')$ *alors* $\langle P_n, P'_n \rangle = \langle {}^r P_n, {}^r P'_n \rangle_r$.

Démonstration. — De la caractérisation de $P_{\theta'}({}^n E')$ comme limite projective des $P_{\theta'}({}^n E'_r)$ par rapport aux i^r_n on obtient, à partir des applications $J'_r \circ {}^t({}^r i_n)$ de $P_\theta({}^n E)'$ dans les $P_{\theta'}({}^n E'_r)$, une application linéaire continue et une seule, $J' : P_\theta({}^n E)' \to P_{\theta'}({}^n E')$, satisfaisant à $J'_r \circ {}^t({}^r i_n) = i^r_n \circ J'$ pour chaque r. De plus, J' est injective : en effet, soit $T \in P_\theta({}^n E)'$ tel que $J'T = 0$: alors $J'_r {}^t({}^r i^n)(T) = i^r_n J'(T) = 0$, donc ${}^t({}^r i_n)(T) = 0$ par l'injectivité de J'_r, pour chaque r : mais chaque $P' \in P_\theta({}^n E)$ est de la forme $P = {}^r i_n {}^r P'$ où

$$ {}^r P' \in P_\theta({}^n E_r) $$

pour un r au moins, donc

$$ T(P') = T({}^r i_n {}^r P') = {}^t({}^r i_n)(T)({}^r P') = 0, $$

c'est-à-dire, $T = 0$. De la surjectivité des J'_r et de la caractérisation de $P_\theta({}^n E)$ comme limite inductive des $P_\theta({}^n E_r)$ par rapport aux ${}^r i_n$ on conclut aussi la surjectivité de J' : en effet, pour $P \in P_{\theta'}({}^n E')$ soit ${}^r T := J'^{-1}_r i^r_n P$, et soit $T \in P_\theta({}^n E)'$ obtenu des ${}^r T$ par la décomposition

$$ P_\theta({}^n E) = U_r {}^r i_n P_\theta({}^n E_r) $$

(bien définie par les relations de transitivité ${}^r i_n = {}^s i_n \circ {}^{rs} i_n$) : alors $J'T(x') := {}^r T({}^r x'^n) := P(x')$ pour chaque r, ${}^r x' \in E'_r$ et $x' = {}^t i_r {}^r x'$, donc $J'T = P$. Si le système projectif est dénombrable alors $P_{\theta'}({}^n E')$ sera de Fréchet. Si de plus tous les bornés de $P_\theta({}^n E)$ sont de la forme ${}^r i_n S_r$ où S_r est un borné du $P_\theta({}^n E_r)$ correspondant (c'est-à-dire, si $P_\theta({}^n E)$ est régulier au sens de [20]), alors $P_\theta({}^n E)'$ avec la topologie duale forte sera de Fréchet (cf. le corollaire de la proposition

1.4.1), donc J'^{-1} (ainsi que J') sera continu par le théorème d'homomorphisme de Banach ($P_\theta({}^nE)$ sera régulier si θ est le type dual d'un type d'holomorphie θ : cf. le corollaire mentionné ci-dessus). La forme $\langle\ ,\ \rangle$ est donc donnée par $\langle P_n, P'_n\rangle :\ = J'^{-1}(P_n)(P'_n)$. ▌

Remarques. — L'injectivité de J' est aussi une conséquence de la densité de $P_f({}^nE)$ dans $P_\theta({}^nE)$ (proposition 1.3.1) : en effet, $P_f({}^nE)$ est engendré par les x'^n où $x' \in E'$, et $J'T = 0$ entraîne $T(x'^n) = 0$ pour chaque x'. On peut aussi obtenir la densité de $P_f({}^nE)$ de l'injectivité de J' : en effet, soit $T \in P_\theta({}^nE')'$: si $T(x'^n) = 0$ pour chaque $x' \in E'$ alors $J'T = 0$, donc $T = 0$, donc la proposition 1.3.1 est un corollaire de la proposition 1.5.1 et du théorème de Hahn-Banach.

En général on ne sait pas quand le dual fort de $P_\theta({}^nE)$ est de Fréchet, donc quand J'^{-1} est continu, sauf pour les types duals (e.g., les types de Hilbert-Schmidt et nucléaire quand les E_r sont hilbertiens, et le type nucléaire quand E est de Fréchet-Schwartz (par la proposition 1.6.1 (*a*) ci-dessous)).

1.6. Polynômes dans des espaces de Fréchet-Schwartz et de Silva.

Dans la suite, la notation L_f, L_C et L_N indiquera les espaces d'opérateurs linéaires de rang fini, compacts et nucléaires respectivement. En particulier $L_C(E_s; E_r)$ sera considéré comme l'adhérence de $L_f(E_s; E_r)$ dans $L(E_s; E_r)$, ce qui donne exactement les opérateurs compacts au sens strict si on suppose que les espaces en question ont la propriété d'approximation.

PROPOSITION 1.6.1. — *Si la topologie de* E *est donnée par un système dénombrable d'indices alors* $P_{\dot\theta}({}^nE')$ *et* $P_{\theta'}({}^nE')$ *sont des espaces de Fréchet, et* $P_\theta({}^nE)$ *ainsi que* $P_{\dot\theta'}({}^nE)$ *sont des espaces ultrabornologiques. Sous ces conditions on a aussi :*

(*a*) *Si pour chaque* r *il y a un* $s > r$ *tel que* i_{rs} *est compact alors* $P_{\dot\theta}({}^nE')$ *et* $P_{\theta'}({}^nE')$ *sont des espaces de Fréchet-Schwartz,* *et* $P_\theta(^nE)$ *ainsi que* $P_{\dot\theta'}(^nE)$ *sont des espaces de Silva. De plus,* $P_{\dot C}(^nE') = P(^nE')$ *et* $P_N(^nE) = P_I(^nE)$ *topologiquement.*

(*b*) *Si pour chaque* r *il y a un* $s > r$ *tel que* i_{rs} *est nucléaire alors* $P_{\dot\theta}(^nE')$, $P_{\theta'}(^nE')$, $P_\theta(^nE)$ *et* $P_{\dot\theta'}(^nE)$ *sont des espaces nucléaires. De plus,* $P_{\dot N}(^nE') = P(^nE')$ *et* $P_N(^nE) = P(^nE)$ *topologiquement.*

Remarque. — Les hypothèses sur les i_{rs} sont satisfaites dans (*a*) si E est un espace de Fréchet-Schwartz avec la propriété d'approximation, et dans (*b*) si E est un espace de Fréchet nucléaire. On peut même avoir pour E un espace nucléaire dont le dual fort est aussi nucléaire (sans avoir la condition de dénombrabilité du système projectif), et dans ce cas les espaces de polynômes seront nucléaires, mais pas de Fréchet ou DF (cf. [9] et les remarques suivant l'énoncé de la proposition 2.6.1 ci-dessous).

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1.6.1. — (*a*) *Si* i_{rs} *est compact alors* i_n^{rs} *et* ${}^{rs}i_n$ *le sont aussi, avec* $i_n^{rs}\,{}^sP \in P_{\dot C}(^nE'_r)$ *pour chaque* ${}^sP \in P(^nE'_s)$ *et* ${}^{rs}i_n{}^rP \in P_C(^nE_s)$ *pour chaque* ${}^rP' \in P(^nE_r)$.

(*b*) *Si* i_{rs} *est nucléaire alors* i_n^{rs} *et* ${}^{rs}i_n$ *le sont aussi, avec* $\|i_n^{rs}\|_N \leqslant n^n \dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n$ *et* $\|{}^{rs}i_n\|_N \leqslant n^n \dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n$. *De plus,* $i_n^{rs}\,{}^sP \in P_{\dot N}(^nE'_r)$ *avec* $\|i_n^{rs}\,{}^sP\|_{r,\dot N} \leqslant n^n \dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n\|{}^sP\|_s$ *pour chaque* ${}^sP \in P(^nE'_s)$ *et* ${}^{rs}i_n{}^rP' \in P_N(^nE_s)$ *avec*

$$\|{}^{rs}i_n{}^rP'\|_{s,N} \leqslant n^n \frac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n\|{}^rP'\|_r$$

pour chaque ${}^rP' \in P(^nE_r)$.

Démonstration. — On a d'abord : (i) Si i_{rs} est de rang fin alors i_n^{rs} et ${}^{rs}i_n$ le sont aussi : en effet si i_{rs} a la représentation $i_{rs} = \sum\limits_i {}^su'_i \otimes {}^rv_i$ (somme finie) où ${}^su'_i \in E'_s$ et ${}^rv_i \in E_r$ alors $i_n^{rs} = \sum\limits_{(i)} \langle , {}^sP'_{(i)}\rangle_s \otimes {}^rP_{(i)}$, où $(i) := (i_1, \ldots, i_n)$,

$${}^sP'_{(i)} := {}^su'_{i_1} \ldots {}^su'_{i_n},\ {}^rP_{(i)} := {}^rv_{i_1} \ldots {}^rv_{i_n}$$

et $\langle\ ,\ \rangle_s$ est la forme bilinéaire de la dualité entre $P_{\dot\theta}(^nE'_s)$ et $P_{\dot\theta'}(^nE_s)$. (Pour construire cette représentation on prend un ${}^s\mathrm{P} \in \mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E}'_s)$: par sa représentation par sa forme multilinéaire symétrique associée à travers de la formule de polarisation [29, § 3, p. 7] et à l'aide de la formule

$$\langle {}^s\mathrm{P}, {}^s u_i'^n \rangle_s = {}^s\mathrm{P}({}^s u_i'),$$

on obtient

$$\begin{aligned} i_n^{rs\,s}\mathrm{P}({}^r x') &= {}^s\mathrm{P}(\Sigma_i \langle {}^r\varphi_i, {}^r x' \rangle\, {}^s u_i') \\ &= \Sigma_{i_1 \ldots i_n} \langle {}^r\varphi_{i_1}, {}^r x' \rangle \ldots \langle {}^r\varphi_{i_n}, {}^r x' \rangle \langle {}^s\mathrm{P}, {}^s u'_{i_1} \ldots {}^s u'_{i_n} \rangle_{s,n} \end{aligned}$$

pour chaque ${}^r x' \in \mathrm{E}'_r$, c'est-à-dire,

$$i_n^{rs\,s}\mathrm{P} = \Sigma_{(i)} \langle {}^s\mathrm{P}, {}^s\mathrm{P}'_{(i)} \rangle_s\, {}^r\mathrm{P}_{(i)}.$$

De la même façon on montre que ${}^{rs}i_n = \Sigma_{(i)} \langle {}^r\mathrm{P}_{(i)}, \ \rangle_r \otimes {}^s\mathrm{P}'_{(i)}$, où $\langle\ ,\ \rangle_r$ est la forme bilinéaire de la dualité entre $\mathrm{P}_{\theta'}({}^n\mathrm{E}'_r)$ $\mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E}_r)$.

(ii) *Si* i_{rs} est de rang fini alors $i_n^{rs\,s}\mathrm{P} \in \mathrm{P}_f({}^n\mathrm{E}'_r)$ pour chaque ${}^s\mathrm{P} \in \mathrm{P}({}^n\mathrm{E}'_s)$ et ${}^{rs}i_n{}^r\mathrm{P}' \in \mathrm{P}_f({}^n\mathrm{E}_s)$ pour chaque ${}^r\mathrm{P}' \in \mathrm{P}({}^n\mathrm{E}_r)$: en effet, comme dans (i) ci-dessus on a

$$i_n^{rs\,s}\mathrm{P} = \Sigma_{(i)} \langle {}^s\mathrm{P}, {}^s\mathrm{P}'_{(i)} \rangle_s\, {}^r\mathrm{P}_{(i)}$$

pour les mêmes conventions, mais avec $\langle\ ,\ \rangle_s$ étant maintenant la forme bilinéaire de la dualité entre $\mathrm{P}({}^n\mathrm{E}'_s)$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{N}}({}^n\mathrm{E}_s)$. De même on a ${}^{rs}i_n{}^r\mathrm{P}' = \Sigma_{(i)} \langle {}^r\mathrm{P}_{(i)}, {}^r\mathrm{P} \rangle_r\, {}^s\mathrm{P}'_{(i)}$ pour la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_r$ de la dualité entre $\mathrm{P}_{\dot{\mathrm{N}}}({}^n\mathrm{E}'_r)$ et $\mathrm{P}({}^n\mathrm{E}_r)$.

