

MASAYUKI ITÔ

**Sur le cône convexe maximum formé par des diviseurs  
d'un noyau de convolution et son application**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 25, n° 3-4 (1975), p. 289-308

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1975\\_\\_25\\_3-4\\_289\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_289_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR LE CÔNE CONVEXE MAXIMUM FORMÉ PAR DES DIVISEURS D'UN NOYAU DE CONVOLUTION ET SON APPLICATION

par Masayuki ITÔ

*Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion  
de son 70<sup>e</sup> anniversaire.*

## 1. Introduction.

Dans toute la suite  $X$  désignera un groupe abélien localement compact, séparé et dénombrable à l'infini, et  $\xi$  sera une mesure de Haar sur  $X$ .

Rappelons qu'un noyau de convolution  $N$  (sur  $X$ ) est une mesure (de Radon) positive (dans  $X$ ) et que, pour une mesure réelle  $\mu$ , le  $N$ -potentiel de  $\mu$  est la convolution  $N * \mu$  dès que  $N * |\mu|$  a un sens, où  $|\mu|$  est la variation totale de  $\mu$ .

Soient  $N$  et  $N'$  deux noyaux de convolution. On dira que  $N'$  est un diviseur de  $N$  s'il existe un noyau de convolution  $N''$  tel que  $N' * N'' = N$ . Si  $N''$  est uniquement déterminé, on notera  $N'' = N/N'$ . On désignera par  $D(N)$  l'ensemble des diviseurs de  $N$ .

Le premier but de cette note est de discuter le cône convexe formé par des diviseurs d'un noyau de convolution donné. Soit  $N_0$  un noyau de convolution injectif <sup>(1)</sup>. Nous montrerons qu'il existe un plus grand cône convexe  $C_s(N_0)$  formé

<sup>(1)</sup> On dit qu'un noyau de convolution  $N$  est injectif si, pour une mesure réelle  $\mu$  quelconque,  $\mu = 0$  dès que  $N * |\mu|$  a un sens et que  $N * \mu = 0$ . Dans ce cas on dit aussi que  $N$  satisfait au principe d'unicité.

par des diviseurs de  $N_0$  et contenant  $N_0$ . Nous obtiendrons qu'un noyau de convolution  $N$  est contenu dans  $C_s(N_0)$  si et seulement si  $N_0/N$  a un sens et s'il est un noyau de convolution de Hunt.

On dit qu'une famille  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  de mesures positives est un semi-groupe vaguement continu si  $\alpha_0 = \varepsilon$  (la mesure d'unité à l'origine),  $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$  ( $\forall t \geq 0, \forall s \geq 0$ ) et si l'application  $t \rightarrow \alpha_t$  est vaguement continue. Si un noyau de convolution  $N$  s'écrit, avec un semi-groupe vaguement continu  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ , comme  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ , alors  $N$  s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe associé à  $N$ . On notera (H) l'ensemble des noyaux de convolution de Hunt.

Comme application du premier résultat, nous discuterons l'unicité de la classe fractionnaire d'un noyau de convolution de Hunt. Soit  $N$  un noyau de convolution. On dira qu'une famille  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  de noyaux de convolution est une classe fractionnaire de  $N$  si  $N^1 = N$  et si, pour  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  quelconques,  $N^\alpha * N^\beta = N^{\alpha+\beta}$  dès que  $\alpha + \beta \leq 1$ . Évidemment une classe fractionnaire de  $N$  n'existe pas toujours. Soit  $N$  un noyau de convolution de Hunt. Alors on sait bien qu'il existe une classe fractionnaire de  $N$  contenue dans (H) (cf. par exemple [3]). Dans cette note, nous montrerons que, pour une classe fractionnaire  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  de  $N$  contenue dans (H) quelconque, il existe une fonction exponentielle  $\varphi$  sur  $[0, 1]$  satisfaisant à  $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$  telle que

$$N^\alpha = \frac{\varphi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha} \alpha_t dt \quad (0 < \forall \alpha \leq 1) \text{ et } N^0 = \varepsilon,$$

où  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  est le semi-groupe associé à  $N$ . On rappelle que  $\varphi(t)$  est exponentielle sur  $[0, 1]$  si, pour  $t \geq 0$  et  $s \geq 0$  quelconques,  $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$  dès que  $t+s \leq 1$ . Par conséquent, pour un noyau de convolution de Hunt  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ , il existe une classe fractionnaire  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  de  $N$ , et une seule telle que  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (H)$  et que  $\lim_{\alpha \searrow 0} N^\alpha$  existe vaguement. Dans ce cas,  $N^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha} \alpha_t dt$ .

**2. La somme d'un noyau de convolution et de son diviseur.**

Rappelons qu'une résolvante  $(N_p)_{p \geq 0}$  est une famille de noyaux de convolution satisfaisant à

$$(1) \quad N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q \quad (\forall p \geq 0, \forall q \geq 0).$$

L'égalité (1) s'appelle l'équation résolvante. Évidemment l'application  $p \rightarrow N_p$  est vaguement continue et décroissante. On obtient facilement la remarque suivante (cf. par exemple [2]).

*Remarque 1.* — Soient  $(N_p)_{p \geq 0}$  et  $(N'_p)_{p \geq 0}$  deux résolvantes. S'il existe  $p_0 > 0$  tel que  $N_{p_0} = N'_{p_0}$ , alors, pour tout  $p > 0$ ,  $N_p = N'_p$ .

Si, pour un noyau de convolution  $N$ , il existe une résolvante  $(N_p)_{p > 0}$  satisfaisant à  $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N$  (vaguement), alors on notera  $N \in (R)$ . Dans ce cas  $(N_p)_{p > 0}$  est uniquement déterminée (cf. [2]), et en posant  $N_0 = N$ , on dit que  $(N_p)_{p \geq 0}$  est la résolvante associée à  $N$ . Évidemment  $(N_p)_{p \geq 0} \subset (R)$  et  $N - N_p = pN * N_p$  ( $\forall p \geq 0$ ). Pour un noyau de convolution de Hunt  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ , on pose

$$N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt \quad (\forall p \geq 0).$$

Alors  $(N_p)_{p \geq 0}$  est la résolvante associée à  $N$ .

**LEMME 1** (cf. [1] et [4]). — *Soit  $N$  un noyau de convolution; alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*

- (1)  $N \in (H)$ .
- (2)  $N \in (R)$  et  $N$  est injectif.
- (3)  $N \in (R)$  et  $N$  est non-périodique <sup>(2)</sup>.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du présent lemme.

