Annales de l'institut Fourier

Bernard Helffer

Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels et applications à l'hypoellipticité

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 55-70

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_55_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 55-70.

INVARIANTS ASSOCIÉS A UNE CLASSE D'OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS ET APPLICATIONS A L'HYPOELLIPTICITÉ

par B. Helffer

Introduction.

On sait, dans la théorie des opérateurs pseudodifférentiels classiques (o.p.d.), qu'on peut définir de manière invariante (par changement de coordonnées) le symbole principal p_m d'un o.p.d. et, qu'en un point critique de ce symbole principal, on peut définir un symbole sous-principal.

Les résultats obtenus pour des o.p.d. à caractéristiques doubles s'expriment en général à partir de ces deux invariants.

Pour l'étude d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples (> 2), il était naturel de chercher à introduire des invariants plus généraux, permettant d'exprimer des conditions nécessaires ou suffisantes d'hypoellipticité ou des résultats de propagation des singularités.

On se placera ici dans le cadre introduit par J. Sjöstrand dans [19] et développé également par L. Boutet de Monvel et F. Trèves [1], [4]. Dans l'introduction de ces invariants comme dans la présentation de certains résultats, on s'est inspiré de C. Rockland [17].

Nous donnerons dans cet article une formule *explicite* permettant de calculer ces invariants qui n'ont de sens que sur la surface caractéristique Σ du symbole principal.

Cette formule s'apparente à celle utilisée par J. Leray [16], [17] pour introduire des opérateurs pseudodifférentiels dont les symboles sont définis sur un espace symplectique.

Ce travail sera poursuivi sous un point de vue sensiblement différent dans [3].

Le plan de ce travail est le suivant :

Au § 0 : nous introduisons les principaux théorèmes et rappelons le contexte dans lequel nous travaillons.

Au § 1 : nous construisons les invariants associés à un opérateur pseudodifférentiel.

Aux § 2 et 3 : on donne des applications qui sont les généralisations naturelles des théorèmes d'hypoellipticité à caractéristiques doubles donnés par J. Sjöstrand [19], L. Boutet de Monvel et F. Trèves [1] [4], A. Grigis [6] et qui constituent une formulation intrinsèque des résultats de V. V. Grušin [7], [8].

Au § 4 : on considère une autre classe d'o.p.d. pour laquelle, sous des hypothèses de même type qu'au § 2, on peut construire des paramétrix dans les classes $S^m_{\rho,\delta}(\delta < \rho)$ de L. Hörmander [11].

Enfin, nous tenons à remercier J. Sjöstrand et L. Boutet de Monvel dont les conseils ont permis de simplifier la démonstration de certains résultats.

0. Définitions. Rappels. Énoncés des résultats.

Soit Ω une variété réelle C^∞ paracompacte de dimension n, et soit $T^*(\Omega)\setminus 0$ le fibré cotangent privé de la section nulle.

Soit $\Sigma \subset T^*(\Omega)\setminus 0$ une sous-variété conique fermée; soit $m \in \mathbf{R}$, $M \in \mathbf{N}$.

On définit $OPL^{m,M}(\Omega, \Sigma)$ comme l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels P qui, dans chaque système de coordonnées locales d'un ouvert $U \subset \Omega$, ont un symbole de la forme :

0.1. $p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j/2}(x, \xi)$ où les $p_{m-j/2}(x, \xi)$ sont des symboles de $S^{m-j/2}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n\setminus 0)$, positivement homogènes de degré $m - j/2$, qui vérifient :

0.2. Pour tout compact $K \Subset U$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbf{R}^n$, tel que $|\xi| \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{|p_{m-j/2}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j/2}} \leqslant C_K(d(x, \xi))^{M-j}; \quad j \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant j \leqslant M.$$

$d(x, \xi) = \operatorname*{Inf}_{(y, \eta) \in \Sigma} \left((x-y) + \left| \eta - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \right)$ est la distance de (x, ξ) à Σ.

La classe $L^{m, M}$ a été introduite par J. Sjöstrand [19] puis généralisée par L. Boutet de Monvel [1].

