

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL TALAGRAND

Sommes vectorielles d'ensembles de mesure nulle

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 3 (1976), p. 137-172

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_137_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOMMES VECTORIELLES D'ENSEMBLES DE MESURE NULLE

par Michel TALAGRAND

Cet article contient les démonstrations des résultats annoncés dans une précédente Note aux Comptes Rendus portant le même titre. [5].

Notre point de départ a été une question posée en 1973 au Séminaire d'Initiation à l'Analyse par Mr. Goullet de Rugy : Si un ensemble analytique A de \mathbf{R} est tel que pour tout compact X de \mathbf{R} , de mesure de Lebesgue nulle, $A + X$ soit aussi de mesure nulle, est-ce que A est dénombrable ? Nous allons apporter une réponse positive à ce problème et étudier ses généralisations, aux groupes de Lie et aux groupes abéliens localement compacts.

Je tiens à remercier Monsieur Choquet de l'aide précieuse qu'il m'a apportée, d'une part par un soutien moral sans défaillance, d'autre part en me suggérant que le cadre des groupes de Lie cachait la vraie nature du problème, et en m'en proposant un autre beaucoup mieux adapté, ce qui m'a conduit au Théorème 3.

1. Un cas simple.

Afin de familiariser le lecteur avec les techniques utilisées, nous allons tout d'abord résoudre le problème initial. La démonstration, qui s'apparente plus aux méthodes utilisées plus loin dans le cas abélien localement compact qu'à celles propres aux groupes de Lie, présente d'ailleurs un intérêt en soi.

m désignera la mesure de Lebesgue. On appellera *ensemble élémentaire* toute réunion finie d'intervalles compacts non-réduits à un point.

Le lemme technique suivant est le cœur du problème.

LEMME 1. — Soit J un ensemble fini, $(A_j)_{j \in J}$ des sous-ensembles de \mathbf{R} dont l'intersection avec chaque voisinage de 0 est non-dénombrable, et ℓ un réel > 0 . Il existe alors des a_j avec $a_j \in A_j$, tels que tout intervalle compact I de \mathbf{R} de longueur $\geq \ell$ contienne un ensemble élémentaire E vérifiant les conditions suivantes :

$$m(E) \leq \frac{2}{3} m(I) \quad (1)$$

$$\forall j \in J, E \cup (E + a_j) \supset I \quad (2)$$

Démonstration. — Tout espace vectoriel sur \mathbf{Q} de dimension finie est dénombrable. On peut donc choisir dans chaque A_j un a_j tel que $0 < |a_j| < \frac{\ell}{100}$, 1 et les a_j étant linéairement indépendants sur \mathbf{Q} . D'après [1], § 1, proposition 7, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier q , et des entiers p_j tels que

$$\forall j \in J \quad |q a_j - p_j - \frac{1}{2}| \leq \epsilon.$$

Les a_j sont irrationnels. En prenant ϵ plus petit que $\frac{1}{100}$, et que toutes les approximations de a_j par les fractions de dénominateurs $\leq \frac{1000}{\ell}$ on peut choisir q et les p_j de sorte que

$$q \ell \geq 1000 \quad (3)$$

$$\forall j \in J \quad |q a_j - p_j - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{100} \quad (4)$$

Soit alors I un intervalle compact de longueur $\alpha \geq \ell$. Par translation on peut supposer $I = [0, \alpha]$. Posons :

$$E = \left[0, \frac{2\ell}{100} \right] \cup \left[\alpha - \frac{2\ell}{100}, \alpha \right] \cup \bigcup_{\substack{1 \leq p \leq q\alpha - 1 \\ p \in \mathbf{N}}} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{200q}, \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{200q} \right]$$

E est élémentaire, et contenu dans I. De plus

$$m(E) \leq \frac{4\ell}{100} + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{100} \right) \times q\alpha \leq \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{100} \right) \leq \frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3}m(I)$$

Montrons que (2) est vérifiée. Soit j dans J et x dans $I \setminus E$. Il existe $1 \leq p \leq q\alpha - 1$ tel que x soit dans l'intervalle

$$\left[\frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{200q}, \frac{p+1}{q} - \frac{1}{200q} \right]$$

Puisque $x \geq \frac{2\ell}{100}$ on a :

$$\frac{p+1}{q} - \frac{1}{200q} \geq \frac{2\ell}{100} = \frac{\ell}{100} + \frac{\ell}{100} \geq \frac{2p_j+1}{2q} - \frac{1}{100q} + \frac{\ell}{100}$$

d'après (4) et $|a_j| \leq \frac{\ell}{100}$. D'où, d'après (3)

$$2p+2 \geq 2p_j+1 - \frac{1}{100} + \frac{2\ell q}{100} \geq 2p_j+10$$

Et enfin $p - p_j \geq 1$

De même, en utilisant $x \leq \alpha - \frac{2\ell}{100}$, on montre que $p - p_j \leq q\alpha - 1$.

On a :

$$x - \frac{2p_j+1}{2q} \in \left[\frac{p-p_j}{q} + \frac{1}{200q}, \frac{2(p-p_j)+1}{q} - \frac{1}{200q} \right]$$

D'où enfin, d'après (4) :

$$x - a_j \in \left[\frac{p-p_j}{q} - \frac{1}{200q}, \frac{2(p-p_j)+1}{q} + \frac{1}{200q} \right] \subset E$$

puisque $1 \leq p - p_j \leq q\alpha - 1$.

c.q.f.d.

Remarque. — Ce résultat est encore valable en supposant seulement 0 point d'accumulation des A_j , mais la démonstration est alors plus difficile.

THEOREME 2 — Soit A un sous-ensemble analytique non dénombrable de \mathbf{R} . Il existe un compact parfait K de \mathbf{R} , tel que $m(K) = 0$ et $\widehat{A + K} \neq \emptyset$

Démonstration. — Puisque A contient un compact non dénombrable, nous sommes ramenés au cas de A compact parfait.

Nous allons construire par récurrence sur n :

- Une suite décroissante K_n d'ensembles élémentaires
- Des suites finies d'éléments de A : $(a_{n,q})_{q=0,1,\dots,(2^n-1)}$ telles que l'on ait :

$$\forall n \quad m(K_n) \leq \frac{2}{3} m(K_{n-1})$$

$$\forall n \quad \bigcup_{0 \leq q \leq 2^n - 1} (K_n + a_{n,q}) \supset [0,1]$$

En particulier nous aurons

$$\forall n \quad K_n + A \supset [0,1]$$

Et si nous posons $K = \bigcap_n K_n$, $m(K) = \inf_n m(K_n) = 0$, et on a

$$K + A = \bigcap_n (K_n + A) \supset [0,1].$$

Prenons $a_{0,0}$ quelconque dans A , et $K_0 = [0,1] - a_{0,0}$. Supposons les K_n et les $a_{n,q}$ construits pour $n \leq p$. On a $K_p = \bigcup_{\delta \in \Delta} I_\delta$ où Δ est fini et les I_δ sont des intervalles compacts disjoints non réduits à un point. Soit $\ell = \inf_{\delta \in \Delta} m(I_\delta) > 0$. Appliquons le lemme 1 avec $J = \{0,1, \dots, (2^p - 1)\}$ et $A_j = A - a_{p,j}$. Posons

$$a_{p+1,2q} = a_{p,q} \quad ; \quad a_{p+1,2q+1} = a_q + a_{p,q} \quad (0 \leq q \leq 2^p - 1).$$

Pour δ dans Δ , soit $E_\delta \subset I_\delta$ élémentaire, vérifiant $m(E_\delta) \leq \frac{2}{3} m(I_\delta)$ et pour $0 \leq q \leq 2^{p-1}$:

$$E_\delta \cup (E_\delta + a_q) = E_\delta \cup (E_\delta + a_{p+1,2q+1} - a_{p+1,2q}) \supset I_\delta$$

Posons $K_{p+1} = \bigcup_{\delta \in \Delta} E_\delta$; cet ensemble est élémentaire et

$$m(K_{p+1}) \leq \sum_{\delta \in \Delta} m(E_\delta) \leq \frac{2}{3} \sum_{\delta \in \Delta} m(I_\delta) = \frac{2}{3} m(K_p).$$

De plus :

$$\begin{aligned} \bigcup_{0 < q \leq 2^{p+1}-1} (K_{p+1} + a_{p+1,q}) &= \bigcup_{0 < q \leq 2^p-1} (K_{p+1} + a_{p+1,2q+1}) \cup (K_{p+1} + a_{p+1,2q}) \\ &= \bigcup_{0 < q \leq 2^p-1} ((K_{p+1} + a_{p+1,2q+1} - a_{p+1,2q}) \cup K_{p+1}) + a_{p,q} \\ &\supset \bigcup_{0 < q \leq 2^p-1} (K_p + a_{p,q}) \supset [0,1] \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration, car il est clair que $\bigcap_n K_n$ est parfait.

2. Extension aux groupes de Lie.

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant :

THEOREME 3. — Soit A un compact parfait, V un ouvert de \mathbb{R}^T (τ fini) $g : A \times A \times V \rightarrow \mathbb{R}^T$ une application vérifiant les conditions:

— pour $a_1 \in A$ l'application $(a_2, x) \rightarrow g(a_1, a_2, x)$, de $A \times V$ dans \mathbb{R}^T est continue,

— pour $a_1 \in A, x \in V, a_2 \rightarrow g(a_1, a_2, x)$ est injective,

— Il existe $k, k' > 0$ tels que pour $a_1, a_2 \in A$ et $x_1, x_2 \in V$, on ait :

$$k \|x_1 - x_2\| \leq \|g(a_1, a_2, x_1) - g(a_1, a_2, x_2)\| \leq k' \|x_1 - x_2\|$$

— pour $a \in A, x \in V \quad g(a, a, x) \equiv x$,

— $g(a_1, a_2, g(a_2, a_3, x)) = g(a_1, a_3, x)$ partout où les deux membres sont définis.

Soit P un pavé compact de V , a un point de A . Il existe alors un compact parfait $K \subset P$, de mesure de Lebesgue nulle, et tel que $g(a, A, K) \supset P$.

Avant de prouver ce théorème donnons en deux corollaires qui en montreront l'intérêt.