Par hypothèse sur les types d'holomorphie $\dot\theta$ et θ on sait que les applications $i_{rs} \longmapsto i_n^{rs}$ et $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_n$, de $\mathrm{L}(\mathrm{E}_s; \mathrm{E}_r)$ dans $\mathrm{L}(\mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}'_s); \mathrm{P}_{\dot\theta}({}^n\mathrm{E}'_r))$ et $\mathrm{L}(\mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E}_r); \mathrm{P}_\theta({}^n\mathrm{E}_s))$ respectivement, sont continues, avec des normes $\|i_n^{rs}\| \leqslant \|i_{rs}\|^n$ et $\|{}^{rs}i_n\| \leqslant \|i_{rs}\|^n$. On a aussi :

(iii) Pour chaque ${}^s\mathrm{P} \in \mathrm{P}({}^n\mathrm{E}'_s)$ et ${}^r\mathrm{P} \in \mathrm{P}({}^n\mathrm{E}_r)$ donnés, les applications $i_{rs} \longmapsto i_n^{rs\,s}\mathrm{P}$ et $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_n{}^r\mathrm{P}'$, de $\mathrm{L}(\mathrm{E}_s; \mathrm{E}_r)$ dans $\mathrm{P}({}^n\mathrm{E}'_r)$ et $\mathrm{P}({}^n\mathrm{E}_s)$ respectivement, sont continues : en effet, on a

$$|i_n^{rs\,s}\mathrm{P}({}^r x')| = |{}^s\mathrm{P}({}^t i_{rs}{}^r x')| \leqslant \|{}^s\mathrm{P}\|_s \|i_{rs}\|^n \|{}^r x'\|$$

pour chaque ${}^r x' \in {}^r\mathrm{E}'$ par définition du type courant, donc $\sup \{\sup \{|i_n^{rs\,s}\mathrm{P}({}^r x')| : \|{}^r x'\| \leqslant 1\} : \|i_{rs}\| \leqslant 1\} \leqslant \|{}^s\mathrm{P}\|_s < \infty$. On montre de même la continuité de $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_n{}^r\mathrm{P}'$.

Soit donc i_{rs} compact : par la densité des L_f dans les L_{C} on conclut de la continuité de $i_{rs} \longmapsto i_n^{rs}$ et de $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_n$, ainsi que par (i) ci-dessus, que $\dot{i}_n^{rs}$ et ${}^{rs}\dot{i}_n$ sont compactes. De plus, par la densité des L_f dans les L_C et de $P_f({}^nE'_r)$ dans $P_{\dot{C}}({}^nE'_r)$ ainsi que de $P_f({}^nE_s)$ dans $P_C({}^nE_r)$, on conclut à l'aide de (ii) et (iii) ci-dessus que $\dot{i}_n^{rs\,s}P \in P_{\dot{C}}({}^nE'_r)$ et

$${}^{rs}\dot{i}_n{}^rP' \in P_C({}^nE_s),$$

finissant la preuve de la partie (a) du lemme.

Soit maintenant i_{rs} un opérateur nucléaire : alors il y a des représentations $i_{rs} = \Sigma_i{}^su'_i \otimes {}^rv_i$ où ${}^su'_i \in E'_s$ et ${}^rv_i \in E_r$, telles que $\Sigma_i\|{}^su'_i\|\ \|{}^rv_i\| < \infty$, la norme nucléaire $\|i_{rs}\|_N$ de i_{rs} étant l'infimum des sommes de ces séries. Avec la notation dans (i) ci-dessus on a

$$|\langle\ ,\ {}^sP'_{(i)}\rangle_s| = \|{}^su'_{i_1}\ \ldots\ {}^su'_{i_n}\|_{s,\dot{\theta}'} \leqslant n^n\frac{1}{n!}\|{}^su'_{i_n}\|\ \ldots\ \|{}^su'_{i_n}\|$$

par la proposition 1.1.1, et $\|{}^rP_{(i)}\|_{r,\dot{\theta}} = \|{}^rv_{i_1}\|\ \ldots\ \|{}^rv_{i_n}\|$ par hypothèse sur le type $\dot{\theta}$, donc

$$\Sigma_{(i)}|\langle\ ,\ {}^sP'_{(i)}\rangle_s|\ \|{}^rP_{(i)}\|_{r,\dot{\theta}} \leqslant n^n\frac{1}{n!}\{\Sigma_i\|{}^su'_i\|{}^rv_i\|\}^n < \infty$$

pour toutes ces représentations. Alors $\dot{i}_n^{rs}$ a des représentations $\dot{i}_n^{rs} = \Sigma_{(i)}\langle\ ,\ {}^sP'_{(i)}\rangle_s \otimes {}^rP_{(i)}$ telles que

$$\Sigma_{(i)}|\langle\ ,\ {}^sP'_{(i)}\rangle_s|\ \|{}^rP_{(i)}\|_{r,\dot{\theta}} < \infty,$$

donc il est nucléaire, et $\|\dot{i}_n^{rs}\|_N \leqslant n^n\dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n$ par définition des normes nucléaires. On montre de même que ${}^{rs}\dot{i}_n$ est nucléaire avec $\|{}^{rs}\dot{i}_n\|_N \leqslant n^n\dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|_N^n$. De plus, pour un ${}^sP \in P({}^nE'_s)$ quelconque et pour $i_{rs} = \Sigma_i{}^su'_i \otimes {}^rv_i$ avec

$$\Sigma_i\ \|{}^su'_i\|\ \|{}^rv_i\| < \infty,$$

la forme n-linéaire symétrique $L : E'_r \times \cdots \times E'_r \to C$ associée au polynôme $\dot{i}_n^{rs\,s}P$ a, comme dans (ii) ci-dessus, la représentation $L = \Sigma_{i_1\ldots i_n}\langle{}^sP,\ {}^su'_{i_1}\ \ldots\ {}^su_{i_n}\rangle_s\ \langle{}^rv_{i_1},\ \rangle\ \ldots\ \langle{}^rv_{i_n},\ \rangle$ (maintenant une série infinie mais convergente dans chaque point), telle que

$$\begin{aligned}\Sigma_{i_1\ldots i_n}|\langle{}^sP,\ {}^su'_{i_1}\ \ldots\ {}^su'_{i_n}\rangle_s|\ \|\langle{}^rv_{i_1},\ \rangle\|\ \ldots\ \|\langle{}^rv_{i_n},\ \rangle\| \\ \leqslant \|{}^sP\|_s\{\Sigma_i\|{}^su'_i\|\ \|{}^rv_i\|\}^n < \infty,\end{aligned}$$

donc L est nucléaire dans le sens de [22, 23]. Comme on a ces égalités pour toutes les représentations convergentes de i_{rs} au sens ci-dessus, alors la norme nucléaire $\|L\|_{r,\dot{N}}$ de L dans $E'_r \times \cdots \times E'_r$ satisfait à $\|L\|_{r,\dot{N}} \leqslant \|{}^sP\|_s \|i_{rs}\|^n_{\dot{N}}$, donc

$$\|i_n^{rs}\,{}^sP\|_{r,\dot{N}} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|L\|_{r,\dot{N}} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|i_{rs}\|^n_{\dot{N}} \|{}^sP\|_s$$

[23, § 2, proposition 6, p. 14]. On montre de la même façon que ${}^{rs}i_n$ est nucléaire et que

$$\|{}^{rs}i_n\,{}^rP'\|_{s,N} \leqslant n^n \frac{1}{n!} \|i_{rs}\|^n_N \|{}^rP'\|_r$$

pour chaque ${}^rP' \in P({}^nE_r)$. Nous avons alors complété la preuve de la partie (*b*) du lemme. ▌

Démonstration de la proposition 1.6.1. — (*a*) Par le lemme 1.6.1 (*a*), i_n^{rs} et ${}^{rs}i_n$ sont compacts. Alors $P_{\dot{\theta}}({}^nE')$ et $P_{\theta'}({}^nE)$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz et $P_\theta({}^nE)$ ainsi que $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$ sont des espaces de Silva. On a $P_{\dot{C}}({}^nE') \subset P({}^nE')$ par définition. Si $P \in P({}^nE')$ alors pour chaque r il y a un s tel que $i_n^{rs}(i_n^sP) \in P_{\dot{N}}({}^nE'_r)$ par le lemme, donc $i_n^rP \in P_{\dot{N}}({}^nE'_r)$ (car $i_n^{rs} \circ i_n^s = i_n^r$), c'est-à-dire, $P \in P_{\dot{N}}({}^nE')$. On a donc $P_C({}^nE') = P({}^nE')$. L'égalité des topologies vient de que la topologie de la convergence uniforme dans les bornés de E' est la topologie projective donnée par les projections

$$i_n^r : P({}^nE') \to P({}^nE'_r)$$

(dans le cas métrisable). C'est-à-dire, l'application identité $\mathrm{id} : P_{\dot{C}}({}^nE') \to P({}^nE')$ est un isomorphisme topologique. De plus, comme $P_N({}^nE)$ est ici un espace de Silva, donc réflexif, l'application canonique j de $P_N({}^nE)$ dans son bidual est aussi un isomorphisme topologique. Alors on a $P_N({}^nE) = P_I({}^nE)$ topologiquement : en effet, on a les isomorphismes

$$P_N({}^nE) \xrightarrow{j} P_N({}^nE)'' \xrightarrow{{}^t(J')^{-1}} P({}^nE')' \xrightarrow{{}^t id} P_{\dot{C}}({}^nE')' \xrightarrow{J} P_I({}^nE).$$

(*b*) Par le lemme 1.2.1 (*b*), on sait que les i_n^{rs} et ${}^{rs}i_n$ sont nucléaires, donc $P_{\dot{\theta}}({}^nE')$ et $P_{\theta'}({}^nE')$ sont des espaces de Fréchet nucléaires. $P_{\dot{\theta}'}({}^nE)$ est donc nucléaire comme dual (par J) d'un espace de Fréchet nucléaire. $P_\theta({}^nE)$ est aussi nucléaire par réflexivité (car les ${}^{rs}i$ sont compactes s'ils sont nucléaires), car son bidual est isomorphe (par ${}^{t}J'$) à un espace nucléaire. On sait que $P_{\dot{N}}({}^{n}E') \subset P({}^{n}E')$ continûment, par continuité des injections $P_{\dot{N}}({}^{n}E'_{r}) \to P({}^{n}E'_{r})$. Dans l'autre direction, soit $P \in P({}^{n}E')$ quelconque : par le lemme 1.6.1 (*b*), pour chaque r il y a un $s > r$ tel que $i^{r}_{n}P = i^{rs}_{n}(i^{s}_{n}P) \in P_{\dot{N}}({}^{n}E'_{r})$ et $\|i^{r}P\|_{r,\dot{N}} \leqslant n^{n}\dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|^{n}_{N}\|i^{r}_{n}P\|_{r}$, donc i^{r}_{n} applique $P({}^{n}E')$ continûment dans $P_{\dot{N}}({}^{n}E'_{r})$ pour chaque r, c'est-à-dire, $P({}^{n}E') = P_{\dot{N}}({}^{n}E')$ topologiquement. On a toujours que $P_{N}({}^{n}E) \subset P({}^{n}E)$ continûment. De plus, chaque $P' \in P({}^{n}E)$ est de la forme $P' = {}^{r}i_{n}{}^{r}P$ ou ${}^{r}P' \in P({}^{n}E_{r})$ pour un r au moins, et par le lemme il y a un $s > r$ tel que $P' = {}^{s}i_{n}({}^{rs}i_{n}{}^{r}P')$ et ${}^{rs}i_{n}{}^{r}P' \in P_{N}({}^{n}E_{s})$, donc $P' \in P_{N}({}^{n}E)$. Comme on a d'ailleurs $\|{}^{rs}i_{n}{}^{r}P'\|_{s,N} \leqslant n^{n}\dfrac{1}{n!}\|i_{rs}\|^{n}_{N}\|{}^{r}P'\|_{r}$ les applications

$${}^{r}i_{n} = {}^{s}i_{n} \circ {}^{rs}i_{n} : P({}^{n}E_{r}) \to P_{N}({}^{n}E_{s}) \to P_{N}({}^{n}E)$$

sont continues, donc $P({}^{n}E) = P_{N}({}^{n}E)$ topologiquement. ▌

Remarque. — Par hypothèse sur les types d'holomorphie $\dot{\theta}$ et θ($\|\ \|_{r,\dot{N}} \geqslant \|\ \|_{r,\dot{\theta}} \geqslant \|\ \|_{r}$ sur E'_{r} et le même pour N et θ sur E_{r}) on a :