On dira que p dans $L^{m, M}$ est non dégénéré si la condition suivante est vérifiée :

0.3. Pour tout compact $K \Subset U$, il existe $C_K > 0$, telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbf{R}^n$, tel que $|\xi| \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geqslant C_K(d(x, \xi))^M.$$

Soit $\omega = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j$ la 2-forme symplectique sur $T^*\Omega$.

On dira que Σ est symplectique si la restriction de ω à $T\Sigma$ est non dégénérée. Dans ce cas, (Σ, ω) est une variété symplectique de codimension paire.

On dira que Σ est involutive de codimension ν si, localement, elle peut être définie par l'annulation de ν fonctions C^∞ réelles $u_i (i = 1, \ldots, \nu)$ telles que les crochets de Poison $\{u_j, u_k\}$ s'annulent sur Σ.

On supposera dans la suite que le champ de Liouville $\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ et les hamiltoniens H_{u_i} (associés aux fonctions u_i dont l'annulation définit Σ) sont linéairement indépendants en tout point de Σ.

Soient q_1, q_2 deux éléments dans $L^{m, M}(\Omega, \Sigma)$; on définit la relation d'équivalence suivante :

$$q_1 \equiv q_2 \quad \text{si, et seulement si} \quad q_1 - q_2 \in L^{m, M+1}(\Omega, \Sigma).$$

Nous démontrerons au § 2 le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit p un symbole vérifiant* (0.1.), (0.2.) : *alors, on peut associer à p un élément q de*

$$L^{m\ M}(\Omega, \Sigma)/L^{m, M+1}(\Omega, \Sigma)$$

défini par :

$$0.4.\quad q \equiv \exp\left(-\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)p = \sum_{t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^t}{t!}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)^t p$$

et qui possède la propriété d'invariance suivante :

Soit τ *une transformation canonique de* $T^*\Omega\setminus 0$ *dans* $T^*\mathbf{R}^n\setminus 0$ *qui envoie au voisinage d'un point* ρ *de* Σ, Σ *sur* Σ'.

Soient $\mathcal{F}$ *un opérateur fourier intégral associé à* τ, P *l'opérateur de symbole* p, p' *le symbole de* $P' = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}$ *et* q' *le symbole associé à* p' *par* (0.4), *on a*

$$q'(\tau(\rho)) = q(\rho).$$

Corollaire 2. — *Soit* p^* *le symbole complet de l'opérateur* P^* *adjoint de* P *de symbole* p, *soit* q^* *le symbole invariant associé à* p^*, *on a :*

$$q^* = \bar{q}.$$

Remarque 0.1. — Une formule du type (0.4.) a été utilisée dans un cadre voisin par J. Leray dans [15], [16] pour définir une classe d'opérateurs pseudodifférentiels dont le symbole est une fonction sur un espace symplectique.

Soit q dans $L^{m,M}/L^{m,M+1}$ le symbole invariant associé à p; remarquons qu'il ne dépend que de la classe d'équivalence de p. On associe en tout point ρ de Σ, à $q_{m-j/2}$, symbole d'ordre $m - j/2$ de $q (0 \leqslant j \leqslant M)$, une forme $(M - j)$ linéaire, notée $\tilde{q}_{m-j/2}(\rho)$, définie sur $(T_\rho(T^*\Omega\setminus 0))^{M-j}$ par :

$$0.5.\quad \forall X_1, X_2, \ldots, X_{M-j} \in T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)$$
$$\tilde{q}_{m-j/2}(\rho)(X_1, \ldots, X_{M-j}) = \frac{1}{(M-j)!}(\tilde{X}_1 \ldots \tilde{X}_{M-j}q_{m-j/2})\rho(^*).$$

On peut montrer que ces formes sont symétriques, que leur définition ne dépend pas du représentant de la classe de q, et que si q est non dégénéré au sens de 0.3., $\tilde{q}_m(\rho)$ induit une M-forme symétrique non dégénérée sur $T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)/T_\rho\Sigma$. En tout point ρ de Σ on définit l'application de

$$T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)$$

(*) $\tilde{X}_i$ désigne une extension de X_i au voisinage de ρ.

dans C définie par :

$$\forall X \in T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)$$

0.6. $\tilde{q}(\rho, X) = \sum_{j \leqslant M} \tilde{q}_{m-j/2}(\rho)(X, \ldots, X)$.

