JEAN-PIERRE FERRIER

NESSIM SIBONY

Approximation pondérée sur une sous-variété totalement réelle de $\mathbf{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 101-115

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_101_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 101-115.

APPROXIMATION PONDÉRÉE SUR UNE SOUS-VARIÉTÉ TOTALEMENT RÉELLE DE $\mathbf{C}^n$

par J.-P. FERRIER et N. SIBONY

1. Introduction et position du problème.

On considère une sous-variété réelle fermée Σ de dimension k et de classe $\mathscr{C}^r$ de $\mathbf{C}^n$. On suppose dans toute la suite que Σ est totalement réelle, c'est-à-dire qu'en tout point x de Σ l'espace tangent T_x à Σ en x ne contient pas de sous-espace complexe autre que $\{0\}$; cela implique en particulier $k \leqslant n$.

L. Hörmander et J. Wermer ont démontré dans [6] le résultat suivant.

THÉORÈME. — On suppose $r > k/2 + 1$; si K est un compact de Σ, toute fonction continue sur K est uniformément approchable sur K par des fonctions holomorphes au voisinage de K.

Ce résultat a été étendu par E. Cirka [1] d'une part et F. R. Harvey et J. O. Wells [3] d'autre part, au cas d'une variété Σ de classe $\mathscr{C}^1$.

On se propose ici, en utilisant les techniques de [1] et [6], d'étudier le problème de l'approximation, au sens d'un poids sur Σ, des fonctions continues sur Σ vérifiant des hypothèses de croissance à l'infini par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, puis par des polynômes.

Plus précisément, soit w une fonction continue strictement positive sur Σ; on désigne par $\mathscr{C}_w(\Sigma)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques complexes continues f sur Σ telles que $w|f|$ tende vers zéro à l'infini sur Σ. Muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_w = \sup_{x \in \Sigma} w(x)|f(x)|,$$

$\mathscr{C}_w(\Sigma)$ est un espace de Banach. On suppose que w est un poids, c'est-à-dire que $\|p\|_w < +\infty$ pour tout polynôme p; dans ce cas $\mathscr{C}_w(\Sigma)$ contient les polynômes et on se propose d'étudier dans ce cadre le problème de Bernstein, c'est-à-dire de chercher des conditions sous lesquelles les polynômes sont denses dans $\mathscr{C}_w(\Sigma)$.

Nous commençons par approcher les fonctions de $\mathscr{C}_w(\Sigma)$ par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ, sous une condition d'uniforme H-convexité introduite par E. Cirka [1]. Une hypothèse géométrique sur Σ permet ensuite de faire l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage tubulaire fixe. Le passage à l'approximation par des polynômes se fait à l'aide des techniques de [8].

Fixons quelques notations; de façon générale, lorsque Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et ψ une fonction numérique continue strictement positive sur Ω, on notera $H^2(\Omega, \psi)$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur Ω, qui sont de carré intégrable pour la mesure de densité ψ. On posera encore

$$\delta_0(z) = (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$H_f(z, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j}(z) t_i \bar{t}_j$$

si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et pour $z \in \Omega$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{C}^n$.

2. Ensembles uniformément H-convexes.

Nous posons, suivant [1], la

DÉFINITION 1. — *Un ensemble fermé* F *de* $\mathbf{C}^n$ *est dit uniformément* H-*convexe s'il existe une constante* $\theta > 0$ *et* *une suite* Ω_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots,$ *de domaines d'holomorphie de* $\mathbf{C}^n$ *pour lesquels*

$$(1) \qquad \frac{\theta}{\nu} \leqslant \inf_{\zeta \in \partial\Omega_\nu} d(\zeta, F) \leqslant \sup_{\zeta \in \partial\Omega_\nu} d(\zeta, F) \leqslant \frac{1}{\nu}.$$

On donne deux exemples de variétés totalement réelles Σ qui sont uniformément H-convexes.

Exemple a. — On considère le graphe Σ d'une application $F = (f_1, \ldots, f_m)$ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^m$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Le rang de la matrice $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j}\right)_{i,j}$ est égal à n en tout point de $\mathbf{C}^n$.