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de la proposition* 1.6.1 (*b*) *on a* $P_{\dot{\theta}}({}^{n}E') = P({}^{n}E')$ *et* $P_{\theta}({}^{n}E) = P({}^{n}E)$ *topologiquement.*

2. FONCTIONS ENTIÈRES DANS DES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

2.1. Fonctions entières dans E'_{r} et E_{r}.

Pour $p > 1$ soit $F^{p}_{\dot{\theta}}(E'_{r})$ l'espace des séries de la forme $f = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}P_{n}$ où $P_{n} \in P_{\dot{\theta}}({}^{n}E'_{r})$ telles que

$$|||f|||_{r,\dot{\theta},p} := \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|P_{n}\|^{p}_{r,\dot{\theta}}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

équipé avec la norme $||| \quad |||_{r,\dot\theta,p}$ ainsi définie. Pour

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

l'espace $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ des séries $f'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P'_n$ où $P'_n \in P_{\dot\theta'}({}^nE_r)$ est défini de la même façon, et sa norme est représentée aussi par $||| \quad |||_{r,\dot\theta',p'}$. Nous verrons maintenant la relation entre ces espaces et les espaces $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ et $H_{\dot\theta' b}(E_r)$ des fonctions entières « de type $\dot\theta$-borné » c'est-à-dire, des fonctions $f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n$ telles que $\lim_n \|P_n\|^{1/n}_{r,\dot\theta}=0$ pour $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ et la même condition satisfaite par les $\|P'_n\|_{r,\dot\theta'}$ dans le cas de $H_{\dot\theta' b}(E_r)$. Il est bien connu que ces fonctions sont entières et bornées dans les bornés de E'_r (resp. E_r) [1] [2], [6] [7]. Avec la notation $d^nf(x')$ (resp. $d^nf'(x)$) pour les dérivées de Fréchet dans $x' \in E'_r$ (resp. $x \in E_r$), et $\hat d^nf(x')$ (resp. $\hat d^nf'(x)$) pour les polynômes homogènes associés, on a $\hat d^nf(0)=P_n$ (resp. $\hat d^nf'(0)=P'_n$) pour f (resp. f') comme ci-dessus. On sait que $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ et $H_{\dot\theta' b}(E_r)$ sont des espaces de Fréchet par rapport aux familles de normes

$$f \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{n!}\|\hat d^nf(0)\|_{r,\dot\theta}$$

et $f' \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\frac{1}{n!}\|\hat d^nf'(0)\|_{r,\dot\theta'}$, $\rho>0$, respectivement ([23, § 5, Prop. 2, p. 43] pour le type nucléaire; la démonstration est la même pour les autres types).

Proposition 2.1.1. — $F^{p}_{\dot\theta}(E'_r)$ *et* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ *sont des espaces de Banach, continûment plongés dans* $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ *et* $H_{\dot\theta' b}(E_r)$ *respectivement.*

Démonstration. — On n'en fera que pour le type $\dot\theta$ dans E'_r: si $(f_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $F^{p}_{\dot\theta}(E'_r)$, où

$$f_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_{kn}$$

avec $P_{kn}\in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$, alors chaque suite $(P_{kn})_k$ est de Cauchy dans $P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$, car on a

$$(*) \qquad |||f_k - f_l|||_{r,\dot\theta,p} \leqslant \varepsilon$$

pour $\varepsilon > 0$ quelconque, donc $\|P_{kn} - P_{ln}\|_{r,\dot\theta} \leqslant n\,!^{1/p}\varepsilon$, pour k et l suffisamment grands. Chaque $(P_{kn})_k$ converge alors vers un P_n dans $P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$. En définissant

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} P_n$$

on montre, par démonstration identique à celle pour les espaces l^p, que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \|P_n\|^p_{r,\dot\theta} < \infty$, c'est-à-dire, $f \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)$. De plus, en passant à la limite quand $k \to \infty$ dans (*) ci-dessus on obtient $|||f - f_l|||_{r,\theta,p} \leqslant \varepsilon$ pour l suffisamment grand, c'est-à-dire, $(f_l)_l$ converge en norme vers f. Enfin, le plongement continu de $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ dans $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ vient des inégalités

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{1}{n\,!} \|\hat{d}^n f(0)\|_{r,\dot\theta} \leqslant |||f|||_{r,\theta,p} \exp\left(\frac{1}{p'} \rho^{p'}\right)$$

pour chaque $\rho > 0$, obtenues par application de l'inégalité de Hölder. La démonstration pour $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ est identique. ▌

Remarques. — Les espaces « pondérés » $F^p_{\dot\theta,\rho}(E'_r)$ des fonctions f satisfaisant à $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{1}{n\,!} \|\hat{d}^n f(0)\|^p_{r,\dot\theta} < \infty$, associés à chaque $\rho > 0$, sont nécessaires dans l'étude des opérateurs différentiels dans les espaces de Banach E'_r, parce que $F^p_{\dot\theta}(E'_r)(p \geqslant 1)$ n'est pas différentiellement stable [16, § 4, pour le cas $p = 2$]. Mais sous les conditions $\|i_{rs}\| < 1$, donc $\|\ \|_{r,\theta} < \|\ \|_{s,\dot\theta}$, leurs limites projectives par rapport aux r (en donnant des fonctions dans E') sont les mêmes que ceux qu'on obtient avec $\rho = 1$: en effet, pour r et s suffisamment éloignés on a $\|\ \|_{r,\dot\theta} \leqslant \rho^n \|\ \|_{r,\dot\theta} \leqslant \|\ \|_{s,\dot\theta}$ pour les normes dans les $P_{\dot\theta}({}^nE'_s)$ et $P({}^nE'_r)$. Ainsi on ne perd rien en faisant $\rho = 1$ pour les fonctions dans E' (ou E par dualité).

En dimension finie, l'étude des équations différentielles et de la dualité de Fourier-Borel est faite plus souvent par la classification des espaces de fonctions entières f par des conditions de croissance de la forme $|f(z)| \leqslant C \exp(\rho|z|^{p'})$, ce qui équivaut à la classification par rapport aux conditions de croissance du type $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)|^p$ pour ρ variable : on passe d'une forme à l'autre à l'aide des inégalités de Cauchy ([39, Ch. 9] pour $p = 2$, et [26]. En dimension infinie l'intervention des types d'holomorphie rend inutiles les classifications des fonctions par des conditions de croissance où les dérivées n'interviennent pas, faute des inégalités de Cauchy pour les types d'holomorphie autres que le type courant (cf. [37] et [6] [7] pour un autre exemple de « reclassification » des conditions de croissance en passant de dimension finie à dimension infinie).

Soit $P_{\dot\theta}(E'_r)$ l'espace vectoriel des polynômes de type $\dot\theta$, c'est-à-dire, de la forme $\sum_{n=0}^{m} P_n$, $P_n \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$, et $P_{\dot\theta'}(E_r)$ défini de la même façon. On a

Proposition 2.1.2. — *Le développement de chaque*

$$f \in F^p_{\dot\theta}(E'_r) \quad (\textit{resp. } f' \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r))$$

en série de polynômes est unique et converge en norme vers f (resp. f'), donc $P_{\dot\theta}(E'_r)$ (resp. $P_{\dot\theta'}(E_r)$) est dense dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ (resp. $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$).

Démonstration. — L'unicité vient de [29, § 4, prop. 2, p. 15]. De plus, on a

$$\left|\left|\left| f - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0) \right|\right|\right|^p_{r,\dot\theta,p} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|\hat{d}^k f(0)\|^p_{r,\dot\theta}$$

$\left(\text{car } d^k\left(f - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)\right)(0) = \hat{d}f(0) \text{ pour } k \geqslant m+1 \text{ et est } 0 \text{ pour } k \leqslant m\right)$, qui tend vers 0 quand $m \to \infty$, par définition de $|||f|||_{r,\dot\theta,p}$. On a le même pour θ' dans E_r ▌.

La transformation de Fourier-Borel B_r dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)'$ est définie de la façon usuelle [25, 23] : $B_rT(x) := T(e^x)$, où $e^x(x') := \exp\langle x, x'\rangle$, pour chaque

$$T \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)' \quad \text{et} \quad x \in E_r, \quad x' \in E'_r.$$

PROPOSITION 2.1.3. — *La transformation de Fourier-Borel* B_r *est une isométrie de* $F^p_{\dot\theta}(E'_r)'$ *sur* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$.

PROPOSITION 2.1.3'. — $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ *et* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ *sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire* $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_r$ *satisfaisant à*

$$|\langle\langle f, f'\rangle\rangle_r| \leqslant |||f|||_{r,\dot\theta,p}|||f'|||_{r,\dot\theta',p'}$$

pour chaque $f \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ *et* $f' \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$, *donnée par*

$$\langle\langle f, f'\rangle\rangle_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \hat{d}^n f(0), \hat{d}^n f'(0)\rangle_r.$$

C'est la seule forme bilinéaire telle que $\langle\langle e^x, f'\rangle\rangle_r = f'(x)$ *pour chaque* $x \in E_r$.

Pour montrer qu'en effet $B_r T \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ pour chaque $T \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)'$ on a besoin du lemme suivant.

LEMME 2.1.1. — *Soit* $T \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)'$, $T_n :=$ *la restriction de* T *à* $P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ *et* $P'_n := J_r T \in P_{\dot\theta'}({}^nE_r)$. *Alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbf{N}$ *il y a des polynômes* $P_{n,\varepsilon} \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $$\|P_{n,\varepsilon}\|_{r,\dot\theta} \leqslant 1$$

(ii) $$T_n(P_{n,\varepsilon}) = |T_n(P_{n,\varepsilon})|$$

(iii) $$\|P'_n\|^{p'-1}_{r,\dot\theta'}|T_n(P_{n,\varepsilon})| \geqslant \|P'_n\|^{p'}_{r,\dot\theta'} - \varepsilon\|P'_n\|^{p'-1}_{r,\dot\theta'}$$

Démonstration. — Par le théorème de Hahn-Banach il y a des $P''_n \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)''$ avec $\|P''_n\| = 1$ (norme bi-dual) et

$$P''_n(T_n) = \|T_n\| = \|P'_n\|_{r,\dot\theta'},$$

(la dernière égalité par définition de J_r : cf. Sec. 1), donc par le théorème d'Alaoglu il y a des $P_{n,\varepsilon} \in P_{\dot\theta}({}^nE'_r)$ satisfaisant à $\|P_{n,\varepsilon}\|_{r,\dot\theta} \leqslant 1$ (donc (i)) et $|\,\|P'_n\|_{r,\dot\theta'} - T_n(P_{n,\varepsilon})| \leqslant \varepsilon$. Alors $\|P'_n\|_{n,\dot\theta'} - \varepsilon \leqslant |T_n(P_{n,\varepsilon})|$, dont on obtient (iii) après la multiplication par $\|P'_n\|^{p'-1}_{r,\dot\theta'}$. Pour obtenir (ii) on peut re-définir les $P_{n,\varepsilon}$ en les multipliant par un $e^{i\alpha_n}$ convenablement choisi, ce que ne change pas $\|P_{n,\varepsilon}\|_{r,\dot\theta}$ ou $|T_n(P_{n,\varepsilon})|$ ∎.