On désignera par Γ_ρ l'ensemble des valeurs de $\tilde{q}(\rho,.)$; c'est un invariant dans le sens du théorème 1.

Soit $\rho = (x, \xi)$, remarquons que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$\Gamma_{(x, \lambda\xi)} = \lambda^{m-M/2}\Gamma_{x,\xi}.$$

Nous démontrerons au § 3 le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit p un symbole vérifiant* 0.1., 0.2., 0.3.. *On suppose que Σ est involutive et qu'en tout point ρ de Σ, Γ_ρ ne rencontre pas l'origine ; alors* P *est hypoelliptique* (1) *avec perte de* M/2 *dérivées.*

Ce théorème généralise un théorème de L. Boutet de Monvel [1].

Supposons maintenant que Σ est symplectique de codimension $2k$. Dans ce cas, on peut identifier $T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)/T_\rho\Sigma$ et $(T_\rho\Sigma)^\perp$ l'orthogonal de $T_\rho\Sigma$ pour ω_ρ.

Sous ces hypothèses, nous montrerons au § 4, en suivant la méthode de C. Rockland [17], qu'on peut associer en tout point ρ de Σ, et pour tout choix b de coordonnées symplectiques dans $T_\rho\Sigma^\perp$ un opérateur $Q_{\rho,b}$ différentiel à coefficients polynomiaux opérant sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$(2). $Q_{\rho,b}$ dépend du choix de b de la manière suivante : si $\tilde{b}$ désigne une autre base, il existe un opérateur unitaire inversible U opérant dans $L^2(\mathbf{R}^k)$ et $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ (2) tel que $Q_{\rho,b} = UQ_{\rho,\tilde{b}}U^{-1}$.

On associe ainsi à p, en tout point ρ de Σ, une classe d'opérateurs différentiels P_ρ définie de manière invariante.

De tels opérateurs sont introduits de manière différente dans [1] et seront étudiés plus précisément dans [3]. Nous renvoyons également aux travaux de J. Leray [15] [16] qui étudient en détail la classe des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

(1) On dira que P est hypoelliptique avec perte de M/2 dérivées, si pour tout $\omega \subset \Omega$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $Pu \in H^s_{loc}(\omega) \Longrightarrow u \in H^{s+m-M/2}_{loc}(\omega)$.

(2) $\mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^k$ à décroissance rapide.

On démontrera au § 4 le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* p *un symbole vérifiant* (0.1.), (0.2.), (0.3.). *On suppose que* Σ *est symplectique de codimension* $2k$ *et soit* P_ρ *la classe introduite ci-dessus.*

P *est hypoelliptique dans* Ω *avec perte de* $M/2$ *dérivées si, et seulement si, en tout point* ρ *de* Σ,

$$\operatorname{Ker} P_\rho \cap \mathscr{S}(\mathbf{R}^k) = 0.$$

Lorsque $M = 2$ et que l'on considère des opérateurs pseudodifférentiels classiques, ce théorème a été démontré par de nombreux auteurs et de manière plus explicite [19], [4], [1].

Lorsque $M \geqslant 2$ et que la codimension de Σ est égale à 2, nous renvoyons à notre travail [10].

La formulation du théorème est celle de V.V. Grušin [7] rendue intrinsèque; elle est à comparer à la proposition 6.1 de l'article de L. Boutet de Monvel [1].

1. Démonstration du théorème 1.

On suppose que Σ est de codimension ν. Nous allons introduire q de la manière suivante :

Soit $(x, \xi) = \rho \in \Sigma$ et choisissons des fonctions C^∞ réelles $u_1, \ldots, u_\nu$ dont l'annulation définit Σ dans un voisinage conique Γ de ρ dans $T^*\Omega\setminus 0$.

On supposera les u_i homogènes de degré $1/2$ en ξ.

Soit $U_i (i = 1, \ldots, \nu)$ un opérateur pseudodifférentiel classique dont le symbole principal est u_i.