(ii) La différentielle de F est bornée en norme sur $\mathbf{C}^n$.

(iii) Il existe une constante positive C_1 telle que

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{m} |H_{\bar{f}_k}(z, t)|^2 \leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 \right)^2$$

pour $t \in \mathbf{C}^n$ et $z \in \mathbf{C}^n$.

Alors Σ est une sous-variété totalement réelle qui est uniformément H-convexe.

Le fait que Σ est totalement réelle résulte de la condition (i). Pour voir que Σ est uniformément H-convexe, introduisons la fonction Φ définie dans $\mathbf{C}^{n+m}$ par

$$\Phi(z, w) = \sum_{k=1}^{m} |w_k - f_k(z)|^2$$

où $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{C}^m$, et désignons, pour tout entier $\nu > 0$, par Ω_ν l'ensemble des couples (z, w) de $\mathbf{C}^{n+m}$ tels que $\Phi(z, w) < \nu^{-2}$. Clairement $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$; de plus si $(z, w) \in \partial\Omega_\nu$ et si on considère sur $\mathbf{C}^{n+m}$ la norme $(z, w) \longmapsto |z| + |w|$, en désignant par M une constante $\geqslant 1$ majorant la norme de F' sur $\mathbf{C}^n$, il vient

$$(M\nu)^{-1} \leqslant d((z, w), \Sigma) \leqslant \nu^{-1}.$$

La première inégalité résulte de ce que si $z_0 \in \mathbf{C}^n$, la boule ouverte de centre $(z_0, F(z_0))$ et de rayon $(M\nu)^{-1}$ est contenue dans Ω_ν; en effet, si $(\zeta, \zeta') \in \mathbf{C}^{n+m}$ vérifie

$$|\zeta| + |\zeta'| < (M\nu)^{-1},$$

le théorème des accroissements finis et l'hypothèse (ii) assurent que

$$\Phi(z_0 + \zeta, F(z_0) + \zeta') = \sum_{k=1}^{n} |f_k(z_0) + \zeta'_k - f_k(z_0 + \zeta)|^2$$

est majoré par $M^2(|\zeta^2| + |\zeta'|^2)$ et donc par ν^{-2}. La seconde inégalité vient de

$$d((z, w), \Sigma) \leqslant |(z, w) - (z, F(z))| \leqslant \Phi(z, w)^{\frac{1}{2}} \leqslant \nu^{-1}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que Ω_ν est un domaine d'holomorphie pour ν assez grand; or pour $(t, t') \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$, il vient

$$(3) \quad H_\Phi((z, w), (t, t')) = \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 + \sum_{k=1}^{m} \left| t'_k - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial z_l}(z) t_l \right|^2 - 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{m} (w_k - f_k(z)) H_{f_k} - (z, t).$$

Cette expression est elle-même minorée par

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l}(z) t_l \right|^2 - 2\nu^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} |H_{f_k} - (z, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

de sorte que l'hypothèse (iii) assure pour $\nu > 2C_1$ que

$$H_\Phi((z, w), (t, t')) \geqslant 0$$

lorsque (z, w) reste dans un voisinage convenable de $\overline{\Omega}_\nu$. Ainsi Ω_ν vérifie la condition de Levi et la démonstration est achevée.

Exemple b. — On considère une sous-variété totalement réelle Σ de $\mathbf{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$ pour laquelle on suppose qu'il existe des constantes $\alpha > 0$, $C_2 \geqslant 0$ telles que tout point z de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $d(z, \Sigma) < \alpha$ possède une projection unique $p_\Sigma(z)$ sur Σ et que sur l'ensemble Σ^α des points z de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $d(z, \Sigma) < \alpha$, on ait

$$|p_\Sigma(z) - p_\Sigma(z')| \leqslant C_2 |z - z'|.$$

Si X, Y sont des vecteurs tangents non nuls en un point x

de Σ, on note $A(X, iY)$ l'angle, dans l'espace hilbertien $\mathbf{C}^n$, de X et de iY. On pose