COROLLAIRE 4. — Soit A un compact parfait, V un ouvert de \mathbb{R}^r , f une application continue de $A \times V \rightarrow \mathbb{R}^r$, vérifiant de plus les conditions :

— pour x fixe $a \rightarrow f(a, x)$ est injective

— pour a fixe $x \rightarrow f(a, x)$ est un homéomorphisme de V sur un ouvert de \mathbb{R}^r . On note h_a l'homéomorphisme réciproque. (5)

— Il existe $k, k' > 0$ tels que pour tous a_1, a_2 dans A , et tous x_1, x_2 dans le domaine de définition de $h_{a_1}(f(a_2, \cdot))$ on ait :

$$k \|x_1 - x_2\| \leq \|h_{a_1}(f(a_2, x_1)) - h_{a_1}(f(a_2, x_2))\| \leq k' \|x_1 - x_2\| \quad (6)$$

— Il existe alors un compact parfait $K \subset V$, de mesure de Lebesgue nulle, et tel que $\widehat{f(A, K)} \neq \emptyset$.

Démonstration. — Il est standard de prouver qu'il existe un ouvert U de A , un ouvert W de V tels que $g(a_1, a_2, x) = h_{a_1}(f(a_2, x))$ soit définie dans $U \times U \times W$. Si U' est un ouvert de U , non vide, et tel que $U' = B \subset W$, B est parfait. Toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées par B, W et g . Si P est un pavé de W , d'intérieur non vide et a un point de B , il existe un compact K de mesure de Lebesgue nulle, et tel que $h_a(f(B, K)) \supset P$. D'où

$$f(A, K) \supset f(B, K) \supset f(a, P)$$

qui d'intérieur non vide d'après (5).

Remarquons que la conclusion de ce corollaire est encore valable si on remplace les conditions (5) et (6) par les suivantes : $x \rightarrow f(a, x)$ possède une différentielle $F(a, x)$ non dégénérée, et $(a, x) \rightarrow F(a, x)$ est continue. En effet, en restreignant au besoin A et V , (5) et (6) seront alors vérifiées.

COROLLAIRE 5. — Soit G un groupe de Lie, m une mesure de Haar de G , A un sous-ensemble analytique non dénombrable de G . Il existe alors un compact parfait K de G , de mesure nulle et tel que $\widehat{AK} \neq \emptyset$. (1)

(1) Le groupe G n'étant pas nécessairement abélien est noté multiplicativement, et ainsi $AK = \{ak ; a \in A, k \in K\}$

Démonstration. — Puisque G est métrisable, A contient un compact parfait. On peut donc le supposer compact parfait.

Par une translation à gauche, on peut ensuite supposer que l'élément neutre e de G appartient à A . Soit $c = (U, \varphi)$ une carte de G en e , et τ la dimension de G . Soit V et W deux voisinages de e tels que $\overline{W} \subset V$ et $V^2 \subset U$. Le compact $A' = \overline{A} \cap \overline{W}$ est parfait. Posons $V' = \varphi(W)$. C'est un ouvert de \mathbf{R}^τ .

L'application $f: A' \times V' \rightarrow \mathbf{R}^\tau$

$$(a, x) \rightarrow \varphi(a \varphi^{-1}(x))$$

vérifie les hypothèses de la remarque précédente. Il existe donc un compact parfait K' de V , de mesure de Lebesgue nulle, et tel que

$$\overbrace{\varphi(A' \varphi^{-1}(K'))}^{\circ} \neq \phi. \text{ Ainsi on a } \overbrace{A' \varphi^{-1}(K')}^{\circ} \neq \phi, \text{ et en particulier}$$

$\overbrace{A \varphi^{-1}(K')}^{\circ} \neq \phi$. Le compact $K = \varphi(K')$, homéomorphe à K' , est encore parfait. Il est de mesure de Haar nulle, car l'image de la mesure de Haar d'un groupe de Lie par une carte est absolument continue (et même à densité continue)

c.q.f.d.

La preuve du théorème 3 comporte trois étapes. Notons m la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^τ . Un sous-ensemble T de \mathbf{R}^τ sera dit *élémentaire* s'il est réunion finie de pavés compacts. Enfin \mathbf{R}^τ sera muni de la norme "sup".

LEMME 6. — Soient toujours A un compact parfait, V un ouvert de \mathbf{R}^τ . Soit f une application continue de $A \times V \rightarrow \mathbf{R}^\tau$, continue, et telle de plus que (a_0 désignant un point fixé de A)

— pour x fixe $a \rightarrow f(a, x)$ est injective

— $f(a_0, x) \equiv x$

— Il existe $k, k' > 0$ tels que pour tout a de A , et tous x_1, x_2 de V on ait :

$$k \|x_1 - x_2\| \leq \|f(a, x_1) - f(a, x_2)\| \leq k' \|x_1 - x_2\|$$

Soit enfin P un pavé compact de V , c un réel $> k^r$.

$$\text{Posons } \rho = \frac{1}{4c} k^{2r}$$

Il existe alors une partie élémentaire T de P , une partie finie A' de A , telle que

$$m(f(A', T) \cap P) \geq \rho m(P) \quad (7)$$

$$m(f(A', T) \cap P) \geq c m(T) \quad (8)$$

Démonstration. — Supposons la conclusion fautive. Soit Ω le plus petit ordinal non dénombrable. Montrons que l'on peut construire, par récurrence transfinitie, une suite $(P_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ de pavés compacts contenus dans P et une suite $(A_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ de sous-ensembles finis de A telles que :

— Pour tout ensemble \mathcal{B} fini d'ordinaux $< \Omega$

$$m\left(\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} f(A_\beta, P_\beta) \cap P\right) \geq c m\left(\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} P_\beta\right) \quad (9)$$

— Pour $\beta < \alpha < \Omega$

$$m\left(\bigcup_{\gamma \leq \beta} f(A_\gamma, P_\gamma) \cap P\right) < m\left(\bigcup_{\gamma \leq \alpha} f(A_\gamma, P_\gamma) \cap P\right) \quad (10)$$

Cette deuxième condition conduit à une contradiction, puisque toute suite $(x_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ croissante de réels est stationnaire à partir d'un certain rang.

Supposons ces suites construites pour $\beta < \alpha$. Montrons que l'on ne peut avoir $m\left(\bigcup_{\beta < \alpha} f(A_\beta, P_\beta) \cap P\right) > \rho m(P)$. En effet,

remarquons tout d'abord que $f(A_\beta, P_\beta)^* \subset \bigcup_{a \in A_\beta} [f(a, P_\beta)]^*$ (en

notant X^* la frontière de X) puisque $f(a, P_\beta)^* = f(a, P_\beta^*)$ (car f est un homéomorphisme en x) est de mesure nulle, $f(a, \cdot)$ étant lipschitzienne. Ainsi

$$m[f(A_\beta, P_\beta)^*] = m\left(f(A_\beta, P_\beta) \setminus \overbrace{f(A_\beta, P_\beta)}^{\circ}\right) = 0$$

d'où

$$m \left(\bigcup_{\beta < \alpha} f(A_\beta, P_\beta) \cap P \right) = m \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \overbrace{f(A_\beta, P_\beta)}^{\circ} \cap \overset{\circ}{P} \right) > \rho m(P).$$

Il existe donc un entier p , des ordinaux β_1, \dots, β_p tels que :

$$m \left(\bigcup_{i=1, \dots, p} f(A_{\beta_i}, P_{\beta_i}) \cap \overset{\circ}{P} \right) \geq \rho m(P)$$

En particulier

$$m \left(\bigcup_{i=1, \dots, p} f(A_{\beta_i}, P_{\beta_i}) \cap P \right) \geq \rho m(P)$$

Posant $T = \bigcup_{1 \leq i \leq p} P_{\beta_i}$ et $A' = \bigcup_{1 \leq i \leq p} A_{\beta_i}$

nous avons $m(f(A', T)) \geq \rho m(P)$

et d'après (9) $m(f(A', T)) \geq c m(T)$. Mais comme nous avons supposé qu'un tel couple (A', T) n'existait pas, ceci prouve que

$$m(Y) \leq \rho m(P) \text{ où l'on a posé } Y = \bigcup_{\beta < \alpha} f(A_\beta, P_\beta) \cap P$$

Soit P' un pavé compact, contenu dans $\overset{\circ}{P}$, et tel que $m(P') \geq \frac{m(P)}{2}$. D'après la continuité uniforme de f , il existe un voisinage ouvert V de a_0 dans A tel que

$$a \in V, x \in P' \Rightarrow f(a, x) \in \overset{\circ}{P}.$$

Soit N un entier tel que $\frac{c}{k^\tau} < N \leq \frac{2c}{k^\tau}$, et a_1, \dots, a_N des points distincts de V — qui existent puisque a_0 n'est pas isolé.

L'ensemble des points où Y n'a pas une densité nulle à même mesure que Y . L'ensemble des points x de P' tels que Y n'ait pas une densité nulle en $f(a_i, x)$ (où $1 \leq i \leq N$) a une mesure au plus $\frac{1}{k^\tau} m(Y)$, puisque pour x, y dans P' , $\|x-y\| \leq \frac{1}{k} \|f(a_i, x) - f(a_i, y)\|$. Donc l'ensemble des points x de P' tels que Y n'ait pas une densité nulle en $f(a_i, x)$, pour chaque i , a une mesure au plus

$$\frac{N}{k^\tau} m(Y) \leq \frac{4c}{k^{2\tau}} \rho \frac{m(P)}{2} < m(P').$$

Il existe donc un point $x \in P'$ tel que Y ait une densité nulle en $f(a_i, x)$ pour $i = 1, \dots, N$. Soit C_ϵ l'hypercube de centre x , de côté ϵ . Les $f(a_i, x)$ sont distincts et contenus dans P . Pour ϵ assez petit les ensembles $f(a_i, C_\epsilon)$ sont donc disjoints et contenus dans P . De plus, ils contiennent les hypercubes C_i de centre $f(a_i, x)$, de côté $k\epsilon$. Pour ϵ assez petit :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{1 \leq i \leq N} (f(a_i, C_\epsilon) \setminus Y) \cap P\right) &\geq \sum_{i=1}^N m(C_i \setminus Y) \\ &\geq m(C_i) \left(\sum_{i=1}^N \frac{m(C_i \setminus Y)}{m(C_i)}\right) = \epsilon^\tau k^\tau \left(\sum_{i=1}^N \frac{m(C_i \setminus Y)}{m(C_i)}\right) \end{aligned}$$

Chacun des termes de la somme tend vers 1 quand ϵ tend vers 0, et comme $k^\tau N > c$ il existe un ϵ_0 tel que :

$$m\left(\bigcup_{i \leq i \leq N} f(a_i, C_{\epsilon_0}) \setminus Y\right) \cap P \geq c m(C_{\epsilon_0}).$$

Posons $P_\alpha = C_{\epsilon_0}$, $A_\alpha = \{a_1, \dots, a_N\}$. Il est immédiat de vérifier que (9) et (10) sont valides, ce qui termine la preuve de ce lemme.