Alors si P est dans $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$, on peut en utilisant la formule de Taylor écrire P sous la forme suivante :

$$P = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1,\ldots,\nu]^{M-j}} A_{\alpha,j} U_\alpha \tag{1.1.}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{M-j})$, $\alpha_i \in [1, \ldots, \nu]$

$$U_\alpha = U_{\alpha_1} \ldots U_{\alpha_{M-j}}$$

et où les $A_{\alpha,j}$ sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques ayant les propriétés suivantes :

(1.2.) $\quad A_\alpha \in L^{m-M/2}$.

(1.3.) $\quad$ Les $A_{\alpha,j}$ sont symétriques en α.

On pose alors

$$q_{m-j/2} = \sigma_{m-j/2}\left(\sum_{\alpha \in [1,\dots,\nu]^{M-j}} A_{\alpha,j} U_\alpha\right)$$

pour $j = 0, \dots, M$.

Les autres termes n'interviennent pas dans la classe de q. Dans toute la suite, nous ne déterminerons q que dans la classe d'équivalence $L^{m,M}/L^{m,M+1}$ introduire au § 0.

Remarque 1.1. — $q_{m-j/2}$ étant introduit comme symbole principal, il ne dépend pas du choix des coordonnées (x, ξ), mais il dépend en revanche du choix des u_i, U_i, $A_{\alpha,j}$.

Le nœud de la démonstration du théorème 1 est le lemme suivant :

LEMME 1.2. — *Soit* $Q = \sum_{\alpha \in [1,\dots,\nu]^M} A_\alpha U_\alpha$; $A_\alpha \in L^{m-M/2}(\Omega)$, A_α *symétrique. Alors le symbole complet de* Q *dans*

$$L^{m,M}/L^{m,M+1}$$

est donné par

$$q \equiv \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\cdot \sigma_m(Q).$$

Démonstration. — On peut supposer $m = M/2$. Les A_α étant choisis *symétriques*, il suffit de démontrer le lemme pour un terme du type suivant :

$$Q = V^M$$

où $V \in L^{1/2,1}$.

On utilisera constamment l'inclusion

$$L^{m,M}(\Omega, \Sigma) \hookrightarrow L^{m+1/2,M+1}(\Omega, \Sigma).$$

On démontre alors le lemme par récurrence sur M; il est évident pour $M = 1$. Supposons le lemme vrai pour $M = M_0$, on va le démontrer pour $M = M_0 + 1$.

On désigne par q_M le symbole complet de V^M modulo $(L^{M/2,M+1})$.

Par hypothèse : $q_{M_0} \equiv \exp\left(\frac{1}{2i} \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right) \varphi^{M_0}$.

La formule de composition nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} q_{M_0+1} &\equiv q_{M_0}\varphi + \frac{1}{i}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial q_{M_0}}{\partial \xi_l}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \\ &\equiv q_{M_0}\varphi + \frac{1}{i}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial q_{M_0}}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(1.4.) \quad q_{M_0+1} \equiv q_{M_0}\cdot\varphi + \frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial q_{M_0}}{\partial \xi_l}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \frac{\partial q_{M_0}}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^l}\right).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\cdot\varphi^{M_0+1} = \varphi\cdot\left(\exp\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\varphi^{M_0} \\ + \left[\exp\left(\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right), \varphi\right]\cdot\varphi^{M_0}. \end{aligned}$$

Or, il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \left[\exp\left(\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right), \varphi\right] = \frac{1}{2i}\left(\sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\exp\left(\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right) + B \end{aligned}$$

où B opère de $L^{p,N}$ dans $L^{p,N+1}$ pour tout (p, N).

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (1.5) \quad \exp\left(\frac{1}{2i}\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\varphi^{M_0} \equiv \varphi\cdot q_{M_0} \\ + \frac{1}{2i}\left(\sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_l} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_l}\cdot\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\cdot q_{M_0}. \end{aligned}$$

La comparaison de (1.4) et (1.5) permet de conclure la démonstration du lemme.

