ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 117-131

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_117_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 117-131.

COURBES ANALYTIQUES SUR UN GERME D'ESPACE ANALYTIQUE ET APPLICATIONS

par **Jean-Claude TOUGERON**

Si X désigne le germe en O d'une sous-variété algébrique de $\mathbf{C}^N$, on note $\mathcal{A}_X$ l'anneau des germes de fonctions algébriques sur X; $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X; $\hat{\mathcal{O}}_X$ le complété de $\mathcal{A}_X$ pour la topologie m_X-adique, m_X désignant l'idéal maximal de $\mathcal{A}_X$; $\tilde{m}_X$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_X$; $\hat{m}_X$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_X$. Les anneaux $\mathcal{A}_X$, $\mathcal{O}_X$, $\hat{\mathcal{O}}_X$ seront toujours munis de leurs topologies : m_X-adique, $\tilde{m}_X$-adique, $\hat{m}_X$-adique, respectivement. Si Y est un second germe de variété algébrique et si f: X $\to$ Y est un morphisme algébrique, on note $f^* : \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$; $\tilde{f}^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$; $\hat{f}^* : \hat{\mathcal{O}}_Y \to \hat{\mathcal{O}}_X$, les homomorphismes de $\mathbf{C}$-algèbres déduits de f.

Cela posé, nous démontrons d'abord le résultat suivant, bien connu lorsque le morphisme $\tilde{f}^*$ est fini :

Théorème (A). — *Si* X *est un germe analytiquement irréductible, l'application induite par* $\tilde{f}^* : \mathcal{O}_Y \to \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$ *est ouverte* (1).

Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème précédent* :

(1) *Il existe une application* : $\mathbf{N} \ni q \to e(q) \in \mathbf{N}$ *telle que, pour tout* q :
$$\tilde{f}^*(\tilde{m}_Y^q) \supset \tilde{m}_X^{e(q)} \cap \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$$

(2) $\operatorname{Ker} \hat{f}^* = \ker \tilde{f}^* . \hat{\mathcal{O}}_Y$.

(1) Le théorème est encore vrai si l'on suppose simplement que X est réduit. Cela se déduit très facilement du cas irréductible.

(3) *L'application* $\hat{f}^* : \hat{\mathcal{O}}_Y \to \hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y)$ *est ouverte et* $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y)$ *est fermé dans* $\hat{\mathcal{O}}_X$.

Preuve. — La condition (1) équivaut au théorème (A).

Soit $\xi \in \ker \hat{f}^*$; soit $\xi_q \in \mathcal{O}_Y$ tel que $\xi - \xi_q \in \hat{m}_Y^{e(q)}$. Alors $\tilde{f}^*(\xi_q) \in \tilde{m}_X^{e(q)}$ et donc, d'après (1), il existe $\xi'_q \in \ker \tilde{f}^*$ tel que $\xi_q - \xi'_q \in \tilde{m}_Y^q$; ainsi : $\xi - \xi'_q \in \hat{m}_Y^q$, en supposant $e(q) \geqslant q$, ce qui n'est pas restrictif. Ceci démontre l'inclusion

$$\ker \hat{f}^* \subset \ker \tilde{f}^* . \hat{\mathcal{O}}_Y,$$

d'où l'égalité (2).

(3) se démontre de manière analogue (on peut aussi le démontrer directement de manière très élémentaire, en utilisant simplement le fait que $\hat{\mathcal{O}}_X$ et $\hat{\mathcal{O}}_Y$ sont des algèbres complètes).

D'après (3), l'adhérence de $\tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$ dans $\mathcal{O}_X$ est égale à $\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X$. Notre second résultat est alors le suivant :

Théorème (B). — *Supposons* X *analytiquement irréductible. Si le germe d'ensemble analytique* Y' *associé à l'idéal* $\ker \tilde{f}^*$ *de* $\mathcal{O}_Y$ *est régulier, on a l'égalité :*

$$\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X = \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y)$$
$$\textit{i.e. } \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y) \textit{ est fermé dans } \mathcal{O}_X.$$

Signalons enfin que les résultats précédents sont faux en géométrie analytique. On sait en effet (voir [3]) qu'il existe des germes d'applications analytiques $\tilde{f} : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ tels que $\ker \tilde{f}^* = 0$ et $\ker \hat{f}^* \neq 0$.

La démonstration utilise quelques résultats simples concernant les courbes analytiques sur un germe d'espace analytique.

1. Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique.