<sup>(2)</sup> Cela signifie que, pour tout  $x \neq 0$  de  $X$ ,  $N \neq N * \varepsilon_x$ , où  $\varepsilon_x$  est la mesure d'unité à  $x$ .

**COROLLAIRE 1.** — Soient  $m$  un entier  $> 0$  et  $N_1, N_2, \dots, N_m$  des noyaux de convolution de Hunt. Si  $N_1 * N_2 * \dots * N_m$  a un sens, alors  $N_1 * N_2 * \dots * N_m$  est injectif.

Soit  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$  un noyau de convolution de Hunt et  $\eta$  un noyau de convolution. On dit que  $\eta$  est  $N$ -invariant si, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\eta = \eta * \alpha_t$ .

La remarque suivante est une conséquence immédiate de l'injectivité de la transformation de Laplace.

**Remarque 2.** — Soit  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$  un noyau de convolution de Hunt et  $(N_p)_{p \geq 0}$  la résolvante associée à  $N$ . Alors pour qu'un noyau de convolution  $\eta$  soit  $N$ -invariant, il faut et il suffit que, pour tout  $p > 0$ ,  $\eta = p\eta * N_p$ .

Nous montrerons la première proposition.

**PROPOSITION 1.** — Soit  $N_0$  un noyau de convolution injectif et  $N \neq 0$  un noyau de convolution. Alors pour que  $N$  soit, pour un noyau de convolution de Hunt  $N'$  et un noyau de convolution  $N'$ -invariant  $\eta$ , de la forme  $N_0 = N * N' + \eta$ , il faut et il suffit que, pour tout  $p > 0$ ,  $N + pN_0$  soit un diviseur de  $N_0$ .

**Démonstration.** — Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour tout  $p > 0$ , il existe un noyau de convolution  $N'_p$  tel que  $(N + pN_0) * N'_p = N_0$ . On montrera que  $(N'_p)_{p > 0}$  est une résolvante. Pour tous  $p > 0$  et  $q > 0$ , on a

$$\begin{aligned} N_0 * N'_p &= ((N + qN_0) * N'_q) * N'_p = ((N + qN_0) * N'_p) * N'_q \\ &= ((N + pN_0) * N'_p + (q - p)N_0 * N'_p) * N'_q \\ &= N_0 * (N'_q + (q - p)N'_p * N'_q). \end{aligned}$$

Comme  $N_0$  est injectif, l'égalité  $N'_p - N'_q = (q - p)N'_p * N'_q$  a lieu, donc  $(N'_p)_{p > 0}$  est une résolvante. La remarque 1 donne que, pour tout  $p > 0$ ,  $N'_p$  est uniquement déterminé. Donc  $N_0 / (N + pN_0)$  a un sens et cela est égal à  $N'_p$ . Ayant  $N \neq 0$  et  $N * N'_p \leq N_0$  ( $\forall p > 0$ ), on voit qu'il existe un noyau de convolution  $N'$  tel que  $N' = \lim_{p \rightarrow 0} N'_p$  (vaguement). En posant  $N'_0 = N'$ , on obtient que  $(N'_p)_{p \geq 0}$  est la résolvante associée à  $N'$ . Comme  $(N + pN_0) * N'_p = N_0$  et  $N_0$  est injectif,  $N'_p$

est non-périodique. On voit donc que  $N'$  est aussi non-périodique. D'après le lemme 1, on a  $N' \in (H)$ . En vertu de la semi-continuité inférieure de la convolution,  $N * N'$  a un sens et  $N_0 \geq N * N'$ . Posons  $\eta = N_0 - N * N'$ ; alors, pour tout  $p > 0$ ,  $\eta = p\eta * N'_p$ . La remarque 2 donne que  $\eta$  est  $N'$ -invariant, et on a  $N_0 = N * N' + \eta$ .

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Soit  $(N'_p)_{p \geq 0}$  la résolvente associée à  $N'$ . Comme, pour tout  $p > 0$ ,  $N' * N'_p \leq \frac{1}{p} N'$ ,  $N_0 * N'_p$  a un sens. Donc

$$\begin{aligned} (N + pN_0) * N'_p &= (N + pN * N' + p\eta) * N'_p \\ &= N * N'_p + N * (N' - N'_p) + \eta = N_0. \end{aligned}$$

Par conséquent  $N + pN_0$  est un diviseur de  $N_0$ . La démonstration est ainsi complète.

*Remarque 3.* — Dans la présente proposition, le couple  $(N', \eta)$  est uniquement déterminé, car, pour tout  $p > 0$ ,  $N_0/(N + pN_0)$  a un sens et

$$N' = \lim_{p \rightarrow 0} N_0/(N + pN_0)$$

(vaguement).

*Remarque 4.* — Soient  $N'$  et  $\eta$  les noyaux de convolution dans la proposition 1. Désignons par  $(\alpha'_i)_{i \geq 0}$  le semi-groupe associé à  $N'$ . Alors on a facilement  $\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} N_0 * \alpha'_i$  (vaguement).

La proposition 1 donne immédiatement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.** — Soient  $N_0$  et  $N$  comme dans la proposition 1. Alors pour que  $N_0/N$  ait un sens et soit un noyau de convolution de Hunt, il faut et il suffit que, pour tout  $p \geq 0$ ,  $N + pN_0$  soit un diviseur de  $N_0$ .

Discutons le principe du balayage.

**LEMME 2** (cf. [2] et [4]). — Soit  $N \in (R)$ . Alors  $N$  satisfait au principe du balayage sur tout ouvert; c'est-à-dire que, pour une mesure positive  $\mu$  à support compact et un ouvert  $\omega$  dans  $X$  quelconques, il existe une mesure positive  $\mu'$  portée par  $\overline{\omega}$  telle que : (a)  $N * \mu \geq N * \mu'$  (dans  $X$ ).

(b)  $N * \mu = N * \mu'$  dans  $\omega$ .

(c) Pour une mesure positive  $\nu$  quelconque,  $N * \nu \geq N * \mu'$  dès que  $N * \nu$  a un sens et que  $N * \nu \geq N * \mu$  dans  $\omega$ .

Dans ce cas,  $N * \mu'$  est uniquement déterminé. On dit que  $\mu'$  est une mesure balayée de  $\mu$  sur  $\omega$  relativement à  $N$ .