$$\beta(x) = \inf A(X, iY),$$

lorsque X, Y parcourent les vecteurs non nuls de T_x; dire que Σ est totalement réelle revient à dire que $\beta(x) > 0$ pour tout point x de Σ. On fait l'hypothèse supplémentaire que

$$\beta = \inf_{x \in \Sigma} \beta(x) > 0.$$

Dans ces conditions Σ est uniformément H-convexe. Cela résulte aussitôt du

LEMME 2. — *Sous les hypothèses qui précèdent et pour*

$$C_2^2(1 + \cos \beta) < 2,$$

la fonction $\Phi : z \longmapsto d^2(z, \Sigma)$ *est plurisousharmonique dans* Σ^α.

Démonstration. — Soient $p_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \ldots, p_n = \varphi_n + i\psi_n$, les composantes de p_Σ qui est différentiable dans Σ^α puisque la projection sur Σ est unique. Le fait que $p_\Sigma(z)$ minimise la distance du point z de coordonnées

$$z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$$

à Σ se traduit par

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(z) - x_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) + (\psi_j(z) - y_j(z)) \frac{\partial \psi_j}{\partial z_k}(z) = 0$$

pour $k = 1, \ldots, n$. Il en résulte

$$H_\Phi(z, t) = |t|^2 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial p_l}{\partial z_k}(z) \bar{t}_k t_l,$$

soit encore $\langle (I - A(z))t, t \rangle$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit hermitien dans $\mathbf{C}^n$ et $A(z)$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ de matrice

$$\left(\frac{\partial p_l}{\partial z_k}(z) \right)_{k,l}.$$

On a évidemment

$$A(z).t = \frac{1}{2}\,[p'_\Sigma(z).t + ip'_\Sigma(z).(-\,it)]$$

et

$$|A(z).t|^2 = \frac{1}{4}\,[|p'_\Sigma(z).t|^2 + |p'_\Sigma(z).(-\,it)|^2 \\ + 2\mathrm{Re}\langle p'_\Sigma(z).t,\ p'_\Sigma(z)(-\,it)\rangle].$$

Or $p'_\Sigma(z).t$ et $p'_\Sigma(z).(-\,it)$ sont des vecteurs tangents à Σ en $p_\Sigma(z)$ de sorte que l'expression précédente est majorée par $\frac{1}{2}|t|^2C_2^2(1+\cos\beta)$. L'hypothèse assure alors que

$$H_\Phi(z, t) \geqslant 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Si alors Ω_ν désigne l'ensemble des points z de $\mathbf{C}^n$ tels que $d(z, \Sigma) < \nu^{-1}$ pour un entier $\nu > 0$, la suite (Ω_ν) est une suite de domaines d'holomorphie qui vérifient les conditions de la définition 1.

3. Approximation par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ.

Nous établissons ici le

Théorème 3. — *Soit Σ une sous-variété fermée totalement réelle de classe $\mathscr{C}^r$, avec $r > \frac{n}{2}+1$, de $\mathbf{C}^n$; on suppose Σ uniformément* H-*convexe et on considère une suite* (Ω_ν),

$$\nu = 1, 2, \ldots$$

de domaines d'holomorphie vérifiant (1). *Dans ces conditions les restrictions à Σ des fonctions de* $\bigcup_\nu H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ *sont denses dans* $\mathscr{C}_{\delta_0^2}(\Sigma)$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes à commencer par le

Lemme 4. — *Les restrictions à Σ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact de $\mathbf{C}^n$ sont denses dans* $\mathscr{C}_w(\Sigma)$.

Soit en effet $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts de

Σ, vérifiant $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ pour tout j et soit $(\varphi_j)_{j\in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur Σ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que φ_j soit égale à 1 au voisinage de K_j et à support dans K_{j+1}.

Pour toute fonction f de $\mathscr{C}_w(\Sigma)$, la fonction

$$w|\varphi_j f - f| = w|f|(\varphi_j - 1)$$

est nulle sur K_j et majorée par $2w|f|$; elle tend donc uniformément vers zéro lorsque j tend vers l'infini. Par suite f est approchée par des fonctions continues à support compact sur Σ ; en prolongeant ces dernières en des fonctions continues, à support compact sur $\mathbf{C}^n$, puis en les régularisant on achève la démonstration du lemme. On peut même se limiter à des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans un voisinage ouvert arbitraire de Σ, soit par exemple Ω_1.