Soit $\mathcal{P}_{n,q}$ le sous-espace de $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ formé des polynômes de degré $\leqslant q$. L'espace $\mathbf{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, on pose, si $P \in \mathscr{P}_{n,q}$ et A est un sous-ensemble de la boule $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de $\mathbf{R}^n$:

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leqslant \frac{1}{2}} |P(x)|$$

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$$

Lemme 1.1. — *Il existe une constante* $C_n > 0$, *indépendante de* q, *telle que pour tout* $P \in \mathscr{P}_{n,q}$ *et tout sous-ensemble* A *de* $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *la mesure de Lebesgue de* $\overline{A}$ *étant supposée non nulle :*

$$\|P\| \leqslant \frac{C_n^q}{(\operatorname{mes} \overline{A})^{nq}} \cdot \|P\|_A$$

Preuve. — On peut supposer A fermé. Procédons par récurrence sur n. Si $n = 1$, il existe des points $x_0 < x_1 < \cdots < x_q$ appartenant à $A \subset \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, tels que, $\forall i$,

$$|x_i - x_{i+1}| \geqslant \frac{\operatorname{mes} A}{q}.$$

On a l'identité :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{q} P(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

d'où :

$$\|P\| \leqslant \|P\|_A \frac{(q)^q}{(\operatorname{mes} A)^q} \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{i!\, q-i!}$$
$$= \frac{\|P\|_A}{(\operatorname{mes} A)^q} \frac{(2q)^q}{q!} \leqslant \frac{(2e)^q}{(\operatorname{mes} A)^q} \|P\|_A.$$

Supposons le résultat démontré jusqu'à l'ordre $n - 1$ et démontrons-le pour n. Pour tout $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, soit A_{x_1} l'ensemble des points de A dont la première coordonnée est x_1. A_{x_1} étant muni de sa mesure $(n-1)$-dimensionnelle, l'ensemble

$$B = \left\{ x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right]; \text{mes } A_{x_1} \geqslant \frac{\text{mes } A}{2} \right\}$$

a une mesure $\geqslant \dfrac{\text{mes } A}{2}$ (car sinon, on aurait d'après Fubini :
$\text{mes } A = \int_B \text{mes } A_{x_1}\, dx_1 + \int_{\complement B} \text{mes } A_{x_1}\, dx_1 < \dfrac{\text{mes } A}{2} + \dfrac{\text{mes } A}{2}\Big)$.

Posons $P_{x_1} = P(x_1, .) \in \mathscr{P}_{n-1,q}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, si $x_1 \in B$:

$$\|P_{x_1}\| \leqslant \frac{(2^{n-1}C_{n-1})^q}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \cdot \|P\|_A$$

Puisque $\text{mes } B \geqslant \dfrac{\text{mes } A}{2}$, en appliquant le cas $n = 1$:

$$\|P\| \leqslant \frac{(4e)^q}{(\text{mes } A)^q} \cdot \frac{(2^{n-1}C_{n-1})^q}{(\text{mes } A)^{(n-1)q}} \|P\|_A, \quad \text{c.q.f.d./}$$

Soient $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]] = \mathscr{F}_n^{\mathbf{R}}$ l'anneau des séries formelles; $\mathbf{R}\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathcal{O}_n^{\mathbf{R}}$ l'anneau des séries convergentes. Identifions l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbf{R})$ à l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^n$ issues de l'origine.

Proposition 1.2. — *Soit* $\varphi \in \mathscr{F}_n^{\mathbf{R}}$ *et soit* A *un sous-ensemble mesurable et de mesure non nulle de* $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{R})$.

(1) *Si* φ *est analytique sur toute droite appartenant à* A, *i.e.* $\varphi(a_1 t, \ldots, a_n t) \in \mathbf{R}\{t\}$ *pour tout* $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, *alors* $\varphi \in \mathcal{O}_n^{\mathbf{R}}$.

(2) *Si* φ *est* μ*-plate sur toute droite appartenant à* A, *alors* φ *est* μ*-plate.*

Preuve. — (1) Posons $\varphi = \sum_{q=0}^{\infty} \varphi_q$, où φ_q désigne la forme homogène de degré q de φ. Par hypothèse, la fonction $f(\bar{a}) = \sup_{i \in \mathbf{N}} \sqrt[q]{\left|\varphi_q\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)\right|}$ prend des valeurs finies sur A. Il en résulte qu'il existe un sous-ensemble A′ de A mesurable et de mesure non nulle et un $p > 0$, tels que l'on ait uniformément sur A', $f(\bar{a}) \leqslant 2p$. Soit A'' l'ensemble de mesure n-dimensionnelle non nulle, intersection du cône de A' avec la boule $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$; on a : $\|\varphi_q\|_{A''} \leqslant p^q$. D'après 1.1 :

$$\|\varphi_q\| \leqslant \left(\frac{C_n \cdot p}{(\text{mes } A'')^n}\right)^q.$$

D'après une inégalité classique (cf. [2], page 12, l'inégalité (10) est encore valable pour plusieurs variables), si

$$\varphi_q(x) = \sum_{|\omega|=q} a_\omega x^\omega :$$

$$|a_\omega| \leqslant \frac{(2q)^q}{q\,!} \|\varphi_q\| \leqslant (2e)^q \|\varphi_q\|$$

La série φ est donc convergente.