Démonstration de la proposition 2.1.3. — On a $B_r T \in F_{\dot{\theta}'}^{p'}(E_r)$ et $|||B_r T|||_{r,\dot{\theta}',p'} \leqslant \|T\|$ (norme dual de T) pour chaque $T \in F_{\dot{\theta}}^{p}(E_r')'$: en effet, pour $N \in \mathbf{N}$ fixe soit

$$P_{N,\varepsilon} : = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'-1} P_{n,\varepsilon}.$$

Comme $(p'-1)p = p'$, de (i) dans le lemme on a

$$|||P_{N,\varepsilon}|||_{r,\dot{\theta},p}^{p} \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'}.$$

De (ii) and (iii) dans le lemme on obtient aussi

$$T(P_{N,\varepsilon}) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (\|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{\prime} - \varepsilon \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'-1}).$$

La substitution des inégalités pour $|||P_{N,\varepsilon}|||_{r,\dot{\theta},p}$ et

$$|T(P_{N,\varepsilon})| (= T(P_{N,\varepsilon}))$$

obtenues ci-dessus dans $|T(P_{N,\varepsilon})| \leqslant \|T\| \, |||P_{N,\varepsilon}|||_{r,\dot{\theta},p}$ donne

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (\|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'} - \varepsilon \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'-1}) \leqslant \|T\| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et ensuite quand $N \to \infty$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'} \leqslant \|T\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En divisant par $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|P_n'\|_{r,\dot{\theta}'}^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}$, comme $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ on obtient $|||B_r T|||_{r,\dot{\theta}',p'} \leqslant \|T\|$, car $B_r T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n'$ si

$$P_n' = J_r T_n.$$

Pour chaque $g' \in F_{\dot{\theta}'}^{p'}(E_r)$ soit

$$T_{g'}(f) : = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \hat{d}^n f(0), \hat{d}^n g'(0) \rangle_r,$$

où $f \in F_{\dot\theta}(E_r')$: alors $f \longmapsto T_g'(f)$ donne une $T_{g'} \in F_{\dot\theta}^p(E_r')'$ telle que $\|T_g'\| \leqslant |||g'|||_{r,\dot\theta',p'}$: en effet, pour chaque f on a

$$|T_{g'}(f)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{p}} \|\hat{d}^n f(0)\|_{r,\dot\theta} \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{p'}} \|\hat{d}^n g'(0)\|_{r,\dot\theta'},$$

donc $|T_{g'}(f)| \leqslant |||f|||_{r,\dot\theta,p} |||g'|||_{r,\dot\theta',p'}$, c'est-à-dire,

$$\|T_{g'}\| \leqslant |||g'|||_{r,\dot\theta',p'},$$

par application de l'inégalité de Hölder. Pour finir, on note que $B_rT_{g'} = g'$, et des inégalités entre $\|T_{g'}\|$ et

$$|||B_rT_{g'}|||_{r,\dot\theta',p'}$$

ci-dessus on conclut que $|||B_rT|||_{r,\dot\theta',p'} = \|T\|$, c'est-à-dire, B_r est une isométrie.

La forme $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_r$ est donnée par $\langle\langle f, f'\rangle\rangle_r := T(f)$, où $f' = B_rT$. ▌

Remarque. — De la décomposition de $H_{\dot\theta b}(E_r')$ comme limite projective des $F_{\dot\theta,\rho}(E_r')$ par rapport aux poids $\rho > 0$ (voir la remarque suivant la proposition 2.1.1) on montre aussi que la transformation de Fourier-Borel est un isomorphisme linéaire de $H_{\dot\theta b}(E_r')'$ sur l'espace $\mathrm{Exp}_{\dot\theta'}(E_r)$ des fonctions entières f' « de type θ'-exponentiel » dans E_r, c'est-à-dire, telles que $\limsup_n \|\hat{d}^n f'(0)\|_{\dot\theta'}^{\frac{1}{n}} < \infty$: pour $T \in H_{\dot\theta b}(E_r')'$, donc $|T(f)| \leqslant K\|f\|_{r,\dot\theta,1,\rho}$, où $\|f\|_{r,\dot\theta,1,\rho}$ est la norme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{1}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_{r,\dot\theta}$$

de f dans un $F_{\dot\theta,\rho}^1(E')$, et pour P_n' la transformée J_nT_n de la restriction de T à $P_{\dot\theta}(^nE_r')$ on a en effet

$$\limsup_n \|P_n'\|_{r,\dot\theta'}^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_n (\rho^n K)^{\frac{1}{n}} = \rho < \infty,$$

c'est-à-dire, $B_rT = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n' \in \mathrm{Exp}_{\dot\theta'}(E_r)$. Chaque

$$g' \in \mathrm{Exp}_{\dot\theta'}(E_r)$$

est parfois la transformée d'une $T_{g'} \in H_{\dot\theta b}(E'_r)'$ définie comme dans la démonstration de la proposition 2.1.3, donc B_r est surjective. L'injectivité de B_r ici vient de la densité dans $H_{\dot\theta b}(E'_r)$ du sous-espace engendré par les e^x, $x \in E_r$ ([23, § 5, prop. 3, p. 45] pour $\dot\theta = \dot N$: la démonstration est la même).

On peut aussi définir $F_\theta^{p'}(E_r)$, $H_{\theta b}(E_r)$ et $\mathrm{Exp}_\theta(E_r)$ pour un type d'holomorphie approprié θ dans E_r (voir Sec. 1) de la même façon que par les types $\dot\theta$ dans E'_r. On a alors :

PROPOSITION 2.1.4. — *$F_\theta^{p'}(E_r)$ et $F_{\theta'}^{p}(E'_r)$ sont des espaces de Banach, continûment plongés dans $H_{\theta b}(E_r)$ et $H_{\theta' b}(E'_r)$ respectivement.*

PROPOSITION 2.1.5. — *Les développements en série de polynômes sont uniques et convergent en norme dans $F_\theta^{p'}(E_r)$ et $F_{\theta'}^{p}(E'_r)$, donc $P_\theta(E_r)$ est dense dans $F_\theta^{p'}(E_r)$ et $P_{\theta'}(E'_r)$ dans $F_{\theta'}^{p}(E'_r)$.*

Nous définissons la transformation de Fourier-Borel B'_r par $B'_rT(x') := T(e^{x'})$ pour chaque $T \in F_\theta^{p'}(E_r)'$ et $x' \in E'_r$. Comme dans le cas de B_r on a :

PROPOSITION 2.1.6. — *La transformation de Fourier-Borel B'_r est une isométrie de $F_\theta^{p'}(E_r)'$ sur $F_{\theta'}^{p}(E'_r)$.*

PROPOSITION 2.1.6. — *L'expression dans la proposition 2.1.3′ donne une forme bilinéaire $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_r$ sur $F_{\theta'}^{p}(E'_r) \times F_\theta^{p'}(E_r)$ telle que $|\langle\langle f, f'\rangle\rangle_r| \leqslant |||f|||_{r,\theta',p}|||f'|||_{r,\theta,p'}$, caractérisée par $\langle\langle f, e^{x'}\rangle\rangle_r = f(x')$ pour chaque $x' \in E'_r$.*

Dans l'étude des fonctions sur E' et E il sera nécessaire de passer des espaces de fonctions dans E'_s (resp. E_r) à ceux dans E'_r (resp. E_s) pour $r < s$. On introduit alors les applications i^{rs} et ${}^{rs}i$ données par $i^{rs}f := f \circ {}^t i_{rs}$ pour f définie dans E'_s et ${}^{rs}if' := f' \circ i_{rs}$ pour f' donnée dans E_r. On obtient évidemment des applications linéaires continues $i^{rs} : F_{\dot\theta}^{p}(E'_s) \to F_{\dot\theta}^{p}(E'_r)$ et ${}^{rs}i : F_{\dot\theta'}^{p'}(E_r) \to F_{\dot\theta'}^{p'}(E_s)$ telles que $\|i^{rs}\| \leqslant 1$ et $\|{}^{rs}i\| \leqslant 1$. On a le même résultat pour les types θ dans les E_r et θ' dans les E'_s.

2.2. Fonctions entières dans E′.

Soit $F^p_{\dot\theta}(E')$ l'espace des fonctions $f\colon E' \to C$ telles que $i^r f := f \circ {}^t i_r \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ pour chaque r, avec la topologie la moins fine (nécessairement localement convexe) qui rend continues les applications $i^r\colon f \longmapsto i^r f$ de $F^p_{\dot\theta}(E')$ dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$. $(F^p_{\dot\theta}(E'), i^r)_r$ est limite projective du système projectif $(F^p_{\dot\theta}(E'_r), i^{rs})_{r \leqslant s}$: on le montre de la même façon que dans le cas de $(P_{\dot\theta}(^nE'), i^r_n)_r$ et $(P_{\dot\theta}(^nE'_r), i^{rs}_n)_{r\leqslant s}$ (Sec. 1.2). Soit $P_f(E')$ l'espace des polynômes de la forme $\sum\limits_{n=0}^{m} P_n$ où

$$P_n \in P_f(^nE'),$$

et $P_{\dot\theta}(E')$ celui de tels polynômes, mais avec $P_n \in P_{\dot\theta}(^uE')$. On a :

PROPOSITION 2.2.1. — *$i^r P_f(E')$ (donc $i^r P_{\dot\theta}(E')$, donc $i^r F^p_{\dot\theta}(E')$) est dense dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$.*

Démonstration. — Soit N un voisinage de ${}^r f \in F^p_{\dot\theta}(E'_r)$. Par densité de $P_{\dot\theta}(E'_r)$ dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ (proposition 2.1.2), il y a un ${}^rP = \sum\limits_{n=0}^{m} {}^rP_n$ où ${}^rP_n \in P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ dans N. Par densité de $i^r_n P_f(^nE')$ dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$ pour chaque $n \leqslant m$ (proposition 1.2.1), il y a des suites $(P_{nj})_j$ où $P_{nj} \in i^r_n P_f(^nE')$ telles que $P_{nj} \to {}^rP_n$ dans $P_{\dot\theta}(^nE'_r)$, donc dans $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ aussi (par continuité des injections $P_{\dot\theta}(^nE'_r) \to F^p_{\dot\theta}(E'_r)$), quand $j \to \infty$, pour chaque $n \leqslant m$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{m} P_{nj} \to {}^rP$ dans $F_{\dot\theta}(E'_r)$ quand $j \to \infty$, donc $\sum\limits_{n=0}^{m} P_{nj} \in N$ pour j suffisamment grand. Comme $\sum\limits_{n=0}^{m} P_{nj} \in i^r P_f(E')$ nous sommes finis. ▌

COROLLAIRE 1. — *Les transposés ${}^t i^r$ sont injectifs et*

$$F^p_{\dot\theta}(E')' = \mathrm{U}_r {}^t i^r F^p_{\dot\theta}(E'_r)'.$$

COROLLAIRE 2. — $P_f(E')$ *(donc* $P_{\dot\theta}(E')$*) est dense dans* $F^p_{\dot\theta}(E')$.

Leurs démonstrations sont comme les démonstrations des corollaires 1 et 2 de la proposition 1.2.1, avec remplacement de $P_{\dot{\theta}}({}^nE'_r)$ par $F^p_{\dot{\theta}}(E'_r)$ et de $P_f({}^nE')$ par $P_f(E')$.

Remarques. — Si E est réflexif et i_r injectif (c'est-à-dire, s'il y a des normes continues sur E) alors i^r sera injectif et $f \longmapsto |||i^r f|||_{r,\dot{\theta},p}$ sera une norme continue sur $F^p_{\dot{\theta}}(E')$. Le complété de $F^p_{\dot{\theta}}(E')$ pour cette norme sera $F^p_{\dot{\theta}}(E'_r)$, donc $F^p_{\dot{\theta}}(E')$ sera un espace « dénombrablement normé » ou sens de Gelfand [GV] dans le cas des indices dénombrables, si tous les i_r sont injectifs. Dans le cas général on n'a que des semi-normes $f \longmapsto |||i^r f|||_{r,\dot{\theta},p}$, mais la topologie limite projective sera néanmoins caractérisée par ces semi-normes.

Toutes les $f \in F^p_{\dot{\theta}}(E')$ sont des fonctions dont les restrictions à chaque ${}^t i_r E'_r \subset E'$ sont des fonctions entières de type borné (bornées sur les parties bornées des ${}^t i_r E'_r$). Si la topologie de E est donnée par une famille dénombrable d'indices alors les parties bornées de son dual fort E′ sont les images des bornées dans les E'_r, donc les $f \in F^p_{\dot{\theta}}(E')$ sont bornées sur les bornés de E′. Ces f ne sont pas nécessairement continues sur E′ : même si E est distingué, auquel cas son dual fort est la limite inductive localement convexe des ${}^t i_r E'_r$, on ne peut pas obtenir la continuité sur E′ à partir de la continuité sur chaque ${}^t i_r E'_r$, sauf pour les polynômes $f = P \in P_{\dot{\theta}}(E')$ (où on peut obtenir la continuité des parties homogènes de P). Néanmoins, quand E est de Fréchet-Schwartz alors E′ est un espace de Silva, donc toutes les $f \in F^p_{\dot{\theta}}(E')$ seront continues. Le sous-espace des fonctions continues (donc entières) est en tout cas dense dans $F^p_{\dot{\theta}}(E')$, pour contenir $P_{\dot{\theta}}(E')$.