LEMME 3 (cf. par exemple [4]). — Soit  $N \in (R)$  et  $\mu$  une mesure positive à support compact. Soit  $(F_n)_{n=1}^{\infty}$  une suite de compacts de  $X$  telle que  $F_n \subset \overset{\circ}{F}_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ , ou  $\overset{\circ}{F}_{n+1}$  désigne l'intérieur de  $F_{n+1}$ ; on note  $\mu'_n$  une mesure balayée de  $\mu$  sur  $CF_n$  relativement à  $N$ . Alors  $N * \mu'_n \searrow 0$  (vaguement) lorsque  $n \nearrow \infty$ .

Pour un ouvert  $\omega$  dans  $X$ ,  $C_K(\omega)$  désigne l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans  $\omega$  à support compact. On pose  $C_K^+(\omega) = \{f \in C_K(\omega); f \geq 0\}$ . On note  $C_K$  et  $C_K^+$  au lieu de  $C_K(X)$  et de  $C_K^+(X)$ .

Discutons la convergence de potentiels.

LEMME 4. — Soient  $N_1, N_2 \in (R)$ . Supposons que  $N_1 * N_2$  a un sens. Soit  $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$  une suite de mesures positives qui converge vaguement vers une mesure positive  $\mu$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . S'il existe une mesure positive  $\nu$  telle qu'à  $f \in C_K^+$  quelconque, on puisse associer  $g \in C_K^+$  satisfaisant à

$$N_1 * N_2 * \mu_n * f \leq N_1 * N_2 * \nu * g \quad (\forall n \geq 1),$$

alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_1 * N_2 * \mu_n = N_1 * N_2 * \mu$  (vaguement).

En effet, prenons une suite  $(V_n)_{n=1}^{\infty}$  de voisinages compacts de l'origine telle que  $V_n \subset \overset{\circ}{V}_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$ . On désigne par  $\varepsilon'_{j,n}$  une mesure balayée de  $\varepsilon$  sur  $CV_n$  relativement à  $N_j$  ( $j = 1, 2$ ). Comme  $N_j * \varepsilon'_{j,n} \searrow 0$  (vaguement) lorsque  $n \nearrow \infty$ , on a aussi  $N_1 * N_2 * \varepsilon'_{j,n} \searrow 0$  (vaguement) lorsque  $n \nearrow \infty$ . Soit  $f \in C_K^+$  quelconque. Prenons  $g \in C_K^+$  telle que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$N_1 * N_2 * \mu_n * \check{f} \leq N_1 * N_2 * \nu * \check{g},$$

où  $\check{f}(x) = f(-x)$ . Alors, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dN_1 * N_2 * \mu_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \int f dN_1 * N_2 * (\varepsilon - \varepsilon'_{1,m}) * (\varepsilon - \varepsilon'_{2,m}) * \mu_n \right. \\ &\quad \left. + \int f dN_1 * N_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m} - \varepsilon'_{1,m} * \varepsilon'_{2,m}) * \mu_n \right) \\ &\leq \int f dN_1 * N_2 * (\varepsilon - \varepsilon'_{1,m}) * (\varepsilon - \varepsilon'_{2,m}) * \mu \\ &\quad + \int g dN_1 * N_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m}) * \nu \\ &\leq \int f dN_1 * N_2 * \mu + \int g dN_1 * N_2 * (\varepsilon'_{1,m} + \varepsilon'_{2,m}) * \nu. \end{aligned}$$

En faisant  $m \nearrow \infty$ , on obtient que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dN_1 * N_2 * \mu_n \leq \int f dN_1 * N_2 * \mu.$$

En vertu de la semi-continuité inférieure de la convolution, on voit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} N_1 * N_2 * \mu_n = N_1 * N_2 * \mu$  (vaguement), d'où le lemme 4.

LEMME 5. — Soient  $N_1, N_2 \in (H)$ . Supposons que  $N_1 * N_2$  a un sens. Soient  $(\mu_n)_{n=1}^\infty$  et  $\mu$  une suite de mesures positives et une mesure positive, respectivement. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_1 * N_2 * \mu_n = N_1 * N_2 * \mu$$

(vaguement) et s'il existe une mesure positive  $\nu$  telle qu'à  $f \in C_K^+$  quelconque, on puisse associer  $g \in C_K^+$  satisfaisant à  $N_1 * N_2 * \mu_n * f \leq N_1 * N_2 * \nu * g$  ( $\forall n \geq 1$ ), alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu \text{ (vaguement).}$$

En effet, évidemment  $(\mu_n)_{n=1}^\infty$  est vaguement bornée. Soit  $\mu'$  un point vaguement adhérent de  $(\mu_n)_{n=1}^\infty$  quelconque. D'après le lemme 4, on a  $N_1 * N_2 * \mu = N_1 * N_2 * \mu'$ . Donc le corollaire 1 donne que  $\mu = \mu'$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$  (vaguement).

Montrons la deuxième proposition.

PROPOSITION 2. — Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution de Hunt. Désignons par  $(N_{j,p})_{p \geq 0}$  et par  $(\alpha_{j,t})_{t \geq 0}$  la résolvente associée à  $N_j$  et le semi-groupe associé à  $N_j$  ( $j = 1, 2$ ), respectivement. Supposons que  $N_1 * N_2$  a un sens; on pose

$N_0 = N_1 * N_2$ . Alors  $N_0/(N_1 + N_2)$  a un sens et cela est un noyau de convolution de Hunt. Posons  $\tilde{N} = N_0/(N_1 + N_2)$ . Alors le semi-groupe associé à  $\tilde{N}$  est égal à  $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t \geq 0}$  et

$$(2) \quad \tilde{N} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p}{2} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right)^n \right)$$

(vaguement) (3).

*Démonstration.* — Pour simplifier la notation, on pose  $N_j^{(p)} = N_j + \frac{1}{p} \varepsilon$  ( $j = 1, 2; \forall p > 0$ ) et  $N_0^{(p)} = N_1^{(p)} * N_2^{(p)}$ . Il est bien connu que, pour tout  $p > 0$ ,

$$N_j^{(p)} = \frac{1}{p} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (p N_{j,p})^n \right)$$

et  $N_j^{(p)} \in (H)$  (cf. [2]). Soit  $(N_{j,q}^{(p)})_{q \geq 0}$  la résolvante associée à  $N_j^{(p)}$ . Alors, pour tout  $q \geq 0$ ,

$$N_{j,q}^{(p)} = \frac{1}{p+q} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p^2}{p+q} N_{j,p} \right)^n \right) \quad (j = 1, 2).$$

Regardons la démonstration de la proposition 1; on voit que  $(N_1^{(p)} + q N_0^{(p)}) * N_{2,q}^{(p)} = N_0^{(p)}$  et  $(N_2^{(p)} + q N_0^{(p)}) * N_{1,q}^{(p)} = N_0^{(p)}$ .