LEMME 7. — *Avec les notations et les hypothèses du lemme 6, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie T élémentaire de P , un ensemble fini $A' \subset A$, tels que $f(A', T) \supset P$ et $m(T) \leq \epsilon m(P)$*

Démonstration. — Prenons $c = \frac{2}{\epsilon}$, d'où $\rho = \frac{\epsilon}{8} k^{2\tau}$. Soit q un

entier tel que $\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)^q < \frac{\epsilon}{2}$. En vertu du lemme, il existe un sous-ensemble T_1 de P , élémentaire, une partie finie A'_1 de A tels que

$$\rho m(P) \leq m(f(A'_1, T_1) \cap P); m(T_1) \leq \frac{\epsilon}{2} m(f(A'_1, T_1) \cap P)$$

L'ouvert $\overset{\circ}{P} \setminus f(A'_1, T)$ est de mesure au plus

$$(1 - \rho) m(P) \leq \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) m(P).$$

Il contient un nombre fini de pavés, d'intérieurs disjoints, dont la somme des mesures est supérieure ou égale à la moitié de la sienne.

Appliquons le lemme 6 à chacun de ces pavés, avec toujours $c = \frac{2}{\epsilon}$,

et soit

T_2 la réunion des parties élémentaires ainsi obtenues.

A'_2 la réunion des parties finies de A ainsi obtenues.

On a :
$$m(T_2) \leq \frac{\epsilon}{2} m(f(A'_2, T_2) \cap (P \setminus f(A'_1, T_1)))$$

et l'ensemble $P \setminus (f(A'_1, T_1) \cup f(A'_2, T_2))$

a une mesure inférieure ou égale à

$$\left[1 - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)\right] m(P) = \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)^2 m(P)$$

Par récurrence sur ℓ , on construit de même des parties élémentaires $T_1, \dots, T_\ell, \dots, T_q$ et des parties $A'_1, \dots, A'_\ell, \dots, A'_q$ de A telles que :

$$m(T_\ell) \leq \frac{\epsilon}{2} m(f(A'_\ell, T_\ell) \cap (P \setminus \bigcup_{i < \ell} f(A'_i, T_i)))$$

$$m(P \setminus \bigcup_{i \leq \ell} f(A'_i, T_i)) \leq \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)^\ell m(P).$$

D'après un raisonnement déjà fait lors du lemme 6 :

$$m(P \setminus \bigcup_{i \leq q} f(A'_i, T_i)) = m(P \setminus \bigcup_{i \leq q} \overbrace{f(A'_i, T_i)}^{\circ}).$$

Ce dernier ensemble est compact, de mesure $< \frac{\epsilon}{2} m(P)$. Il existe

donc un ensemble élémentaire T_{q+1} , de masse $\leq \frac{\epsilon}{2} m(P)$, qui le

contient. Posons

$$T = \bigcup_{i \leq q+1} T_i, \quad \text{et} \quad A' = \bigcup_{i \leq q} A'_i \cup \{a_0\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} m(T) &\leq \sum_{i=1}^{q+1} m(T_i) \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{i < q} m \left[f(A'_i, T_i) \cap \left(P \setminus \bigcup_{j < i} f(A'_j, T_j) \right) \right] + \frac{\epsilon}{2} m(P) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} m(P) + \frac{\epsilon}{2} m(P) \leq \epsilon m(P). \end{aligned}$$

et puisque $f(a_0, x) = x$, $f(A', T) \supset P$, ce qui termine la preuve du lemme 7.

Passons maintenant à la preuve du théorème, dont nous reprenons les notations. Nous allons construire par récurrence une suite (K_i) décroissante d'ensembles élémentaires, une suite (A'_i) des parties finies de A telles que $g(a, A'_i, K_i) \supset P$ pour chaque i , et telles que $m(K_{i+1}) \leq \frac{1}{2} m(K_i)$. Si nous posons $K = \bigcap_i K_i$, nous avons $m(K) = 0$; comme pour tout i on a $g(a, A, K_i) \supset P$, la continuité de g par rapport aux deux dernières variables implique $g(a, A, K) \supset P$, ce qui termine la démonstration.

Prenons $K_0 = P$, $A'_0 = \{a_0\}$, puis supposons K_n et A'_n construits. Nous pouvons écrire $K_n = \bigcup_{i \in I} P_i$ où I est fini, et les P_i sont des pavés compacts d'intérieurs disjoints, puis $A'_n = \{a_{\varrho}\}_{\varrho \in \Lambda}$ où Λ est fini. Nous pouvons appliquer le lemme 7 à la fonction $g(a_{\varrho}, \dots)$ avec $\epsilon = \frac{1}{2 \text{ card. } A'_n}$. Il existe donc un ensemble $T_{i,\varrho}$ élémentaire contenu dans P_i avec $m(T_{i,\varrho}) \leq \frac{m(P_i)}{2 \text{ card. } A'_n}$, et un sous-ensemble fini $A'_{i,\varrho}$ de A tels que

$$g(a_{\varrho}, A'_{i,\varrho}, T_{i,\varrho}) \supset P_i$$

$$\text{Posons} \quad K_{n+1} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \varrho \in \Lambda}} T_{i,\varrho} \quad A'_{n+1} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ \varrho \in \Lambda}} A'_{i,\varrho}$$

Nous avons :

$$m(K_{n+1}) \leq \sum_{i \in I} \sum_{\varrho \in \Lambda} m(T_{i,\varrho}) \leq \frac{1}{2} \sum_{i \in I} m(P_i) = \frac{1}{2} m(K_n)$$

et aussi :

$$\begin{aligned}
 g(a, A'_{n+1}, K_{n+1}) &\supset \bigcup_{\substack{i \in I \\ \varrho \in \Lambda}} g(a, A'_{i, \varrho}, T_{i, \varrho}) \\
 &\supset \bigcup_{\substack{i \in I \\ \varrho \in \Lambda}} g(a, a_{\varrho}, g(a_{\varrho}, A'_{i, \varrho}, T_{i, \varrho})) \quad (11) \\
 &\supset \bigcup_{\substack{i \in I \\ \varrho \in \Lambda}} g(a, a_{\varrho}, P_i) \supset g(a, A'_n, K_n) \supset P.
 \end{aligned}$$

(il y a ici un abus d'écriture : on ne considère l'écriture (11) que lorsqu'elle est définie. Mais c'est toujours le cas lorsque $g(a_{\varrho}, b, t) \in P_i$ où $b \in A'_{i, \varrho}$, $t \in T_{i, \varrho}$.)

c.q.f.d.

3. Rôle des compacts parfaits dans le cas non métrisable.

Le théorème 2 ne peut être étendu tel qu'il est énoncé au cadre des groupes abéliens localement compacts non métrisables. Nous allons montrer que du point de vue de la somme vectorielle, ce n'est pas le cardinal de A qui importe, mais les compacts parfaits contenus dans A . Les ensembles \mathcal{K} -sousliniens [2] joueront dans le cas général le rôle que jouent les ensembles analytiques dans le cas métrisable.

Les limites projectives que nous considérerons, tant dans ce paragraphe que dans les suivants, seront toujours supposées définies par des morphismes surjectifs.

THEOREME 8. — Soient A et B deux sous-ensembles \mathcal{K} -sousliniens d'un groupe localement compact G et m une mesure de Haar de G (invariante à gauche par exemple). Supposons $m(B) = 0$. Alors :

$$m(A \times B) = \text{Sup} \{m(P \times B) ; P \text{ compact parfait inclus dans } A\}$$

Démonstration. — Bornons nous au cas $0 < m(A \times B) < \infty$, le cas $m(A \times B) = +\infty$ étant analogue. Soit $\epsilon > 0$ l'application canonique $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ de $G \times G$ dans G ; $c = m^* \circ f$ est une capacité ; $A \times B$ est capacitable. Il contient donc un compact K tel que

$$c(K) \geq c(A \times B) - \epsilon = m(A \times B) - \epsilon.$$

Soient Q et R les projections de K :

$$Q \subset A, R \subset B. \text{ Alors } m(QR) = c(Q \times R) \geq c(K) \geq m(A \times B) - \epsilon.$$

Pour tout ordinal α , notons Q^α le dérivée d'ordre α de Q . Prouvons par induction transfinie, que pour tout α , $m(QR) = m(Q^\alpha R)$. (Si Q était métrisable, ce serait évident, puisque $Q \setminus Q^\alpha$ serait dénombrable). Tout d'abord $m(Q^\alpha R) = m(Q^{\alpha+1} R)$. En effet, pour toute partie finie F de $Q^\alpha \setminus Q^{\alpha+1}$ On a $m((Q^\alpha \setminus F)R) = m(Q^\alpha R)$, d'où le résultat, puisque la famille des $Q^\alpha \setminus F$ est filtrante décroissante d'intersection $Q^{\alpha+1} R$. Si maintenant β est un ordinal limite et que

$$m(QR) = m(Q^\alpha R) \quad \text{pour } \alpha < \beta,$$

$$\text{on a } m(Q^\beta R) = \inf_{\alpha < \beta} (m(Q^\alpha R) = m(QR)),$$

puisque la famille $(Q^\alpha R)_{\alpha < \beta}$ de compacts est décroissante d'intersection $Q^\beta R$. La récurrence transfinie est donc terminée. Si

$$m(A \times B) - \epsilon > 0$$

aucun Q^α n'est vide, donc pour α assez grand, Q^α est parfait, ce qui termine tout.