(2) La preuve de (2) est immédiate et laissée au lecteur./

Bien entendu, le résultat précédent est vrai *a fortiori* dans le cas complexe. Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. — *Soit* $\varphi \in \mathcal{F}_n = \mathbf{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ *et soit* A *un sous-ensemble mesurable, et de mesure non nulle de* $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$.

1) *Si* φ *est analytique sur toute droite appartenant à* A, *i.e.* $\varphi(a_1 t, \ldots, a_n t) \in \mathbf{C}\{t\}$ *pour tout* $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, *alors* : $\varphi \in \mathcal{O}_n = \mathbf{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

2) *Si* φ *est* μ*-plate sur toute droite appartenant à* A, *alors* φ *est* μ*-plate.*

Soit $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)) \in \mathbf{C}\{t\}^n$, $\xi(0) = 0$, un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$(²). Désignons par $\mathcal{C}_\nu(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ telles que $\xi(t) - \xi'(t)$ soit ν-plate à l'origine. On a le résultat suivant :

LEMME 1.4. — *Avec les notations précédentes* :

1) *Si* $\varphi \in \mathcal{F}_n$ *est analytique sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, *alors* φ *est analytique.*

2) *Il existe une application* $\mathbf{N} \ni \mu \to e(\mu) \in \mathbf{N}$ *telle que* si $\varphi \in \mathcal{F}_n$ *est* $e(\mu)$*-plate sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathcal{C}_\nu(\xi)$, φ *est* μ*-plate.*

(²) Dans cet article, un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$ sera toujours un germe d'application analytique : $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$.

Preuve. — On peut supposer que ξ est égale à son jet d'ordre ν à l'origine. Si $\xi = 0$, la proposition résulte immédiatement de 1.3. Si $\xi \neq 0$, on peut, par un changement linéaire de coordonnées, supposer que $\xi_i \neq 0$, pour

$$i = 1, \ldots, n.$$

Considérons alors le germe d'application analytique f:

$$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\xi_1(z_1^{\nu+1} + z_n), \ldots, \xi_{n-1}(z_{n-1}^{\nu+1} + z_n), \xi_n(z_n))$$

Visiblement, si η est le germe de droite

$$t \longmapsto (a_1 t, \ldots, a_{n-1} t, t),$$

$f \circ \eta$ appartient à $\mathscr{C}_\nu(\xi)$.

(1) Si φ est analytique sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathscr{C}_\nu(\xi)$, $\varphi \circ f$ est analytique sur chaque droite η et, d'après 1.3. 1), $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_n$. Le morphisme f étant fidèlement plat et fini (vérification immédiate), $\varphi \in \mathcal{O}_n$[3].

(2) Le morphisme f étant plat et fini, il existe, d'après le théorème d'Artin-Rees, une application $\mathbf{N} \ni \mu \to e(\mu) \in \mathbf{N}$ telle que l'hypothèse $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate entraîne que φ est μ-plate. Si φ est $e(\mu)$-plate sur chaque courbe $\xi'(t) \in \mathscr{C}_\nu(\xi)$, $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate sur chaque droite η; d'après 1.3. 2), $\varphi \circ f$ est $e(\mu)$-plate, d'où le résultat./

1.5. — On se propose d'étendre le résultat précédent, le germe régulier $(\mathbf{C}^n, 0)$ étant remplacé par un germe *irréductible* d'espace analytique X. Soient $\mathcal{O}_X$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X; $\hat{\mathcal{O}}_X$ son complété pour la topologie m_X-adique (m_X : idéal maximal de $\mathcal{O}_X$). Soit n la dimension de $\mathcal{O}_X$.

On peut réaliser X comme germe d'espace analytique à l'origine de $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{N-n}$, les conditions suivantes étant satisfaites (cf. [4], page 49) :

(1.5.1) Si Π désigne la projection $X \to (\mathbf{C}^n, 0)$, l'homo-

[3] Si B est un anneau fidèlement plat sur A par une injection $i : A \to B$, et si M, N sont des A-modules, $N \subset M$, on a :

$$N = M \cap (N \otimes_A B)$$

On applique ce résultat à $A = \mathcal{O}_n$; $B = \mathcal{O}_n$; $i = f$; $N = \mathcal{O}_n$; $M = \mathscr{F}_n$.

morphisme $\Pi^*: \ \mathcal{O}_n = \mathbf{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathcal{O}_X = \dfrac{\mathcal{O}_N}{\mathfrak{P}}$ est injectif et fini.