Fin de la démonstration du théorème. — Utilisant le lemme 1.2 et 1.1, on voit qu'on a démontré que le symbole p de P est congru à

$$\exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)\cdot q \quad \text{dans} \quad L^{m,M}/L^{m,M+1}.$$

Le théorème est démontré car l'application

$$\exp\left(\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)$$

est bijective de $L^{m,M}/L^{m,M+1} \to L^{m,M}/L^{m,M+1}$ et son inverse est $\exp\left(-\frac{1}{2i}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)$.

La démonstration du corollaire est évidente, compte tenu de la formule donnant le symbole de l'adjoint.

Signalons de nouveau le lien avec [15] qui ne travaille cependant pas dans des classes d'équivalence.

Remarque 1.3. — Soit q_1 (resp. q_2) le symbole invariant associé à p_1 (resp. p_2), alors le symbole associé au composé $p_1 \# p_2$ est donné par la formule

$$q \equiv \left(\exp\frac{1}{2i}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)q_1\right) \# \left(\exp\frac{1}{2i}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial \xi_l}\right)q_2\right)$$

où $\#$ désigne la loi de composition des symboles.

2. Démonstration du théorème 3.

La démonstration étant strictement analogue à celle de [1], nous renvoyons à cet article pour les détails de la démonstration, que nous esquissons seulement.

On considère donc un opérateur P de symbole p dans $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$ et vérifiant (0.1), (0.2), (0.3).

On déduit du théorème 1 que, avec les notations du théorème 1, si $\tilde{\Gamma}_{\varphi(\rho)}$ est l'ensemble associé à $\mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}$,

$$\tilde{\Gamma}_{\varphi(\rho)} = \Gamma_\rho (\rho \in \Sigma).$$

Σ étant involutive et le vecteur radial étant supposé non orthogonal à Σ pour la forme symplectique ω, il existe, au voisinage de tout point de Σ, une transformation canonique $\Phi : T^*\Omega\setminus 0 \to T^*\mathbf{R}^n\setminus 0$ qui envoie microlocalement Σ sur la surface $\tilde{\Sigma}$ définie dans $T^*(\mathbf{R}^n)\setminus\{0\}$ par

$$(\xi_1 = 0, \ldots, \xi_\nu = 0)$$

où ν désigne la codimension de Σ dans $T^*\Omega\setminus 0$.

On suppose maintenant que Σ est déterminée par $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_\nu = 0$, et on écrit P sous la forme

$$P = \sum_{l=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1, \ldots, \nu]^{M-l}} A_{\alpha, l} D_{x_{\alpha_1}} \ldots D_{x_{\alpha_{M-l}}}$$

où les $A_{\alpha, l}$ sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques de degré $m - M + \frac{l}{2}$ définis dans un voisinage conique ouvert d'un point ρ de Σ.

Dans ce cas, Γ_ρ est l'ensemble parcouru par :

$$\sum_{l=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1, \ldots, \nu]^{M-l}} \sigma_{m-M+l/2}(A_{\alpha, l})(\rho)\xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_{M-l}}$$

lorsque $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ parcourt $\mathbf{R}^\nu$.

L'hypothèse du théorème nous dit que $p' = \sum_{j=0}^{M} p_{m-j/2}$ ne s'annule pas dans un petit voisinage conique de ρ dans $T^*\mathbf{R}^n \setminus 0$; $p'^{-1}(x, \xi) \in S^{-m, -M}(\Omega, \Sigma)$ (avec les notations de [1]) et l'on vérifie que l'on peut construire comme dans [1] une paramétrix à gauche de P.

Remarque 2.1. — La condition est également nécessaire [1], [14].

Remarque 2.2. — On suppose que $\tilde{q}_\rho(X)$ est réelle sur $\mathfrak{N}(\Sigma)_\rho = \dfrac{T_\rho(T^*\Omega)}{T_\rho\Sigma}$ et que $\tilde{q}(\rho, X) = 0 \Longrightarrow H_{\tilde{q}_\rho} \neq 0$ (hamiltonien de $\tilde{q}_\rho$).

Alors, on a un phénomène de propagation des singularités, cf. [13], [14].