Remarque. — Si $m(A) = 0$, on montre de même que :

$$m(A \times B) = \text{Sup} \{m(P \times Q) ; P \subset A, Q \subset B, P, Q \text{ compacts parfaits}\}.$$

Il n'est pas possible, même en remplaçant m par m^* , d'affaiblir l'hypothèse "A \mathcal{K} -souslinien" en "A mesurable". En effet soient A et B deux parfaits de \mathbb{R} , de mesure nulle, et tels que $A + B$ ne soit pas de mesure nulle. L'axiome du choix permet aisément de partitionner A en deux ensembles A' et A'' ne contenant aucun parfait. Et l'on a alors soit

$$m^*(A' + B) > 0, \quad \text{soit } m^*(A'' + B) > 0.$$

Il n'est pas non plus possible de supposer seulement B mesurable. En effet :

PROPOSITION 9. — *L'hypothèse du continu implique l'existence d'une partie B de \mathbb{R} telle que :*

Si X est un G_δ partout dense de \mathbf{R} , $X + B = \mathbf{R}$ (12)

Si X est un compact de mesure nulle, $m^*(X + B) = 0$. (13)

Démonstration. — Soit Ω le plus petit ordinal non dénombrable. L'ensemble \mathcal{G} des G_δ partout denses de \mathbf{R} a la puissance du continu, ainsi que $\mathcal{G} \times \mathbf{R}$. Par hypothèse, il existe donc des énumérations $(Y_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ de \mathcal{G} et $(Z_\alpha, x_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ de $\mathcal{G} \times \mathbf{R}$.

Construisons par récurrence transfinitie, une suite $(b_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ vérifiant les conditions :

$$- \beta \leq \alpha \Rightarrow b_\alpha \in Y_\beta \quad (14)$$

$$- \beta < \alpha \Rightarrow b_\beta \neq b_\alpha$$

$$- b_\alpha \in x_\alpha - Z_\alpha$$

La possibilité de cette construction provient du fait que pour $\alpha > \Omega$, $(x_\alpha - Z_\alpha) \cap \bigcap_{\beta \leq \alpha} Y_\beta$, intersection dénombrable de G_δ partout denses, est non dénombrable.

Soit $B = \bigcup_{\alpha < \Omega} \{b_\alpha\}$. Alors B est non dénombrable, les β_α étant distincts.

Si X est un G_δ partout dense de \mathbf{R} , et x un point de \mathbf{R} , il $\alpha < \Omega$ tel que $(X, x) = (Z_\alpha, x_\alpha)$. Ainsi :

$$b_\alpha \in (x_\alpha - Z_\alpha) = x - X, \text{ c'est-à-dire } x \in X + B, \text{ ce qui établit (12)}$$

Soit maintenant X un compact de mesure nulle, et $\epsilon > 0$.

Il existe des réels $\ell_n > 0$ tels que $m(X +]0, \ell_n[) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$. Il existe un ouvert dense Y , réunion d'intervalles I_n de longueurs ℓ_n .

Soit $\alpha < \Omega$ tel que $Y = Y_\alpha$. D'après (14) $B \setminus Y$ est dénombrable

Donc :

$$m^*(X + B) \leq m(X + Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(X + I_n) \leq \epsilon$$

ce qui établit (13).

c.q.f.d.

Nous avons cependant le résultat plus faible suivant :

THEOREME 10. — Soit G un groupe compact, A un sous-ensemble \mathfrak{K} -souslinien ne contenant aucun compact parfait de G . Si X est un sous-ensemble de G de mesure extérieure nulle, ⁽¹⁾, il en est de même de AX et XA .

La démonstration comporte plusieurs étapes.

LEMME 11. — Soient A un sous-ensemble \mathfrak{K} -souslinien ne contenant aucun compact parfait d'un espace topologique E et f une application continue de E dans un espace métrique F . Alors $f(A)$ est dénombrable.

Démonstration. — Supposons $f(A)$ non dénombrable. Comme cet ensemble est \mathfrak{K} -souslinien, il est analytique au sens classique donc contient un parfait P homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Soit m une mesure diffuse portée par P et non nulle. Alors $c = m^* \circ f$ est une capacité sur E , et $c(A) = m(P) > 0$. Comme A est capacitabile, il contient un compact K tel que $c(K) > 0$. Puisque m est diffuse, $f(K)$ est non dénombrable et compact, donc contient un parfait P' .

Soit : $\mathcal{B} = \{B \subset K, B \text{ compact}, f(B) = P'\}$

\mathcal{B} est inductive pour l'ordre inverse de l'inclusion. Soit B un élément maximal. Il n'est pas parfait, d'après l'hypothèse sur A , donc possède un point isolé b . Ainsi $B \setminus \{b\}$ est compact. D'après la maximalité de B , $f(B \setminus \{b\}) \neq P'$. Donc $f(B \setminus \{b\}) = P' \setminus \{f(b)\}$ est compact, ce qui prouve que $f(b)$ est isolé dans P' , et contredit l'hypothèse P' parfait.

c.q.f.d.

Soit maintenant I un ensemble filtrant croissant, $(G_i)_{i \in I}$ des groupes compacts métrisables tels que $G = \lim_{i \in I} G_i$, pour des morphismes convenables surjectifs entre les G_i . (On peut même prendre des groupes de Lie pour les G_i — mais ceci n'interviendra pas).

(1) Par une technique très voisine, on peut montrer que si X est maigre, il en est de même de AX et XA .

LEMME 12. — Soit U un ouvert de G . Il existe un sous-ensemble dénombrable J de I , filtrant croissant, tel que si l'on note $G' = \lim_{i \in J} G_i$, m' la mesure de Haar normalisée de G' , et $\varphi' : G \rightarrow G'$ le morphisme canonique (qui est surjectif) on ait $m'(\varphi'(U)) = m(U)$.

Démonstration. — Notons $\varphi_i : G \rightarrow G_i$ le morphisme canonique. Nous avons $U = \bigcup_{\varrho \in \Lambda} U_\varrho$ où $U_\varrho = \varphi_{i_\varrho}^{-1}(\Omega_\varrho)$, i_ϱ étant un élément de I et Ω_ϱ un ouvert de G_{i_ϱ} . Il existe une partie dénombrable L de Λ telle que, si $V = \bigcup_{\varrho \in L} U_\varrho$, $m(V) = m(U)$. En effet, par régularité intérieure, il existe une suite de compacts de U dont la réunion a même mesure que U , et chacun de ces compacts peut se recouvrir par un nombre fini de U_ϱ .

Soit J un sous-ensemble dénombrable de I , filtrant croissant, contenant les i_ϱ pour ϱ dans L . Montrons qu'il convient. Posons $H = \ker \varphi'$. Nous avons $V \cap H = V$ (puisque il en est de même pour chaque U_ϱ pour ϱ dans L). Donc $m'(\varphi'(V)) = m(V) = m(U)$.

Supposons $m'(\varphi'(U)) > m'(\varphi'(V))$. Il existe ϱ tel que

$$m'(\varphi'(U_\varrho) \setminus \varphi'(V)) > 0$$

(les $\varphi'(U_\varrho)$ sont ouverts). Soit K' un compact inclus dans $\varphi'(U_\varrho) \setminus \varphi'(V)$ et tel que $m'(K') > 0$. Soit $K = \varphi'^{-1}(K')$. $m(K) = m'(K')$. Les translatés à gauche de U_ϱ par les éléments de H recouvrent K , donc aussi un nombre fini d'entre eux. Comme K est stable par ces translations, il est recouvert par un nombre fini de translatés de $K \cap U_\varrho$, ce qui montre que $m(K \cap U_\varrho) > 0$. Mais $K \cap U_\varrho \subset U \setminus V$, ce qui contredit $m(U) = m(V)$. Donc $m'(U) = m'(\varphi'(V)) = m(U)$.

c.q.f.d.

LEMME 13. — Soit X une partie de G , de mesure extérieure nulle. Il existe un sous-ensemble J dénombrable, filtrant croissant, de I , tel que, avec les notations du lemme 12, on ait $m'^*(\varphi'(X)) = 0$.

Démonstration. — Pour $n > 0$, il existe un ouvert U_n de G tel que $m(U_n) \leq \frac{1}{n}$ et $X \subset U_n$. La conclusion du lemme 12 restant valable si l'on agrandit J , on peut choisir cette partie telle que

$m'(\varphi'(U_n)) \leq \frac{1}{n}$ pour tout n . Et comme $\varphi'(X) \subset \varphi'(U_n)$ pour tout n , $m'^*(\varphi'(X)) = 0$.

c.q.f.d.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 10. Avec les notations précédentes, G' est métrisable, donc $\varphi'(A)$ est dénombrable. Ainsi

$$0 = m'^*(\varphi'(A)\varphi'(X)) \geq m'^*(\varphi'(AX)) \geq m^*(AX) \text{ et } m^*(AX) = 0.$$

Et de même $m^*(XA) = 0$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 14. – Dans l'énoncé du théorème 10, on peut remplacer "G compact" par "G abélien localement compact".

Démonstration. – Un tel groupe est de la forme $\mathbf{R}^p \times G'$ ou G' contient un groupe compact G'' tel que le quotient G'/G'' soit discret. Supposons d'abord $p = 0$. A ayant une image dénombrable dans G'/G'' , on peut la supposer réduite à un point. Le résultat découle alors du théorème 10, et des relations entre les mesures de Haar de G' , G'' , G'/G'' . Supposons maintenant p quelconque. La projection de A sur \mathbf{R}^p est dénombrable. On est donc ramené au cas où elle est réduite à un point, et le résultat découle alors du cas $p = 0$ et du théorème de Fubini.

c.q.f.d.

L'intérêt de ce résultat est que A peut être de cardinal arbitraire, puisque tout compact A peut être plongé dans un produit de tores \mathbf{T}^I , et qu'il existe des compacts ne contenant aucun parfait, et de cardinal arbitraire. Le théorème 15 va nous permettre de préciser ceci. Nous pourrions le déduire d'un résultat plus général de A. Pelczinski ([4], proposition 8-10) mais nous donnons ici une démonstration directe.

THEOREME 15. – Soit G un groupe compact, abélien ou non (resp. localement compact abélien), et \aleph le plus petit cardinal tel que G admette une base de voisinage de e de cardinal \aleph . Soit α_G le

plus petit ordinal de cardinal \aleph . Alors l'espace compact $[0, \alpha_G]$ (muni de la topologie de l'ordre) se plonge dans G .

En particulier, ce résultat implique que tout groupe compact (resp localement compact abélien) non métrisable contient un compact non dénombrable qui ne contient aucun parfait. Remarquons aussi que si α est un ordinal de cardinal $> \aleph$, $[0, \alpha]$ ne se plonge pas dans G , puisque α n'admet pas de base de voisinages de cardinal $\leq \aleph$.

Le cas localement compact se déduit aisément du cas compact. La preuve de celui-ci est basée sur le lemme suivant :

LEMME 16. — Soit G un groupe compact, G' un quotient séparé de G . Alors tout compact K' de G' , ne contenant aucun parfait, se relève dans G .