On a donc

$$\begin{aligned} N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2q N_0^{(p)} \\ = 2(p+q) N_0^{(p)} * \left( \varepsilon - \frac{p^2}{2(p+q)} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p^2}{2(p+q)} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right)^n$  a un sens et la suite  $\left( N_0^{(p)} * \left( \frac{p^2}{2(p+q)} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right)^n \right)_{n=1}^{\infty}$  est décroissante.

En posant

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \frac{1}{2(p+q)} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p^2}{2(p+q)} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right)^n \right),$$

(3) Pour une mesure positive  $\sigma$ , on note  $(\sigma)^1 = \sigma$  et  $(\sigma)^n = (\sigma)^{n-1} * \sigma$  ( $\forall n \geq 2$ ) dès que cela a un sens.

on a, pour tous  $p > 0$  et  $q \geq 0$ ,

$$(N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2qN_0^{(p)}) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0^{(p)} - \lim_{n \rightarrow \infty} N_0^{(p)} * \left( \frac{p^2}{2(p+q)} (N_{1,p} + N_{2,p})^n \right).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{p}{2} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right)^n = 0$  (vaguement), le lemme 4 donne que

$$(N_1^{(p)} + N_2^{(p)} + 2qN_0^{(p)}) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0^{(p)}.$$

Pour tout  $q \geq 0$ ,  $(\tilde{N}_q^{(p)})_{p \geq 1}$  est vaguement bornée. Soit  $\tilde{N}_q$  un point vaguement adhérent de  $(\tilde{N}_q^{(p)})_{p \geq 1}$  lorsque  $p \rightarrow \infty$ . Alors le lemme 4 donne encore que

$$(N_1 + N_2 + 2qN_0) * \tilde{N}_q = N_0 \quad (\forall q \geq 0).$$

Comme  $N_0$  est injectif, le corollaire 2 donne que

$$\tilde{N} = N_0 / (N_1 + N_2) (= \tilde{N}_0)$$

a un sens et que cela est un noyau de convolution de Hunt. On voit aussi que, pour tout  $q \geq 0$ ,

$$\tilde{N}_q = N_0 / (N_1 + N_2 + 2qN_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{N}_q^{(p)}$$

(vaguement). En considérant la démonstration de la proposition 1, on voit que  $(\tilde{N}_{q/2})_{q \geq 0}$  est la résolvante associée à  $\tilde{N}$ .

Montrons finalement que le semi-groupe associé à  $\tilde{N}$  est égal à  $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t \geq 0}$ . Soit  $(\alpha_{j,t}^{(p)})_{t \geq 0}$  le semi-groupe associé à  $N_j^{(p)}$  ( $j = 1, 2; p > 0$ ). Alors

$$\alpha_{j,t}^{(p)} = \exp(-pt) \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^n}{n!} (pN_{j,p})^n \right) \quad (= \exp(-pt(\varepsilon - pN_{j,p})))$$

(cf. [2]). Pour  $p > 0$  quelconque  $(\alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe vaguement continu et on a, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \exp - 2pt \left( \left( \varepsilon - \frac{p}{2} (N_{1,p} + N_{2,p}) \right) \right).$$

Donc, pour tout  $q > 0$ ,

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \int_0^{\infty} \exp(-2qt) \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} dt.$$

On sait déjà que  $\lim_{p \gg \infty} \alpha_{j,t}^{(p)} = \alpha_{j,t}$  (vaguement) (cf. [2] et [4]).

Comme, pour tout  $p > 0$  et pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} N_j * \alpha_{j,t}^{(p)} &= (pN_{j,p}) * \left( N_j + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \alpha_{j,t}^{(p)} \\ &\leq (pN_{j,p}) * \left( N_j + \frac{1}{p} \varepsilon \right) = N_j, \end{aligned}$$

le lemme 4 donne que

$$\lim_{p \gg \infty} N_j * \alpha_{j,t}^{(p)} = \lim_{p \gg \infty} \left( N_j + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \alpha_{j,t}^{(p)} = N_j * \alpha_{j,t} \quad (j = 1, 2)$$

(vaguement). Donc le théorème de Lebesgue donne que, pour  $f, g \in C_{\mathbb{K}}^{\pm}$  quelconques,

$$\begin{aligned} \lim_{p \gg \infty} \int \left( N_1 + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \alpha_{1,t}^{(p)} * f(x) \left( N_2 + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \alpha_{2,t}^{(p)} * g(-x) d\xi(x) \\ = \int N_1 * \alpha_{1,t} * f(x) N_2 * \alpha_{2,t} * g(-x) d\xi(x), \end{aligned}$$

car

$$\left( N_j + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \alpha_{j,t}^{(p)} \leq N_j + \frac{1}{p} \varepsilon \quad \text{et} \quad \left( N_1 + \frac{1}{p} \varepsilon \right) * \left( N_2 + \frac{1}{p} \varepsilon \right)$$

a un sens. Par conséquent, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$  a un sens et

$$\lim_{p \gg \infty} N_0^{(p)} * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \lim_{p \gg \infty} N_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = N_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$$

(vaguement). Comme, pour tout  $p > 0$ ,  $N_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} \leq N_0$ , le lemme 5 donne que

$$\lim_{p \gg \infty} \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} = \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$$

(vaguement). On a, pour tous  $t \geq 0$  et  $s \geq 0$ ,

$$N_0 * (\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}) * (\alpha_{1,s} * \alpha_{2,s}) = N_0 * (\alpha_{1,t+s} * \alpha_{2,t+s}),$$

et donc il résulte de l'injectivité de  $N_0$  que

$$\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} * \alpha_{1,s} * \alpha_{2,s} = \alpha_{1,t+s} * \alpha_{2,t+s}.$$