On peut aussi définir l'espace $H_{\dot{\theta}b}(E')$ des fonctions $f\colon E' \to C$ telles que $i^r f\colon = f \circ i_r \in H_{\dot{\theta}b}(E'_r)$ pour chaque r, avec la topologie la moins fine qui rend continues les applications $i^r\colon f \longmapsto i^r f$. Alors $(H_{\dot{\theta}b}(E'), i^r)_r$ sera limite projective du système $(H_{\dot{\theta}b}(E'_r), i^{rs})_{r\leqslant s}$ (où les $H_{\dot{\theta}b}(E'_r)$ ont des topologies de Fréchet et les i^{rs} sont comme pour les $F^p_{\dot{\theta}}(E'_r)$). $F^p_{\dot{\theta}}(E')$ est donc continûment plongé dans $H_{\dot{\theta}b}(E')$. On peut aussi définir l'espace $\mathrm{Exp}_{\dot{\theta}}(E')$ des fonctions $f\colon E' \to C$ telles que ${}^r f\colon = i^r f \in \mathrm{Exp}_{\dot{\theta}}(E'_r)$ pour chaque r. Si les

$F^1_{\dot\theta}(E'_r)$ et $F^1_{\dot\theta}(E')$ sont définis comme les $F^p_{\dot\theta}(E'_r)$ et $F^p_{\dot\theta}(E')$ avec $p = 1$, on a :

PROPOSITION 2.2.2. — *Si pour chaque r il y a un $s > r$ tel que $\|i_{rs}\| < 1$ alors $(H_{\dot\theta b}(E'), i^r)_r$ est limite projective du système d'espace normés $(F^1_{\dot\theta}(E'_r), i^{rs})_{r \leqslant s}$, c'est-à-dire,*

$$F^1_{\dot\theta}(E') = H_{\dot\theta b}(E').$$

Démonstration. — (Cf. les remarques suivant la proposition 2.1.1) ça vient des inégalités $\| \ \|_{r,\dot\theta} \leqslant \rho^n \| \ \|_{r,\dot\theta} \leqslant \| \ \|_{s,\dot\theta}$ pour r, s et $\rho > 0$ tels que $\|i_{rs}\| \leqslant \frac{1}{\rho}$. ▌

2.3. Fonctions entières dans E.

Soit maintenant $F^{p'}_\theta(E)$ l'espace des fonctions $f' : E \to C$ admettant une représentation de la forme $f' = {}^r i^r f' := {}^r f' \circ i_r$, où ${}^r f' \in F^{p'}_\theta(E_r)$, pour un r au moins, avec la topologie localement convexe la plus fine qui rend continues les applications ${}^r i : {}^r f' \longmapsto {}^r i^r f'$ des $F^{p'}_\theta(E_r)$ dans $F^{p'}_\theta(E)$. Alors $(F^{p'}_\theta(E), {}^r i)_r$ est limite inductive localement convexe du système inductif $(F^{p'}_\theta(E_r), {}^{rs} i)_{r \leqslant s}$: la démonstration est la même que dans le cas de $(P_\theta({}^n E), {}^r i)_r$ et $(P_\theta({}^n E_r), {}^{rs} i)_{r \leqslant s}$ (Sec. 1.3). Soit $P_\theta(E)$ l'espace vectoriel des polynômes de type θ dans E, c'est-à-dire, de la forme $\sum_{n=0}^{m} P'_n$ où $P'_n \in P_\theta({}^n E)$, $P_f(E)$ l'espace des polynômes de type fini, c'est-à-dire, de la forme $\sum_{n=0}^{m} P'_n$ où $P'_n \in P_f({}^n E)$. On a :

PROPOSITION 2.3.1. — $P_f(E)$ *(donc* $P_\theta(E)$*) est dense dans* $F^{p'}_\theta(E)$.

Démonstration. — On raisonne à partir de la densité des $P_f(E_r)$ dans les $F^{p'}_\theta(E_r)$ (ce qui est vrai par densité des $P_f({}^n E_r)$ dans les $P_\theta({}^n E_r)$, continûment plongés dans $F^{p'}_\theta(E_r)$), de la même façon que pour la démonstration de la densité de $P_f({}^n E)$ dans $P_\theta({}^n E)$ (proposition 1.3.1). ▌

Remarques. — On n'a pas nécessairement la densité de $P_f(E)$ dans $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$, mais comme la série de Taylor d'un $f' \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ de la forme $f' = {}^r i\, {}^r f'$ où ${}^r f' \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$ est l'image par ${}^r i$ de la série de Taylor de ${}^r f'$, donc converge vers f', on a toujours la densité de $P_{\dot\theta'}(E)$ dans $F^{p'}_{\dot\theta'}$ E).

Toutes les f' dans $F^{p'}_{\theta}(E)$ (ou dans $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$) sont des fonctions entières bornées sur les bornés de E, car si $S \subset E$ est borné alors $i_r S$ est borné dans E_r pour chaque r, et $f' = {}^r i\, {}^r f'$ pour une ${}^r f'$ dans $F^{p'}_{\theta}(E_r)$ (ou dans $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$), où ${}^r f'$ est entière et bornée sur les $i_r S$. On peut aussi définir $H_{\theta b}(E)$ comme l'espace des fonctions $f' : E \to C$ admettant une représentation de la forme $f' = {}^r i\, {}^r f'$ où ${}^r f' \in H_{\theta b}(E_r)$, avec la topologie localement convexe la plus fine qui rend continues les applications ${}^r i$. Alors $(H_{\theta b}(E), {}^r i)_r$ est la limite inductive localement convexe du système $(H_{\theta b}(E_r), {}^{rs} i)_{r \leqslant s}$. On définit $\mathrm{Exp}_\theta\,(E)$ comme l'espace des fonctions $f' : E \to C$ ayant une représentation $f' = {}^r i\, {}^r f'$ où ${}^r f' \in \mathrm{Exp}_\theta\,(E_r)$.

PROPOSITION 2.3.2. — *Si pour chaque r il y a un $s > r$ tel que $\|i_{rs}\| < 1$ alors $(H_{\theta b}(E), {}^r i)_r$ est limite inductive localement convexe du système d'espaces normés $(F^1_\theta(E_r), {}^{rs} i)_{r \leqslant s}$, c'est-à-dire $F^1_\theta(E) = H_{\theta b}(E)$.*

(Cf. la proposition 2.2.2.)

2.4. Dualité entre $F^d_\theta(E')$ et $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$.

PROPOSITION 2.4.1. — *Il y a un isomorphisme linéaire B et un seul, de $F^p_\theta(E')'$ sur $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$, tel que ${}^t i^r \circ B_r^{-1} = B^{-1} \circ {}^r i$ pour chaque r, donné par $BT(x) = T(e^x)$ pour chaque*

$$T \in F^p_\theta(E')'.$$

B est borné sur les parties fortement bornées de $F^p_\theta(E')'$ si E est métrisable, et l'isomorphisme est topologique pour la topologie dual forte si $\dot\theta$ est un type réflexif, B^{-1} étant toujours continu.

PROPOSITION 2.4.1'. — *$F^p_\theta(E')$ et $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ et une seule, telle que $\langle\langle f', e^x \rangle\rangle = f'(x)$ pour chaque $f' \in F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ et $x \in E$, donnée* *par*

$$\langle\langle f, f'\rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \hat{d}^n f(0),\ \hat{d}^n f'(0)\rangle.$$

Si $f' = {}^r i^r f'$ *où* ${}^r f' \in F_{\theta'}^{p'}(E_r)$ *et* ${}^r f = i^r f$ *où* $f \in F_{\theta}^{p}(E')$ *alors on a* $\langle\langle f, f'\rangle\rangle = \langle\langle {}^r f, {}^r f'\rangle\rangle_r$.

Remarque. — Dans l'énoncé ci-dessus, $\hat{d}^n f(0)$ est l'élément unique de $P_{\dot\theta}({}^n E')$ donné par le système « projectif » $(\hat{d}^{n\,r} f(0))_r$ des dérivées d'ordre n à l'origine des ${}^r f: = i^r f$, qui est bien défini car $P_{\dot\theta}({}^n E')$ est limite projective des $P_{\dot\theta}({}^n E'_r)$ par rapport aux i_n^r. Si f est continue sur E', donc entière, $\hat{d}^n f(0)$ sera la dérivée polynomiale d'ordre n de f à l'origine (cf. la remarque suivant la proposition 2.2.1).

Démonstration des propositions 2.4.1 *et* 2.4.1'. — Elle est identique à la démonstration des propositions 1.4.1 et 1.4.1', avec remplacement des espaces de polynômes homogènes par les espaces de fonctions correspondants et de J_r par la transformation de Fourier-Borel B_r (proposition 2.1.3 et 2.1.3') : l'injectivité vient de l'injectivité des ${}^t i^r$, B_r^{-1} et ${}^r i$ (corollaire 1 de la proposition 2.2.1 et la remarque suivante); la surjectivité vient de la surjectivité des B_r^{-1} ainsi que de la décomposition $F_{\theta}^{p}(E')' = u_r F_{\theta}^{p}(E'_r)'$ (corollaire 1 de la proposition 2.2.1); la forme $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ est donnée par $\langle\langle f, f'\rangle\rangle : = T(f')$, où $BT = f'$. ▌

Remarques. — Si les $P_{\dot\theta}({}^n E'_r)$ sont réflexifs pour chaque n (donc en particulier E est réflexif) alors $F_{\dot\theta}(E'_r)$ en sera aussi, car on peut identifier le dual de $F_{\theta'}^{p'}(E_r)$ avec $F_{\dot\theta}(E'_r)$ à travers de la transformation de Fourier-Borel B'_r. Cela se vérifie en particulier si $E_r = L^p(X, \mu_r)$ pour un espace de mesure (X, μ_r) et si les $P_n \in P_{\dot\theta}({}^n E'_r)$ sont de la forme $P_n(x') = \int_1 \cdots \int_n P_n x' \otimes \cdots \otimes x'\, d\mu_r^{\otimes n}$ où $P_n \in L^p(X^n, \mu_r^{\otimes n})$ et $x' \in L^{p'}(X, \mu_r)$ (cf. les remarques suivant la démonstration des propositions 1.4.1 et 1.4.1'). On a réflexivité aussi pour le type Hilbert-Schmidt et $p = 2$ [13] [14] [15] [16]. Dans le cas $\dot\theta$ général on ne sait pas si $F_{\theta}^{p}(E')$ est distingué, c'est-à-dire, si son dual fort est bornologique, donc si B est continue. Mais on verra plus bas que $F_{\theta}^{p}(E')$ est réflexif, donc distingué, quand E est de Fréchet-Schwartz (Sec. 2.6), donc dans ce cas B sera un isomorphisme topologique. De la continuité de B^{-1} on tire néanmoins :

Corollaire de la Proposition 2.4.1. — *Si la topologie de* E *est donnée par un système dénombrable d'indices alors les bornés de* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ *sont des images par les* ${}^r i$ *des bornés dans les* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)$, *donc* $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ *est séparé et son dual fort est un espace de Fréchet.*

Démonstration. — On montre, de la même façon que dans la démonstration du corollaire de la proposition 1.4.1, que les bornés de $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ ont la forme ${}^r i(B_r S'_r)$, où B_r est la transformation de Fourier-Borel dans $F^{p}_{\dot\theta}(E'_r)'$ et les S'_r sont des parties bornées dans les $F^{p}_{\dot\theta}(E'_r)'$, pour des indices r appropriés. De cette « régularité » des bornés de $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ et de l'injectivité des ${}^r i$ (remarque suivant la proposition 2.3.1) on conclut, de la même façon que pour $P_{\dot\theta'}({}^n E)$, que $F^{p'}_{\dot\theta'}(E)$ est séparé et que son dual fort est la limite projective (par rapport aux ${}^t({}^r i)$, des $F^{p'}_{\dot\theta'}(E_r)'$, donc est un espace de Fréchet. ▌

Remarque. — Si les E_r sont hilbertiens on conclut que $F^{p'}_{\dot N}(E)$ est séparé et son dual fort est de Fréchet (car

$$F^{p'}_{\dot I}(E) = F^{p'}_{\dot N}(E) = B(F^{p}_{\dot C}(E')')$$

dans ce cas. On verra ci-dessous (proposition 2.6.1 (a)) qu'on a le même quand les E_r sont des espaces de Banach avec la propriété d'approximation et les i_{rs} sont compacts.