Démonstration. — Désignons par φ le morphisme canonique de G sur G' . Soit \mathcal{E} l'ensemble des couples (K, H) , où H est un sous-groupe compact distingué de G , K un compact de G , réunion de classes modulo H . \mathcal{E} est non vide, puisqu'il contient $(\varphi^{-1}(K'), \text{Ker}\varphi)$. Munissons \mathcal{E} de la relation d'ordre $(K_1, H_1) \leq (K_2, H_2)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

$$- K_2 \subset K_1 \text{ et } H_2 \subset H_1$$

— Chaque classe modulo H_1 qui est contenue dans K_1 contient une et une seule classe modulo H_2 contenue dans K_2

Montrons que \mathcal{E} est inductif.

Soit $(K_i, H_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de \mathcal{E} . Posons

$$K = \bigcap_{i \in I} K_i ; H = \bigcap_{i \in I} H_i .$$

Si k appartient à K , que que soit i , sa classe modulo H_i est incluse dans K_i , donc sa classe modulo H est incluse dans K . Ceci montre déjà que $(K, H) \in \mathcal{E}$. Soit j un élément fixé de I . Chaque classe modulo H_j qui est contenue dans K_j rencontre K , puisque une intersection décroissante de compacts non vides est non vide. Enfin soient k et k' deux éléments de K dans une même classe modulo H_j . Pour $i > j$, on a $k^{-1} k' \in H_i$ (puisque $(K_j, H_j) \leq (K_i, H_i)$), d'où $k^{-1} k' \in H = \bigcap_{i > j} H_i$, ce qui achève de prouver que $(K_j, H_j) \leq (K, H)$.

Ainsi (K, H) est un majorant des $(K_j, H_j)_{j \in I}$, et il est clair que c'est le plus petit, ce qui montre que \mathcal{E} est inductif.

L'élément $(\varphi^{-1}(K'), \text{Ker } \varphi)$ est majoré par un élément maximal (K, H) . Si nous prouvons que $H = \{e\}$, la démonstration sera terminée puisque K est alors un relèvement de K' . Supposons donc que $H \neq \{e\}$. Soit $h \in H, h \neq e$. Comme G' est limite projective de groupes de Lie, il existe un morphisme surjectif ψ de G dans un groupe de Lie L , avec $\psi(h) = e$. Alors $\psi(H)$ est un sous-groupe distingué de L , puisque ψ est surjectif et que H est distingué dans G . Désignons par θ (resp θ') le morphisme canonique de G (resp L) dans G/H (resp $L/\psi(H)$). Puisque $\text{Ker } \theta' \circ \psi$ contient H , il existe un morphisme ψ' de G/H dans $L/\psi(H)$ tel que $\psi' \circ \theta = \theta' \circ \psi$. $\theta(K)$ est homéomorphe à K' , par la restriction à $\theta(K)$ de l'application quotient $G/H \rightarrow G/\text{Ker } \varphi = G'$ (c'est une bijection car chaque classe modulo $\text{Ker } \varphi$ contenue dans $\varphi^{-1}(K')$ rencontre exactement une classe modulo H contenue dans K). Ainsi $\theta(K)$ ne contient aucun parfait. D'après le lemme 11, $\psi' \circ \theta(K)$ est dénombrable ($L/\psi(K)$ étant métrisable) donc en particulier totalement discontinu. Puisque L est métrisable, d'après [3] $\psi' \circ \theta(K)$ admet un relèvement K'' dans L . Considérons le couple $(K \cap \psi^{-1}(K''), H \cap \text{Ker } \psi)$. Déjà, on a $K \cap \psi^{-1}(K'') \subset K$, et $H \cap \text{Ker } \psi \subset H$, cette inclusion étant d'ailleurs stricte puisque $h \notin \text{Ker } \psi$. Soient k et k' deux éléments de $K \cap \psi^{-1}(K'')$ contenus dans une même classe modulo H . On a

$$\theta(k) = \theta(k'), \text{ d'où } \psi' \circ \theta(k) = \psi' \circ \theta(k'),$$

et ainsi $\psi' \circ \psi(k) = \psi' \circ \psi(k')$. Puisque $\psi(k)$ et $\psi(k')$ sont dans K'' , on a $\psi(k) = \psi(k')$. Ceci montre que $k^{-1}k' \in \text{Ker } \psi$, et enfin que k et k' sont dans une même classe modulo $H \cap \text{Ker } \psi$. (on sait déjà que $k^{-1}k' \in H$). De plus toute classe modulo H contenue dans K rencontre $K \cap \psi^{-1}(K'')$ (car son image par ψ rencontre K'') ce qui achève de prouver que $(K, H) < (K \cap \psi^{-1}(K''), H \cap \text{Ker } \psi)$, en contradiction avec la maximalité de (K, H) .

c.q.f.d.

Prouvons maintenant le théorème 15. Le groupe G est limite projective d'une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes compacts métrisables. Tout d'abord, construisons par récurrence transfinie une famille convenable $(J_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_G}$ de parties filtrantes croissantes de I , chaque J_α étant de cardinal \aleph si $\alpha < \alpha_G$. Pour α ordinal limite nous posons $J_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} J_\beta$, qui est encore de cardinal $< \aleph$ si $\alpha < \alpha_G$ et si les J_β ($\beta < \alpha$) le sont.

Si $\alpha = \beta + 1$, le morphisme canonique $\varphi : G \rightarrow \bigcup_{i \in J_\beta} G_i$ n'est pas

injectif, car G posséderait alors une base de voisinages de l'élément neutre de cardinal $< \aleph$. Soit x un élément de $\text{Ker } \varphi$, distinct de e . Soit ensuite i un indice tel que l'image de x par le morphisme canonique de G dans G_i ne soit pas l'élément neutre. On prend alors pour J_α une partie filtrante croissante, de même cardinal que J_β , et contenant i . Définissons $G_\alpha = \varprojlim_{i \in J_\alpha} G_i$ et soit

$$\varphi_{\alpha, \beta} : G_\alpha \leftarrow G_\beta \quad (\alpha \leq \beta \leq \alpha_G)$$

le morphisme canonique. Par construction ce morphisme n'est pas injectif, si $\alpha < \beta$. Toujours par récurrence transfinie nous allons maintenant construire, pour $\alpha \leq \alpha_G$, un système projectif de compacts $K_\alpha \subset G_\alpha$, vérifiant les conditions suivantes :

– les morphismes de ce système sont les restrictions aux K_α des morphismes $\varphi_{\alpha, \beta}$

– Il existe un homéomorphisme h_γ ($\gamma \leq \alpha_G$) de $[0, \gamma]$ sur K_γ tel que $\psi_{\alpha, \beta} = h_\alpha^{-1} \circ \varphi_{\alpha, \beta} \circ h_\beta$ soit l'application de $[0, \beta]$ sur $[0, \alpha]$ qui laisse fixe chaque ordinal $\leq \alpha$ et envoie sur α chaque ordinal $\geq \alpha$.

Pour $\alpha = 0$, K_0 consiste en un seul point.

Si $\alpha = \beta + 1$, d'après le lemme 16, K_β se relève dans $G_{\beta+1}$ en K . On prend alors $K_\alpha = K \cup \{k\}$, où k est un point de $G_\alpha \setminus K$, tel que $\varphi_{\beta, \alpha}(k) = h_\beta(\beta)$ (ce qui est possible puisque $\varphi_{\beta, \alpha}$ n'est pas injective !) Si α est un ordinal limite, de façon canonique

$$G_\alpha = \varprojlim_{\beta < \alpha} G_\beta$$

et on pose alors
$$K_\alpha = \varprojlim_{\beta < \alpha} K_\beta.$$

Il est homéomorphe à $[0, \alpha]$ car la limite projective des $[0, \beta]$ pour les morphismes $\psi_{\beta, \gamma}$ ($\beta < \gamma < \alpha$) n'est autre que $[0, \alpha]$. Le détail des vérifications est laissé au lecteur.

Le compact K_α de G_{α_G} est homéomorphe à $[0, \alpha_G]$. Et puisque G_{α_G} est un quotient de G , une nouvelle application du lemme 16 termine la démonstration.

4. Parties couvrantes.

Ce paragraphe contient une partie des outils techniques nécessaires au théorème 23.

A partir de maintenant, tous les groupes sont supposés abéliens, et sont notés additivement. Nous noterons $\langle a, b, c, \dots \rangle$ le sous-groupe engendré par les éléments a, b, c, \dots d'un groupe.

Soient G un groupe (abélien) compact et A un sous-ensemble non-vide de $G \setminus \{0\}$.

DEFINITION 17. — *On dira qu'une partie X de G est couvrante pour A si elle est compacte, et si pour tout $a \in A$, $G = XU(X+a)$*

Evidemment si X est couvrante pour A , elle l'est aussi pour tout $A' \subset A$, où $A' \neq \emptyset$.

Soit m la mesure de Haar normalisée de G .

PROPOSITION 18. — *Lorsque G est fini, et que le sous-groupe G' engendré par A est produit direct des $\langle a \rangle$ où $a \in A$ il existe une partie X de G , couvrante pour A et telle que $m(X) \leq \frac{2}{3}$.*

Démonstration. — Soient t_1, \dots, t_r les points de A .

Tout d'abord, nous pouvons supposer $G = G'$. En effet, désignons par m' la mesure de Haar normalisée de G' et soit X' une partie de G' couvrante pour les t_i , et telle que $m'(X') \leq \frac{2}{3}$. Pour $\ell \in G/G'$ soit g_ℓ un élément de G dont la classe est ℓ . Posons

$$X = \bigcup_{\ell \in G/G'} X' + g_\ell.$$

C'est une partie couvrante pour les t_i et $m(X) = m'(X') \leq \frac{2}{3}$.

Soit n_i l'ordre de t_i .

Supposant les n_i impairs, prouvons le résultat par récurrence sur p . Pour $p = 1$, prenons

$$X = \{0\} \cup \{(2k+1)t_1; 0 < 2k+1 < n_1-1\}.$$

Alors

$$m(X) = \frac{1 + \frac{n_1-1}{2}}{n_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+n_1}{n_1} \right) \leq \frac{2}{3} \quad (n_1 \geq 2).$$

Si $x \in G \setminus X$, on a $x = 2\ell t_1$ ou $\ell > 0$. Alors

$$x = t_1 + (2\ell - 1)t_1 \in t_1 + X,$$

ce qui montre que X est couvrante.