(1.5.2) Si p est la dimension du corps des fractions de $\mathcal{O}_X$ sur le corps des fractions de $\mathcal{O}_n$, le polynôme minimal de $\bar{z}_{n+1}$ est un polynôme distingué : $P(Z) = Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i Z^{p-i}$, à coefficients $a_i \in \mathcal{O}_n$ $\left(\text{donc } z_{n+1}^p + \sum_{i=1}^{p} a_i z_{n+1}^{p-i} \in \mathfrak{P}\right)$

(1.5.3) Si Δ est le discriminant de ce polynôme, $\Delta \neq 0$, et :

$$\Delta . \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_n + \mathcal{O}_n . \bar{z}_{n+1} + \cdots + \mathcal{O}_n . \bar{z}_{n+1}^{p-1}$$

En particulier, $\Delta . \bar{z}_{n+j} = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} \bar{z}_{n+1}^i$, pour $j = 2, \ldots, N - n$, les $a_{ij} \in \mathcal{O}_n$.

Enfin, le complété $\hat{\mathcal{O}}_X$ de $\mathcal{O}_X$ est intègre; les résultats précédents subsistent en remplaçant $\mathcal{O}_X$ par $\hat{\mathcal{O}}_X$, $\mathcal{O}_n$ par $\mathcal{F}_n$; en particulier $\hat{\mathcal{O}}_X$ est de type fini sur $\mathcal{F}_n$ et :

$$\Delta . \hat{\mathcal{O}}_X \subset \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_n . \bar{z}_{n+1} + \cdots + \mathcal{F}_n . \bar{z}_{n+1}^{p-1}.$$

Soit $\eta(t)$ un germe de courbe analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$, tel que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. D'après ce qui précède et le théorème de Puiseux (voir [4], lemme 8.1, chap. III), la courbe $\eta(t)$ se relève en des courbes dans X, analytiques en $t^{1/p!}$:

$$\xi^1(t), \ldots, \xi^p(t)$$

(donc $\Pi \circ \xi^i(t) = \eta(t)$). Si l'on pose $\xi^i(t) = (\xi_1^i(t) \ldots, \xi_N^i(t))$, les $\xi_{n+1}^1(t), \ldots, \xi_{n+1}^p(t)$ sont les zéros du polynôme

$$Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta(t)) Z^{p-i},$$

et donc vérifient l'identité :

$$\prod_{i<j} (\xi_{n+1}^i(t) - \xi_{n+1}^j(t))^2 = \Delta(\eta(t)).$$

Considérons une courbe analytique $\xi(t)$ dans X. Si λ et ν sont des entiers $\geqslant 1$, désignons par $\mathscr{C}_\nu^\lambda(\xi)$ l'ensemble des courbes $\xi'(t)$ dans X analytiques en $t^{1/\lambda}$ telles que

$\xi'(t) - \xi(t)$ soit ν-plate à l'origine (cela signifie que

$$\xi'(t^\lambda) - \xi(t^\lambda)$$

est $\lambda\nu$-plate à l'origine, i.e. les tronqués à l'ordre $\lambda\nu$ des germes d'applications analytiques

$$\xi'(t^\lambda) \text{ et } \xi(t^\lambda) : (\mathbf{C}, 0) \to X \text{ sont égaux}).$$

La démonstration du résultat principal nécessite deux lemmes préliminaires.

Lemme 1.6. — *Soit* $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X; *posons* $\eta = \Pi \circ \xi$. *Si* $\Delta(\eta(t)) \neq 0$, *à tout entier* $\nu \geqslant 1$, *on peut associer un entier* $\nu_0 \geqslant 1$, *tel que* :

$$\Pi \mathscr{C}_\nu^{p!}(\xi) \supset \mathscr{C}_{\nu_0}(\eta)$$

i.e. chaque courbe de $\mathscr{C}_{\nu_0}(\eta)$ *se relève en une courbe de* $\mathscr{C}_\nu^{p!}(\xi)$.

Preuve. — Posons $\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \alpha_2 t^{\nu_1+1} + \cdots$, avec $\alpha_1 \neq 0$. On sait que $\xi_{n+1}(t)$ est l'une des racines du polynôme distingué : $Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta(t))Z^{p-i}$. Il existe donc un entier $\nu_0 \geqslant \nu + \nu_1$ vérifiant la condition suivante : si $\eta'(t) \in \mathscr{C}_{\nu_0}(\eta)$, il existe $\xi'_{n+1}(t)$ racine du polynôme $Z^p + \sum_{i=1}^{p} a_i(\eta'(t))Z^{p-i}$ telle que $\xi_{n+1}(t) - \xi'_{n+1}(t)$ soit $\nu + \nu_1$-plate à l'origine. Soit $\xi' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_N)$ la courbe de X relevant $\eta'(t)$ et correspondant à cette racine. D'après 1.5.3), pour $j = 2, \ldots, N - n$, on a :

$$\Delta(\eta(t)) . \xi_{n+j}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta(t))\xi_{n+1}(t)^i$$

$$\Delta(\eta'(t)) . \xi'_{n+j}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta'(t))\xi'_{n+1}(t)^i$$