Dans le cas $p = 1$ la transformation de Fourier-Borel B_r est un isomorphisme linéaire de $H_{\dot\theta b}(E'_r)'$ sur $\mathrm{Exp}_{\dot\theta'}(E_r)$ [6, 7], [22, 23], [30]. On a donc un isomorphisme linéaire B de $H_{\dot\theta b}(E')'$ sur $\mathrm{Exp}_{\dot\theta}(E)$ ([8, 27, 28] pour le cas $\dot\theta = \dot N$ et la proposition 2.2.2 pour le cas général.)

2.5. Dualité entre $F^{p'}_{\theta}(E)$ et $F^{p}_{\theta'}(E')$.

Proposition 2.5.1. — *Il y a un isomorphisme linéaire* B' *et un seul, de* $F^{p'}_{\theta}(E)'$ *sur* $F^{p}_{\theta'}(E')$, *tel que* $B'_r \circ {}^t({}^r i) = {}^r i \circ B'$ *pour chaque* r, *donné par* $B'T(x') = T(e^{x'})$ *pour chaque* $T \in F^{p'}_{\theta}(E)'$.

L'isomorphisme est topologique pour la topologie forte de $F_{\theta}^{p'}(E)'$ *si* E *est métrisable et* θ *est un type dual,* B' *étant toujours continu.*

On peut dire aussi :

PROPOSITION 2.5.1'. — $F_{\theta'}^{p}(E')$ *et* $F_{\theta}^{p'}(E)$ *sont en dualité par rapport à une forme bilinéaire* $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ *et une seule, telle que* $\langle\langle f, e^{x'}\rangle\rangle = f(x')$ *pour chaque* $f \in F_{\theta'}^{p}(E')$ *et* $x' \in E'$, *donnée par la formule dans la proposition* 2.4.1'. *Si* $f' = {}^{r}i'{}^{r}f'$ *où* ${}^{r}f' \in F_{\theta}^{p'}(E_r)$ *et* ${}^{r}f = i^{r}f$ *où* $f \in F_{\theta'}^{p}(E')$ *alors*

$$\langle\langle f, f'\rangle\rangle = \langle\langle {}^{r}f, {}^{r}f'\rangle\rangle_r.$$

Démonstration. — Elle est identique à celle des propositions 1.5.1 et 1.5.1', avec remplacement des espaces de polynômes par les espaces de fonctions correspondants, des J_r' par les B_r' (propositions 2.1.6 et 2.1.6') et de J' par B'. La forme $\langle\langle,\rangle\rangle$ est donnée par $\langle\langle f, f'\rangle\rangle = T(f')$ où $f = B'T$ ▌.

Remarques. — En général on ne sait pas quand le dual fort de $F_{\theta}^{p'}(E)$ est de Fréchet, donc quand B'^{-1} est continu, outre que pour les types duals (cf. remarques suivant la proposition 1.5.1). Pour $p' = \infty$ et un type dual $\theta = \dot{\theta}'$ on peut définir dans chaque $\mathrm{Exp}_{\theta}(E_r)$ la topologie obtenue de l'espace DF $H_{\dot{\theta}}(E_r')'$ par l'isomorphisme B_r et ensuite équiper $\mathrm{Exp}_{\theta}(E)$ avec la topologie limite inductive localement convexe. Son dual sera donc un espace de Fréchet et la transformation de Fourier-Borel B' sera un isomorphisme topologique de $\mathrm{Exp}_{\theta}(E)'$ sur $H_{\theta' b}(E')$ (e. g. de $\mathrm{Exp}_N(E)'$ sur $H_b(E')$ quand les E_r sont hilbertiens).

2.6. Fonctions entières dans des espaces de Fréchet-Schwartz et de Silva.

Nous employons les conventions de la section 1.6.

PROPOSITION 2.6.1. — *Si la topologie de* E *est donnée par une famille dénombrable d'indices alors* $F_{\theta}^{p}(E')$ *et* $F_{\theta'}^{p}(E')$ *sont des espaces de Fréchet,* $F_{\theta}^{p'}(E)$ *et* $F_{\theta'}^{p'}(\dot{E})$ *des espaces ultrabornologiques. Sous ces conditions on a aussi.*

(*a*) *Si pour chaque* r *il y a un* $s > r$ *tel que* i_{rs} *est compact et* $\|i_{rs}\| < 1$ *alors* $F^p_\theta(E')$ *et* $F^p_{\theta'}(E')$ *sont des espaces de Fréchet-Schwartz,* $F^{p'}_\theta(E)$ *et* $F^{p'}_{\theta'}(E)$ *des espaces de Silva. De plus* $F^p_C(E') = F^p(E')$ *et* $F^{p'}_N(E) = F^{p'}_I(E)$ *topologiquement.*

(*b*) *Si pour chaque* r *il y a un* $s > r$ *tel que* i_{rs} *est nucléaire et* $\|i_{rs}\|_N < \frac{1}{e}$ *alors* $F^p_\theta(E')$, $F^p_{\theta'}(E')$, $F^{p'}_\theta(E)$ *et* $F^{p'}_{\theta'}(E)$ *sont des espaces nucléaires. De plus,* $F^p_N(E') = F^p(E')$ *et*

$$F^{p'}_N(E) = F^{p'}(E)$$

topologiquement.

Remarques. — Le cas $p = 1$ et $\theta = N$ a été déjà étudié dans [9], et le cas $p = 2$ avec $\theta = H$ dans [14]. Les hypothèses sur les i_{rs} dans (*a*) sont satisfaites si E est un espace de Fréchet-Schwartz, et dans (*b*) si E est nucléaire, les E_r étant les espaces de Banach déterminés par une famille de semi-normes de E convenablement choisie. On peut même supposer que E et E′ sont des espaces nucléaires (sans la condition de dénombrabilité du système projectif) et dans ce cas les espaces de fonctions entières sur E′ et E seront encore des espaces nucléaires, mais pas de Fréchet ou DF (cf. [8] pour le cas $p = 1$). Mais c'est le cas de Fréchet et DF dont on a besoin dans l'étude des équations de convolution [8] [19]. Si E et E′ ne sont pas des espaces de Schwartz ou nucléaires alors les espaces de fonctions entières sur E′ et E n'en seront pas : en effet, les applications $x \longmapsto \langle x, \rangle$ et $x' \longmapsto \langle\ , x'\rangle$ de E dans $F^p_\theta(E')$ ou $F^p_{\theta'}(E')$, et de E′ dans $F^{p'}_\theta(E)$ ou $F^{p'}_{\theta'}(E)$ sont des « morphismes stricts », car $|||\langle {}^r x, \rangle|||_{r,\theta,p} = \|{}^r x\|$ et

$$|||{}^r x'|||_{r,\theta,p'} = \|{}^r x'\|.$$

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.6.1. — (*a*) *Si* i_{rs} *est compact et* $\|i_{rs}\| < 1$ *alors* i^{rs} *et* ${}^{rs}i$ *sont aussi compacts avec* $\|i^{rs}\| \leqslant \{1 - \|i_{rs}\|^p\}^{-\frac{1}{p}}$ *et* $\|{}^{rs}i\| \leqslant \{1 - \|i_{rs}\|^{p'}\}^{-\frac{1}{p'}}$. *De plus,* $i^{rs\,s}f \in F^p_C(E'_r)$ *pour* *chaque* ${}^{s}f \in \mathrm{F}^{p}(\mathrm{E}'_s)$ *et* ${}^{rs}i\,{}^{r}f' \in \mathrm{F}^{p'}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E}_s)$ *pour chaque* ${}^{r}f' \in \mathrm{F}^{p'}(\mathrm{E}_r)$.

(*b*) *Si* i_{rs} *est nucléaire avec* $\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}} < \dfrac{1}{e}$ *alors* i^{rs} *et* ${}^{rs}i$ *le sont aussi, avec* $\|i^{rs}\|_{\mathrm{N}} \leqslant 2\mathrm{C}_{rs}(1 - e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}})^{-1}$ *et*

$$\|{}^{rs}i\|_{\mathrm{N}} \leqslant 2\mathrm{C}_{rs}(1 - e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}})^{-1}$$

où $\mathrm{C}_{rs} \geqslant 1$ *ne dépend que de* $\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}$. *De plus,* $i^{rs}\,{}^{s}f \in \mathrm{F}^{p}_{\dot{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}'_r)$ *avec* $|||i^{rs}\,{}^{s}f|||_{r,\dot{\mathrm{N}},p} \leqslant \mathrm{C}_{rs}|||{}^{s}f|||_{s,p}$ *pour chaque* ${}^{s}f \in \mathrm{F}^{p}(\mathrm{E}'_s)$ *et* ${}^{rs}i\,{}^{r}f' \in \mathrm{F}^{p''}_{\mathrm{N}}(\mathrm{E}_s)$ *avec* $|||{}^{rs}i\,{}^{r}f'|||_{s,\mathrm{N},p''} \leqslant \mathrm{C}_{rs}|||{}^{r}f'|||_{r,p'}$ *pour chaque* ${}^{r}f' \in \mathrm{F}^{p'}(\mathrm{E}_r)$.

Dans la démonstration, on aura besoin des opérateurs $i^{rs}_{(n)} : \mathrm{F}^{p}_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_s) \to \mathrm{F}^{p}_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_r)$, donnés par

$$i^{rs}_{(n)}\,{}^{r}f : = i^{rs} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\,\hat{d}^{k\,r}f(0),$$

et des ${}^{s}\pi_k : \mathrm{F}^{p}_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_s) \to \mathrm{P}_{\dot{\theta}}({}^{k}\mathrm{E}'_s)$, donnés par ${}^{s}\pi_k\,{}^{s}f : = \dfrac{1}{k\,!}\,\hat{d}^{k\,s}f(0)$.
Nous définissons ${}^{rs}i_{(n)} : \mathrm{F}^{p'}_{\theta}(\mathrm{E}_r) \to \mathrm{F}^{p'}_{\theta}(\mathrm{E}_s)$ ainsi que

$${}^{r}\pi'_k : \mathrm{F}^{p'}_{\theta}(\mathrm{E}_r) \to \mathrm{F}_{\theta}({}_{k}\mathrm{E}^{r})$$

de la même façon que $i^{rs}_{(n)}$ et ${}^{s}\pi_k$ respectivement. On note aussi que les restrictions de i^{rs} aux $\mathrm{P}_{\dot{\theta}}({}^{k}\mathrm{E}'_s)$ sont les opérateurs i^{rs}_k, et celles de ${}^{rs}i$ aux $\mathrm{P}_{\theta}({}^{k}\mathrm{E}_r)$ sont les opérateurs ${}^{rs}i_k$ dans le lemme 1.6.1.

Démonstration. — On montre d'abord : (i) *Si* i_{rs} *est de rang fini alors* $i^{rs}_{(n)}$ *et* ${}^{rs}i_{(n)}$ *le sont aussi* : en effet, de (i) dans la preuve du lemme 1.6.1 on déduit que les i^{rs}_k et ${}^{rs}i_k$ sont aussi de rang fini. Alors $i^{rs}_k = \Sigma_j\,{}^{s}\mathrm{T}_{kj} \otimes {}^{r}\mathrm{P}_{kj}$ (somme finie) où ${}^{s}\mathrm{T}_{kj} \in \mathrm{P}_{\theta}({}^{k}\mathrm{E}'_s)'$ et ${}^{r}\mathrm{P}_{kj} \in \mathrm{P}_{\theta}({}^{k}\mathrm{E}'_r)$, donc on obtient

$$i^{rs}_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \Sigma_j({}^{s}\mathrm{T}_{kj} \circ {}^{s}\pi_k) \otimes {}^{r}\mathrm{P}_{kj}.$$

De même on a ${}^{rs}i_{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Sigma_j({}^{r}\mathrm{T}'_{kj} \circ {}^{r}\pi'_k) \otimes {}^{s}\mathrm{P}'_{kj}$ quand

$${}^{rs}i_k = \Sigma_j\,{}^{r}\mathrm{T}'_{kj} \otimes {}^{s}\mathrm{P}'_{kj}$$

(somme finie) où ${}^{r}\mathrm{T}'_{kj} \in \mathrm{P}_{\theta}({}^{k}\mathrm{E}_r)'$ et ${}^{s}\mathrm{P}'_{kj} \in \mathrm{P}_{\theta}({}^{k}\mathrm{E}_s)$.