3. Démonstration du théorème 4.

On suppose maintenant que Σ est symplectique de codimension $2k$ et on identifie $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)/T_\rho\Sigma$ et $(T_\rho\Sigma)^\perp$ que l'on notera $\mathfrak{N}(\Sigma)_\rho$.

a) Introduction de P_ρ :

On considère maintenant que $\tilde{q}(\rho, X)$ défini par (0.6) est une fonction sur $\mathfrak{N}(\Sigma)_\rho$.

Nous allons associer par un procédé dû à J. Leray ([15], [16]) et C. Rockland ([17], [18]) une classe d'opérateurs différentiels de la manière suivante :

On *choisit* des coordonnées linéaires canoniques $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k$ sur $\mathfrak{N}(\Sigma)_\rho$, i.e. des coordonnées linéaires telles que

$$\omega/\mathfrak{N}(\Sigma)_\rho = \sum_{i=1}^{k} dt_i \wedge ds_i.$$

Ce choix de coordonnées associe à $\tilde{q}(\rho, X)$ un polynôme en (s, t)

$$\check{q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k)$$

défini par

$$\check{q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k) = \tilde{q}(\rho, X)$$

où $(s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k)$ désignent les coordonnées de X sur la base choisie qu'on notera b.

On écrit ce polynôme sous la forme unique suivante :

$$\check{q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1, \ldots, 2k]^{M-j}} a_{\alpha, j} u_\alpha$$

où $u_\alpha = u_{\alpha_1} . u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_{2k}}$

$$\left.\begin{array}{lll} u_{\alpha_i} = s_l & \text{si} & \alpha_i = l \\ u_{\alpha_i} = t_l & \text{si} & \alpha_i = l + k \end{array}\right\} \quad 1 \leqslant l \leqslant k$$

et où les $a_{\alpha, j}$ sont symétriques.

On pose alors

$$\tilde{Q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, D_{s_1}, \ldots, D_{s_k}) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1, \ldots, 2k]^{M-j}} a_{\alpha, j} U_\alpha$$

où U_{α_j} désigne l'opérateur $\left.\begin{array}{ll} s_l & \text{si } \alpha_j = l \\ D_{s_l} & \text{si } \alpha_j = l + k \end{array}\right\} \ 1 \leqslant l \leqslant k.$

Il est clair que, par ce procédé, on réalise une bijection entre les polynômes de degré $\leqslant$ M et ces opérateurs différentiels.

On dira que $\check{q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k)$ est le symbole de $\tilde{Q}_b(\rho, s_1, \ldots, s_k, D_{s_1}, \ldots, D_{s_k})$.

On désigne par ψ l'application $\check{q} \to \tilde{Q}$.

Le polynôme q dépend du choix d'une base symplectique. On est donc tout naturellement conduit à étudier l'action du groupe G des transformations symplectiques de $\mathbf{R}^{2k}$ sur $\check{q}$.

A un élément g de G, on associe l'application notée multiplicativement à gauche :

$$\check{q} \to g.\check{q} = \check{q} \circ g^{-1}.$$

On utilisera alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — [15], [16], [17] *Pour tout* g *dans* G, *il existe un opérateur unitaire* $U_g : L^2(\mathbf{R}^k) \to L^2(\mathbf{R}^k)$ *tel que l'on ait :*

$$\psi(g.\check{q}) = U_g.\psi(\check{q}).U_g^{-1}$$

De plus, U_g *et* U_g^{-1} *opèrent de* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^k)$ *dans* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^k)$.

Remarque 3.2. — Des constructions explicites de U_g sont données dans ([16], [18], [9]).

(3.1.) On notera P_ρ la classe d'équivalence introduite; cette classe d'équivalence est invariante (elle ne dépend plus du choix de b) car associée à $\tilde{q}(\rho, X)$ de manière unique.

b) Démonstration du théorème :

La démonstration du théorème est basée sur le lemme classique suivant [12].

On désignera par $(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n)$ les coordonnées dans $T^*\mathbf{R}^n\backslash 0$.