Or, $\Delta(\eta(t)) - \Delta(\eta'(t))$, de même que la différence des seconds membres des égalités précédentes, sont $\nu + \nu_1$-plates à l'origine. Puisque

$$\Delta(\eta(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \cdots, \Delta(\eta'(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \cdots,$$

la différence $\xi_{n+j}(t) - \xi'_{n+j}(t)$ est ν-plate à l'origine. Ainsi, la courbe $\xi'(t)$ appartient à $\mathscr{C}_\nu^{p!}(\xi)$, c.q.f.d./

LEMME 1.7. — *Il existe une application* $\mathbf{N} \ni \mu \to e'(\mu) \in \mathbf{N}$ *vérifiant la propriété suivante : si deux éléments* $f \in \mathcal{O}_X$, $g \in \mathcal{O}_X$ *sont tels que* f.g *soit* $e'(\mu)$*-plate à l'origine, alors* f *(ou* g*) est* μ*-plate à l'origine.*

Preuve. — Posons $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_N/\mathfrak{P}$, et soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_q$ un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{P}$. Considérons l'équation implicite :

$$y_1 \cdot y_2 = \sum_{j=1}^{q} y_{j+2} \cdot \varphi_j(z).$$

On sait (voir [1]) qu'il existe une application

$$\mathbf{N} \ni \mu \to e'(\mu) \in \mathbf{N}$$

telle que toute solution formelle $\bar{y}(z)$ de cette équation, modulo $\underline{m}^{e'(\mu)+1}$ ($\underline{m}$: idéal maximal de $\mathcal{O}_N$) puisse être approchée à l'ordre μ par une solution analytique. En conséquence, si $f.g$ est $e'(\mu)$-plate à l'origine, il existe $f' \in \mathcal{O}_X$, $g' \in \mathcal{O}_X$, tels que $f'.g' = 0$, et $f - f'$, $g - g'$ sont μ-plates à l'origine. Si par exemple, $f' = 0$, on en déduit que f est μ-plate à l'origine, c.q.f.d./

PROPOSITION 1.8. — *Soit* $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X; *posons* $\eta = \Pi \circ \xi$ *et supposons que* $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. *Il existe une application* $\mathrm{N} \ni \mu \to e(\mu) \in \mathbf{N}$ *telle que, si* $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ *est* $e(\mu)$*-plate sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathscr{C}_\nu^{\mathrm{pl}}(\xi)$, *alors* φ *est* μ*-plate.*

Preuve. — D'après 1.6, $\Pi\mathscr{C}_\nu^{\mathrm{pl}}(\xi) \supset \mathscr{C}_{\nu_0}(\eta)$. D'après 1.4.2, il existe une application $\mathbf{N} \ni \mu \to e''(\mu) \in \mathbf{N}$ telle que, si $\psi \in \mathscr{F}_n$ est $e''(\mu)$-plate sur chaque courbe $\eta'(t) \in \mathscr{C}_{\nu_0}(\eta)$, ψ est μ-plate.

Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$, et supposons qu'il existe $\psi_1, \ldots, \psi_s \in \mathscr{F}_n$ telles que $\varphi^s + \sum_{i=1}^{s} \psi_i \varphi^{s-i}$ soit $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$-plate à l'origine de X et φ $e''(e'e'')^{s-1}(\mu)$-plate sur chaque courbe

$$\xi'(t) \in \mathscr{C}_\nu^{\mathrm{pl}}(\xi).$$

Montrons alors par récurrence sur s, que φ est μ-plate à l'origine de X (La fonction e' est celle fournie par le lemme

1.7; d'autre part, on suppose que les fonctions e' et e'' sont croissantes, ce qui n'est pas restrictif).

C'est vrai pour $s = 1$. Si $s > 1$, on voit que ψ_s est $(e'e'')^{s-1}(\mu)$-plate à l'origine de $\mathbf{C}^n$. D'après 1.7, ou φ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$-plate à l'origine de X, ou $\varphi^{s-1} + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_i \varphi^{s-i-1}$ est $e''(e'e'')^{s-2}(\mu)$-plate. Dans le 1er cas, le résultat est démontré; dans le second, on applique l'hypothèse de récurrence.