(ii) Les applications $i_{rs} \longmapsto i^{rs}_{(n)}$ et $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_{(n)}$ de $L(E_s; E_r)$ dans $L(F^p_{\dot\theta}(E'_s); F^p_{\dot\theta}(E'_r))$ et $L(F^{p'}_{\theta}(E_r); F^{p'}_{\theta}(E_s))$ respectivement sont continues : en effet, si $\|i_{rs}\| \leqslant 1$ alors

$$|||i^{rs}_{(n)}f|||^p_{r,\dot\theta,p} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\,!} \|i_{rs}\|^{kp} \|\hat{d}^k {}^sf(0)\|^p_{s,p} \leqslant |||^sf|||^p_{s,\dot\theta,p}$$

pour chaque ${}^sf \in F^p_{\dot\theta}(E'_s)$, donc

$$\sup \{\sup \{|||i^{rs}_{(n)}f|||_{r,\dot\theta,p} : |||^sf|||_{r,\dot\theta,p} \leqslant 1\} : \|i_{rs}\| \leqslant 1\} \leqslant 1 < \infty.$$

On montre la continuité de $i_{rs} \longmapsto {}^{rs}i_{(n)}$ de la même façon.

(iii) Si i_{rs} est compact alors $i^{rs}_{(n)}$ et ${}^{rs}i_{(n)}$ le sont aussi : en effet, par densité de L_f dans L_C c'est une conséquence de (i) et (ii) ci-dessus.

(iv) Si $\|i_{rs}\| < 1$ alors $i^{rs}_{(n)} \to i^{rs}$ quand $n \to \infty$ dans $L(F^p_{\dot\theta}(E'_s); F^p_{\dot\theta}(E'_r))$ et ${}^{rs}i_{(x)} \to {}^{rs}i$ quand $n \to \infty$ dans

$$L(F^{p'}_{\theta}(E_r); F^{p'}_{\theta}(E_s)) :$$

en effet, pour chaque ${}^sf \in F^p_{\dot\theta}(E'_s)$ on a

$$|||(i^{rs} - i^{rs}_{(n)}){}^sf|||^p_{r,\dot\theta,p} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k\,!} \|i_{rs}\|^{kp} \|\hat{d}^k {}^sf(0)\|^p_{s,\dot\theta}$$

$$\leqslant |||^sf|||^p_{s,\dot\theta,p} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|i_{rs}\|^{pk},$$

donc $\|i^{rs} - i^{rs}_{(n)}\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|i_{rs}\|^{pk} \to 0$ quand $n \to \infty$ si $\|i_{rs}\|^p < 1$.
On obtient $\|{}^{rs}i_{(n)} - {}^{rs}i\| \to 0$ de la même façon.

De plus, on a

$$\begin{aligned} |||i^{rs}\,{}^sf|||^p_{r,\dot\theta,p} &\leqslant |||^sf|||^p_{s,\dot\theta,p} \sum_{n=0}^{\infty} \|i_{rs}\|^{pn} \\ &= |||^sf|||^p_{s,\dot\theta,p}\{1 - \|i_{rs}\|^p\}^{-1} \end{aligned}$$

pour chaque ${}^sf$, donc $\|i^{rs}\| \leqslant \{1 - \|i_{rs}\|^p\}^{-\frac{1}{p}}$, et on obtient $\|{}^{rs}i\| \leqslant \{1 - \|i_{rs}\|^{p'}\}^{-\frac{1}{p'}}$ de la même façon.

Soit donc i_{rs} compact et $\|i_{rs}\| < 1$: de (iii) ci-dessus on conclut que les $i^{rs}_{(n)}$ et ${}^{rs}i_{(n)}$ sont aussi compacts, donc de (iv) on conclut que i^{rs} et ${}^{rs}i$ le sont aussi, comme limites de suites d'opérateurs compacts. De plus, par le lemme 1.6.1 (*a*) on sait que $\hat{d}^n i^{rs}\,{}^sf(0) = i^{rs}_n \hat{d}^n\,{}^sf(0) \in P_{\dot C}({}^nE'_r)$ pour chaque n, donc $i^{rs}\,{}^sf \in \mathrm{F}^p_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}'_r)$, pour chaque ${}^sf \in \mathrm{F}^p(\mathrm{E}'_s)$. On a de même que $\hat{d}^n\,{}^{rs}i^rf'(0) \in \mathrm{P}_{\mathrm{C}}({}^n\mathrm{E}_s)$ pour chaque n, donc ${}^{rs}i^rf' \in \mathrm{F}^{p'}_{\mathrm{C}}(\mathrm{E}_s)$, pour chaque ${}^rf' \in \mathrm{F}^{p'}(\mathrm{E}_r)$. Nous avons alors fini la démonstration de la partie (a) du lemme. Pour (b) on montre d'abord :

(v) Si les i^{rs}_k et ${}^{rs}i_k$ sont nucléaires alors les $i^{rs}_{(n)}$ et ${}^{rs}i_{(n)}$ le sont aussi, avec $\|i^{rs}_{(n)}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \|i^{rs}_k\|_{\mathrm{N}}$ et

$$\|{}^{rs}i_{(n)}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|{}^{rs}i_k\|_{\mathrm{N}} :$$

en effet, si i^{rs}_k est nucléaire alors il y a des représentations $i^{rs}_k = \Sigma_j {}^s\mathrm{T}_{kj} \otimes {}^r\mathrm{P}_{kj}$ où ${}^s\mathrm{T}_{kj} \in \mathrm{P}_\theta({}^k\mathrm{E}'_s)'$ et ${}^r\mathrm{P}_{kj} \in \mathrm{P}_\theta({}^k\mathrm{E}'_r)$, telles que $\Sigma_j \|{}^s\mathrm{T}_{kj}\|\ \|{}^r\mathrm{P}_{kj}\|_{r,\mathring{\theta}} < \infty$, $\|i^{rs}_k\|_{\mathrm{N}}$ étant l'infimum des sommes de ces séries. On a

$$|({}^s\mathrm{T}_{kj} \circ {}^s\pi_k){}^sf| \leqslant \|{}^s\mathrm{T}_{kj}\| \left\|\frac{1}{k\,!}\,\hat{d}^{k\,s}f(0)\right\|_{s,\mathring{\theta}} \leqslant \|{}^s\mathrm{T}_{kj}\| \left(\frac{1}{k\,!}\right)^{\frac{1}{p}} |||{}^sf|||_{s,\mathring{\theta},p},$$

donc la norme de ${}^s\mathrm{T}_{kj} \circ {}^s\pi_k$ dans $\mathrm{F}^p_{\mathring{\theta}}(\mathrm{E}'_s)'$ est

$$\|{}^s\mathrm{T}_{kj} \circ {}^s\pi_k\| \leqslant \left(\frac{1}{k\,!}\right)^{\frac{1}{p'}} \|{}^s\mathrm{T}_{kj}\|,$$

et on a aussi $|||{}^r\mathrm{P}_{kj}|||_{r,\mathring{\theta},p} \leqslant k\,!^{\frac{1}{p'}}\, \|{}^r\mathrm{P}_{kj}\|_{r,\mathring{\theta}}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \Sigma_j \|{}^s\mathrm{T}_{kj} \circ {}^s\pi_k\|\ |||{}^r\mathrm{P}_{kj}|||_{r,\mathring{\theta}} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \|{}^s\mathrm{T}_{kj}\|\ \|{}^r\mathrm{P}_{kj}\|_{r,\mathring{\theta}}$$

pour toutes ces représentations, donc $i^{rs}_{(n)}$ est nucléaire et $\|i^{rs}_{(n)}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \|i^{rs}_k\|_{\mathrm{N}}$. A partir des représentations

$${}^{rs}i_k = \Sigma_j {}^r\mathrm{T}'_{kj} \otimes {}^s\mathrm{P}'_{kj}$$

où ${}^r\mathrm{T}'_{kj} \in \mathrm{P}_\theta({}^k\mathrm{E}_r)'$ et ${}^s\mathrm{P}'_{kj} \in \mathrm{P}_\theta({}^k\mathrm{E}_s)$ avec

$$\Sigma_j \|{}^r\mathrm{T}'_{kj}\|\ \|{}^s\mathrm{P}'_{kj}\|_{r,\theta} < \infty$$

on montre de la même façon que ${}^{rs}i_{(n)}$ est nucléaire avec $\|{}^{rs}i_{(n)}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \|{}^{r\cdot}i_k\|_{\mathrm{N}}$. Pour faire $n \to \infty$ on note :

(vi) Si i_{rs} est nucléaire avec $\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}} < \dfrac{1}{e}$ alors il y a un

$C_{rs} \geqslant 1$ tel que

$$k^k \frac{1}{k!} \|i_{rs}\|_N^k \leqslant C_{rs} \left\{ \frac{1}{2} (1 + e\|i_{rs}\|_N) \right\}^k$$

pour chaque $k \in \mathbf{N}$: en effet, de la formule de Stirling on déduit

$$\lim_k \left(k^k \frac{1}{k!} \|i_{rs}\|_N^k \right)^{\frac{1}{k}} = e\|i_{rs}\|_N < \frac{1}{2} (1 + e\|i_{rs}\|_N),$$

donc $k^k \frac{1}{k!} \|i_{rs}\|_N^k \leqslant \left\{ \frac{1}{2} (1 + e\|i_{rs}\|_N) \right\}^k$ pour des k suffisamment grands. On a aussi :

(vii) Si i_{rs} est nucléaire et $\|i_{rs}\|_N < \frac{1}{e}$ alors $(i_{(n)}^{rs})_n$ et $({}^{rs}i_{(n)})_n$ sont des suites de Cauchy, donc convergentes, dans $L_N(F_{\theta}^{p}(E_s'); F_{\theta}^{p}(E_r'))$ et $L_N(F_{\theta}^{p'}(E_r); F_{\theta}^{p'}(E_s))$ respectivement : en effet, pour chaque représentation $\Sigma_j {}^sT_{kj} \otimes {}^rP_{kj}$ de chaque i_k^{rs} satisfaisant à $\Sigma_j \|{}^sT_{kj}\| \; \|{}^rP_{kj}\|_{r, \theta} < \infty$ et pour $m > n$, on a $i_{(m)}^{rs} - i_{(n)}^{rs} = \sum_{k=n+1}^{m} \Sigma_j ({}^sT_{kj} \circ {}^s\pi_k) \otimes {}^rP_{kj}$ satisfaisant à $\sum_{k=n+1}^{m} \Sigma_j \|{}^sT_{kj} \circ {}^s\pi_k\| \; |||{}^rP_{kj}|||_{r, \theta, p} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \Sigma_j \|{}^sT_{kj}\| \; \|{}^rP_{kj}\|_{r, \theta}$ donc

$$\|i_{(m)}^{rs} - i_{(n)}^{rs}\|_N \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|i_k^{rs}\|_N.$$

Du lemme 1.6.1 (*b*) on obtient $\|i_k^{rs}\|_N \leqslant k^k \frac{1}{k!} \|i_{rs}\|_N^k$ pour chaque k, donc avec l'inégalité dans (vi) ci-dessus on conclut que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|i_k^{rs}\|_N \leqslant C_{rs} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (1 + e\|i_{rs}\|_N) \right\}^k = C_{rs} \frac{2}{1 - e\|i_{rs}\|_N} < \infty,$$

donc $\sum_{k=n+1}^{m} \|i_k^{rs}\|_N \to 0$ quand $m \to \infty$ et $n \to \infty$. On montre de la même façon que $\|{}^{rs}i_{(m)} - {}^{rs}i_{(n)}\|_N \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|{}^{rs}i_k\|_N$ et que $\sum_{k=0}^{\infty} \|{}^{rs}i_k\|_N \leqslant C_{rs} \frac{2}{1 - e\|i_{rs}\|_N} < \infty.$