Pour  $t \geq s \geq 0$  quelconques, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq N_0 * (\alpha_{1,s} * \alpha_{2,s} - \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}) \\ &\leq N_1 * \left( \int_s^t \alpha_{2,u} du \right) + N_2 * \left( \int_s^t \alpha_{1,u} du \right). \end{aligned}$$

Comme

$$N_2 * \left( N_1 * \left( \int_s^t \alpha_{2,u} du \right) \right) = N_0 * \left( \int_s^t \alpha_{2,u} du \right) \leq (t - s)N_0$$

et aussi  $N_1 * \left( N_2 * \left( \int_s^t \alpha_{1,u} du \right) \right) \leq (t - s)N_0$ , le lemme 5 donne que

$$\lim_{s \rightarrow t} N_1 * \left( \int_s^t \alpha_{2,u} du \right) = \lim_{s \rightarrow t} N_2 * \left( \int_s^t \alpha_{1,u} du \right) = 0$$

(vaguement). Donc l'application  $t \rightarrow N_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$  est vaguement continue. En utilisant encore le lemme 5, on voit que  $t \rightarrow \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t}$  est vaguement continue. Donc  $(\alpha_{1,t} * \alpha_{2,t})_{t \geq 0}$  est un semi-groupe vaguement continu. D'après le lemme 4, on obtient que, pour tout  $q > 0$ ,

$$\begin{aligned} N_0 * \tilde{N}_q &= \lim_{p \rightarrow \infty} N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty \exp(-2qt) N_0 * \alpha_{1,t}^{(p)} * \alpha_{2,t}^{(p)} dt \\ &= \int_0^\infty \exp(-2qt) N_0 * \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} dt \\ &= N_0 * \left( \int_0^\infty \exp(-2qt) \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} dt \right), \end{aligned}$$

et donc  $\tilde{N}_q = \int_0^\infty \exp(-2qt) \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} dt$ . En faisant  $q \searrow 0$ , on arrive à

$$\tilde{N} = \int_0^\infty \alpha_{1,t} * \alpha_{2,t} dt.$$

La démonstration est ainsi complète.

### 3. Notre théorème principal.

Nous allons démontrer notre théorème principal.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $N_0$  un noyau de convolution injectif. Alors il existe un cône convexe maximum  $C_s(N_0)$  formé par des diviseurs de  $N_0$  et contenant  $N_0$ , et  $C_s(N_0)$  est de la forme

$$\begin{aligned} C_s(N_0) &= \{N \in D(N_0); N_0/N \in (H)\} \\ &= \{N \in D(N_0); N + pN_0 \in D(N_0) (\forall p \geq 0)\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Posons

$$C'_s(N_0) = \{N \in D(N_0); N_0/N \in (H)\}.$$

Si  $C'_s(N_0)$  est un cône convexe, on voit, d'après le corollaire 2, que  $C'_s(N_0)$  est le cône convexe demandé  $C_s(N_0)$ . On montrera seulement que  $C'_s(N_0)$  est un cône convexe. Soient  $N_1, N_2 \in C'_s(N_0)$  quelconques. Notons  $N'_j = N_0/N_j$  et  $(N'_{j,p})_{p \geq 0}$  la résolvente associée à  $N_j (j = 1, 2)$ . Soit  $q > 0$  quelconque. Alors, pour tout  $p > 0$ ,

$$(N_j + qN_0) * N'_{j,q} = (N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \left( N'_{j,q} + \frac{1}{p} \varepsilon \right) = N_0.$$

Comme

$$N'_{j,p} + \frac{1}{p} \varepsilon = \frac{1}{p} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} (pN'_{j,p+q})^n \right),$$

on a

$$\begin{aligned} (N_1 + qN_0) * (pN'_{1,p+q}) + (N_2 + qN_0) * (pN'_{2,p+q}) \\ = 2pN_0 * \left( \varepsilon - \frac{p}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right). \end{aligned}$$

Donc  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right)^n$  a un sens et

$$\left( N_0 * \left( \frac{p}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right) \right)_{n=1}^{\infty}$$

est décroissante. Pour un nombre  $p'$  satisfaisant à

$$p < p' < p + q,$$

on a aussi

$$N_0 * \left( \frac{p'}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right)^n \leq N_0 \quad (\forall n \geq 1).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_0 * \left( \frac{p'}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right)^n = 0$$

(vaguement). Par conséquent, en posant

$$\tilde{N}_q^{(p)} = \frac{1}{2p} \left( \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{p}{2} (N'_{1,p+q} + N'_{2,p+q}) \right)^n \right),$$

on a

$$((N_1 + qN_0) * (pN'_{1,p+q}) + (N_2 + qN_0) * (pN'_{2,p+q})) * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0.$$

Comme  $N_0 * N'_{j,q}$  a un sens et  $N_0 * N'_{j,q} \leq \frac{1}{q} N_0$  ( $j = 1, 2$ ),

$N'_{1,q} * N'_{2,q}$  a aussi un sens. Regardons la démonstration de

la proposition 2; on voit que

$$\left(N'_{1,q} + N'_{2,q} + \frac{2}{p} \varepsilon\right) * \tilde{N}_q^{(p)} = \left(N'_{1,q} + \frac{1}{p} \varepsilon\right) * \left(N'_{2,q} + \frac{1}{p} \varepsilon\right).$$

Donc la proposition 2 donne qu'il existe un noyau de convolution de Hunt  $\tilde{N}_q$  tel que

$$(N'_{1,q} + N'_{2,q}) * \tilde{N}_q = N'_{1,q} * N'_{2,q} \quad \text{et} \quad \lim_{p \gg \infty} \tilde{N}_q^{(p)} = \tilde{N}_q$$

(vaguement). Pour  $f \in C_{\mathbb{K}}^+$  quelconque, il existe  $g \in C_{\mathbb{K}}^+$  telle que, pour tout  $p \geq 1$ ,  $\tilde{N}_q^{(p)} * f \leq (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g$ . Comme  $N_0 * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon)$  a un sens, le théorème de Lebesgue donne que

$$\begin{aligned} \lim_{p \gg \infty} \int \check{f} dN_0 * \tilde{N}_q^{(p)} &= \lim_{p \gg \infty} \int \tilde{N}_q^{(p)} * f(-x) dN_0(x) \\ &= \int \tilde{N}_q * f(-x) dN_0(x) = \int \check{f} dN_0 * \tilde{N}_q. \end{aligned}$$