Ceci démontre la proposition, car tout $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ vérifie une équation de dépendance intégrale :

$$\varphi^s + \sum_{i=1}^{s} \psi_i \varphi^{s-i} = 0, \quad \text{avec} \quad s \leqslant p \quad \text{et} \quad \psi_i \in \mathcal{F}_n./$$

L'analogue de la proposition précédente, la platitude étant remplacée par l'analyticité, serait le résultat suivant :

Conjecture 1.9. — *Le germe irréductible d'espace analytique* X *vérifie la condition suivante* :

C(X) *Soit* $\xi(t)$ *une courbe analytique dans* X; *posons* $\eta = \Pi \circ \xi$ *et supposons que* $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. *Alors, si* $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$ *est analytique sur chaque courbe* $\xi'(t) \in \mathscr{C}_\nu^{p!}(\xi)$, φ *est analytique, i.e.* $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

D'après 1.4. 1), ceci est vrai lorsque X est régulier. On a aussi le résultat suivant, facile à vérifier : soit $f : X \to Y$ un morphisme analytique entre germes irréductibles; si

$$f^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

est injectif et fini et si X vérifie 1.9, Y le vérifie également. Signalons enfin qu'il suffirait de démontrer 1.9, lorsque X est un germe irréductible d'hypersurface à l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$. On peut démontrer le résultat suivant, plus faible :

Proposition 1.10. — *Soit* $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$; *si* φ *est analytique sur chaque courbe analytique dans* X, φ *est analytique, i.e.* $\varphi \in \mathcal{O}_X$.

Preuve. — Soit $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_X$; d'après 1.5, il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{F}_n$ telles que :

$$\Delta . \varphi = \sum_{i=1}^{p} a_i \bar{z}_{n+1}^{p-i}.$$

Soit $\eta(t)$ une courbe analytique dans $(\mathbf{C}^n, 0)$ telle que $\Delta(\eta(t)) \neq 0$. Soient $\xi^1(t), \ldots, \xi^p(t)$ les courbes dans X qui relèvent $\eta(t)$. Par hypothèse, pour $j = 1, \ldots, p$:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i(\eta(t))\xi_{n+1}^j(t)^{p-i} = \sigma_j(t)$$

est analytique.

Résolvant ce système et remarquant que le carré de son déterminant est $\Delta(\eta(t)) \neq 0$, on vérifie que

$$a_1(\eta(t)), \ldots, a_p(\eta(t))$$

sont analytiques. D'après 1.3.1) $a_1, \ldots, a_p$ sont analytiques. Ainsi, $\Delta . \varphi \in \mathcal{O}_X$; l'anneau $\mathcal{F}_X$ étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_X$, $\varphi \in \mathcal{O}_X$, c.q.f.d./

2. Preuves de (A) et (B).

2.1. — Soit $f: X \to Y$ un morphisme algébrique entre germes de variétés algébriques et supposons X *analytiquement irréductible.* Nous démontrons (A) et, parallèlement, le résultat suivant :

Théorème (B'). — *Supposons* X *analytiquement irréductible. Si le germe d'ensemble analytique* Y' *associé à l'idéal* $\ker \tilde{f}^*$ *de* $\mathcal{O}_Y$ *vérifie la condition* C(Y'), *on a l'égalité* :

$$\hat{f}^*(\hat{\mathcal{O}}_Y) \cap \mathcal{O}_X = \tilde{f}^*(\mathcal{O}_Y).$$

Le théorème (B') entraîne (B), car tout germe régulier Y' vérifie C(Y'), d'après 1.4.1. Visiblement, on peut supposer que l'homomorphisme $f^* : \mathcal{A}_Y \to \mathcal{A}_X$ est *injectif.* Soient $[\mathcal{A}_X]$, $[\mathcal{A}_Y]$ les corps de fractions de $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ respectivement.

Lemme 2.2. — *Soit* p *le degré de transcendance de* $[\mathcal{A}_X]$ *sur* $[\mathcal{A}_Y]$. *Alors,* $f = \pi \circ g$, *où* $g : X \to Y \times (\mathbf{C}^p, 0) = V$ *est un germe d'application algébrique tel que* g^* *soit injective et* $[\mathcal{A}_X]$ *une extension algébrique finie de* $[\mathcal{A}_V]$;

$$\pi : Y \times (\mathbf{C}^p, 0) \to Y$$

la projection évidente.

Preuve. — Soient $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \underline{m}_X$ tels que $\xi_1, \ldots, \xi_p$ soient algébriquement indépendants sur $[\mathscr{A}_Y]$ et $[\mathscr{A}_X]$ soit une extension algébrique finie de $[\mathscr{A}_Y[\xi_1, \ldots, \xi_p]]$. Il suffit de prendre pour $\mathscr{A}_V$ le localisé de $\mathscr{A}_Y[\xi_1, \ldots, \xi_p]$ par rapport à l'idéal maximal engendré par $\underline{m}_Y$ et $\xi_1, \ldots, \xi_p$./