Rappelons d'autre part un lemme dû à L. Hörmander et J. Wermer [6].

Lemme 5. — *Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans Ω_1 ; il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ à support compact dans Ω, qui coïncide avec g sur Σ et vérifie pour une constante C_3 l'inégalité*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z)\right| \leqslant C_3\, d(z, \Sigma)^{r-1}, \tag{3}$$

où $j = 1, \ldots, n$.

Nous utiliserons enfin comme dans [6] un lemme classique de la théorie des équations aux dérivées partielles :

Lemme 6. — *Soient z_0 un point de $\mathbf{C}^n$ et r un nombre réel strictement positif; désignons par B la boule ouverte de centre z_0 et de rayon r. Il existe une constante C_3 telle que pour toute fonction u de $L^2(B)$ pour laquelle $\bar{\partial}u$ soit une fonction continue sur B, on ait*

$$|u(z_0)| \leqslant C_3\{r^{-n}\|u\|_{L^2(B)} + r \sup_{z\in B} |\bar{\partial}u(z)|\}.$$

Démonstration du théorème. — Nous sommes ramenés par le lemme 4 à approcher une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact K dans Ω_1. Pour chaque entier $\nu > 0$, la restriction de $\bar{\partial}G$ à Ω_ν est une forme fermée de type $(0, 1)$

de sorte qu'il existe d'après [4] une fonction G_ν dans Ω_ν vérifiant $\bar\partial G_\nu = \bar\partial G$ et

$$\int_{\Omega_\nu} |G_\nu|^2\, \delta_0^4\, d\lambda \leqslant \int_{\Omega_\nu} |\bar\partial G|^2\, d\lambda, \tag{4}$$

où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}^n$. Clairement $G - G_\nu$ est holomorphe et donc dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ et

$$G - (G - G_\nu) = G_\nu.$$

Il nous suffit alors de montrer que $\delta_0^4 G_\nu$ tend uniformément vers zéro sur Σ lorsque ν tend vers l'infini. Appliquons pour cela le lemme 6 à la fonction G_ν restreinte à une boule ouverte B de centre $x \in \Sigma$ et de rayon $\theta\nu^{-1}$; il vient

$$|G_\nu(x)| \leqslant C_3\{\nu^n\theta^{-n}\left(\int_B |G_\nu|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\nu^{-1} \sup_{z\in B} |\bar\partial G_\nu(z)|\}.$$

On vérifie facilement qu'il existe une constante C_4 telle que $\delta_0(x) \leqslant C_4\, \delta_0(z)$ pour $|x - z| \leqslant 1$ de sorte que

$$\delta_0^2(x)|G_\nu(x)| \leqslant C_3\Big\{C_4^2\nu^n\theta^{-n}\left(\int_B \delta_0^4(z)|G_\nu(z)|^2\, d\lambda(z)\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\nu^{-1}\,\delta_0^2(x) \sup_{z\in B} |\bar\partial G_\nu(z)|\Big\},$$

le membre de droite étant lui-même majoré d'après (4) par

$$C_3\Big\{C_4^{-2}\nu^n\theta^{-n}\left(\int_{\Omega_\nu} |\bar\partial G|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\nu^{-1} \sup_{z\in K} |\bar\partial G|\Big\}.$$

En utilisant alors l'inégalité (3) et le fait que le volume de $\Omega_\nu \cap K$ est un $O(\nu^{-(2n-k)})$, il est clair que l'expression considérée tend uniformément vers zéro pour $x \in \Sigma$ lorsque $r > \dfrac{k}{2} + 1$.

Remarque. — Si on remplace la condition (1) de la définition 1 par la condition

$$\bigcup_{x\in\Sigma} B(x, \theta(x)\nu^{-1}) \subset \Omega_\nu \subset \bigcup_{x\in\Sigma} B(x, \nu^{-1}), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

dans laquelle θ est une fonction continue sur Σ à valeurs dans $]0, 1]$ et $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, on obtient alors en conclusion que $\bigcup_{\nu} H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ est dense dans $\mathscr{C}_{\theta^n\delta_0^2}(\Sigma)$.