Comme  $f$  est quelconque, on a  $\lim_{p \gg \infty} N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} = N_0 * \tilde{N}_q$  (vaguement). On a, pour  $j = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)}) * f &= N_0 * \tilde{N}_q^{(p)} * f \\ &\leq N_0 * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g \\ &= N'_{j,q} * (N_j + qN_0) * (N'_{1,q} + \varepsilon) * (N'_{2,q} + \varepsilon) * g, \end{aligned}$$

et donc le lemme 5 donne que

$$\lim_{p \gg \infty} (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)} = (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q$$

(vaguement). Comme

$$\begin{aligned} N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)}) \\ = N'_{j,q} * (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)} - N'_{j,p+q} * (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q^{(p)}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{p \gg \infty} N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)}) \\ = N'_{j,q} * ((N_j + qN_0) * \tilde{N}_q) \end{aligned}$$

(vaguement). En utilisant encore le lemme 5, on obtient que, pour  $j = 1, 2$ ,

$$\lim_{p \gg \infty} (N_j + qN_0) * (pN'_{j,p+q}) * \tilde{N}_q^{(p)} = (N_j + qN_0) * \tilde{N}_q$$

(vaguement). Par conséquent

$$(N_1 + N_2 + 2qN_0) * \tilde{N}_q = N_0.$$

Comme  $q > 0$  est quelconque, la proposition 1 donne qu'il existe un noyau de convolution de Hunt  $\tilde{N}$  et un noyau de convolution  $\tilde{N}$ -invariant  $\eta$  tels que

$$N_0 = (N_1 + N_2) * \tilde{N} + \eta$$

et que  $(\tilde{N}_{q/2})_{q \geq 0}$  est la résolvente associée à  $\tilde{N}$ , où  $\tilde{N}_0 = \tilde{N}$ . Notons  $(\alpha'_{j,t})_{t \geq 0}$  le semi-groupe associé à  $N'_j$  ( $j = 1, 2$ ). Comme, pour  $q > 0$  quelconque

$$(N'_{1,q} + N'_{2,q}) * \tilde{N}_q = N'_{1,q} * N'_{2,q},$$

la proposition 2 donne que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t}$  a un sens et que  $(\exp(-2qt)\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t})_{t \geq 0}$  est le semi-groupe associé à  $\tilde{N}_q$ . En faisant  $q \searrow 0$ , on voit que

$$(\alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t})_{t \geq 0}$$

est le semi-groupe associé à  $\tilde{N}$ . En remarquant que  $N_0$  est le  $N'_j$ -potentiel de la mesure  $N_j$  ( $j = 1, 2$ ), on a, pour tout  $t \geq 0$ ,  $N_0 * \alpha'_{j,t} \leq N_0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_0 * \alpha'_{j,t} = 0$  (vaguement). En rappelant la remarque 4, on a

$$\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 * \alpha'_{1,t} * \alpha'_{2,t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 * \alpha'_{2,t} = 0$$

(vaguement), et donc  $\eta = 0$ , d'où  $N_0 = (N_1 + N_2) * \tilde{N}$ . On obtient ainsi  $N_1 + N_2 \in C'_s(N_0)$ . Par conséquent  $C'_s(N_0)$  est un cône convexe. La démonstration est ainsi complète.

*Remarque 5.* — Soit  $N_0$  un noyau de convolution injectif et  $C$  un cône convexe formé par des diviseurs de  $N_0$  et contenant  $\varepsilon$ . Alors on a :

(a) Si, pour tout  $N$  de  $C$ ,  $N_0/N$  a un sens et si

$$C^* = \{N_0/N; N \in C\}$$

forme un cône convexe, alors  $C \subset (H)$ .

(b) Si  $C \subset C_s(N_0)$ , alors  $N_0 \in (H)$ .

En effet,  $\varepsilon \in C$  implique  $N_0 \in C^*$ , et donc  $C^* \subset C_s(N_0)$ . L'énoncé (a) résulte du théorème 1. L'énoncé (b) est aussi un résultat immédiat du théorème 1.

Considérons finalement  $C_s(N_0)$  dans le cas où  $N_0$  est un noyau de convolution de Hunt. Posons  $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ . On dit qu'un noyau de convolution  $N$  est *conditionnellement sous-médian par rapport à  $N_0$*  si, pour tout  $t \geq 0$ ,  $N * \alpha_t$  a un sens et si  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\alpha_t - \varepsilon) * N$  définit une mesure positive en dehors de l'origine 0; c'est-à-dire, il existe une mesure positive  $\nu$  en dehors de 0 et un sous-ensemble dense  $\mathcal{D}$  de  $C_{\mathbb{K}}^+(X - \{0\})$  tels que, pour  $f \in \mathcal{D}$  quelconque,

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\alpha_t - \varepsilon) * N(f) = \nu(f).$$

PROPOSITION 3. — Soit  $N_0$  un noyau de convolution de Hunt. Alors tout  $N$  de  $C_s(N_0)$  est conditionnellement sous-médian par rapport à  $N_0$  et  $N = O(N_0)$  (4).

Démonstration. — Soit  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe associé à  $N_0$ . On a évidemment  $N = O(N_0)$ , et donc, pour tout  $t \geq 0$ ,  $N * \alpha_t$  a un sens. Posons  $N' = N_0/N$ ; on note  $(N'_p)_{p \geq 0}$  la résolvante associée à  $N'$ . On désigne par  $(V)$  l'ensemble des voisinages compacts de 0, et on associe à tout  $V$  de  $(V)$  une mesure balayée  $\varepsilon'_{CV}$  de  $\varepsilon$  sur  $CV$  relativement à  $N'$ . On pose

$$\mathcal{D} = \{(\check{N}' - \check{N}' * \varepsilon'_{CV}) * f; f \in C_{\mathbb{K}}^+(X - \{0\}), \text{supp}(f) \cap V = \emptyset\} \text{ (5)}$$

Alors  $\mathcal{D} \subset C_{\mathbb{K}}^+(X - \{0\})$  et  $\mathcal{D}$  est dense dans  $C_{\mathbb{K}}^+(X - \{0\})$ , car, pour tout  $V \in (V)$ ,  $N' \neq N' * \varepsilon'_{CV}$ . Soit

$$g = (\check{N}' - \check{N}' * \varepsilon'_{CV}) * f \in \mathcal{D}$$

quelconque. Alors on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int g d(\alpha_t - \varepsilon) * N &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int f d(\alpha_t - \varepsilon) * N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{CV}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int f d \left( \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_s ds \right) * (\varepsilon'_{CV} - \varepsilon) = \int f d\varepsilon'_{CV} \geq 0, \end{aligned}$$

(4) La notation  $N = O(N_0)$  signifie que, pour  $f \in C_{\mathbb{K}}^+$  quelconque, il existe  $g \in C_{\mathbb{K}}^+$  et un compact  $F$  de  $X$  tels que  $N * f \leq N_0 * g$  sur  $CF$ .