Supposons le résultat vrai pour $p-1$. En renumérotant au besoin les t_i , on peut supposer $n_p \geq n_1$. Soit $G' = \langle t_1, \dots, t_{p-1} \rangle$, soit m' sa mesure de Haar normalisée, et soit X' une partie de G'

couvrante par t_1, \dots, t_{p-1} telle que $m'(X') \leq \frac{2}{3}$. Posons :

$$X = \bigcup_{0 \leq k \leq n_1-1} (X' + kt_p + kt_1) \cup \bigcup_{n_1 < 2k < n_p} (X' + 2kt_p + t_1) \\ \cup \bigcup_{n_1 < 2k+1 < n_p} (X' + (2k+1)t_p).$$

$m(X) = m'(X') \leq \frac{2}{3}$, et il est clair que X est couvrante pour

t_1, \dots, t_{p-1} . $X + t_p$ est réunion des ensembles suivants :

$$\bigcup_{1 \leq k \leq n_1-1} (X' + kt_p + (k-1)t_1); X' + n_1 t_p + (n_1-1)t_1 \\ \bigcup_{n_1+1 < 2k+1 < n_p} (X' + (2k+1)t_p + t_1); X' + t_1 \\ \bigcup_{n_1 < 2k < n_p} (X' + 2kt_p);$$

et puisque $X' \cup (X' + t_1) = G'$, on a $X \cup (X + t_p) = G$

Supposons maintenant les n_i quelconques. S'ils sont tous pairs, il suffit de prendre

$$X = \left\{ \sum_{i \leq p} k_i t_i; 0 \leq k_i < n_i, \sum_{i=1}^p k_i \text{ pair} \right\}$$

et l'on a même $m(X) = \frac{1}{2}$. S'il n'en est rien, on peut les supposer pairs pour $i \leq q < p$, impairs pour $q \leq i \leq p$.

Soit alors $G' = \langle t_q, \dots, t_p \rangle$ et $X' \subset G'$, une partie couvrante par t_q, \dots, t_p telle que $m'(X') \leq \frac{2}{3}$, où m' désigne comme d'habitude la mesure de Haar normalisée de G' . Il est aisé de vérifier que la partie suivante convient :

$$X = \bigcup_{\substack{\sum k_i \text{ pair} \\ i < q \\ 0 \leq k_i < n_i}} \left(\sum_{i < q} k_i t_i + X' \right) \cup \bigcup_{\substack{\sum k_i \text{ impair} \\ i < q \\ 0 \leq k_i < n_i}} \left(\sum_{i < q} k_i t_i + X' + t_q \right)$$

c.q.f.d.

Le résultat qui suit n'est qu'un cas particulier de la proposition 22. Mais comme celle-ci a une preuve assez technique, il n'est sans doute pas superflu de donner auparavant l'idée principale de la démonstration.

Soit $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $\prod_1^\infty \frac{1 + \beta_p}{\beta_p} < \frac{4}{3}$.

Avec les notations précédentes, nous avons :

PROPOSITION 19. — *Supposons toujours G fini, et supposons de plus que pour tous q , τ vérifiant $0 \leq q \leq p$ et $0 < r < \beta_q$, l'élément τt_q ne soit pas dans $\langle t_i, \dots, t_{q-1} \rangle$. Il existe alors une partie X de G , couvrante pour les t_i , et telle que $m(X) \leq \frac{2}{3}$.*

Démonstration. — On se ramène comme précédemment au cas où les t_i engendrent G . Par récurrence sur p , prouvons que l'on peut en fait choisir X telle que $m(X) \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^p \frac{1 + \beta_i}{\beta_i}$. Le cas $p = 1$ a été traité au début de la proposition 18.

Supposons le résultat établi pour $p - 1$. Soit $G' = \langle t_1, \dots, t_{p-1} \rangle$ et X' une partie de G' couvrante pour les t_i ($i < p$), telle que

$$m'(X') \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{1 + \beta_i}{\beta_i}.$$

Posons

$$X = \bigcup_{0 \leq 2k < n-1} (X' + 2k t_p) \cup \bigcup_{0 \leq 2k+1 < n-1} (X' + (2k+1) t_p + t_i) \\ \cup (G' + (n-1) t_p)$$

où n est de l'ordre de la classe de t_p dans G/G' (donc $n \geq \beta_p$). On a :

$$m(X) = \frac{1}{n} ((n-1) m'(X') + 1) \leq \frac{n+1}{n} m'(X') \leq \frac{1+\beta_p}{\beta_p} m'(X') \\ \leq \frac{1}{2} \prod_{i \leq p} \frac{1+\beta_p}{\beta_i}$$

et on vérifie sans difficulté que X est couvrante pour les t_i .

Nous allons maintenant établir des résultats analogues aux propositions 18 et 19, dans le cas où G est isomorphe à un produit $T^n \times \Phi$ ($T = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, Φ groupe abélien fini). Rappelons que tout sous-groupe fermé et tout groupe quotient séparé de groupes de cette forme l'est encore. Nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 20. — Soient G un groupe compact isomorphe à $T^n \times \Phi$, G' un sous-groupe fermé, $G'' = G/G'$, φ l'application canonique de G sur G'' , m'' la mesure de Haar normalisée de G'' . Il existe un compact Z de G tel que $\varphi(Z) = G''$, et que $\varphi^{-1}(z) \cap Z$ ait exactement un élément pour presque tout (relativement à m'') élément z de G'' .

Démonstration. — On peut supposer $G = T^n \times \Phi$. Soit ξ l'application canonique $\mathbf{R}^n \rightarrow T^n$. On sait qu'il existe une base a_1, \dots, a_n de \mathbf{Z}^n , un entier $m \leq n$, des entiers e_i ($i \leq m$) tels que :

$$\xi^{-1}(G' \cap (T^n \times \{0\})) = \left\{ \sum_{i \leq m} n_i a_i / e_i + \sum_{m < i \leq n} u_i a_i ; u_i \in \mathbf{R}, n_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

(où ξ^{-1} est définie naturellement sur $T^n \times \{0\} \approx T^n$)

$$\text{Soit } \tilde{Z} = \xi \left(\left\{ \sum_{i \leq m} v_i a_i / e_i ; |v_i| \leq \frac{1}{2} \right\} \right) \times \{0\}$$

$$\text{On a } \varphi(\tilde{Z}) = \varphi(T^n \times \{0\})$$

Soit $(c_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de Φ tels qu'il y ait exactement un $\varphi(c_i)$ dans chaque classe de G'' modulo $\varphi(\mathbb{T}^n \times \{0\})$. Soit $Z = \bigcup_{i \in I} Z + c_i$. Il est clair que $\varphi(Z) = G''$. Soit η un morphisme de l'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension m engendré par les a_i ($i \leq m$) sur \mathbb{T}^m dont le noyau soit le Z -module engendré par les a_i . Le morphisme ψ de $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ dans \mathbb{T}^n donné par :

$$\left(\xi \left(\sum_{i \leq n} v_i a_i \right), 0 \right) \rightarrow \eta \left(\sum_{i \leq m} e_i v_i a_i \right)$$

a pour noyau $G' \cap (\mathbb{T}^n \times \{0\})$, donc il existe un isomorphisme ζ^{-1} de $\varphi(\mathbb{T}^n \times \{0\})$ sur \mathbb{T}^n tel que $\zeta^{-1} \circ \varphi = \psi$, d'où

$$\varphi \circ \xi = \zeta \circ \psi \circ \xi = \zeta \circ \eta.$$

Si $z = \zeta \circ \eta \left(\sum_{i \leq m} s_i a_i \right)$ est tel que $\varphi^{-1}(z) \cap Z$ ait plus d'un élément,

il existe un i tel que $|s_i| = \frac{1}{2}$, ce qui montre que l'ensemble des tels z est de mesure nulle dans $\varphi(\mathbb{T}^n \times \{0\})$, donc aussi dans G'' . Remarquons de plus (ce qui sera utile dans la proposition 22) que si on désigne par P le sous-ensemble

$$\zeta \circ \eta \left(\left\{ \sum_{i \leq m} s_i a_i ; |s_i| < \frac{1}{4} \right\} \right)$$

de G'' , l'application $\theta : z \rightarrow \varphi^{-1}(z) \cap Z$ de P dans Z est telle que

$$z_1, z_2, z_1 + z_2 \in P \Rightarrow \theta(z_1 + z_2) = \theta(z_1) + \theta(z_2),$$

ce qui découle du fait que

$$\theta \circ \zeta \circ \eta \left(\sum s_i a_i \right) = \xi \left(\sum_{i \leq m} s_i a_i / e_i \right) \quad \text{dès que} \quad |s_i| < \frac{1}{2}.$$

c.q.f.d.

Soient toujours G un groupe isomorphe à un produit $\mathbb{T}^n \times \Phi$, (t_1, \dots, t_p) des éléments de G et m la mesure de Haar normalisée de G .

PROPOSITION 21. — *Supposons que le groupe G' engendré par les t_i soit fini et produit direct des groupes $\langle t_i \rangle$ engendrés par les t_i .*

Il existe alors une partie X de G , couvrante pour les t_i , et telle que $m(X) \leq \frac{2}{3}$.

Démonstration. — Soit X' une partie de G' couvrante pour les t_i , et telle que $m'(X') \leq \frac{2}{3}$ (voir proposition 18). Soit Z le compact fourni par le lemme 20. Posons $X = X' + Z$. Puisque $G = G' + Z$, pour tout i on a

$$X \cup (X + t_i) \supset ((X' + t_i) \cup X') + Z = G.$$

Soit χ la fonction caractéristique de X . Avec des notations évidentes on a :

$$m(X) = \int_{x \in G'' = G/G} dm''(\dot{x}) \int_{y \in G'} \chi(x+y) dm'(y) = m'(X') \quad \text{c.q.f.d.}$$

Passons maintenant à un résultat technique qui généralise la proposition 19. Soit α_p une suite d'entiers tel que $\prod_1^{\infty} \left(\frac{1 + \alpha_p}{\alpha_p} \right)^2 \leq \frac{4}{3}$. Avec toujours les mêmes notations :

PROPOSITION 22. — *Supposons que l'on ait des morphismes surjectifs :*

$$G \xrightarrow{\eta_1} G_1, \dots, G_{p-2} \xrightarrow{\eta_{p-1}} G_{p-1}$$

et posons (pour tout $q \leq p-1$) : $\psi_q = \eta_q \circ \dots \circ \eta_1$ (et $\psi_0 = id_G$)

Supposons de plus que pour $1 \leq q \leq p$ on ait

$$\tau \psi_{q-1}(t_q) \neq 0 \quad \text{pour } 0 < \tau < \alpha_q, \quad \text{et } \psi_{q-1}(t_i) = 0 \quad \text{pour } i < q.$$

Il existe alors une partie X de G couvrante pour les t_i et telle que $m(X) \leq \frac{2}{3}$.