La nouvelle condition a d'autant plus de chance d'être vérifiée que θ tend plus vite vers zéro à l'infini.

On utilise les mêmes majorations que précédemment mais en prenant pour B la boule ouverte de centre x et de rayon $\theta(x)\nu^{-1}$.

Nous allons maintenant dans des cas particuliers passer de l'approximation par des fonctions holomorphes avec un voisinage variable de Σ à l'approximation par des fonctions holomorphes sur un voisinage fixe à l'aide du résultat suivant de [8] :

Théorème 7. — *Soient k un entier naturel, Ω un domaine d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$ et δ une fonction lipschitzienne strictement positive dans Ω tendant vers zéro au bord de Ω; on suppose que $-\log \delta$ est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante $(\varphi_i)_{i\in I}$ de fonctions plurisousharmoniques positives dans un domaine d'holomorphie Ω' contenant Ω. On peut alors approcher toute fonction de $H^2(\Omega, \delta_0^k)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta^2\, \delta_0^{k+4})$ par des fonctions de $\bigcup_i H^2(\Omega', \exp(-\varphi_i)\delta_0^{k+4})$.*

Notons que si $\Omega' = \mathbf{C}^n$ et si chaque fonction $\exp \varphi_i$ est à croissance polynômiale, alors l'approximation se fait par des polynômes.

Nous obtenons d'abord la

Proposition 8. — *On se place dans le cas de l'exemple b) dont on conserve les notations; alors $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_0^8)$ est dense dans $\mathscr{C}_{\delta\delta_0^4}(\Sigma)$.*

Démonstration. — Puisque Σ est uniformément H-convexe, on est ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathscr{C}_{\delta_0^4}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ par des fonctions de $H^2(\Sigma^\alpha, \delta_0^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$d_\nu(z) = (\nu^{-2} - d^2(z, \Sigma))^+.$$

Clairement d_ν est lipschitzienne sur $\mathbf{C}^n$ et l'ensemble des points où d_ν est strictement positive est l'ouvert Ω_ν des points z tels que $d(z, \Sigma) < \nu^{-1}$.

La fonction $x \longmapsto -\log((\nu^{-1} - x)^+)$ est convexe sur $[0, +\infty[$; on peut l'écrire sur cet intervalle comme enveloppe supérieure d'une suite croissante $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de fonctions convexes finies (en la remplaçant par exemple par une fonction affine pour $x > \nu^{-1} - 1/j$). Par suite on a

$$-\log d_\nu = \sup_j \varphi_j$$

où $\varphi_j(z) = f_j(d^2(z, \Sigma))$. Chaque fonction φ_j est évidemment plurisousharmonique dans Σ^α. Pour $\nu \geqslant 1/\alpha$ on a $\Omega_\nu \subset \Sigma^\alpha$; en appliquant le théorème 7, on approche les fonctions de $\mathrm{H}^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ pour la norme de $\mathrm{H}^2(\Omega_\nu, d_\nu^2\, \delta_0^8)$ par des fonctions de

$$\bigcup_j \mathrm{H}^2(\Sigma^\alpha, \exp(-\varphi_j)\, \delta_0^8).$$

La démonstration s'achève alors car d'une part $d_\nu^2(x) \geqslant \nu^{-2}$ pour $x \in \Sigma$ et la restriction $\mathrm{H}^2(\Omega_\nu, \delta_0^8) \to \mathscr{C}_{\delta_0^4}(\Sigma)$ est continue d'après le lemme 6, et d'autre part $\exp(-\varphi_j)$ est minorée sur Σ^α.

Nous obtenons d'autre part la

Proposition 9. — *On se place dans le cas de l'exemple a) dont on conserve les notations; si Ω désigne l'ensemble ouvert des points (z, w) tels que $\Phi(z, w) < 2\mathrm{C}_1$, alors $\mathrm{H}^2(\Omega, \delta_0^8)$ est dense dans $\mathscr{C}_{\delta_0^4}(\Sigma)$.*

Si les fonctions f_k sont de plus pluriharmoniques, toute fonction de $\mathscr{C}_{\delta_0^4}(\Sigma)$ peut être approchée par des fonctions entières.