(5) Pour une mesure  $\mu, \check{\mu}$  est défini par  $\int f d\check{\mu} = \int \check{f} d\mu$  pour toute  $f \in C_{\mathbb{K}}$ .

car, ayant

$$\frac{1}{t} N_0 * \left( \int_0^c \alpha_s ds \right) * \varepsilon'_{CV} = \left( \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_s^\infty \alpha_u du \right) * \varepsilon'_{CV} \nearrow N_0 * \varepsilon'_{CV}$$

(vaguement) lorsque  $t \searrow 0$ , le lemme 5 donne que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \int_0^t \alpha_s ds \right) * \varepsilon'_{CV} = \varepsilon'_{CV}$$

(vaguement). On a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \int gd(p^2 N'_p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int gd(p(pN'_p - \varepsilon)) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int fd(pN'_p) * (\varepsilon'_{CV} - \varepsilon) = \int fd\varepsilon'_{CV}, \end{aligned}$$

car  $\lim_{p \rightarrow \infty} pN'_p * \varepsilon'_{CV} = \varepsilon'_{CV}$  (vaguement) résulte du lemme 5 et de l'égalité

$$\lim_{p \rightarrow \infty} N' * (pN'_p) * \varepsilon'_{CV} = \lim_{p \rightarrow \infty} (N' - N'_p) * \varepsilon'_{CV} = N' * \varepsilon'_{CV}$$

(vaguement). Par conséquent  $(p^2 N'_p)_{p > 0}$  converge vaguement vers une mesure positive  $\nu$  en dehors de 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et on a, pour  $g$  de  $\mathcal{D}$  quelconque,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int gd(\alpha_t - \varepsilon) * N = \int g d\nu.$$

La démonstration est ainsi complète.

Se pose la question de savoir si l'inverse de la proposition 3 a lieu. Dans le cas où  $N_0$  est le noyau newtonien sur l'espace euclidien  $R^n (n \geq 3)$ , cela est affirmatif (cf. [5]). Dans ce cas, un noyau de convolution  $N$  sur  $R^n$  est conditionnellement sous-médian par rapport à  $N_0$  si et seulement si  $N$  est conditionnellement sous-harmonique; c'est-à-dire,  $\Delta N \geq 0$  au sens des distributions en dehors de l'origine, où  $\Delta$  désigne le laplacien sur  $R^n$ .

#### 4. L'unicité de la classe fractionnaire d'un noyau de convolution.

Le théorème 1 donnera le lemme suivant, qui jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 2.

LEMME 6. — Soient  $N_1, N_2 \in (H)$ . Si  $(N_1)^2$  et  $(N_2)^2$  sont définis et si  $(N_1)^2 = (N_2)^2$ , alors  $N_1 = N_2$ .

En effet, posons  $N_0 = (N_1)^2 (= (N_2)^2)$ . Alors  $N_0$  est injectif (cf. le corollaire 1). D'après la proposition 1 et la remarque 3,  $N_0/N_j$  a un sens et  $N_0/N_j = N_j$  ( $j = 1, 2$ ). Comme  $N_j \in (H)$ , le théorème 1 donne que  $N_j \in C_s(N_0)$  ( $j = 1, 2$ ). Donc il existe  $\tilde{N} \in (H)$  tel que  $(N_1 + N_2) * \tilde{N} = N_0$ . Soit  $(N_{j,p})_{p \geq 0}$  la résolvante associée à  $N_j$ . Prenons  $p > 0$  quelconque. Alors  $N_1 * N_{2,p}$  et  $N_2 * N_{1,p}$  sont définis, car  $N_0 * N_{j,p}$  ( $j = 1, 2$ ) a un sens. On a

$$N_{1,p} * N_{2,p} = (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p})) * (N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p})) \\ = N_1 * (N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p}))$$

et aussi

$$N_{1,p} * N_{2,p} = N_2 * (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p})).$$

Par conséquent on a

$$0 = (N_1)^2 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p}) - (N_2)^2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p}) \\ = (N_1 + N_2) * (N_1 * (\varepsilon - pN_{1,p}) * (\varepsilon - pN_{2,p}) \\ - N_2 * (\varepsilon - pN_{2,p}) * (\varepsilon - pN_{1,p})) \\ = (N_1 + N_2) * (N_{1,p} * (\varepsilon - pN_{2,p}) - N_{2,p} * (\varepsilon - pN_{1,p})) \\ = (N_1 + N_2) * (N_{1,p} - N_{2,p}).$$

La convolution  $\tilde{N} * N_j * N_{k,p}$  a un sens ( $j, k = 1, 2$ ), car  $\tilde{N} * N_j \in N_0$ . Donc

$$N_0 * (N_{1,p} - N_{2,p}) = \tilde{N} * ((N_1 + N_2) * (N_{1,p} - N_{2,p})) = 0.$$

En vertu de l'injectivité de  $N_0$ , on a  $N_{1,p} = N_{2,p}$ . En faisant  $p \searrow 0$ , on arrive à  $N_1 = N_2$ , d'où le lemme 6.

Dans le cas où  $N_j$  ( $j = 1, 2$ ) ne sont pas de noyaux de convolution de Hunt,  $(N_1)^2 = (N_2)^2$  n'implique pas toujours  $N_1 = N_2$ .

Discutons une classe fractionnaire  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  d'un noyau de convolution  $N$ . Évidemment on a toujours

$$(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset D(N).$$

PROPOSITION 4. — Soit  $N$  un noyau de convolution injectif et  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  une classe fractionnaire de  $N$ . Alors pour que

$(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (H)$ , il faut et il suffit que, pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $p > 0$  quelconques,  $N^\alpha + pN \in D(N)$ .

Cela est immédiatement un résultat du corollaire 2.