Démonstration. — Nous allons prouver, par récurrence sur p , que l'on peut même prendre X telle que $m(X) \leq \frac{1}{2} \prod_1^p \left(\frac{1 + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^2$.

Le cas $p = 1$, étant très semblable au cas général, est laissé au lecteur. Supposons donc le résultat établi pour $p - 1$.

Posons $G' = \text{Ker } \psi_{p-1}$. Il est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{T}' \times \Phi'$ (Φ' groupe abélien fini). Les $(t_i)_{i < p}$ et la suite des morphismes :

$$G' \xrightarrow{\eta_1} \text{Ker } \eta_{p-1} \circ \dots \circ \eta_2 \xrightarrow{\eta_2} \dots \text{Ker } \eta_{p-1} \xrightarrow{\eta_{p-2}} \text{Ker } \eta_{p-1}$$

vérifient les hypothèses de l'énoncé. Il existe donc une partie X' de G' , couvrante pour t_1, \dots, t_{p-1} , et telle que

$$m'(X') \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1 + \alpha_i}{\alpha_i} \right)^2.$$

G_{p-1} est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{T}^m \times \psi$ ($m \leq n$, ψ abélien fini). On peut, en vertu de la preuve du lemme 20, choisir cet isomorphisme en sorte que (G_{p-1} étant identifié à $\mathbf{T}^m \times \psi$ par cet isomorphisme, et G' étant à $\mathbf{T}^n \times \Phi$) $\psi_{p-1} | \mathbf{T}^n \times \{0\}$ soit l'application ψ de ce même lemme, dont nous reprenons les notations.

Posons $\psi_{p-1}(t_p) = (u, v)$ où $u \in \mathbf{T}^m$ est de la forme

$$u = \eta \left(\sum_{i \leq m} u_i a_i \right) \quad \text{avec} \quad |u_i| \leq \frac{1}{2}.$$

Si u est d'ordre fini, chaque u_i est rationnel. Soit $u_i = \frac{p_i}{q_i}$ avec $q_i \geq 6$.

Posons $u' = u$, $\epsilon = 0$.

Supposons maintenant que u ne soit pas d'ordre fini. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe $p'_i, q'_i \in \mathbf{Z}$, et tels que

$$\left| u_i - \frac{p'_i}{q'_i} \right| \leq \frac{\epsilon}{6 q'_i}.$$

En posant $p_i = 6 p'_i, q_i = 6 q'_i$

on voit qu'il existe $p_i, q_i \in \mathbf{Z}$, $q_i \geq 6$ et

$$\left| u_i - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{\epsilon}{q_i}.$$

Les éléments dont l'ordre divise un entier k donné forment un sous-groupe discret de \mathbf{T}^m . En prenant ϵ assez petit, on peut donc supposer que

$$u' = \eta \left(\sum_{i \leq m} \frac{p_i}{q_i} a_i \right) \quad \text{est d'ordre} \quad \geq \alpha_p.$$

Imposons de plus à ϵ les conditions

$$(1 + 2\epsilon)^m \leq \frac{1 + \alpha_p}{\alpha} \quad \text{et} \quad \epsilon < \frac{1}{2}$$

Posons
$$Q = \eta \left(\sum_{i \leq m} \left[-\frac{\epsilon}{q_i}, \frac{1 + \epsilon}{q_i} \right] a_i \right) \subset P;$$

alors θ est additif sur Q . Si m'' désigne la mesure de Haar normalisée de G_{p-1} on a

$$m''(Q) \leq (1 + 2\epsilon)^m \left(\prod_{i \leq m} \frac{1}{q_i} \right) \times \frac{1}{\text{card } \psi}$$

Posons $t = t_p + \theta(u' - u)$. Soit τ l'ordre de (u', v') . Que u' soit d'ordre fini ou non on a $\tau \geq \alpha_p$ (d'après l'hypothèse dans le premier cas, par construction dans le second). Soit enfin $L = \theta(Q)$. Posons

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & \bigcup_{0 \leq 2k < \tau - 1} (X' + L + 2k t) \\ & \cup \bigcup_{0 \leq 2k + 1 < \tau - 1} (X' + L + (2k + 1)t + t_1) \cup (G' + L + (\tau - 1)t) \end{aligned}$$

On a $m(X' + L) = m'(X') m''(Q)$; $m(G' + L) m''(Q)$

D'où

$$m(\tilde{X}) \leq m''(Q) [(\tau - 1) m'(X') + 1] \leq (\tau + 1) m'(X') m''(Q).$$

Soit Θ le sous-groupe de $G_{p-1} = T^m \times \psi$ engendré par ψ et les éléments de la forme $\left(\frac{a_i}{q_i} \right)$. Son cardinal vaut $\text{card } \psi \times \prod_{i=1}^m q_i$.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ un ensemble d'éléments de G tels que chaque classe de Θ modulo $\langle (u', v) \rangle$ contienne exactement un élément. Le cardinal de I est $\frac{1}{\tau} \text{card } \psi \times \prod_{i=1}^m q_i$. Soit enfin

$$X = \bigcup_{i \in I} (\tilde{X} + x_i).$$

On a :

$$m(X) \leq \text{card } I \times m(\tilde{X}) \leq \text{card } I \times (\tau + 1) m'(X') m''(Q) \\ \leq (1 + 2\epsilon)^m \frac{\tau + 1}{\tau} m'(X') \leq \left(\frac{1 + \alpha_p}{\alpha_p}\right)^2 m'(X') \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^p \left(\frac{1 + \alpha_i}{\alpha_i}\right)^2$$

et X est compacte.

Prouvons que X est couvrante. Soit x dans G . Il existe

$$i \in I, 0 \leq k < \tau, z \in \eta \left(\sum_{i \leq m} \left[0, \frac{1}{q_i} \right] a_i \right)$$

tels que

$$\psi_{p-1}(x) = \psi_{p-1}(x_i) + k(u', v) + z.$$

$$\text{Or } (u', v) = \psi_{p-1}(t) \quad \text{et} \quad z = \psi_{p-1}(\theta(z))$$

où $\theta(z) \in L$. Ainsi :

$$x' = x - x_i - kt - \theta(z) \in G'.$$

Si $k = \tau$, x est dans X .

Si k est pair : $(x' \in X') \Rightarrow (x \in X)$. Si k est impair

$$(x' \in X' + t_1) \Rightarrow (x \in X).$$

Ainsi le fait que X soit couvrante pour t_1, \dots, t_{p-1} découle immédiatement du fait que X' l'est aussi, dans G' . Examinons le cas de t_p . Supposons par exemple $k = 2k' > 0$ (les cas $k = 0$, $k = 2k' + 1$ sont laissés au lecteur). Si x n'est pas dans X , x' n'est pas dans X' . Mais on peut alors écrire :

$$x = x_i + (2k' - 1)t + \theta(z) + x' + t;$$

$$\text{or } t = t_p + \theta(u' - u).$$

$$\text{D'où : } x = x_i + (2k' - 1)t + \theta(z + u' - u) + x' + t_p$$

car θ est additif sur Q . De plus $\theta(z + u' - u) \in L$. Comme x' n'est pas dans X' on a $x' = x'' + t_1$ avec x'' dans X' . D'où enfin :

$$x = (x_i + (2k' - 1)t + \theta(z + u' - u) + x'' + t_1) + t_p \in X + t_p.$$

c.q.f.d.

5. Extension aux groupes abéliens localement compacts.

Le théorème suivant est, dans le cas abélien, la réciproque du théorème 10.

THEOREME 23. — *Soit G un groupe abélien compact, A un compact parfait de G . Il existe un compact parfait K de G , de mesure nulle, et tel que $K + A = G$.*

On sait que tout groupe abélien compact est limite projective d'une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes isomorphes à des $T^n \times \Phi$. Commençons par étudier les compacts parfaits d'une limite projective.

LEMME 24. — *Soit I un ensemble filtrant croissant, $(E_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques séparés, $E = \lim_{i \in I} E_i$ (pour des morphismes convectifs $\varphi_{i,j} : E_i \leftarrow E_j$ surjectifs), $A \in E$ un compact parfait. Alors il se produit au moins l'une des éventualités suivantes :*

1) *Il existe i tel que $\varphi_i(A)$ contienne un parfait ($\varphi_i : E \rightarrow E_i$ est le morphisme canonique)*

2) *Il existe une partie J dénombrable, filtrante croissante de I , telle que si on note $E' = \lim_{i \in I} E_i$ et $\varphi : E \rightarrow E'$, $\varphi'_i : E' \rightarrow E_i$ ($i \in J$)*

les morphismes canoniques, $\varphi(A)$ contienne un compact parfait B tel que $\varphi'_i(B)$ soit fini pour chaque i .

Démonstration. — Supposons que la première éventualité ne se produise pas. Remarquons que si a est isolé dans $\varphi_i(A)$, $\varphi_i^{-1}(a) \cap A$ est parfait. Construisons par récurrence une suite croissante (i_p) d'éléments de I , une suite d'ensembles $B_p \subset \varphi_{i_p}(A)$, finis formés de points isolés de $\varphi_{i_p}(A)$, tels que, $\varphi_{i_p, i_{p+1}}^{-1}(b) \cap B_{p+1}$ ait au moins deux éléments pour tout point B de B_p , et que $\varphi_{i_p, i_{p+1}}(B_{p+1}) \subset B_p$.

Supposons donc B_p construit. Pour tout b de B_p , $\varphi_{i_p}^{-1}(b) \cap A$ est parfait. Comme B_p est fini, pour i_{p+1} assez grand, $\varphi_{i_p, i_{p+1}}(\varphi_{i_p}^{-1}(b) \cap A)$ possède au moins deux éléments, quel que soit b dans B_p . C'est un fermé de $\varphi_{i_{p+1}}(A)$ et comme ce dernier ensemble ne contient aucun parfait $\varphi_{i_{p+1}}^{-1}(\varphi_{i_p}^{-1}(b) \cap A)$ contient au moins deux points b_1 et b_2 isolés dans $\varphi_{i_{p+1}}(A)$. L'ensemble $B_{p+1} = \{b_i ; i = 1, 2 ; b \in B_p\}$ convient.