Démonstration. — Comme on l'a vu au paragraphe 2, la fonction Φ est plurisousharmonique dans Ω. On est ramené, comme pour la proposition précédente, à approcher dans $\mathscr{C}_{\delta_0^4}(\Sigma)$ les fonctions de $\mathrm{H}^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ par des fonctions de $\mathrm{H}^2(\Omega, \delta_0^8)$. Fixons donc ν assez grand et posons

$$\Phi_\nu(z, w) = (\nu^{-2} - \Phi(z, w))^+.$$

La fonction Φ_ν est lipschitzienne dans Ω à cause de l'hypothèse (ii). Si on considère les fonctions f_j introduites pour démontrer la proposition précédente et si l'on pose $\psi_j = f_j \circ \Phi$, alors

$$- \log \Phi_\nu = \sup_j \psi_j$$

sur Ω, où ψ_j est plurisousharmonique et bornée dans Ω. Il en résulte alors que $\bigcup_j H^2(\Omega, \exp(-\psi_j)\, \delta_0^8)$ est dense dans $H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ pour la norme de $H^2(\Omega, \delta^2\, \delta_0^8)$, ce qui permet d'achever la démonstration.

Si les fonctions f_j sont plurisousharmoniques, alors Φ est plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^{n+m}$ et l'approximation se fait par des fonctions de $H^2(\mathbf{C}^{n+m}, \exp(-\psi_j)\, \delta_0^8)$ et par conséquent des fonctions entières.

4. Régularisation des fonctions plurisousharmoniques.

Pour traiter le problème de l'approximation des fonctions de $\mathscr{C}_w(\Sigma)$ par des polynômes, nous avons besoin d'introduire un procédé de régularisation des fonctions plurisousharmoniques. Si f est une fonction numérique réelle, semi-continue inférieurement, sur un espace métrique E, nous posons pour chaque entier $k > 0$ et chaque point x de l'espace

$$f_k(x) = \inf_{\xi \in E} (kd(\xi, x) + f(\xi)).$$

La fonction f_k est lipschitzienne dans le rapport k et majorée par f; c'est précisément la plus grande fonction ayant ces propriétés. On vérifie facilement que la suite (f_k) est croissante et qu'elle converge simplement vers f lorsque f est minorée.

Soient maintenant Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et f une fonction positive semi-continue sur Ω. Nous prolongeons f par zéro hors de Ω, obtenant ainsi une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathbf{C}^n$, et considérons la suite (f_k) de fonctions sur $\mathbf{C}^n$ qui est associée à f par le procédé mentionné ci-dessus. Nous allons interpréter f_k d'une manière différente.

Désignons pour cela par $\tilde{\Omega}$ l'ensemble des points (z, w) de $\Omega \times \mathbf{C}$ tels que $|w| < f(z)$ et considérons sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ la norme $(z, w) \longmapsto k|z| + |w|$ et la distance d_k associée à cette norme.

LEMME 10. — *Pour tout* $z \in \mathbf{C}^n$, *on a* $f_k(z) = d_k\left[(z, 0), \complement\,\Omega\right]$; *si de plus* Ω *est un domaine d'holomorphie et si* $-\log f$ *est plurisousharmonique dans* Ω, *alors* $-\log f_k$ *est plurisousharmonique dans* Ω.

Démonstration. — On a en effet successivement

$$\begin{aligned} d_k\left[(z, 0), \complement\,\tilde{\Omega}\right] &= \inf_{(\zeta, z) \notin \tilde{\Omega}} [k|\zeta - z| + w] \\ &= \inf_{\zeta \in \mathbf{C}^n} [k|\zeta - z| + f(\zeta)] \\ &= f_k(z). \end{aligned}$$

De plus, si Ω est un domaine d'holomorphie et si $-\log f$ est plurisousharmonique dans Ω, alors $\tilde{\Omega}$ est un domaine d'holomorphie d'après le théorème d'Oka. Par suite la fonction $(z, w) \longmapsto -\log d_k\left[(z, w), \complement\,\tilde{\Omega}\right]$ est plurisousharmonique dans $\tilde{\Omega}$. Sa trace sur Ω l'est encore; or c'est précisément f_k.