Soit q la dimension de $[\mathscr{A}_X]$ sur $[\mathscr{A}_V]$. Le corps $[\mathscr{A}_X]$ est engendré, en tant qu'algèbre sur $[\mathscr{A}_V]$, par un élément $\theta \in [\mathscr{A}_X]$. Visiblement, quitte à multiplier θ par un élément de $\mathscr{A}_V\setminus\{0\}$, on peut supposer que $\theta \in \mathscr{A}_X$, ou mieux que $\theta \in \underline{m}_X$, et que son polynôme minimal :

$$P(Z) = Z^q + \sum_{i=1}^{q} a_i Z^{q-i}$$

a ses coefficients $a_i \in \mathscr{A}_V$. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_r$ une famille d'éléments de $\underline{m}_X$ telle que tout élément de $\mathscr{A}_X$ soit de la forme $\varphi(1+\mathscr{P})^{-1}$ où φ et $\mathscr{P}$ sont des polynômes en $\theta_1, \ldots, \theta_r$ à coefficients dans $\mathscr{A}_V$, $\mathscr{P} \in \underline{m}_X$. Il existe des polynômes $Q_j(Z) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij} Z^i$, à coefficients $a_{ij} \in \mathscr{A}_V$ et $S \in \mathscr{A}_V$, $S \neq 0$, tels que, pour $j = 1, \ldots, r$:

$$S.\theta_j = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}\theta^i.$$

LEMME 2.3. — *Soit* $\xi(t)$ *un germe de courbe analytique dans* X *et posons :* $\eta(t) = g \circ \xi(t)$. *Supposons que* $S(\eta(t)) \neq 0$. *Alors, il existe un entier* $\nu \geqslant 1$, *tel que pour tout entier* $\lambda \geqslant 1$, *toute courbe dans* V : $\eta'(t) \in \mathscr{C}_\nu^\lambda(\eta)$ *se relève (par* g*) en une courbe analytique en* $t^{\frac{1}{\lambda \cdot q!}}$ *dans* X.

Preuve. — Par hypothèse :

$$\theta(\xi(t))^q + \sum_{i=1}^{q} a_i(\eta(t))\theta(\xi(t))^{q-i} = 0 \quad \text{et pour} \quad j = 1, \ldots, r :$$

$$S(\eta(t)).\theta_j(\xi(t)) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta(t))\theta(\xi(t))^i.$$

Puisque $S(\eta(t)) \neq 0$,

$$S(\eta(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \alpha_2 t^{\nu_1+1} + \cdots,$$

avec $\alpha_1 \neq 0$, ν_1 entier $\geqslant 0$.

Choisissons $\nu \geqslant \nu_1$ assez grand de telle sorte que, si

$$\eta'(t) \in \mathscr{C}_\nu^\lambda(\eta),$$

il existe $\bar{\theta}(t)$ analytique en $t^{\frac{1}{q!\lambda}}$ telle que :

$$\bar{\theta}(t)^q + \sum_{i=1}^{q} a_i(\eta'(t))\bar{\theta}(t)^{q-i} = 0$$

et $\qquad \theta(\xi(t)) - \bar{\theta}(t)$ soit ν_1-plate.

Définissons $\bar{\theta}_1(t), \ldots, \bar{\theta}_r(t)$ par les identités :

$$S(\eta'(t)).\bar{\theta}_j(t) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta'(t))\bar{\theta}(t)^i$$

Visiblement, $S(\eta'(t)) = \alpha_1 t^{\nu_1} + \cdots$; puisque

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta(t))\theta(\xi(t))^i$$

est ν_1-plate à l'origine (car $\theta_j(\xi(t))$ est 0-plate), il en est de même de $\sum_{i=0}^{p-1} a_{ij}(\eta'(t))\bar{\theta}(t)^i$; ainsi, pour $j = 1, \ldots, r$, $\bar{\theta}_j(t)$ est 0-plate.

L'homomorphisme $\eta'^* : \mathscr{A}_V \to \mathbf{C}\left\{t^{\frac{1}{\lambda}}\right\}$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme

$$\xi'^* : \quad \mathscr{A}_V[\theta]_S \to \left[\mathbf{C}\left\{t^{\frac{1}{\lambda q!}}\right\}\right]$$

tel que $\xi'^*(\theta) = \bar{\theta}(t)$ ($\mathscr{A}_V[\theta]_S$ désigne l'anneau des polynômes en θ à coefficients de la forme φ/S^s, $\varphi \in \mathscr{A}_V$, s entier). Cet homomorphisme ξ'^* induit un homomorphisme ξ'^* : $\mathscr{A}_V[\theta_1, \ldots, \theta_r] \to \mathbf{C}\left\{t^{\frac{1}{\lambda q!}}\right\}$ tel que, pour $j = 1, \ldots, r$:

$$\xi'^*(\theta_j) = \bar{\theta}_j(t);$$

enfin, ce dernier se prolonge de manière unique en un homomorphisme, noté encore $\xi'^* : \mathscr{A}_X \to \mathbf{C}\left\{t^{\frac{1}{\lambda q!}}\right\}$. La courbe ξ' ainsi obtenue relève η', c.q.f.d./