Soit alors i_{rs} nucléaire avec $\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}} < \dfrac{1}{e}$: de (iv) ci-dessus on sait que $i^{rs}_{(n)} \to i^{rs}$ dans $\mathrm{L}(\mathrm{F}^p_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_s)\,;\, \mathrm{F}^p_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_r))$, car

$$\|i_{rs}\| \leqslant \|i_{rs}\|_{\mathrm{N}} < \frac{1}{e} < 1.$$

Comme la suite $(i^{rs}_{(n)})_n$ converge dans $\mathrm{L}_{\mathrm{N}}(\mathrm{F}^p(\mathrm{E}'_s)\,;\, \mathrm{F}^p_{\dot{\theta}}(\mathrm{E}'_r))$ et le plongement $\mathrm{L}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{L}$ est continu on conclut que la limite de $(i^{rs}_{(n)})_n$ par rapport à la norme nucléaire est i^{rs}, c'est-à-dire, i^{rs} est nucléaire. De plus, en passant à la limite dans les inégalités $\|i^{rs}_{(n)}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|i^{rs}_k\|_{\mathrm{N}} \leqslant \dfrac{2\mathrm{C}_{rs}}{1 - e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}}$ de (v) et (vii) ci-dessus on obtient $\|i^{rs}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \dfrac{2\mathrm{C}_{rs}}{1 - e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}}$. On a de même que ${}^{rs}i$ est nucléaire et que $\|{}^{rs}i\|_{\mathrm{N}} \leqslant \dfrac{2\mathrm{C}_{rs}}{1 - e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}}$. De plus, du lemme 1.6.1 (*b*) on déduit

$$\hat{d}^n i^{rss}f(0) = i^{rs}_n \hat{d}^{ns}f(0) \in \mathrm{P}_{\dot{\mathrm{N}}}({}^n\mathrm{E}'_r)$$

avec $\|\hat{d}^n i^{rss}f(0)\|_{r,\dot{\mathrm{N}}} \leqslant n^n \dfrac{1}{n\,!} \|\hat{d}^{ns}f(0)\|_s$ pour chaque n, donc à l'aide de l'inégalité dans (vi) ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} |||i^{rss}f|||^p_{r,\dot{\mathrm{N}},p} &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\left(\frac{n^n}{n\,!}\|i_{rs}\|^n_{\mathrm{N}}\right)^p \|\hat{d}^{ns}f(0)\|^p_s \\ &\leqslant \mathrm{C}^p_{rs} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}\left\{\frac{1}{2}(1 + e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}\right\}^{np} \|\hat{d}^{ns}f(0)\|^p_s \\ &\leqslant \mathrm{C}^p_{rs}|||^s f|||^p_{s,p} \end{aligned}$$

pour chaque ${}^sf \in \mathrm{F}^p(\mathrm{E}'_s)$, car $\dfrac{1}{2}(1 + e\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}}) \leqslant 1$ si

$$\|i_{rs}\|_{\mathrm{N}} \leqslant \frac{1}{e}.$$

On obtient de même que ${}^rf' \in \mathrm{F}^{p'}_{\mathrm{N}}(\mathrm{E}_r)$ avec

$$|||{}^{rs}i^rf'|||^{p'}_{s,\theta,p'} \leqslant \mathrm{C}^{p'}_{rp}|||^rf'|||_{r,p'}$$

pour chaque ${}^rf' \in \mathrm{F}^{p'}(\mathrm{E}_r)$. La partie (*b*) du lemme a donc été obtenue aussi. ▌

Démonstration de la proposition 2.6.1. — (a) Si les i_{rs} sont compacts alors $F_{\dot{\theta}}(E')$ et $F^{p}_{\theta'}(E')$ sont des espaces de Fréchet-Schwartz par compacité des i^{rs}, et $F^{p'}_{\theta}(E)$ ainsi que $F^{p'}_{\dot{\theta}'}(E)$ sont des espaces de Silva par compacité des ${}^{rs}i$ (lemme 2.6.1 (a)). On a évidemment $F^{p}_{C}(E') \subset F^{p}(E')$, et l'inclusion contraire est vraie aussi par le lemme 2.6.1 (a). (L'égalité des topologies vient de leur définition même.) De plus, soit $\mathrm{id}: F^{p}_{C}(E') \to F^{p}(E')$ l'application identité, qui est donc un isomorphisme topologique, et j l'injection canonique de $F^{p'}_{N}(E)$ dans son bidual, qui est aussi un isomorphisme par réflexivité de $F^{p'}_{N}(E)$ (cf. ci-dessus). On a donc $F^{p'}_{N}(E) = F^{p'}_{I}(E)$ topologiquement par l'isomorphisme $B \circ {}^{t}\mathrm{id} \circ {}^{t}B'^{-1} \circ j$ (cf. la preuve de la proposition 1.6.1 (a)).

(b) Si les i_{rs} sont nucléaires alors $F^{p}_{\dot{\theta}}(E')$ et $F^{p}_{\theta}(E')$ sont des espaces de Fréchet nucléaires par nucléairité des i^{rs}. $F^{p'}_{\dot{\theta}'}(E)$ est un espace DF nucléaire comme dual (par B) d'un espace de Fréchet nucléaire. $F^{p'}_{\theta}(E)$ est aussi nucléaire par réflexivité (les ${}^{rs}i$ sont nécessairement compactes), car son bidual est isomorphe (par ${}^{t}B'$) à un espace nucléaire. De plus, $F^{p}_{\dot{N}}(E') \subset F^{p}(E')$ continûment car $\|\ \|_{r} \leqslant \|\ \|_{r,\dot{N}}$, et l'inclusion continue contraire vient des inégalités entre $|||i^{rs}\,{}^{s}f|||_{r,\dot{N},p}$ et $|||{}^{s}f|||_{s,p}$ dans le lemme 2.6.1 (b), donc

$$F^{p}_{\dot{N}}(E') = F^{p}(E')$$

topologiquement (cf. la démonstration de la proposition 1.6.1 (b)). On a aussi $F^{p}_{N}(E) \subset F^{p}(E)$ continûment car $\|\ \|_{r} \leqslant \|\ \|_{r,N}$, et l'inclusion continue contraire vient des inégalités pour les $|||{}^{rs}i^{r}f'|||_{s,N,p'}$ dans le lemme, donc

$$F^{p'}_{N}(E) = F^{p'}(E)$$

topologiquement (cf. la proposition 1.6.1 (b)). ▌

Pour les mêmes raisons que dans le cas du corollaire de la proposition 1.6.1 on a :

Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.6.1 (b) *on a* $F^{p}_{\dot{\theta}}(E') = F^{p}(E')$ *et* $F^{p'}_{\theta}(E) = F^{p'}(E)$ *topologiquement.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Aron, Holomorphy types for open subsets of a Banach space, *Studia Math.*, 45 (à paraître).

[2] R. Aron, Holomorphic functions on balanced subsets of a Banach space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 624-627.

[3] R. Aron, Tensor products of holomorphic functions, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 35 (76) (1973), Fasc. 3, 192-202.

[4] V. Bargmann, Remarks on a Hilbert space of analytic functions, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 48 (1962), 199-204.

[5] P. Berezin, The method of second quantization, Pure and Applied Physics, Vol. 24, Academic Press; New York-London, 1966.

[6] Ph. Boland, Some spaces of entire and nuclearly entire functions on a Banach space, *J. Reine Angew. Math.*, 270 (1974), 38-60.

[7] Ph. Boland, Espaces pondérés de fonctions entières et de fonctions entières nucléaires sur un espace de Banach, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Sér. A-B, 275 (1972), A587-A590.

[8] Ph. Boland, Malgrange theorem for entire functions on nuclear spaces, Proc. on infinite-dimensional holomorphy, *Lecture Notes in Mathematics* N° 364, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[9] Ph. Boland, Holomorphic mappings on DFN (dual of Fréchet nuclear) spaces, Séminaire P. Lelong (Analyse) 14e année, 1973-74.

[10] S. Dineen, Holomorphy types on a Banach space, *Studia Math.*, 39 (1971), 241-288.

[11] S. Dineen, Holomorphically significant properties of topological vector spaces, Proc. Colloque international du C.N.R.S. sur « Les fonctions analytiques de plusieurs variables », Paris, 14-20 Juin 1972 (à paraître).

[12] S. Dineen, Holomorphic functions and surjective limits, Proc. on infinite dimensional holomorphy, *Lecture Notes in Mathematics* N° 364, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[13] T. Dwyer, Partial differential equations in Fisher-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 725-730. MR 44 # 7288.

[14] T. Dwyer, Holomorphic Fock representations and partial differential equations on countably Hilbert spaces, *Bull. Amer. Soc.*, 79 (1973), 1045-1050.

[15] T. Dwyer, Partial differential equations in holomorphic Fock spaces, Functional analysis and applications, *Lecture Notes in Mathematics* N° 384, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[16] T. Dwyer, Holomorphic representation of tempered distributions and weighted Fock spaces, Analyse fonctionnelle et applications, Hermann, Paris, 1975, pp 95-118.

[17] T. Dwyer, Convolution equations for vector-valued entire functions of bounded nuclear type, *Trans. Amer. Math. Soc.* (à paraître).

[18] T. Dwyer, Dualité des espaces de fonctions entières en dimension infinie, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Sér. A 280 (1975), 1439-1442.

[19] T. Dwyer, Équations différentielles d'ordre infini dans des espaces localement convexes, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Sér. A 281 (1975), 163-166.

[20] K. Floret et J. Wloka, Einführung in die Theorie der Lokalkonvexen] Räume, *Lecture Notes in Mathematics* N° 56, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[21] I. Gelfand et N. Vilenkin, Generalized functions, Vol. 4, Academic Press, New York-London, 1964.

[22] Ch. Gupta, Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space, *Notas de Matematica* N° 37, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968.

[23] Ch. Gupta, Convolution operators and holomorphic mappings on a Banach space, Séminaire d'Analyse Moderne N° 2, Univ. de Sherbrooke Québec, 1969.

[24] Ch. Gupta, On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space, *Nederl. Akad. Wetensch, Proc.*, Ser. A 73 = *Indag. Math.*, 32 (1970), 356-358.

[25] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, *Jour. d'Anal. Math.*, XI (1963), 1-164.

[26] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. France*, 95 (1967), 109-154.

[27] M. de Matos, Sur le théorème d'approximation et d'existence de Malgrange-Gupta, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, Sér. A-B 271 (1970), A1258-A-1259. MR 44 # 3105.

[28] M. de Matos, Holomorphic mappings and domains of holomorphy, *Monografias do Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas*, Vol. 27, 1970.

[29] L. Nachbin, Topology on spaces of holomorphic mappings, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 47, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969. MR 40 # 7787.

[30] L. Nachbin, Concerning holomorphy types for Banach spaces, Proc. Internat. Colloq. on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, *Studia Math.*, 48 (1970), 407-412. MR 43 # 3787.

[31] L. Nachbin, Convolution operators in spaces of nuclearly entire functions on a Banach space, Functional analysis and related fields, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[32] L. Nachbin, Convoluções em funções inteiras nucleares, Atas da 2ª Quinzena de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais, Sociedade Brasileira de Matemática, 1972.

[33] Yu. Novozhilov et A. Tulub, The method of functionals in the quantum theory of fields, *Uspehi. Fiz. Nauk*, 61 (1957), 53-102 = *Russian Tracts on advanced Math and Math. Phys.*, Vol. 5, Gordon and Breach, New York, 1961. MR 25 # 959.

[34] A. Robertson et W. Robertson, Topological vector spaces, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* N° 53, Cambridge University Press, 1964.

[35] J. Rzewuski, On Hilbert space of entire functionals, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Sér. Math. Astronom. Phys., 17 (1969), 453-458; 459-466; 571-578. MR 40 # 6243; 6244; 6245.

[36] J. Rzewuski, Hilbert of functional power series, *Reports on Math. Phys.*, 1 (1970/71), N° 3, 195-210. MR 44 $\neq$ 1349.

[37] B. Taylor, Some locally convex spaces of entire functions, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 11, Entire functions and related parts of analysis, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

[38] F. Trèves, Topological vector spaces, distributions and kernels, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 25, Academic Press, New York-London, 1967.

[39] F. Trèves, Linear partial differential equations with constant coefficients : existence, approximation and regularity of solutions, *Math. and its applications*, Vol. 6, Gordon and Breach, New York, 1966.

Manuscrit reçu le 18 août 1975
Proposé par M. Brelot.

Thomas A. W. Dwyer III,
Northern Illinois University
Dekalb, Ill. 60115 (USA).