Signalons au passage une conséquence de ce lemme qui n'est pas directement utile pour la suite, mais présente un intérêt propre.

PROPOSITION 11. — *Pour toute fonction plurisousharmonique dans un domaine d'holomorphie* Ω *de* $\mathbf{C}^n$, *il existe une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques localement lipschitziennes qui converge simplement vers* φ; *si* φ *est continue, la convergence est uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — On applique ce qui précède à la fonction $\exp(-\varphi)$, prolongée par zéro hors de Ω. Il suffit simplement de poser

$$\varphi_k = \{-\log[\exp(-\varphi)]\}_k,$$

pour obtenir une suite ayant les propriétés souhaitées.

Nous nous limiterons maintenant au cas de fonctions lipschitziennes dans le rapport 1. Pour toute fonction polynomiale p sur $\mathbf{C}^n$, nous définissons une fonction p^* sur $\mathbf{C}^n$ par

$$\frac{1}{p^*(z)} = \inf_{\zeta \in \mathbf{C}^n}\left[|\zeta - z| + \frac{1}{|p(\zeta)|}\right].$$

Clairement $1/p^*$ est lipschitzienne dans le rapport 1 et p^*

majore $|p|$; en fait p^* est la plus petite fonction ayant ces propriétés. De plus,

LEMME 12. — *La fonction* p^* *est à croissance polynomiale et* $\log p^*$ *est plurisousharmonique.*

Démonstration. — La première assertion résulte de ce que pour tout polynôme p, il existe une constante C et un nombre entier naturel r tels que

$$|p(z)| \leqslant C(1+|z|)^r.$$

On peut choisir C assez grande pour que la fonction

$$z \longmapsto C^{-1}(1+|z|)^{-r}$$

soit lipschitzienne dans le rapport 1, de sorte que cette fonction minore encore $1/p^*$. Quant à la seconde assertion, elle résulte seulement du lemme 10 et du fait que la fonction $\log|p|$ est plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^n$.

5. Approximation polynomiale.

Étant donnés un poids w sur Σ et un nombre $\varepsilon > 0$, on désigne de façon générale par $B_{\varepsilon, w}$ l'ensemble des fonctions polynomiales p sur $\mathbf{C}^n$ pour lesquelles $|p(x+z)|w(x) \leqslant 1$ pour tout point x de Σ et tout point $z \in \mathbf{C}^n$ tel que $|z| \leqslant \varepsilon$. Nous désignons d'autre part par Σ^ε l'ensemble des points z de $\mathbf{C}^n$ tels que $d(z, \Sigma) < \varepsilon$.

THÉORÈME 13. — Nous reprenons les notations et hypothèses du paragraphe 1. *S'il existe un nombre* $\theta \in]0, 1[$ *tel que pour tout entier* $\nu > 1$ *on ait*

$$\sup_{p \in B_{\theta\nu^{-1}, \delta_{\theta}^{-1} w}} p^*(z) = +\infty$$

en tout point z *du bord de* $\Sigma\nu^{-1}$, *les polynômes sont denses dans* $\mathscr{C}_w(\Sigma)$.

Démonstration. — Posons

$$\delta_\nu = \inf_{p \in B_{\theta\nu^{-1}, \delta_{\theta}^{-1} w}} 1/p^*,$$

et désignons par Ω_ν l'ensemble des points où δ_ν est strictement positive. Il est facile de vérifier que δ est lipschitzienne dans le rapport 1 et que Ω_ν est un domaine de Runge compris entre $\Sigma^{\theta\nu^{-1}}$ et $\Sigma^{\nu^{-1}}$. Cela montre en particulier que Σ est uniformément H-convexe. On est donc ramené par le théorème 3 à approcher dans $\mathscr{C}_{w}(\Sigma)$ les fonctions de $H^2(\Omega_\nu, \delta_0^4)$ par des polynômes. Compte tenu du lemme 12, le théorème 7 montre que l'approximation peut être faite pour la norme de $H^2(\Omega_\nu\ \delta_\nu^2,\delta_0^8)$; il ne reste plus qu'à montrer que cette norme est plus fine que celle de $\mathscr{C}_{w}(\Sigma)$.