Prenons $J = \{i_p; p \in \mathbb{N}\}$. et $B = \bigcap_p \varphi_{i_p}^{-1}(B_p)$. Le fermé B est inclus dans $\varphi(A) = \bigcap_n \varphi_{i_n}^{-1}(A)$ donc il est compact. Enfin il est parfait. En effet, soit b dans B . Tout voisinage de b contient un ouvert de la forme $\varphi_{i_p}^{-1}(\sigma)$, ou σ est un ouvert de E_{i_p} contenant $\varphi'_{i_p}(b)$. Il contient donc aussi $\varphi_{i_{p+1}}'^{-1}(\varphi_{i_p, i_{p+1}}^{-1}(b) \cap B_{p+1})$ qui possède au moins deux éléments.

c.q.f.d.

Conservons les notations de ce lemme, au remplacement près de la lettre E par la lettre G .

1^{er} Cas : Il existe i tel que $\varphi_i(A)$ soit non dénombrable. G_i est isomorphe à un produit de la forme $T^n \times \Phi$. Un produit fini d'ensembles dénombrables l'étant encore il existe donc un morphisme θ de G_i dans T tel que $\theta \circ \varphi_i(A)$ soit non dénombrable. D'après le corollaire 5 il existe un compact parfait L de T tel que $m''(L) = 0$ (m'' désigne la mesure de Haar de T) et $L + \theta \circ \varphi_i(A) = T$.

Si $K = (\theta \circ \varphi_i)^{-1}(L)$, alors $m(K) = 0$ et $K + A = G$. Enfin K est parfait puisque L l'est.

2^e Cas : Il suffit, d'après le raisonnement précédent, de résoudre le problème pour G' et B . Pour alléger les notations, posons

$$\varphi'_{i_p} = \varphi'_p, \varphi_{i_p, i_q} = \varphi_{p, q}, G_{i_p} = G_p$$

LEMME 25. — *Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées :*

i) *Tout élément de $B - B$ est d'ordre fini*

ii) *Il n'existe aucun parfait $C \subset B$ tel que tout élément de $(C - C)$ soit d'ordre fini. Soit $K \subset G_n$ un compact tel que*

$$K + \varphi'_n(B) = G_n.$$

Il existe alors un entier $n' > n$, un compact K' de $G_{n'}$, tel que

$$\varphi_{n, n'}(K') = K, \quad \text{que} \quad K' + \varphi_n(B) = G'_n, G'_{n'},$$

et que $m_{n'}(K') \leq \frac{2}{3} m_n(K)$ (ou m_k désigne la mesure de Haar normalisée de G_k)

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'un élément g de G est d'ordre fini τ si et seulement si il existe un entier N tel que $\varphi_p'(g)$ soit d'ordre τ pour tout $p \geq N$.

Soit $\varphi_n'(B) = \{b_1, \dots, b_q\}$. Nous allons construire un entier n' , et des éléments $b_i'', b_i' \in \varphi_n'(B)$ ($i \leq q$) tels que

$$\varphi_{n,n}(b_i'') = b_i = \varphi_{n,n}(b_i')$$

et que les éléments $t_i = b_i'' - b_i'$ de $\ker \varphi_{n,n}$, vérifient les hypothèses de la proposition 21 (Cas *i*) ou de la proposition 22 (Cas *ii*).

Supposons (*i*). Par une récurrence immédiate, nous construisons une suite d'entiers $n_i, i = 0, \dots, q, (n_0 = n)$ deux suites d_i', d_i'' de points de B telles que

— Pour $i < j \leq q$ on ait $\varphi_{n_i}'(d_j') = \varphi_{n_i}'(d_j'')$ et $\varphi_n'(d_j') = \varphi_n'(d_j'') = b_j$

— Pour $m \geq n_i$ l'ordre $\varphi_m'(d_i'' - d_i')$, est une constante τ_i

Puis nous posons $n' = n_q, b_i' = \varphi_{n'}'(d_i'), b_i'' = \varphi_{n'}'(d_i'')$.

Soit enfin $t_i = b_i'' - b_i'$ (donc $t_i \in \ker \varphi_{n,n'}$). Les t_i sont contenus dans le sous-groupe fini de $\ker \varphi_{n,n'}$, formé des éléments d'ordre $ppcm(\tau_i)$ donc engendrent un groupe fini. Supposons que l'on ait une relation de la forme $k_p t_p + \dots + k_q t_q = 0$ ($0 \leq p \leq q$). On en déduit que

$$0 = \varphi_{n_p, n'}(k_p t_p + \dots + k_q t_q) = k_p \varphi_{n_p, n'}(t_p)$$

donc que τ_p divise k_p par construction. Ainsi $k_p t_p = 0$ puisque t_p est aussi d'ordre τ_p . Par récurrence ceci prouve que tous les $k_i t_i$ sont nuls. et donc que le groupe engendré par les t_i est produit des $\langle t_i \rangle$

Supposons (*ii*). Nous construisons les mêmes suites, mais en imposant cette fois la condition $k \varphi_{n_i}'(d_i'' - d_i') = 0$ pour $0 < k < \alpha_i$, et toujours bien sûr

$$\varphi_{n_i}'(d_j'' - d_j') = 0 \quad \text{pour } j > i, \quad \varphi_n'(d_j') = \varphi_n'(d_j'') = b_j$$

La possibilité de cette construction résulte du fait que si

$$c \in \varphi_{n, n_{i-1}}^{-1}(b_i) \cap \varphi_{n_{i-1}}'(B),$$

on peut choisir dans $\varphi_{n_{i-1}}'^{-1}(c) \cap B$ deux éléments d_i'', d_i' , tels que

$d_i'' - d_i'$, ne soit pas d'ordre fini, puisque $\varphi_{n_i-1}'^{-1}(c) \cap B$ est un compact parfait contenu dans B . Si $n' = n_q$, les éléments t_1, \dots, t_q de $\text{Ker } \varphi_{n,n'}$ vérifient les hypothèses de la proposition 22.

Dans les deux cas, il existe donc une partie X de $\text{Ker } \varphi_{n,n'}$ couvrante pour les $t_i (i = 1, \dots, q)$ et de mesure de Haar normalisée $\leq \frac{2}{3}$. Soit Z un compact de $G_{n'}$ vérifiant les conditions du lemme 20.

Posons

$$K' = X + \varphi_{n,n'}^{-1}(K) \cap Z ; \text{ on a } m_{n'}(K') \leq \frac{2}{3} m_n(K).$$

Soit x dans $G_{n'}$. Puisque $G_n = K + \varphi_n'(B)$ on peut écrire $\varphi_{n,n'}(x) = b_i + k$ où $k \in K$.

Soit $y \in \varphi_{n,n'}^{-1}(k) \cap Z$, on a $\varphi_{n,n'}(x - b_i' - y) = 0$, donc

$$x = b_i' + y + h \quad \text{où} \quad h \in \text{Ker } \varphi_{n,n'}^{-1}.$$

Si h est dans X , x est dans $\varphi_{n'}(B) + K'$, puisque $y + h$ est dans K' . Sinon h est dans $X + t_i = X + b_i'' - b_i'$. Soit $h = h' + b_i'' - b_i'$ où $h' \in X$. On a alors $x = b_i'' + y + h' \in \varphi_{n'}(B) + K'$. Ce qui prouve que $\varphi_{n'}(B) + K' = G_{n'}$.

c.q.f.d.

Achevons la preuve du théorème 23. Si l'hypothèse (ii) du lemme 25 n'est pas vérifiée, en remplaçant au besoin B par un parfait plus petit, on peut supposer l'hypothèse (i) vérifiée. Dans tous les cas nous pouvons donc supposer la conclusion du lemme 25 valide. Construisons alors par récurrence une suite (n_p) d'entiers croissante, une suite $K_p \subset G_{n_p}$ de compacts tels que

$$K_p + \varphi_{n_p}'(B) = G_{n_p}, m_{n_p}(K_{n_p}) \leq \frac{2}{3} m_{n_{p-1}}(K_{n_{p-1}}),$$

et tels que pour $k \in K_p$, $\varphi_{n_p, n_{p+1}}^{-1}(k) \cap K_{p+1}$ possède au moins deux éléments (cette condition est automatiquement vérifiée par la construction du lemme 25 puisque une partie couvrante pour deux éléments distincts possède au moins deux éléments). Pour tout entier p , on a $\varphi_{n_p}'^{-1}(K_p) + B = G'$.

Posons $K = \bigcap \varphi_n'^{-1}(K_p)$; (intersection décroissante) On a alors

$$K + B = G', \quad m'(K) = 0$$

et K est parfait.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 26. — Soit G un groupe localement compact abélien, A un compact parfait de G . Il existe un compact parfait, K de G , de mesure de Haar nulle, tel que $\widehat{K + A} \neq \phi$.

Démonstration. — G est de la forme $\mathbb{R}^n \times G'$, où G' contient un sous groupe G'' compact tel que G'/G'' soit discret.

Si la projection de A sur un des facteurs isomorphes à \mathbb{R} est non dénombrable le raisonnement a déjà été fait. Sinon la projection de A sur \mathbb{R}^n a un point isolé. On peut donc supposer qu'elle se réduit à ce point (puisque l'ensemble des points de A se projetant en ce point est parfait) puis par translation que $A \subset G'$. L'image de A dans G'/G'' est finie. En répétant le même raisonnement on peut supposer $A \subset G''$. Soit $K'' \subset G''$ un parfait, tel que

$$m''(K'') = 0 \quad \text{et} \quad K'' + A = G''.$$

Posons $K = [0,1]^n \times K''$. Alors $K + A = [0,1]^n \times G''$ est d'intérieur non vide, K est parfait, et $m(K) = 0$.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique, Topologie générale*, chapitre 7.
- [2] G. CHOQUET, *Lectures on Analysis, Tome 1*, W. A Benjamin, Inc. 1969.
- [3] H. FAKHOURY, *Sélections continues dans les espaces uniformes*, C.R.A.S., 180 (1975), 213-216.
- [4] A. PELCZYNSKI, *Linear extension, linear averagings, ... Dissertations Mathematicae*, L VIII (1968).

- [5] M. TALAGRAND, Sommes vectorielles d'ensembles de mesures nulles,
C.R.A.S. 180 (1975), 853-855.

Manuscrit reçu le 21 mai 1975

Proposé par G. Choquet.

Michel TALAGRAND,

Equipe d'Analyse

E.R.A. au CNRS n° 294

Université Pierre et Marie Curie

Tour 46 – 4^e étage

4, Place Jussieu

75230 Paris cedex 05.