LEMME 3.3. — *Soit* Σ *une sous-variété conique fermée de* $T^*\Omega\backslash 0$, *symplectique de codimension* $2k$; *alors au voisinage de tout point* ρ *de* Σ, *on peut trouver une transformation canonique* Φ *de* $T^*\Omega\backslash 0$ *dans* $T^*\mathbf{R}^n\backslash 0$, *qui envoie* Σ *sur* $\check{\Sigma}$ *définie par* $\{s_1 = 0, \ldots, s_k = 0,\ t_1 = 0, \ldots, t_k = 0\}$.

Le théorème 1 et le lemme 3.3. nous permettent de nous ramener à l'étude d'un modèle microlocal.

On suppose maintenant que Σ est donné dans $T^*\mathbf{R}^n\backslash 0$ par :

$$\begin{matrix} s_1 = 0, \ldots, s_k = 0 & \text{où} & s = (s_1, \ldots, s_k, s') \\ t_1 = 0, \ldots, t_k = 0 & & t = (t_1, \ldots, t_k, t') \end{matrix} \quad (s, t) \in T^*\mathbf{R}^n\backslash 0.$$

Soit Λ l'opérateur pseudodifférentiel d'ordre $1/2$ dont le symbole est donné au voisinage de Σ par $|t'|^{1/2}$.

On pose :

$$\begin{aligned} U_i &= \Lambda s_i \quad \text{si} \quad i = 1, \dots, k \\ U_i &= \Lambda^{-1} D_{s_{(i-k)}} \quad \text{si} \quad i = k+1, \dots, 2k. \end{aligned}$$

On peut alors écrire P sous la forme (1.1) (1.2) (1.3) :

$$P = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in [1, \dots, 2k]^{M-j}} A_\alpha U_\alpha.$$

Il est montré dans [19] qu'on peut construire une paramétrix à gauche pour P, opérant continument de $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dans $H^{s+m-M/2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour tout s, si et seulement si, en tout point $(0, s', 0, t')$ de Σ, l'opérateur différentiel défini par

$$P_{s',t'} = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha} a^0_{\alpha,j}(0, s', 0, t') W_\alpha \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} a^0_{\alpha,j} &= \sigma_{\mathrm{princ}}(A_{\alpha,j}) \\ W_{\alpha_i} &= |t'|^{1/2} s_j \quad \text{si} \quad \alpha_i = j \\ W_{\alpha_i} &= |t'|^{-1/2} D_{s_j} \quad \text{si} \quad \alpha_i = j + l \end{aligned} \Bigg\} \quad 1 \leqslant j \leqslant k$$

a un noyau réduit à 0 dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^k)$.

Or il est facile de vérifier que $P_{s',t'}$, défini en (3.2), est un élément de la classe $P_{0,s',0,t'}$ défini en (3.1).

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 3.4. — Lorsque Σ n'est pas symplectique, on peut faire toute la construction exposée au § 3.*a*) sur $T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$ tout entier, au lieu de $\mathfrak{N}_\rho(\Sigma)$.

Ceci permet d'introduire la classe P_ρ dans tous les cas.

Cette remarque sera approfondie et développée dans [3] en suivant le formalisme introduit dans [1].

4. Étude d'un autre cas.

On considère la classe suivante :

Soit $m \in \mathbf{R}, M \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{R}$ tel que $k > 2$. On définit $L^{m,M}_{k,}(\Omega, \Sigma)$ [3] comme l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels P dans $L^m(\Omega)$ qui, dans chaque système de coor-

[3] Lorsque $k = 2$, la classe introduite serait la classe $L^{m,M}(\Omega, \Sigma)$ déjà considérée au § 0.

données locales d'un ouvert $U \subset \Omega$ ont un symbole de la forme :

4.1. $$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

où les $p_{m-j}(x, \xi)$ sont des symboles de $S^{m-j}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus 0)$, positivement homogènes de degré $m - j$, qui vérifient :

4.2. Pour tout compact $K \Subset U$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbf{R}^n$, tel que $|\xi| \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{|p_{m-j}(x, \xi)|}{|\xi|^{m-j}} \leqslant C(d(x, \xi))^{M-kj}, \quad j \in \mathbf{N}, \quad k.j \leqslant M$$
$$d(x, \xi) = \operatorname*{Inf}_{(y, \eta) \in \Sigma} \left(|x - y| + \left|\eta - \frac{\xi}{|\xi|}\right|\right).$$