2.4. *Preuves de* (A) *et* (B'). — Soit Y' le germe d'ensemble analytique irréductible associé à l'idéal $\ker \tilde{f}^*$. Rappelons tout d'abord qu'il existe $\Delta \in \mathcal{O}_{Y'}\setminus\{0\}$ et un entier $\lambda \geqslant 1$ tels que, si $\gamma(t)$ est une courbe analytique dans Y', vérifiant $\Delta(\gamma(t)) \neq 0$:

(1) Il existe une application $\mathbf{N} \ni \mu \to e(\mu) \in \mathbf{N}$ telle que si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_{Y'}$ est $e(\mu)$-plate sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathscr{C}^\lambda_\nu(\gamma)$, alors φ est μ-plate (d'après 1.8).

Et sous les hypothèses de (B′), i.e. Y' vérifie $C(Y')$:

(2) Si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_{Y'}$ est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathscr{C}^\lambda_\nu(\gamma)$, $\varphi \in \mathcal{O}_{Y'}$.

Le germe d'application f se factorise de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & Y \times (\mathbf{C}^p, 0) = V \arrow[d, "\pi"] \\ Y' \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

où f' et i sont analytiques, π et g algébriques. Ceci rappelé, il existe une courbe analytique $\xi(t)$ dans X telle que, si l'on pose $\gamma(t) = f' \circ \xi(t)$ et $\eta(t) = g \circ \xi(t)$, on ait $\Delta(\gamma(t)) \neq 0$ et $S(\eta(t)) \neq 0$ (sinon, $(\Delta \circ f')$. $(S \circ g)$ serait nul sur toute courbe analytique dans X, donc nul. Il en résulterait que $\Delta = 0$, car $\tilde{f}'^*$ est injective; ou $S = 0$, car g^* est injective, ce qui est absurde).

D'après 2.3, il existe un entier ν tel que toute courbe $\gamma'(t) \in \mathscr{C}^\lambda_\nu(\gamma)$ (qui se relève de manière évidente en une courbe $\eta'(t) \in \mathscr{C}^\lambda_\nu(\eta)$) se relève par f en une courbe analytique dans X, en $t^{\frac{1}{\lambda.q!}}$.

Preuve de (A). — Si $\varphi \in \mathcal{O}_{Y'}$ est telle que $\tilde{f}'^*(\varphi) = \varphi \circ f'$ est $\lambda.q!\ e(\mu)$-plate, $\varphi \circ f'$ est $e(\mu)$-plate sur chaque courbe en $t^{\frac{1}{\lambda.q!}}$; donc φ est $e(\mu)$-plate sur toute courbe

$$\gamma'(t) \in \mathscr{C}^\lambda_\nu(\gamma);$$

d'après (1), φ est μ-plate.

Preuve de (B'). — Si $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_{Y'}$ est telle que $f'^*(\varphi) = \varphi \circ f'$ est analytique, alors φ est analytique sur chaque courbe $\gamma'(t) \in \mathscr{C}^\lambda(\gamma)$; d'après (2), $\varphi \in \mathcal{O}_{Y'}$.

Pour terminer, signalons quelques problèmes :

(1) Démontrer (A) lorsque X n'est pas réduit, ou plus généralement :

— démontrer le résultat suivant : Soit $f : X \to Y$ un morphisme algébrique entre germes de variétés algébriques; soient M_X (resp. M_Y) un module de type fini sur $\mathscr{A}_X$ (resp. $\mathscr{A}_Y$) et $\varphi : M_Y \to M_X$ un homomorphisme au-dessus de $f^* : \mathscr{A}_Y \to \mathscr{A}_X$. L'application induite par $\varphi : M_Y \to \varphi(M_Y)$ est ouverte.

(2) Démontrer les résultats précédents dans le cas analytique, sous certaines hypothèses raisonnables sur le morphisme analytique f.

(3) Démontrer la conjecture 1.9 (au moins pour un germe de variété algébrique). Ceci entraînerait (B) sous la seule hypothèse que X est réduit. On peut aussi envisager des extensions du théorème (B) analogues aux extensions (1) et (2) du théorème (A).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN, On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, 5 (1968), 277-291.

[2] H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 867, Hermann (1940).

[3] A. M. GABRIELOV, The formal relations between analytic functions, *Functional Anal. Appl.*, 5 (1971), 318-319.

[4] J. Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, *Ergebnisse Der Mathematik*, Band 71, Springer Verlag (1972).

Manuscrit reçu le 22 mai 1975
Révisé le 11 avril 1974
Proposé par B. Malgrange.

Jean-Claude TOUGERON,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Rennes-Beaulieu
B.P. 25 A
35031 Rennes.