Soit  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$  un noyau de convolution de Hunt. On pose

$$(4) \quad \bar{N}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \alpha_t dt \quad (0 < \forall \alpha \leq 1) \quad \text{et} \quad \bar{N}^0 = \varepsilon.$$

Alors on a :

- (a)  $(\bar{N}^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  est une classe fractionnaire de  $N$ .
- (b)  $(\bar{N}^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (H)$ .
- (c) L'application  $[0, 1] \ni \alpha \rightarrow \bar{N}^\alpha$  est vaguement continue.

Pour cela, on se réfère à [3].

Nous montrerons qu'une classe fractionnaire d'un noyau de convolution de Hunt est essentiellement unique. Nous préparerons d'abord une notation et un lemme élémentaire.

Notons  $M_{\mathbb{K}}^+$  l'ensemble des fonctions  $\xi$ -mesurables, bornées et  $\geq 0$  dans  $X$  à support compact. Pour un noyau de convolution  $N$  et pour  $f \in M_{\mathbb{K}}^+$ , on désigne par  $Nf$  la densité de  $N * (f\xi)$  par rapport à  $\xi$ . Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux noyaux de convolution. On écrit  $N_1 \prec N_2$  si, pour  $f, g \in M_{\mathbb{K}}^+$  quelconques,  $N_1 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$  implique  $N_1 f \leq N_2 g$   $\xi$ -p.p. sur  $X$  <sup>(6)</sup>.

LEMME 7 (cf. [4]). — Soient  $N_0, N_1 \in (R)$ . Alors on a :

- (1) Si  $N_1$  s'écrit, avec une mesure positive  $\nu$ , comme  $N_1 = N_0 * \nu$ , alors  $N_0 \prec N_1$ .
- (2) Si  $N_0 \prec N_1$  et  $N_1 \prec N_0$ , alors, avec une constante  $c \geq 0$ ,  $N_1 = cN_0$ .
- (3) L'ensemble  $\{N: \text{noyau de convolution}; N_0 \prec N\}$  et l'ensemble  $\{N; N \prec N_1\}$  sont vaguement fermés dès que  $N_1 \neq 0$ .

On dit qu'une fonction  $\varphi$  sur  $[0, 1]$  est exponentielle si, pour tous  $t, s \in [0, 1]$ ,  $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$  dès que  $t+s \leq 1$ .

On remarque qu'une fonction exponentielle  $\varphi$  sur  $[0, 1]$  satisfaisant à  $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$  n'est pas toujours égale à 1.

<sup>(6)</sup> La notation  $\xi$ -p.p. signifie « presque partout pour  $\xi$  ».

**THÉORÈME 2.** — Soit  $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$  un noyau de convolution de Hunt et  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  une classe fractionnaire de  $N$ . Si

$$(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (R),$$

alors il existe une fonction exponentielle  $\varphi > 0$  sur  $[0, 1]$  satisfaisant à  $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$  telle que  $N^0 = \varepsilon$  et que, pour tout  $\alpha \in (0, 1]$ ,

$$N^\alpha = \frac{\varphi(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{1-\alpha} \alpha_t dt.$$

*Démonstration.* — Soit  $(\bar{N}^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  la classe fractionnaire de  $N$  définie par (4). Comme, pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $N^\alpha * N^{(1-\alpha)} = N$  et  $N$  est non-périodique,  $N^\alpha$  l'est aussi, et donc le lemme 1 donne  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (H)$ . Notons  $Q = \{m/2^n; m, n: \text{entiers } \geq 1, m \leq 2^n\}$ . D'après le lemme 6, on a  $N^{1/2} = \bar{N}^{1/2}$ . Par récurrence, pour  $\beta \in Q$  quelconque,  $N^\beta = \bar{N}^\beta$ . Prenons  $\alpha \in (0, 1)$  quelconque. On choisit deux suites

$$(\alpha_n)_{n=1}^\infty, \quad (\beta_n)_{n=1}^\infty \subset Q$$

telles que  $\alpha_n \nearrow \alpha$  et  $\beta_n \searrow \alpha$  lorsque  $n \nearrow \infty$ . Comme, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$N^\alpha * N^{(\beta_n - \alpha)} = N^{\beta_n} = \bar{N}^{\beta_n}$$

et  $N^\alpha = N^{(\alpha - \alpha_n)} * N^{\alpha_n} = N^{(\alpha - \alpha_n)} * \bar{N}^{\alpha_n}$ , le lemme 7 donne que  $N^\alpha \prec \bar{N}^{\beta_n}$  et  $\bar{N}^{\alpha_n} \prec N^\alpha$ . En faisant  $n \nearrow \infty$ , on a  $N^\alpha \prec \bar{N}^\alpha$  et  $\bar{N}^\alpha \prec N^\alpha$  (cf. (3) du lemme 7). Donc il existe une constante  $c_\alpha > 0$ , et une seule telle que  $N^\alpha = c_\alpha \bar{N}^\alpha$ , car  $N^\alpha \neq 0$  (cf. (2) du lemme 7). L'égalité  $N^0 = \varepsilon$  résulte de  $N = N * N^0$  et de l'injectivité de  $N$ . En posant  $\varphi(t) = c_t$  dans  $(0, 1)$  et  $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ , on obtient que  $N^\alpha = \varphi(\alpha) \bar{N}^\alpha$  et que  $\varphi$  est exponentielle. La démonstration est ainsi complète.

**COROLLAIRE 3.** — Soit  $N \in (H)$ . Alors il existe une classe fractionnaire  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$  de  $N$ , et une seule telle que l'on ait :

- (1)  $(N^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1} \subset (R)$ .
- (2)  $\lim_{\alpha \searrow 0} N^\alpha$  existe.

Cela résulte immédiatement du théorème.

Reste la question de savoir si, pour  $N \in (H)$ , toute la classe fractionnaire de  $N$  est contenue dans  $(H)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. CHOQUET et J. DENY, Aspects linéaires de la théorie du potentiel II. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 250 (1960), 4260-4262.
- [2] J. DENY, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12 (1962), 643-667.
- [3] F. HIRSCH, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22 (1972), 89-210.
- [4] M. IRÔ, Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, *Hiroshima Math. J.*, à paraître.
- [5] M. IRÔ, Sur les noyaux de convolution sous-harmoniques par rapport à un opérateur différentiel, à paraître.

Manuscrit reçu le 17 mars 1975.

Masayuki Irô,  
Institut Mathématique  
Université de Nagoya  
Furo-cho, Chikusa-ku  
464 Nagoya (Japon).

---