4.3. Pour tout compact $K \Subset U$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que, pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbf{R}^n$, tel que $|\xi| \geqslant 1$, on ait :

$$\frac{|p_m(x, \xi)|}{|\xi|^m} \geqslant C\,(d(x, \xi))^M.$$

On supposera dans la suite qu'il existe un entier $l \geqslant 0$ tel que $M = kl$. Il est facile de voir que cette classe est bien définie. En utilisant les méthodes du § 0, on peut introduire en tout point ρ de Σ, pour tout j, tel que $kj \in \mathbf{N}$, et $kj \leqslant M$, les $(M - kj)$ formes linéaires symétriques suivantes $\tilde{p}_{m-j}(\rho)$ définies par :

4.4. $\forall X_1, \ldots, X_{M-kj} \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$
$$\tilde{p}_{m-j}(\rho)(X_1, \ldots, X_{M-kj}) = \frac{1}{(M - kj)\,!}\,(\tilde{X}_1 \ldots \tilde{X}_{M-kj}p_{m-j})\rho(^*).$$

On pose alors :

4.5. $\forall X \in T_\rho(T^*\Omega \setminus 0)$
$$\tilde{q}(\rho, X) = \sum_{\substack{kj \in \mathbf{N} \\ kj \leqslant M}} \tilde{p}_{m-j}(\rho)(X, \ldots, X).$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Soit* P *un opérateur de* $L_k^{m, kl}(\Omega, \Sigma)$, *on suppose qu'en tout point* ρ *de* Σ, *et pour tout* X *dans*

(*) $\tilde{X}_i$ désigne une extension de X_i au voisinage de ρ.

$T_\rho(T^*\Omega\setminus 0)$: $\tilde{q}(\rho, X) \neq 0$. *Alors l'opérateur* P *est hypoelliptique avec perte de* l *dérivées et on peut construire une paramétrix pour* P *dans* $S_{\rho,\delta}^{-m+l}(\Omega)$ (4) *avec* $\rho = 1 - \frac{1}{k}$, $\delta = \frac{1}{k}$.

L'hypothèse nous dit que dans un voisinage canonique Γ d'un point ρ de Σ, il existe pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^n \times \mathbf{N}^n$ des constantes $C, C_{\alpha\beta}$ telles que, pour $|\xi| > C$, $(x, \xi) \in \Gamma$, on ait :

$$|p(x, \xi)| > C|\xi|^{m-l}$$

et $$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}|p(x, \xi)|$$

avec $$\rho = 1 - 1/k, \qquad \delta = 1/k.$$

On est alors ramené à un théorème d'Hörmander [11].

Exemples. — Dans $\mathbf{R}^2$

$D_t^4 + \lambda D_x^3$ est hypoelliptique si $\tau^4 + \lambda\xi^3 \neq 0$ pour $|\tau| + |\xi| \neq 0$.

$D_t^4 + t^4 D_x^4 + \lambda D_x^3$ est hypoelliptique si $\tau^4 + t^4\xi^4 + \lambda\xi^3 \neq 0$ pour $|\xi| \neq 0$.

Remarque. — Lorsque Σ est involutive (cf. § 0), la condition du théorème 4.1 est nécessaire pour avoir une hypoellipticité avec perte de l dérivées.

Lorsque Σ est involutive et que $\tilde{q}$ est réelle, on a, sous des hypothèses convenables, propagation des singularités comme dans ([2], [13], [14]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. *C.P.A.M.* (à paraître).

[2] L. Boutet de Monvel, Opérateurs intégraux de Fourier et équations aux dérivées partielles. Actes du Colloque de Nice (1974). *Lecture Notes* (Springer).

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis et B. Helffer, à paraître *Astérisque*.

[4] L. Boutet de Monvel and F. Trèves, On a class of pseudodifferential operators with double characteristics. *Inventiones Mathematicae*, 24 (1974), 1-34.

(4) $S_{\rho,\delta}^m$ est défini dans [11].