Or si $f \in H^2(\Omega_\nu, \delta^2\delta_0^8)$, en utilisant la sous-harmonicité de la fonction $|f|^2$ dans Ω_ν il vient pour une constante C convenable

$$|f(x)|^2 w^2(x) \leqslant C\nu^{-2n} w^2(x) \int_{B\left(x, \frac{\theta}{2\nu}\right)} |f(z)|^2\, d\lambda(z).$$

La démonstration sera donc achevée si l'on sait que

$$w(x) \leqslant C'\ \delta_0^4(z)\ \delta_\nu(z)$$

pour $z \in B\left(x, \dfrac{\theta}{2\nu}\right)$, où C' est une constante. Or si un polynôme p appartient à $B_{\theta\nu^{-1},\,\delta_0^{-4}}$, il vérifie pour $\zeta \in B(x, \theta\nu^{-1})$ la majoration

$$|p(\zeta)|\ \delta_0^{-4}(x) w(x) \leqslant 1.$$

Il en résulte que si $z \in B\left(x, \dfrac{\theta}{2\nu}\right)$ et $\zeta \in \mathbf{C}^n$, alors

$$|\zeta - z| + \frac{1}{|p(\zeta)|} \geqslant \operatorname{Min}\left[\frac{\theta}{2\nu}, w(x)\delta_0^{-4}(x)\right],$$

comme on le voit en distinguant les cas

$$|\zeta - z| \leqslant \frac{\theta}{2\nu} \quad \text{et} \quad |\zeta - z| \geqslant \frac{\theta}{2\nu}.$$

Par suite, pour $z \in B\left(x, \dfrac{\theta}{2\nu}\right)$, il vient

$$\frac{1}{p^*(z)} \geqslant \operatorname{Min}\left[\frac{\theta}{2\nu}, w(x)\ \delta_0^{-4}(x)\right].$$

soit $p^*(z) = O(\delta_0^4(x)w^{-1}(x))$. Sachant que par ailleurs

$$\delta_0^{-4}(x) = O(\delta_0^{-4}(z)),$$

et passant à la borne supérieure sur p, on obtient l'inégalité cherchée.

On obtient de façon analogue dans un cas particulier le

THÉORÈME 14. — Nous nous plaçons sous les hypothèses de l'exemple *b*). *S'il existe* $\varepsilon \in]0, \alpha[$ *tel que*

$$\sup_{p \in B_{\varepsilon,\, \delta_0^{-4} w}} p^*(z) = +\infty$$

en tout point z *du bord de* Σ^α, *les polynômes sont denses dans* $\mathscr{C}_w(\Sigma)$.

La démonstration se conduit comme pour le théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. M. CIRKA, *Math. Sbornik*, 78 (1969), 95-114.
[2] J.-P. FERRIER et N. SIBONY, *C.R.A.S.*, t. 276 (1973), 175-177.
[3] F. R. HARVEY et R. O. WELLS, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 824-828.
[4] L. HÖRMANDER, *Acta Math.*, Uppsala, 113 (1965), 89-152.
[5] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, New York, D. van Nostrand Company, 1966.
[6] L. HÖRMANDER et J. WERMER, *Math. Scand.*, 23 (1968), 5-21.
[7] R. NIREMBERG et R. O. WELLS Jr., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142 (1969), 5-35.
[8] N. SIBONY, Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de $\mathbf{C}^n$, *Ann. Inst. Fourier*, 26 (1976).

Manuscrit reçu le 23 avril 1975
Proposé par J. P. Kahane.

J. P. FERRIER
8, rue du chanoine Jacob
54000 Nancy.

N. SIBONY,
Université de Paris XI
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay.