ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

Étude et extensions du principe de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 5 (1954), p. 371-419

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__371_0>

ETUDE ET EXTENSIONS DU PRINCIPE DE DIRICHLET*

par M. BRELOT**.

I. — INTRODUCTION

1. Renvoyant pour l'historique et la bibliographie à des traités comme celui de Courant-Hilbert ou à l'ouvrage récent de Courant [7], rappelons une forme élémentaire du principe de Dirichlet inventé pour résoudre le problème de Dirichlet : dans un domaine euclidien Ω, parmi les fonctions réelles bornées telles que

a) le gradient soit fin icontinu et de carré sommable dans Ω,

b) elles prennent à la frontière des valeurs données φ,

il existe, grâce à des hypothèses restrictives sur la frontière et la donnée φ, une fonction et une seule dont l'intégrale de Dirichlet $\int \text{grad}^2 f\, d\omega$ ($d\omega$ mesure ordinaire) soit minima; elle est harmonique et c'est donc la solution du problème de Dirichlet pour la donnée-frontière φ.

Or, sans doute en partie à cause de ces hypothèses restrictives décourageantes, le problème de Dirichlet a été beaucoup étudié de façon indépendante : depuis 30 ans, il s'est élargi, il a été développé avec des domaines plus généraux comme les surfaces de Riemann et avec des conditions-frontière variées. En comparaison, le principe de Dirichlet a beaucoup moins progressé pendant ce temps et il y a lieu de le reprendre pour

(*) This research was supported by the United States Air Force through the office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

(**) à Paris et à Lawrence, (Visiting research professor, University of Kansas, Lawrence, 1954). J'ai plaisir à remercier ici MM. les professeurs B. PRICE, N. ARONSZAJN et K.T. SMITH pour leur aide aimable et efficace, matérielle ou scientifique, pendant la mise au point de ce travail à Lawrence.

le mettre au même niveau. C'est un essai de modernisation dans ce sens que nous allons faire ici, mais *en utilisant la théorie moderne et indépendante du problème de Dirichlet et du potentiel* (voir la bibliographie dans [4 *e*])

2. Rappelons que selon Zaremba [13] puis Nikodym [10], la fonction minimisante du principe est aussi caractérisée comme la seule fonction harmonique (à une constante additive près) d'intégrale de Dirichlet finie et minimisant l'intégrale de Dirichlet de $u - f$; cela fait disparaître les conditions-frontière et pose un nouveau problème pour des fonctions f qu'on peut prendre bien plus générales, comme le fit surtout Nikodym, qui apporta d'autre part simplicité et clarté par l'usage, qui s'impose depuis, d'espaces de Hilbert avec la norme de Dirichlet $\sqrt{\int \text{grad}^2 f\, d\omega}$; la recherche d'un minimum revient à une projection orthogonale.

Parmi les travaux ultérieurs, insistons sur l'étude récente par Bochner [3] du cas particulier d'un domaine euclidien Ω borné dont la frontière est formée de quelques surfaces sphériques. Il montre en utilisant des développements en série de fonctions sphériques, que pour toute fonction f dans Ω, continûment différentiable par morceaux et de norme finie, sans conditions-frontière, il y a pour chaque sphère limitante une certaine « fonction-limite », qui va remplacer l'ancienne fonction des valeurs à la frontière; c'est la limite en moyenne quadratique de la fonction sur une sphère concentrique infiniment voisine, considérée comme fonction de la direction du rayon, *c-à-d* d'un point sur une sphère-unité (dont la mesure-aire sert à prendre les moyennes) ([1]). Parmi les fonctions f dont l'une f_0 est choisie, il en existe une et une seule harmonique (à une constante près) qui minimise la norme de $u - f_0$; c'est parmi les f, la seule qui possède les mêmes « fonctions-limite » que f_0 et qui soit de norme minima, ou encore qui soit harmonique.

3. Cela va inspirer le travail qui va suivre, annoncé dans [4 *d*,*e*]. D'une part on opèrera dans des variétés plus générales que les domaines euclidiens (par exemple les surfaces de Riemann), et en général dans les espaces $\mathcal{E}$ déjà étudiés [5],

([1]) Il y a d'ailleurs une convergence bien plus forte d'après N. Aronszajn dans des travaux à publier.

à $\tau \geqslant 2$ dimensions, lorsqu'il y a une fonction de Green G_P (espaces de Green). D'autre part les sphères approchantes de Bochner et leurs rayons seront remplacés par les lieux $G_P =$ Const. et leurs trajectoires orthogonales ou « lignes de Green » étudiées dans [5]. Cela permettra, sans disposer d'une frontière, de définir certaines fonctions-limite ou « radiales » (Limites en moyenne simple, calculée avec une certaine mesure sur l'ensemble des lignes de Green issues du pôle P). Les résultats de Bochner s'adapteront.

Enfin, au lieu des anciennes fonctions continûment différentiables par morceaux, ou des fonctions plus générales introduites par Beppo Levi et appelées fonctions (BL) par Nikodym [10] qui les a étudiées et utilisées ainsi que, parallèlement, Evans et Calkin-Morrey [6], nous nous servirons de fonctions voisines de ces dernières et qui semblent les mieux adaptées au sujet. Ce sont les fonctions « BL précisées » ou (BLD), récemment introduites et approfondies par Deny [8] puis par Deny et Lions dans ce même volume [9]. On les obtient comme limite à la fois quasi-partout (2) et en norme de fonctions régulières, même de classe C^∞ (3). Dans l'espace de Hilbert que forment les fonctions (BLD) (définies quasi-partout à une constante près), le principe de Dirichlet s'interprète d'ailleurs par la projection d'une fonction (BLD) sur deux sous-espaces fermés orthogonaux complémentaires, celui des fonctions (BLD) harmoniques et celui des fonctions (BLD) de radiale nulle. Ces dernières fonctions sont justement les limites F quasi-partout et en norme de fonctions (BLD) nulles hors d'un compact. On retrouve ainsi une décomposition connue dans l'espace euclidien (Voir Deny [8] inspiré de Ahlfors [1] et suivi de [9]) mais avec une nouvelle caractérisation des fonctions F (4).

Le principe de Dirichlet s'interprète plus directement par la projection de l'origine sur l'ensemble des fonctions (BLD) de même radiale que f et cela nous amènera à une extension du

(2) c.à.d. sauf sur un ensemble polaire (ensemble qui est localement de capacité extérieure nulle).

(3) Leur usage aurait d'ailleurs été amené par les idées générales de Aronszajn [2] sur les espaces fonctionnels normés avec des ensembles exceptionnels qui seraient ici les ensembles polaires.

(4) Une autre caractérisation récente [9] dans les espaces euclidiens bornés, est que ce sont les fonctions (BLD) admettant quasi-partout à la frontière des pseudo-limites nulles.

principe pour une partie « libre » de la frontière, étude qu'il y aurait lieu de poursuivre.

La théorie générale que l'on va faire fournira aussitôt les résultats classiques et bien d'autres. Mais pour faciliter la lecture en séparant les difficultés et les nouveautés à introduire, nous commencerons par reprendre (d'une façon sans doute un peu nouvelle) et améliorer le principe de Dirichlet classique avec des hypothèses et une technique simples ou très classiques. Les raisonnements serviront de modèles pour l'étude générale ultérieure : on part de cas restreints faciles à étudier de façon élémentaire et on fait des passages à la limite sur les fonctions ou les domaines.

II. — LE PRINCIPE CLASSIQUE DE DIRICHLET.

4. Considérons dans un domaine quelconque Ω de l'espace euclidien R^τ ($\tau \geqslant 2$ dimensions) les fonctions réelles f finies continues admettant un gradient fini continu de carré sommable; pour toute partie mesurable α on introduira $\|f\|_\alpha = \sqrt{\int_\alpha \operatorname{grad}^2 f\, d\omega}$. La quantité $\|f\|_\Omega$ s'écrira aussi $\|f\|$, dite norme de Dirichlet.

Rappelons et démontrons la «*forme préliminaire du principe*» :

Théorème 1. — *Ω et f_0 des types précédents étant fixés, parmi les fonctions harmoniques u dans Ω du type de f (c-à-d de norme finie), il en existe une et une seule (à une constante près) telle que $\|u - f\|$ soit minima.*

Remarquons que les f à une constante près, *c-à-d* les classes d'équivalence définies par l'égalité à une constante près, définissent un espace préhilbertien réel [5] $\mathfrak{L}$, en prenant comme produit scalaire $\int (\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2)\, d\omega$, la norme étant justement $\|f\|$. On vérifie aisément les conditions axiomatiques. Voyons l'inégalité relative à la somme et plus généralement

$$\|f_1 + f_2\|_\alpha \leqslant \|f_1\|_\alpha + \|f_2\|_\alpha.$$

[5] **Espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire donnant une norme. Pas d'hypothèse de dénombrabilité ou de complétion. On note généralement pour des éléments x, y la norme $\|x\|$, la distance $\|x - y\|$, le produit scalaire (x, y).**

En effet

$$\int_\alpha \operatorname{grad}^2 (f_1 + f_2)\, d\omega = \int_\alpha \operatorname{grad}^2 f_1\, d\omega + \int_\alpha \operatorname{grad}^2 f_2 \,d\omega + 2\int (\operatorname{grad} f_1,\ \operatorname{grad}) f_2\, d\omega.$$

La dernière intégrale est majorée en module par la racine carrée de

$$\int_\alpha \operatorname{grad}^2 f_1\, d\omega \,.\int_\alpha \operatorname{grad}^2 f_2\, d\omega \quad \text{d'où le résultat.}$$

Le théorème 1 résulte alors aussitôt de deux lemmes bien connus dont l'importance ou l'extension ultérieure justifie qu'on en reprenne rapidement les démonstrations.

Lemme 1. — Dans un espace préhilbertien réel, soit un sous espace complet E. Étant donné un point quelconque a, il existe sur E un point unique a_0 à distance minima de a (projection de a sur E) ([6]), caractérisé aussi par la condition d'orthogonalité de $a - a_0$ et de tout élément de E. L'opération de projection minore les distances; en particulier $||a_0|| \leqslant ||a||$ et l'égalité n'a lieu que si a est dans E.

Soit $x_n \in$ E, tel que $||x_n - a||$ tende vers la distance δ de a à E. Si y est le milieu $\dfrac{x_n + x_{n'}}{2}$ situé sur E, on a

$$(1) \qquad ||x_n - a||^2 + ||x_{n'} - a||^2 = 2||a - y||^2 + \frac{1}{2}||x_n - x_{n'}||^2.$$

Comme $||a - y|| \geqslant \delta$, on en déduit $||x_n - x_{n'}|| \to 0$ $(n,\ n' \to \infty)$.

La suite de Cauchy x_n converge vers un point $a_0 \in$ E; c'est un point à distance δ de a, et le seul sur E comme le montrerait l'égalité obtenue en remplaçant dans (1) x_n et $x_{n'}$ par deux tels points.

On voit ensuite que la condition $||x - a||^2 \geqslant ||a_0 - a||^2$ quel que soit $x \in$ E s'écrit :

$$2(x - a_0,\ a - a_0) \leqslant ||x - a_0||^2.$$

Or $a_0 + \lambda(x - a_0)$ est dans E comme x; la condition

([6]) Ce résultat et sa démonstration qui suit sont valables pour un ensemble E seulement convexe et complet. Voir par ex. [12]. On sait que la projection minore encore les distances.

entraîne donc $2\lambda(x-a_0, a-a_0) \leqslant \lambda^2\|x-a_0\|^2$ quel que soit λ, d'où $(x-a_0, a-a_0)=0$. Réciproque immédiate.

Enfin si a, b se projettent sur E en a_0, b_0

$$\|a-b\|^2 = \|a_0-b_0\|^2 + \|a-a_0-b+b_0\|^2 \\ + 2(a_0-b_0,\ a-a_0-(b-b_0)).$$

Ce produit scalaire étant nul, on conclut $\|a-b\|^2 \geqslant \|a_0-b_0\|^2$.

Remarque. — Rappelons aussi que si f_n est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{L}$ (c.-à-d. telle que $\|f_n - f_{n'}\| \to 0$ pour n, $n' \to \infty$), $\|f_n\|$ est bornée et il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K \subset \Omega$ tel que $\|f_n\|_{\Omega-K} < \varepsilon$ quel que soit n.

En effet puisque $\|f_n - f_{n_0}\|$ est borné pour n_0 fixé assez grand et n variable assez grand, $\|f_n\|$ est borné. Puis choisissons n_0 tel que $\|f_n - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant n_0$, ensuite K tel que $\|f_{n_0}\|_{\Omega-K} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Alors

$$\|f_n\|_{\Omega-K} \leqslant \|f_n - f_{n_0}\|_{\Omega-K} + \|f_{n_0}\|_{\Omega-K} < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0).$$

En agrandissant K, on aura l'inégalité cherchée pour tout n.

Lemme 2. — *Soit u_n harmonique dans Ω, convergente en un point P_0, avec $\|u_n\|$ finie. Si $\|u_n - u_{n'}\| \to 0$ $(n,\ n' \to \infty)$, alors u_n converge uniformément localement vers une fonction harmonique u de norme finie et $\|u_n - u\| \to 0$. Donc dans $\mathfrak{L}$ l'ensemble des fonctions harmoniques à une constante près forme un sous-espace complet $\mathcal{H}$.*

D'abord $\|u_n\|$ est bornée. Donc $\left|\int_\alpha \frac{\partial u_n}{\partial x_i} d\omega\right|^2$ majoré par $\int_\alpha \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right)^2 d\omega . \text{mes.}\, \alpha$ est borné. Par suite $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ harmonique est localement uniformément bornée. La famille u_n bornée en P_0 est donc uniformément bornée sur tout compact et également continue en tout point. S'il n'y avait pas convergence, on pourrait extraire deux suites $u_{n'_p}$, $u_{n''_p}$ convergeant uniformément localement vers u et v distinctes, mais égales en P_0 et il y aurait convergence uniforme locale des dérivées correspondantes. Puis

$$\int_\Omega \text{grad}^2 (u-v)\, d\omega \leqslant \liminf \int_\Omega \text{grad}^2 (u_{n'_p} - u_{n''_p})\, d\omega = 0.$$

D'où $u - v = \text{Const}$ et $u = v$, contradiction cherchée.

Il y a bien convergence vers une fonction u.

De plus $\int_\Omega \operatorname{grad}^2 u\, d\omega \leqslant \liminf \int_\Omega \operatorname{grad}^2 u_n\, d\omega$, fini.

Voyons que $\|u_n - u\| \to 0$. Si K est un compact dans Ω,

$$\int_\Omega \operatorname{grad}^2 (u - u_n)\, d\omega = \int_{\Omega - K} + \int_K .$$

La première intégrale du second membre est majorée par le carré de

$$\|u\|_{\Omega - K} + \|u_n\|_{\Omega - K}.$$

On choisira K pour que chacun des termes soit $< \varepsilon$ indépendamment de n. La seconde intégrale tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc aussi $\|u - u_n\|^2$.

Le théorème 1 s'établit alors aussitôt en appliquant le lemme 1 à l'espace $\mathfrak{L}$, au sous-espace $\mathcal{H}$ et à un point f_0 de $\mathfrak{L}$.

5. Cas particulier fondamental.

LEMME 3. — Soit un domaine borné Ω très régulier (7) et f une fonction réelle à dérivées secondes finies continues dans un ouvert contenant l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω. Alors la fonction harmonique (définie à une constante près) qui minimise $\|u - f\|_\Omega$ *c. à. d.* la projection de $f \in \mathfrak{L}$ sur $\mathcal{H}$, est (à une constante près) la solution H_f^Ω du problème de Dirichlet pour Ω et valeurs-frontière f.

Grâce aux hypothèses de régularité, le gradient de H_f admet une limite finie en tout point-frontière (8) d'où $H_f \in \mathfrak{L}$. Il suffit de voir l'orthogonalité $(H_f - f, h) = 0$ pour toute fonction harmonique h de $\mathfrak{L}$ (9).

Or soit V une fonction continue dans $\bar{\Omega}$, > 0 dans Ω, nulle sur la frontière $\overset{*}{\Omega}$, avec des dérivées premières ou même

(7) Voir [5] n° 6. Un ouvert borné très régulier ω est tel que $\omega = \mathring{\bar{\omega}}$ et que la frontière est localement une surface (ou courbe) régulière, c. à d. définie par l'une des coordonnées en fonction deux fois continûment différentiable des autres coordonnées. Tout domaine Ω est limite d'une suite croissante de domaines Ω_n très réguliers, tels que $\bar{\Omega}_n \subset \Omega$.

(8) On sait que si une fonction harmonique u définie localement d'un coté d'une surface régulière Σ admet sur Σ une limite assez régulière (en particulier qui soit une fonction, avec dérivées secondes continues, des coordonnées-paramètres de la représentation locale de Σ) le gradient de u a une limite finie en tout point de Σ (voir [11])

(9) Si l'on remarque que toute fonction $\varphi \in \mathfrak{L}$ nulle hors d'un compact de Ω est orthogonale à h, il n'y a qu'à savoir former, pour tout ε, une telle φ satisfaisant à $\|H_f - f - \varphi\| < \varepsilon$. Pour éviter quelques longueurs dans la détermination élémentaire d'une telle φ, je propose une autre démonstration dans le texte.

secondes continues dans Ω, les dérivées premières ayant des limites finies en tout point-frontière; on suppose enfin que la dérivée normale intérieure soit partout > 0 (donc de borne inférieure > 0). Un exemple V_0 de telle fonction s'obtient en prenant une fonction de Green G_P de Ω et la régularisant au voisinage du pôle. Voyons que $(V, h) = 0$.

En effet le lieu Ω_ε où $V > \varepsilon$ (pour $\varepsilon > 0$ assez petit) est formé de domaines très réguliers et se prête à la formule de Green :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\text{grad } V, \text{grad } h)\, d\omega = \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{int}}} V \frac{dh}{dn} ds = 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, il vient bien $(V, h) = 0$.

Mais alors $H_f - f + \alpha V_0$ est du type de V pour $\alpha > 0$ assez grand.

Donc $(H_f - f + \alpha V_0,\ h) = 0$ puis $(H_f - f,\ h) = 0$.

Extension. Lemme 4. — Même énoncé que le lemme 3 mais en supposant pour f seulement que les dérivées premières soient finies continues.

Par une régularisation (comme une médiation ou un « produit de composition de Schwartz » ([10])) on formera dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$ une suite de fonctions f_n possédant des dérivées secondes finies continues de façon qu'il y ait convergence uniforme de f_n et des dérivées premières vers f et ses dérivées dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$. Ainsi f_n converge en norme vers f et il y a donc convergence des projections dans $\mathfrak{L}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}$. Or H_{f_n}, projection de f_n, converge uniformément localement vers H_f. Donc d'après le lemme 2, H^Ω est la projection de f.

6. Principe classique de Dirichlet.

On améliore déjà les énoncés usuels par le théorème suivant dont la démonstration servira de modèle pour la suite.

Théorème 2. — *Soit dans le domaine* Ω, *par exemple borné*, ([11])

([10]) Composition avec $\theta(r)$ ($r = \text{OM}$) d'intégrale spatiale égale à 1, cette fonction de r étant C^∞, nulle pour $r \geqslant \rho$; on prendra $\rho = \dfrac{1}{n}$ pour obtenir f_n.

([11]) ou encore un domaine de R^τ dont le complémentaire, dans le cas du plan, est non polaire. La frontière peut alors comprendre le point à l'infini qu'on adjoint à R^τ voir [4 *a*]. Ceci s'applique à la suite de ce paragraphe 6.

$f \in \mathfrak{L}$ bornée et prolongeable continûment sur la frontière. Alors la solution H_f^Ω correspondant à ces valeurs-frontière est la seule fonction harmonique (à une constante près) de $\mathfrak{L}$ minimisant $\|u - f\|$. Si les points-frontière sont tous réguliers ([12]), *c'est aussi la seule fonction de $\mathfrak{L}$ prenant les valeurs-frontière de f et de norme minima.*

Introduisons une suite de domaines Ω_n très réguliers tendant en croissant vers Ω. Voyons successivement :

a) La solution $u_n = H_f^{\Omega_n}$ tend vers $u = H_f^\Omega$; la convergence (localement uniforme) a lieu aussi pour les dérivées.

b) $\|u\|$ est fini. En effet, en prolongeant par 0 la fonction $\operatorname{grad}^2 u_n$ dans Ω_n ce qui donne dans Ω une fonction $\geqslant 0$ tendant vers $\operatorname{grad}^2 u$, on voit que

$$\int_\Omega \operatorname{grad}^2 u \, d\omega \leqslant \lim.\inf \int_{\Omega_n} \operatorname{grad}^2 u_n \, d\omega.$$

D'autre part

$$\|u_n\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_{\Omega_n} \leqslant \|f\|_\Omega, \quad \text{d'où le résultat.}$$

c) $$\|u_n - f\|_{\Omega_n} \to \|u - f\|_\Omega$$

On voit encore par la règle générale du passage à la limite sous $\int$, que

$$\|u - f\|_\Omega \leqslant \lim.\inf \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

Il suffit alors de montrer que l'on peut avoir

$$\|u - f\|_\Omega < \lim \sup \|u_n - f\|_{\Omega_n}.$$

D'après cette inégalité, on pourrait choisir n tel que

$$\|u - f\|_{\Omega_n} < \|u_n - f\|_{\Omega_n},$$

ce qui contredit la propriété minimisante de u_n dans Ω_n.

d) u est minimisante. Sinon on aurait pour une fonction harmonique v de $\mathfrak{L}$

$$\|u - f\| - \|v - f\| = \alpha > 0.$$

Donc pour n assez grand

$$\|u_n - f\|_{\Omega_n} - \|v - f\|_{\Omega_n} > \frac{\alpha}{2},$$

([12]) ce qui équivaut à dire que le problème de Dirichlet classique admet une solution pour toute donnée-frontière finie continue.

d'où

$$\|\varphi - f\|_{\Omega_n} < \|u_n - f\|_{\Omega_n},$$

ce qui contredit encore la propriété minimisante de u_n

e) Le principe de Dirichlet : d'après (*d*) et le lemme 2, $\|u\|$ minore la norme de toute $g \in \mathfrak{L}$ avec valeurs-frontière f; et il y a inégalité stricte si g n'est pas harmonique.

Toute g avec valeurs-frontière f et de norme égale à $\|u\|$ est donc harmonique et, d'après les conditions-frontière, vaut u.

Remarques complémentaires α) On peut, étant donné ε, trouver un compact K dans Ω tel que $\|u_n - f\|_{\Omega_n - K} < \varepsilon$ pour n assez grand

Il suffit de rapprocher la propriété (*c*) et $\|u_n - f\|_K \to \|u - f\|_K$.

On peut d'ailleurs dans l'énoncé remplacer la condition « n assez grand » par $\Omega_n \supset K$.

β) On en déduit le même résultat pour $\|u_n\|$ et $\|u_n - u\|$.

γ) De là résulte $\|u_n - u\|_{\Omega_n} \to 0$ puisque sur tout K, $\|u_n - u\|_K \to 0$.

Extension. — *Supprimons toute restriction sur la frontière du domaine* Ω *et supposons que* $f \in \mathfrak{L}$ *soit bornée et admette à la frontière des limites « presque partout en mesure harmonique* $d\mu$ ». *Ces limites forment une fonction* φ *(qu'on peut prolonger arbitrairement sur la frontière). Alors* H_φ^Ω *est la seule fonction harmonique de* $\mathfrak{L}$ *(à une constante près) minimisant* $\|u - f\|$; *c'est aussi, parmi les fonctions de* $\mathfrak{L}$ *bornées et possédant chacune à la frontière « presque partout-*$d\mu$ *» des limites égales presque partout-*$d\mu$ à φ, *la seule qui soit de norme minima.*

Il suffit de reprendre le raisonnement précèdent mais en s'appuyant sur le lemme 5 qui suit et remarquant que les limites « presque partout-$d\mu$ » déterminent une fonction harmonique bornée.

Lemme 5. — Soit dans Ω une fonction bornée F, par exemple continue ou seulement borélienne, admettant des limites à la frontière sauf peut être sur un ensemble e de mesure harmonique nulle; à cette fonction φ des limites (prolongée arbitrairement sur e) correspond une solution H_φ^Ω. Alors si Ω_n est un domaine croissant tendant vers Ω, avec $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$, on a $H_F^{\Omega_n} \to H_\varphi^\Omega$.

D'après une inégalité générale ([13]), on voit que $\limsup_{n \to \infty} H_F^{\Omega_n}$

et $\liminf_{n\to\infty} H_{\varphi}^{\Omega_n}$ *a priori* surharmonique et sousharmonique doivent tendre vers φ (P) en tout point-frontière régulier hors e. Aussi ces fonctions doivent être égales et harmoniques. L'égalité de cette valeur commune u avec H_{φ} vient, par exemple ([14]), de ce que H_{φ} est encadré par $u \pm \lambda v$ où $\lambda > 0$ quelconque, v surharmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points irréguliers et aux points de e.

On pourrait aller plus loin en envisageant des problèmes de Dirichlet plus raffinés. On peut aussi adapter tout ce qui précède en prenant des f dont le gradient serait seulement « continu par morceaux ». Mais tout cela sera repris comme conséquences de l'étude bien plus générale que nous allons faire, grâce à des notions qu'il faut d'abord rappeler.

III. — RAPPEL DE NOTIONS SUR LES ESPACES ET LIGNES DE GREEN. RADIALES

8. Rappelons [5] qu'un espace $\mathcal{E}$ est un espace topologique connexe séparé tel que a) à chaque point P est associé un voisinage ouvert $\mathcal{V}_P$ et une homéomorphie entre $\mathcal{V}_P$ et un ouvert $\mathcal{V}'_P$ (image) dans $\overline{R}^{\tau}$ (espace compact déduit de R^{τ} par adjonction d'un point d'Alexandroff)

b) Si $\mathcal{V}_{P_1} \cap \mathcal{V}_{P_2}$ n'est pas vide, les deux images sont, par l'intermédiaire des deux homéomorphies, dans une correspondance T qui est :

si $\tau \geqslant 3$, une isométrie,

si $\tau = 2$, soit toujours une isométrie, soit toujours une correspondance conforme.

Cette correspondance T peut être directe on inverse.

Les surfaces de Riemann forment un cas particulier.

On montre que $\mathcal{E}$ est métrisable et réunion dénombrable de compacts.

Dans la cas de structure isométrique, tout point Q dont l'image dans $\mathcal{V}'_P$ est à l'infini (ce qui est indépendant de P) est dit *point à l'infini*. Ces points sont dénombrables. Dans le

([13]) Inégalité 22 n° 28 de [5]. On y prendra pour filtres $\mathcal{F}$, les traces sur Ω des voisinages des points réguliers. Il suffit aussi de reprendre le raisonnement de [4, b] n° 9

([14]) Cela résulte aussi de ce que H_{φ} tend *a priori* vers φ(P) aux points réguliers hors e, grâce à l'inégalité générale 21 n° 28 de [5].

cas de structure conforme on les évite en prenant toujours $\mathcal{V}'_P$ dans R^2; on peut d'ailleurs pour bien des questions ramener à ce cas celui de la structure isométrique pour $\tau = 2$; il suffit d'associer à chaque $\mathcal{E}$ de ce dernier espace, un espace à structure conforme défini avec des voisinages $\mathcal{V}_P^{(1)}$ contenus dans les $\mathcal{V}_P$, et des images $\mathcal{V}_P'^{(1)}$ déduites des images dans $\mathcal{V}'_P$ par une transformation conforme les ramenant dans R^2.

On sait définir les fonctions harmoniques ou sousharmoniques au voisinage de tout point de $\overline{R}^{\cdot}$, même à l'infini [4, *a*]. On saura donc les définir dans tout ouvert de $\mathcal{E}$. On rappelle qu'un ensemble *polaire* est caractérisé par l'existence locale d'une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur lui; la même définition est adoptée dans $\mathcal{E}$ et quasi-partout signifie encore « sauf sur un ensemble polaire ». On étend aussi les formules classiques de Green à un ouvert régulier ([15]) Ω sans point à l'infini : si f et g ont des dérivées secondes continues (localement) dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, on a

$$\int_\Omega f\,\Delta g\, d\omega + \int_{\overset{*}{\Omega}_{\text{ext}}} f\frac{dg}{dn}\,d\sigma + \int_\Omega (\operatorname{grad} f,\ \operatorname{grad} g)\, d\omega = 0.$$

Introduisons des points à l'infini dans Ω; la formule s'étend si f et g sont harmoniques; leur gradient est au voisinage d'un tel point majoré sur l'image par $K.r^{-\tau}$ (r distance à un point fixe), d'où la sommabilité du carré du gradient dans Ω et la limite 0 de $\int f\frac{dg}{dn}\,d\sigma$ étendue à un cercle (sphère) infiniment grand isolant un point à l'infini. Plus généralement la formule s'étend encore si g seul est harmonique et si f définie hors des points à l'infini admet un $\operatorname{grad}^2 f$ sommable et est bornée.

S'il existe dans $\mathcal{E}$ une fonction surharmonique > 0 non constante l'espace est dit *espace de Green*. Il existe alors pour tout point P une fonction minima dans $\mathcal{E}$, qui soit > 0, harmonique

([15]) Au lieu de la définition obscure de [5], on peut dire par exemple, selon une suggestion de Choquet, sans que rien ne change dans l'emploi qui en est fait :

Un ouvert Ω est régulier s'il est l'intérieur de son adhérence supposée compacte, sans point à l'infini sur la frontière et tel qu'au voisinage de tout point-frontière Q sur l'image locale, il existe une homéomorphie continûment différentiable transformant localement $\overline{\Omega}$ en cône polyédral de sommet Q. Ω sera très régulier si de plus la frontière est localement régulière sur l'image (Voir note 7).

Noter dans la formule qui suit, l'invariance des éléments différentiels dans toute transformation *plane* conforme, ce qui donne un sens aux intégrales sans avoir besoin de choisir une métrique.

soient la seule masse 1 en P; c'est la fonction de Green $G_P(M)$, symétrique en M et P. Un domaine de $\mathcal{E}$ constituant un sous-espace de Green est dit greenien.

A tout espace $\mathcal{E}$ non compact (comme c'est le cas des espaces de Green) on adjoint un point d'alexandroff $\mathcal{A}$, ce qui le compactifie selon un espace $\mathcal{E}'$. Si $\mathcal{E}$ est compact, on pose $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. On sait étudier pour tout ouvert de $\mathcal{E}$ formé de domaines greeniens, et on s'en servira, le problème de Dirichlet pour des données sur la frontière prise dans $\mathcal{E}'$ [5].

9. Fixons le pôle P et considérons les arcs de Jordan ouverts (ne contenant pas de point à l'infini) maximaux, tangents en chaque point à grad $G \neq 0$. On les appelle *lignes de Green*, avec paramètre G. Au voisinage de P, supposé d'abord non à l'infini, chaque ligne de Green tend vers P quand $G \to +\infty$ et il y a une demi-tangente en P. A chaque demi-droite issue de P correspond une ligne de Green unique qui l'admet comme tangente en P et il y a homéomorphisme par les lignes de Green entre ces demi-droites et les points d'une petite surface $\Sigma_P^\lambda(G_P = \lambda)$. Cela permet de définir sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des lignes de Green issues de P une topologie et une mesure correspondant à celles des demi-tangentes (c.-a-d. des points correspondants sur une sphère-unité). On réduira la mesure de façon que la mesure totale soit 1. Ce sera la *mesure de Green dg*. Ce qui importera c'est que pour un ensemble borélien de lignes de Green issues de P et rencontrant une surface Σ_P^λ (définie par $G_P = \lambda$ quelconque fixé > 0) selon un ensemble e, la mesure de Green vaut $\dfrac{1}{\varphi_\tau}\displaystyle\int \frac{dG}{dn}\, d\sigma$ (16) ($d\sigma$ aire sur Σ^P; dérivée dans le sens des G croissants); c'est aussi la *mesure harmonique* en P de e relativement au domaine $D_P^\lambda(G_P > \lambda)$.

Si P est un point à l'infini, l'adaptation est immédiate; les tangentes sont remplacées par des directions asymptotiques et le maximum de G est fini si $\tau \geqslant 3$.

On appellera *régulière* toute ligne de Green issue du pôle,

(16) On note φ_τ le flux de $h(OM)$ sortantd'un dom aine, par exemple circulaire ou sphérique contenant O (rappelons que $h(OM)$ vaut $\overline{OM}^{\tau-2}$ si $\tau > 2$ et log 1/OM si $\tau = 2$); ce flux est donc $h'(1)$. α_τ où α_τ, est l'aire de la sphère unité (ou longueur de la circonférence)

hors P donc surharmonique dans $\mathcal{E}$ et dont les masses associées telle que la borne inférieure de G y soit zéro. L'ensemble de ces lignes sera noté $\mathcal{L}'$.

Propriété fondamentale. — Parmi les lignes de Green issues du pôle, presque toutes, au sens de la mesure de Green, sont régulières.

10. **Radiale** [4, *a*]. Considérons une fonction réelle φ définie dans un espace de Green quasi-partout hors des points à l'infini.

Ayant choisi un pôle P, nous noterons $\varphi_\lambda(l)$ la valeur de φ sur la surface $\Sigma_P^\lambda(G_P = \lambda)$ et la ligne de Green l issue de P qui traverse Σ_P^λ. Supposons $\varphi_\lambda(l)$ sommable-dg pour λ assez petit, ce qui équivaut à l'existence de $H_\varphi^{D_P^\lambda}$, solution du problème de Dirichlet dans D_P^λ pour valeurs-frontière égales à φ, là où φ est définie, ce qui suffit (17). Si $\phi(l)$ est sommable-dg sur $\mathcal{L}'$, on dira que c'est une radiale de φ lorsque $\varphi_\lambda(e)$ converge en moyenne-dg vers ϕ pour $x \to 0$, c.-à-d. si

$$\int |\varphi_\lambda(l) - \phi(l)|\, dg \to 0 \qquad (\lambda \to 0).$$

Deux radiales sont égales presque partout-dg. On notera $\overleftrightarrow{\varphi_P}$ ou brièvement $\overleftrightarrow{\varphi}$ une radiale quelconque, qui sera appelée « la radiale » (à un changement près sur un ensemble de mesure-dg nulle).

Remarquer qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une radiale de φ est que

$$\int |\varphi_\lambda(l) - \varphi_{\lambda'}(l)|\, dg \to 0 \quad (\lambda, \lambda' \to 0)$$

Premières propriétés. — *a*) Les opérations de combinaison linéaire, d'enveloppe supérieure ou inférieure de deux fonctions pourvues de radiales donnent une fonction admettant une radiale, qui se déduit des autres par les mêmes opérations.

Il suffit de s'appuyer sur des inégalités élémentaires entre nombres réels comme

$$|\sup(a, b) - \sup(c, d)| \leqslant |a - c| + |b - d|.$$

b) Si φ_n finie pourvue de radiale converge uniformément

(17) L'ensemble du point d'Alexandroff, des points à l'infini de $\mathcal{E}$, des points où φ n'est pas définie coupe la frontière de D_P^λ dans $\mathcal{E}'$ selon un ensemble de mesure harmonique nulle relativement à D_P^λ.

vers φ, la radiale de φ_n converge en moyenne-dg vers une fonction $\underset{\updownarrow}{\varphi}$ qui est radiale de φ

D'abord

$$\int \left|\underset{\leftrightarrow}{\varphi_n} - \underset{\leftrightarrow}{\varphi_{n'}}\right| dg \leqslant \int \left|\underset{\leftrightarrow}{\varphi_n} - (\varphi_n)_\lambda\right| dg + \int \left|(\varphi_n)_\lambda - (\varphi_{n'})_\lambda\right| dg + \int \left|(\varphi_{n'})_\lambda - \underset{\leftrightarrow}{\varphi_{n'}}\right| dg.$$

L'intégrale centrale à droite est moindre que ε indépendamment de λ quand n, n' dépassent un certain N. Pour tout système de tels n, n' on peut choisir λ pour que les deux autres intégrales de droites soient moindres que ε. D'où la majoration 3ε relative à n, n' majorant N. Il y a donc bien convergence en moyenne de $\underset{\leftrightarrow}{\varphi_n}$ vers une fonction $\underset{\updownarrow}{\varphi}$

Puis

$$\int \left|\varphi_\lambda - \underset{\updownarrow}{\varphi}\right| dg \leqslant \int \left|\varphi_\lambda - (\varphi_n)_\lambda\right| dg + \int \left|(\varphi_n)_\lambda - \underset{\leftrightarrow}{\varphi_n}\right| dg + \int \left|\underset{\leftrightarrow}{\varphi_n} - \underset{\updownarrow}{\varphi}\right| dg$$

d'où résulte que $\underset{\updownarrow}{\varphi}$ est radiale de φ.

Radiale partielle. — Relativement à un faisceau mesurable α de lignes de Green régulières, φ aura par définition une radiale *partielle* $\underset{\updownarrow}{\varphi}$ si $\int_\alpha |\varphi_\lambda - \underset{\updownarrow}{\varphi}|\, dg \to 0$ $(\lambda \to 0)$.

Propriétés analogues à (a) et (b). L'existence d'une radiale entraîne celle d'une radiale partielle pour tout α.

IV. — RAPPEL DE NOTIONS SUR LES FONCTIONS (BLD) EN ESPACE EUCLIDIEN

11. Choisissons comme définition, dans une théorie qui peut être exposée de diverses manières (voir surtout [8] et [9]) une propriété caractéristique adaptée à l'usage qu'on fera de cette notion; puis énumérons quelques propriétés à peu près indispensables, sans que l'ordre prétende correspondre à un ordre de démonstration possible.

Dans un ouvert Ω de R^τ, si une fonction f réelle admet presque partout un gradient de carré sommable, on notera encore, pour tout ensemble mesurable α, $\|f\|_\alpha = \sqrt{\int \operatorname{grad}^2 f\, d\omega}$, et plus brièvement $\|f\|$ la quantité $\|f\|_\Omega$, dite norme de Dirichlet (pour f et Ω)

Alors f sera dite fonction «BL précisée» selon Deny-Lions ou plus brièvement fonction (BLD) ([18]) dans Ω si

1° elle est définie et finie quasi-partout dans Ω

2° elle vaut quasi-partout la limite d'une suite de fonctions f_n de classe C^∞ et norme finie, cette suite étant une suite de Cauchy selon la norme de Dirichlet, c.-à-d. telle que

$$\|f_n - f_{n'}\| \to 0 \quad (n, n' \to \infty).$$

On sait alors que f admet presque partout un gradient de carré sommable et que $\|f_n - f\| \to 0$.

12. Propriétés fondamentales.

1° Toute fonction localement (BLD) de norme finie est (BLD).

2° La condition $\|f\|_\Omega = 0$ entraine que f soit dans chaque domaine composant quasi-partout égale à une constante.

Introduisons les classes *d'équivalence* de fonctions (BLD) par la condition d'égalité quasi-partout à une constante près dans chaque domaine composant. Définissons le produit scalaire $(f, g) = \int (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, d\omega$ de deux fonctions et des deux classes les contenant respectivement. Ces classes forment un espace de Hilbert réel (d'ailleurs séparable) dont la norme est justement ce qu'on a appelé la norme de Dirichlet pour une fonction quelconque de la classe.

De plus si $f_n \to f$ « en norme », c.-à-d. si $\|f - f_n\| \to 0$, on peut extraire une suite f_{n_p} telle que dans chaque domaine composant $f_{n_p} + C_{n_p}$ (C_{n_p} const.) converge quasi-partout vers f.

Par suite si f_n définit une suite de Cauchy et converge quasi-partout vers une fonction f, f est (BLD) et limite en norme.

3° Si f est (BLD), de même $|f|$; de plus $|\operatorname{grad}|f|| = |\operatorname{grad} f|$ presque partout. Par suite si f et g sont (BLD), de même les enveloppes supérieure et inférieure. De plus $\inf(f, n)$, $\sup(f, -n)$, $\sup(\inf(f, n), -n)$ sont (BLD) et convergent vers f quasi-partout et en norme; leurs gradients sont en module majorés par $|\operatorname{grad} f|$ presque partout.

Exemples: 1. f finie continue possédant un gradient fini continu est localement (BLD).

([18]) Je les ai appelées aïnsi dans [4, f, g] parce qu'il s'agit d'une notion introduite par Deny [7] et perfectionnant les fonctions dites (BL) bien dégagées et étudiées par Nikodym à partir d'un mémoire de Beppo Levi.

On le voit par la régularisation de Schwartz (voir note 10) fournissant une fonction de classe C^∞ (ou brièvement une fonction C^∞). De même, par suite, une fonction « régulière par morceaux », en appelant ainsi une fonction qui soit localement une combinaison linéaire de fonctions égales à des enveloppes supérieure ou inférieure de fonctions (en nombre fini) à gradient fini continu.

2. Tout potentiel de Green d'énergie finie est (BLD) (cette énergie vaut à un facteur numérique près l'intégrale de Dirichlet). Par suite aussi toute fonction sousharmonique dans Ω dont le gradient est de carré sommable

13. *Quelques autres propriétés utiles.*

a) Toute fonction (BLD) est localement de carré sommable.

D'après cela si φ est de gradient fini continu, $f\varphi$ est localement (BLD). Cela permet d'annuler f au voisinage compact δ d'un point ou hors d'un compact K (δ et K contenus dans Ω) sans l'altérer ailleurs sauf dans des voisinages choisis de $\overset{*}{\delta}$ et $\overset{*}{K}$.

De plus si $f_n \to f$ en norme et quasi-partout, $\int_K (f_n - f)^2 d\omega \to 0$ et par suite $f_n\varphi \to f\varphi$ localement en norme et quasi-partout.

b) Si f (BLD) est nulle hors d'un compact de Ω, la régularisation de Schwartz (voir note 10) donne une fonction f_n, C^∞, nulle hors d'un compact fixe (pour n assez grand) tendant vers f quasi-partout et en norme.

c) Toute f (BLD) est sommable pour toute mesure μ à support compact dans Ω et d'énergie finie (en potentiel newtonien ou logarithmique). De plus si $f_n \to f$ en norme et quasi-partout, $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$ avec une telle μ.

d) De (*a*) ou du début de (*a*) et grâce à (*b*), on déduit un lemme important qui pourrait être placé au début de la théorie :

Soit ω ouvert et K compact tel que $\omega \subset \bar{\omega} \subset \overset{\circ}{K}$ [19] $\subset K \subset \Omega$. Pour f (BLD) dans Ω, il existe une suite de Cauchy de fonctions f_n (BLD) C^∞ dans Ω, nulles hors K, convergeant quasi-partout vers une limite finie égale à f quasi-partout dans ω. Si f est bornée, on peut choisir f_n avec la même limitation en module.

e) Si f (BLD) est nulle presque partout sur un ensemble α, grad f est nul presque partout sur α.

(19) Intérieur de K.

Voyons que la dérivée relative à une direction fixée est nulle presque partout sur α. On considère les parallèles à cette direction; chacune coupe α suivant un ensemble linéaire dont les points isolés sont dénombrables. Tous ces points forment un ensemble de mesure spatiale nulle. Aux autres points, la dérivée, si elle existe, est nulle.

Enfin éclairons le sujet en rappelant encore :

α) f (BLD) admet quasi-partout une pseudo-limite (ou limite fine) finie.

β) Les f (BLD) limites en norme et quasi-partout de fonctions nulles hors d'un compact sont caractérisées (à l'équivalence près) comme les fonctions (BLD) orthogonales aux fonctions (BLD) harmoniques dans Ω.

Nous y reviendrons, sans nous en être servis, dans le cas plus général des espaces de Green.

γ) S'il est évident qu'une transformation isométrique ou conforme conserve la propriété (BLD), signalons plus généralement qu'une transformation biunivoque avec gradient fini continu transforme une fonction localement (BLD) en fonction analogue, les modules des gradients étant aux points correspondants presque partout égaux, au facteur près de similitude.

14. *Remarques élémentaires sur les fonctions* (BLD) *harmoniques.*

1°) Une telle fonction dans R^τ est contante.

Car

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\right| \leqslant \frac{1}{\text{mes } D_M^r}\int_{D_M^r}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| d\omega \leqslant \frac{1}{\sqrt{\text{mes } D_M^r}}\sqrt{\int_{R^\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 du}$$

où D_M^r est le domaine circulaire ou sphérique de centre M et rayon r On voit en faisant tendre r vers l'infini que grad $u = 0$, $u = C^{te}$

2°) Une telle fonction au voisinage d'un point O à distance finie, ce point exclu, se prolonge en O selon une fonction harmonique au voisinage de O, O inclus.

Car la même inégalité appliquée à D_M^r de rayon $r <$ OM donne quand $r \to$ OM

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(M)\right| \leqslant \overline{OM}^{-\frac{\tau}{2}}\varepsilon(M) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon \to 0 \qquad \text{avec} \quad OM.$$

On a donc ce même type de majoration pour la dérivée le long de toute droite issue de O, avec un ε indépendant de la droite

On en déduit

$$\text{pour } \tau = 2 \qquad \frac{u}{\log 1/\mathrm{OM}} \to 0 \quad (\mathrm{OM} \to 0)$$

$$\text{pour } \tau > 2 \qquad \frac{u}{\overline{\mathrm{OM}}^{2-\tau}} \to 0 \quad (\mathrm{OM} \to 0)$$

ce qui entraîne, comme on sait l'absence, d'une singularité en O.

3°) Au voisinage du point à l'infini $\mathcal{R}_\tau$ de R^τ, ce point exclu, une telle fonction est de la forme

$$\mathrm{K}\overline{\mathrm{OM}}^{2-\tau} + \text{fct. harm. au voisinage de } \mathcal{R}_\tau, \text{ ce point inclus.}$$

(Ces deux fonctions sont d'ailleurs (BLD) au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$, la seconde ayant un gradient O $(r^{-\tau})$).

Si $\tau = 2$ cela résulte par inversion du cas précédent.

On peut dans tous les cas appliquer l'inégalité de plus haut avec D_M^r et $r = \dfrac{\mathrm{OM}}{2}$ (O point fixe). On trouve pour le gradient une limitation en module

$$\overline{\mathrm{OM}}^{-\frac{\tau}{2}} \varepsilon(\mathrm{M}) \qquad (\text{où } \varepsilon \to 0 \text{ quand } \mathrm{M} \to \mathcal{R}_\tau).$$

On en déduit si $\tau = 2$, la propriété : $\dfrac{u}{\log \mathrm{OM}} \to 0$
si $\tau > 2$, $|u|$ borné;
d'où la conclusion (voir [4, *a*]).

V. — LES FONCTIONS (BLD) DANS UN ESPACE $\mathcal{E}$. LEURS RADIALES DANS UN ESPACE DE GREEN

15. Si dans $\mathcal{E}$ il y a des points à l'infini Q_i, on notera $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \bigcup_i \{\mathrm{Q}_i\}$ et de même $\check{\mathrm{E}}$ l'ensemble déduit de tout ensemble E par suppression des points à l'infini. Pour une fonction f dans $\check{\Omega}$ admettant localement des dérivées presque partout sur l'image, on introduira comme plus haut $||f||_\alpha$ relatif à $\alpha \subset \mathcal{E}$, égal à la racine carrée de l'intégrale de $\mathrm{grad}^2 f$ étendue à l'ensemble $\check{\alpha}$, et on pourra écrire sans ambiguïté $\int_\alpha$ au lieu de $\int_{\check{\alpha}}$. De même pour la norme $||f||_\Omega$, d'où la notion de *suite de Cauchy*.

Une fonction f sera dite (BLD) *dans un ouvert Ω de $\mathcal{E}$, si elle est définie quasi-partout dans $\check{\Omega}$ et limite finie quasi-partout* (*au sens local sur l'image*) *d'une suite de Cauchy de fonctions f_n de classe* C^∞ *dans* $\check{\Omega}$ (et de norme finie).

Une telle fonction f est (BLD) dans tout ouvert ω de $\check{\Omega}$ contenu dans un $\mathcal{V}_P$, donc $\|f - f_n\|_\omega \to 0$. On en déduit que pour tout compact $K \subset \check{\Omega}$, $\|f\|_K$ est finie et $\|f_n - f\|_K \to 0$.

Or $\|f_n - f_{n'}\|_\Omega < \varepsilon$ donné, dès que n, $n' > N$ convenable d'où $\|f_n - f\|_K \leqslant \varepsilon$ pour $n > N$ indépendamment de K.

Il s'ensuit que $\|f\|_\Omega$ est fini et que $\|f_n - f\|_\Omega \to 0$.

Nota : quand nous aurons à parler pour une fonction (BLD) d'une convergence « quasi-partout hors des points à l'infini », nous dirons généralement seulement « quasi-partout ».

16. Propriétés. — Le chapitre précédent nous donne des propriétés locales. Il nous faut réétudier les propriétés globales.

Théorème 3. — *Dans Ω toute fonction localement* (BLD) *et de norme finie est* (BLD).

Soit d'abord ω ouvert relativement compact dans $\check{\Omega}$. On va former dans ω une suite f_n de fonctions (BLD) C^∞ convergeant vers f quasi-partout et selon la norme $\|\ \|_\omega$. Pour cela attachons à chaque point P_i de $\bar{\omega}$ quatre voisinages ouverts ω_i ω'_i ω''_i ω'''_i dont les images dans $\mathcal{V}'_P$ sont circulaires (ou sphériques) concentriques différentes : $\omega_i \subset \omega'_i \subset \omega''_i \subset \omega'''_i \subset \check{\Omega}$; puis couvrons $\bar{\omega}$ par un nombre fini de ces ω_i soit ω_1 $\omega_2 \ldots$ ω_μ. Si φ_1 est une fonction C^∞ (ou seulement de gradient fini continu) égale à 1 dans ω_1, nulles hors ω'_1, on approche $f\varphi_1$ qui est (BLD) dans ω'''_1 par une suite de fonctions $f_n^{(1)}$, C^∞, nulles hors ω''_1, avec convergence simple quasi-partout et convergence en norme. On prolonge $f_n^{(1)}$ par 0. Puis on étudie $f - f\varphi_1$ dans ω'''_2, comme on vient de le faire pour f dans ω'''_1, en introduisant $(f - f\varphi_1)\varphi_2$ et une suite $f_n^{(2)}$. On passe à $[(f - f\varphi_1) - (f - f\varphi_1)\varphi_2]\varphi_3$ qu'on approchera par $f_n^{(3)}$ etc. La somme de ces $f_n^{(i)}$ répond à la question.

Si f est nulle hors d'un compact de ω, on peut d'ailleurs en opérant sur un ouvert contenu, obtenir ainsi dans ω notre suite de fonctions f_n toutes nulles hors d'un compact fixe dans ω.

Si Ω n' a pas de points à l'infini et est compact, la question en vue est résolue. Sinon introduisons dans $\check{\Omega}$ (localement compact) une suite d'ouverts relativement compacts Ω_n ($\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$) tendant vers $\check{\Omega}$.

Soit φ_1 (de gradient fini continu) valant 1 dans Ω_1 et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_1$, valant 0 hors Ω_2 et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_2$. On sait approcher $f\varphi_1$ par $f_n^{(1)}$, C^∞, nulle hors Ω_2 et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_2$, convergeant quasi-partout et en norme vers $f\varphi_1$. Puis, considérant $\Omega_4 - \Omega_1$, on introduit φ_2 (de gradient fini continu) égale à 1 dans $\Omega_3 - \Omega_2$ et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_3$ et $\overset{*}{\Omega}_2$, égale à 0 hors $\Omega_4 - \Omega_1$ et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_4$ et $\overset{*}{\Omega}_1$, enfin égale à $1 - \varphi_1$ dans $\Omega_2 - \Omega_1$. On approche $f\varphi_2$ par une suite de fonctions $f_n^{(2)}$, nulles hors $\Omega_4 - \Omega_1$ et au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_4$ et $\overset{*}{\Omega}_1$. On considère ensuite $\Omega_6 - \Omega_3$ etc. On peut choisir $f_{n_1}^{(1)}, f_{n_2}^{(2)} \dots$ de façon que la somme infinie obtenue F_1 diffère de f d'une fonction (BLD) de norme $< \varepsilon_1$. On recommence avec des indices n_i respectivement plus grands de façon que la somme analogue F_2 diffère de f d'une fonction de norme $< \varepsilon_2$, etc. Si $\varepsilon_n \to 0$, F_n répond à la question.

Remarque. — De cette démonstration, on peut extraire le résultat que toute fonction (BLD) nulle hors d'un compact est limite quasi-partout (dans $\check{\Omega}$) et en norme d'une suite de fonction C^∞ nulles hors d'un compact fixe.

Théorème 4. — *Les classes d'équivalence* [20] (définies par l'égalité quasi-partout à une constante près dans chaque domaine composant de $\check{\Omega}$), *pourvues du produit scalaire dérivant de* $\int_{\check{\Omega}} (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g)\, d\omega$ *forment encore un espace de Hilbert réel* [21] *dont la norme est la norme de Dirichlet.*

La constance quasi-partout dans chaque domaine quand la norme est nulle vient de la même propriété locale. La complétion résulte aussitôt des propriétés suivantes qui permettent d'étendre les propriétés 2° du chapitre précédent n° 11 :

α) Soit dans Ω connexe une suite de Cauchy de fonctions (BLD)f_n.

[20] Par brièveté, on emploiera parfois pour des fonctions le langage qui s'appliquerait à des classes d'équivalence et inversement. *Cet abus de langage* ne mérite peut-être pas qu'on l'évite par des notations adéquates.

[21] Il est d'ailleurs séparable, cela résultant de la propriété locale et d'approximations inspirées par la démonstration du théorème 3.

Voyons qu'on peut extraire f_{np} telle que $f_{n_p} + C_{n_p}$ (C_{n_p} const.) converge quasi-partout vers une fonction f avec convergence locale en norme.

Introduisons en effet une suite de voisinages ouverts connexes ω_i couvrant $\check{\Omega}$, tels que chacun rencontre la réunion des précédents. On choisit $f_{n_p^{(1)}} + C_{n_p^{(1)}}$ convergeant dans ω_1 vers une fonction f(BLD) quasi-partout et en norme. On peut extraire une suite $f_{n_p^{(2)}}$ telle que $f_{n_p^{(2)}} + C'_{n_p^{(2)}}$ converge de même dans ω_2 vers une fonction g; dans $\omega_1 \cup \omega_2$, $C'_{n_p^{(2)}} - C_{n_p^{(2)}}$ tend quasi-partout vers g-f, qui est donc quasi-partout égale à une même constante. Ainsi $f_{n_p^{(2)}} + C_{n_p^{(2)}}$ converge dans $\omega_1 \cup \omega_2$, quasi-partout et en norme vers une fonction (BLD) etc. Par le procédé diagonal on aura une suite de Cauchy $f_{\nu_p} + C_{\nu_p}$ convergeant quasi-partout et localement en norme.

β) Par le procédé diagonal on étendra la proposition à Ω non connexe, en définissant C_{n_p} égal à une constante pour chaque domaine composant.

γ) On complète ces résultats en remarquant qu'il y a convergence globale en norme vers f pour la suite extraite, donc pour la suite donnée. Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 15.

Enfin les propriétés fondamentales 3° du chapitre précédent s'étendent aussitôt. Le point de vue local est le même; les inégalités sur les modules des gradients permettent de compléter. Par exemple on a presque partout :

$$|\mathrm{grad}\sup(f, g)| \leqslant \sup(|\mathrm{grad} f|, |\mathrm{grad}\, g|) \leqslant |\mathrm{grad} f| + |\mathrm{grad}\, g|$$

de sorte que $\sup(f, g)$ est (BLD) si f et g le sont.

Puis la convergence en norme de $\inf(f, n)$ par exemple, vient de la convergence locale entraînant la convergence sur tout compact K de $\check{\Omega}$, puis de

$$\int_{\check{\Omega}-K} \mathrm{grad}^2 (\inf(f, n))\, d\omega \leqslant \int_{\check{\Omega}-K} \mathrm{grad}^2 f\, d\omega.$$

17. Les radiales des fonctions (BLD) dans un espace de Green.

Lemme 6. — Si v est une fonction (BLD) dans un espace de Green $\mathcal{E}$ où l'on fixe un pôle P, $v_\lambda(l)$ est sommable-dg et

$$(2) \quad \int |v_\lambda - v_\lambda| \, dg \leqslant \frac{1}{\varphi_\tau} \sqrt{\int_{\Delta_\lambda^{\lambda'}} \mathrm{grad}^2 v\, d\omega \int_{\Delta_\lambda^{\lambda'}} \mathrm{grad}^2 G\, d\omega}$$

où $\Delta_\lambda^{\lambda'}$ est $D_P^\lambda - \overline{D}_P^{\lambda'}$ $(\lambda < \lambda')$ c.-à-d. l'ensemble où $\lambda < G_P < \lambda'$, noté aussi brièvement Δ.

Supposons d'abord que v soit C^∞ dans $\check{\mathcal{E}}$. Soit $\mathcal{L}_\lambda$ l'ensemble ouvert des lignes de Green issues de P et traversant Σ_P^λ; soit e la partie ouverte où $v_\lambda - v_{\lambda'} > 0$. Les lignes de e forment dans Δ un ouvert θ. D'après [5], lemme 8, e peut être mis sous forme d'une réunion dénombrable de compacts e_i dont les intersections deux à deux sont de mesure-dg nulle et dont les lignes couperont $\overline{\Delta}$ selon des « tubes de Green réguliers compacts » θ_i, d'intérieurs deux à deux disjoints. Alors d'après la propriété fondamentale de dg :

$$\varphi_\tau \int_{e_i} (v_\lambda - v_{\lambda'})\, dg = -\int_{\theta_i} v \frac{dG}{dn} d\sigma$$

(dérivée normale intérieure, $d\sigma$ mesure-aire sur la frontière de θ_i).

Mais d'après la formule de Green, cela vaut

$$-\int_{\theta_i} (\operatorname{grad} v,\ \operatorname{grad} G)\, d\omega.$$

D'où par sommation, puisque grad v, grad G sont de carré sommable dans Δ, donc de produit sommable

$$\varphi_\tau \int_e (v_\lambda - v_{\lambda'})\, dg = -\int_\theta (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} G)\, d\omega$$

et

$$\varphi_\tau \int_e |v_\lambda - v_{\lambda'}|\, dg \leqslant \int_\theta |\operatorname{grad} v|\, |\operatorname{grad} G|\, d\omega.$$

On aura une inégalité analogue pour les lignes telles que $v_\lambda - v_{\lambda'} < 0$.

D'où

$$\varphi_\tau \int |v_\lambda - v_{\lambda'}|\, dg \leqslant \int_\Delta |\operatorname{grad} v|\, |\operatorname{grad} G|\, d\omega$$
$$\leqslant \sqrt{\int_\Delta \operatorname{grad}^2 v\, d\omega \int_\Delta \operatorname{grad}^2 G\, d\omega}.$$

Si v est quelconque, on introduira v_n(BLD) C^∞ dans $\check{\mathcal{E}}$, convergeant quasi-partout et en norme. On partira de l'inégalité établie pour v_n. La convergence en norme dans Δ entraîne que $\int_\Delta \operatorname{grad}^2 v_n\, d\omega$ tend vers $\int_\Delta \operatorname{grad}^2 v\, d\omega$.

D'autre part $\int |v_\lambda - v_{\lambda'}|\, dg$ est majoré par la plus petite limite de $\int |(v_n)_\lambda - (v_n)_{\lambda'}|\, dg$. D'où l'inégalité cherchée.

Comme on peut modifier v en l'annulant au voisinage de P dans lequel on prendra Σ_P^λ, on conclut à la sommabilité - dg de v_λ quel que soit λ.

On peut aussi conclure en remarquant la sommabilité - dg de v_λ, lorsque λ' est assez voisin de max. G pour que $\Sigma_P^{\lambda'}$ soit compact (V. n° 13, c)

THÉORÈME 5. — *Toute fonction v (BLD) dans $\mathcal{E}$ admet une radiale pour tout pôle.*

Car d'après l'inégalité (1),

$$\int |v_\lambda - v_{\lambda'}|\, dg \to 0 \qquad (\lambda,\ \lambda' \to 0).$$

LEMME 7. — Si v_n (BLD) tend vers 0 quasi-partout et en norme,

$$\int |(v_n)_\lambda|\, dg \to 0 \qquad \text{pour} \qquad n \to \infty,$$

uniformément en $\lambda \leqslant \lambda_0$ fixé $<$ max G.

Si v_n est nul dans un voisinage fixé de P, c'est évident par l'inégalité (1) en prenant $\Sigma_P^{\lambda'}$ dans ce voisinage.

On peut se ramener à ce cas en remplaçant v_n par $v_n\varphi$ où φ de gradient fini continu vaut 1 hors $D_P^{\lambda_0}$ (22) et est nul au voisinage de P. Car $v_n\varphi$ tend vers 0 quasi-partout et en norme localement (n° 13, a) donc globalement.

On peut aussi voir que, en choisissant un $\Sigma_P^{\lambda'}$ compact sans point à l'infini, $\int |(v_n)_{\lambda'}|\, dg \to 0$ grâce à (13, c) car $|v_n|$ tend aussi vers 0 quasi-partout et en norme.

THÉORÈME 6. — *Si v_n (BLD) tend vers v (BLD) quasi-partout et en norme, la radiale de v_n converge en moyenne vers la radiale de v.*

Car

$$\int \Big|\underset{\leftrightarrow}{v_n} - \underset{\leftrightarrow}{v}\Big|\, dg \leqslant \int \Big|\underset{\leftrightarrow}{v_n} - (v_n)_\lambda\Big|\, dg + \int |(v_n)_\lambda - v_\lambda|\, dg + \int \Big|v_\lambda - \underset{\leftrightarrow}{v}\Big|\, dg.$$

Etant donné ε, on choisit n_0 tel que l'intégrale centrale à droite soit $< \varepsilon$ pour $n \geqslant n_0$ indépendamment de λ assez petit. Puis pour chaque $n \geqslant n_0$, on trouvera λ tel que les autres intégrales de droite soient $< \varepsilon$. Ainsi pour $n \geqslant n_0$, l'intégrale de gauche sera $< 3\varepsilon$.

(22) On peut supposer λ_0 assez grand pour que $D_P^{\lambda_0}$ soit relativement compact.

18. Le type de démonstration du lemme 6 peut être utilisé pour démontrer le lemme suivant :

LEMME 8. Soit un domaine Ω_n très régulier tendant en croissant vers l'espace de Green $\mathcal{E}$ où f est donnée (BLD). Si ω_n est le domaine composant de $\Omega_n \cap D_P^\lambda$ qui contient le pôle fixé P, $H_f^{\omega_n}$ et $H_f^{D_P^\lambda}$ existent ([23]) et $H_f^{\omega_n} \to H_f^{D_P^\lambda}$ (uniformément localement) (λ fixé, $n \to \infty$).

On se ramène aussitôt au cas de $f \geqslant 0$, nulle au voisinage de P. Soient μ^M et μ_n^M les mesures harmoniques (au point M fixé dans D_P^λ) relatives à D_P^λ et ω_n. On sait que sur Σ_P^λ, μ_n^M est majorée par μ^M croissante, et converge vaguement vers μ^M. On en déduit que pour tout e borélien de Σ_P^λ, $\mu_n^M(e) \to \mu^M(e)$. Par suite comme f est sommable-$d\mu$, f sera sommable-$d\mu_n$ sur $\overset{*}{\omega}_n \cap \Sigma_P^\lambda$ et

$$\int_{\overset{*}{\omega} \cap \Sigma_P^\lambda} f\, d\mu_n^M \to \int_{\Sigma_P^\lambda} f\, d\mu^M.$$

D'autre part considérons $\gamma_n = \overset{*}{\omega}_n \cap D_P^\lambda$ et les lignes de Green relatives à ω_n issues de P et aboutissant aux points de γ_n, d'ailleurs orthogonalement. Limitées à une petite surface $G_P^{\omega_n} = \lambda_0$ autour de P ([24]), ces lignes forment dans $\mathcal{E}$ un ensemble E_n

Or $$\int_{\gamma_n} f\, d\mu_n^P = \frac{1}{\varphi_\tau} \int_{\gamma_n} f \frac{dG_P^{\omega_n}}{dn}\, d\sigma.$$

Si f est C^∞, décomposons encore le faisceau considéré en tubes réguliers, appliquons leur la formule de Green et sommons. Il vient :

$$-\frac{1}{\varphi_\tau} \int_{E_n} \operatorname{grad} f . \operatorname{grad} G_P^{\omega_n}\, d\omega$$

d'où finalement

$$\int_{\gamma_n} f\, d\mu_n^P \leqslant \sqrt{\int_{\mathcal{E}} \operatorname{grad}^2 f\, d\omega} \sqrt{\int_{E_n} \operatorname{grad}^2 G_P^{\omega_n}\, d\omega} \tag{3}$$

([23]) On verra plus loin la résoluvitité de f pour tout domaine partiel tel que le point d'Alexandroff de $\mathcal{E}$ forme un ensemble de mesure harmonique nulle. Il faudra d'ailleurs prolonger f convenablement aux points à l'infini. Cette résolutivité est démontrée directement ici dans notre cas particulier.

([24]) Cette surface varie avec n mais reste dans le voisinage fixé de P où $f = 0$, si l'on choisit λ_0 tel que l'ensemble où $G_P^{\mathcal{E}} \geqslant \lambda_0$ soit dans ce voisinage.

Si f est quelconque $\geqslant 0$, on l'approchera par f_p C^∞ et on passera à la limite $(p \to \infty)$ en remarquant que

$$\int_{\gamma_n} f\, d\mu_n \leqslant \lim_{p\,\infty} . \inf \int_{\gamma_n} f_p\, d\mu_n.$$

$\left(\text{On peut même passer à la limite sous } \int.\right)$

L'inégalité (3) ainsi établie en général, a un second nombre fini et prouve la sommabilité-dμ_n de f sur φ_n, donc sur $\overset{*}{\omega}_n$. Il reste à prouver que le premier nombre de (3) tend vers 0 $(n \to \infty)$, car il s'ensuit que $\int_{\gamma_n} f d\mu_n^{\mathrm{M}} \to 0$ pour tout M. Nous allons voir pour cela que

$$\int_{\mathrm{E}_n} \operatorname{grad}^2 \mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\omega_n} d\omega \to 0.$$

Grâce à une décomposition en tubes réguliers, on voit que cela vaut l'intégrale $\dfrac{1}{\varphi_\tau}\displaystyle\int \mathrm{G}\frac{d\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\omega_n}}{dn}d\sigma$ étendue à la portion de surface $\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\omega_n} = \lambda_0$ rencontrée par le faisceau considéré, c'est à dire vaut $\lambda_0\ \mu_n^{\mathrm{P}}(\gamma_n)$; et l'on sait d'après [5] n° 17 que cette mesure harmonique tend vers 0.

Remarque. — Nous indiquerons plus loin une large extention avec une autre démonstration. Mais nous pouvons déjà adapter la démonstration précédente pour améliorer le résultat.

On supposera Ω_n relativement compact quelconque, au lieu d'être très régulier mais cependant, provisoirement, tel que $\overset{*}{\omega}_n \cap \mathrm{D}_{\mathrm{P}}^{\lambda}$ ne contienne pas de point à l'infini ([25]). L'énoncé s'étend.

Voyons d'abord que l'inégalité (3) est encore valable, avec le faisceau α de lignes de Green régulières (relatives à ω_n et P) aboutissant en des points de γ_n. Il suffit d'examiner le cas de f C^∞ bornée, car on passe aussitôt à f bornée quelconque puis $f \geqslant 0$ quelconque. Introduisons pour n fixé, dans ω_n, la surface $\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\omega_n} = \varepsilon$ et son intersection s avec le faisceau α. On étudie avec la mesure de Green dg_n (pour ω_n et P) l'intégrale

$$\int_\alpha (f)_\varepsilon\, dg_n \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\varphi_\tau}\int_s f\,\frac{d\mathrm{G}_{\mathrm{P}}^{\omega_n}}{dn}d\sigma;$$

([25]) Ou bien si les points à l'infini sur cet ensemble forment un ensemble de mesure harmonique nulle dans ω_n. Sinon il faut définir f aux points à l'infini, comme on le fera plus loin, d'une manière qui permettra l'extension de ce lemme.

on la transforme comme plus haut en utilisant les lignes de Green entre les surfaces $G_P^{\omega_n} = \varepsilon$ et $G_P^{\omega_n} = \lambda_0$, et on majore aussitôt avec le second membre de (3). On achève en remarquant que

$$\int_{\mathrm{s}} (f)_\varepsilon \, dg \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\gamma_n} f \, d\mu_n$$

D'après la continuité de f et l'interprétation de la mesure harmonique sur γ_n par la mesure de Green ([5] n° 31).

On adapte de même la démonstration précédente pour voir que $\int_{E_n} \mathrm{grad}^2 \, G_P^{\omega_n} \, d\omega$ tend encore vers 0, ce qui fournit l'extension cherchée.

VI. — QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES OU SOUSHARMONIQUES (26) AVEC INTÉGRALE DE DIRICHLET FINIE

19. Rappelons [4, g] quelques notions et un théorème fondamental :

Si pour une fonction harmonique quelconque u dans un *espace de Green* $\mathcal{E}_0$, $H_u^{D_P^\lambda}$ existe quel que soit λ et vaut u (ce qui est alors indépendant du choix du pôle P), on dit que u est *indifférente*. Elle est dite *absolument indifférente* si elle est la différence de deux fonctions indifférentes $\geqslant 0$ (Voir des développements dans [4, g]).

Rappelons que si u_n indifférente tend en croissant vers u harmonique, u est indifférente. Si de plus u_n admet une radiale φ_n alors $\varphi = \lim \varphi_n$ est radiale de u. Cela résulte de

$$\int |u_\lambda - \varphi| dg \leqslant \int |u_\lambda - (u_n)_\lambda| dg + \int |(u_n)_\lambda - \varphi_n| dg + \int |\varphi_n - \varphi| dg$$

en remarquant que le premier terme de droite vaut $u(P) - u_n(P)$ et tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Propriété fondamentale d'unicité. *Si u harmonique indifférente admet pour un pôle* P *une radiale nulle,* $u = 0$ (27).

En effet l'existence de $H_u^{D_P^\lambda}$ (ou sommabilité-dg de u_λ) entraîne l'existence de $H_{u^+}^{D_P^\lambda}$ et $u = H_u^{D_P^\lambda} \leqslant H_{u^+}^{D_P^\lambda}$.

(26) Dans tout un espace $\mathcal{E}$, et non pas seulement hors des points à l'infini de cet espace. La condition que la norme de Dirichlet est finie exprime que les fonctions sont (BLD).

(27) C'est un cas particulier d'une forme améliorée du principe du maximum [4, g].

Or en P $\quad H_{u^+}^{D_P^\lambda}(P) = \int (u^+)_\lambda\, dg \to 0 \quad (\lambda \to 0)$.

La fonction harmonique $\geqslant 0$ $H_{u^+}^{D_P^\lambda}$ tend donc vers 0 en tout point.

Par suite $u \leqslant 0$. De même $-u \leqslant 0$, d'où $u = 0$

Il est évident que les fonctions harmoniques bornées sont indifférentes.

D'après le lemme 8, *les fonctions harmoniques dans $\mathcal{E}_0$ et de norme de Dirichlet finie sont aussi indifférentes.*

On en déduit le résultat suivant sans doute connu :

Application. — Soit u harmonique, de norme finie, dans un ouvert de la forme $\omega - E$, où ω est un ouvert d'un espace $\mathcal{E}$ et E un ensemble dans ω, polaire, et fermé relativement à ω. Alors u *se prolonge harmoniquement* (de façon unique) dans ω, tout comme dans le cas de u bornée.

Il suffit de le voir dans le cas de ω circulaire ou sphérique, de centre P non sur E. Les D_P^λ de cet ω sont les domaines concentriques dont on ôte les points appartenant à E, et u vaut son intégrale de Poisson dans ces domaines, ce qui fournit le prolongement cherché.

20. Rappelons aussi [4, g] qu'une fonction sousharmonique u dans un espace de Green $\mathcal{E}_0$ est dite *mineure* si elle admet une majorante harmonique indifférente. On sait que cela équivaut à la propriété suivante (indépendante du pôle) : $H_u^{D_P^\lambda}$ existe et majore u pour tout λ (d'où sa croissance quand λ décroit) et la limite est finie $(\lambda \to 0)$. Cette limite est alors *la plus petite majorante harmonique indifférente.* On l'appelle *la meilleure majorante harmonique.*

Rappelons encore que si $\mathcal{E}_0$ est relativement compact dans un espace $\mathcal{E}$ où u est sousharmonique, cette majorante vaut $H_u^{\mathcal{E}_0}$ (ce qui est la meilleure majorante harmonique de F. Riesz dans le cas qu'il considérait d'un domaine euclidien borné). Si de plus les points frontière de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}$ sont réguliers, c'est aussi la plus petite majorante harmonique de u dans $\mathcal{E}_0$.

Toute fonction sousharmonique de norme finie est mineure (tout comme les fonctions sousharmoniques bornées supérieurement) *et il y a coïncidence de sa plus petite et de sa meilleure majorante harmonique*

En effet reprenons D_P^λ et le domaine ω_n du lemme 8. Comme ce domaine a tous ces points-frontière réguliers, H^{ω_n} est aussi la plus petite majorante harmonique. Sa limite $H_u^{D_P^\lambda}$ est donc la plus petite majorante harmonique dans D_P^λ. L'existence d'une radiale pour u entraîne que $H_u^{D_P^\lambda}(P)$ ou $\int u_\lambda dg$ ait une limite finie $(\lambda \to 0)$ Donc u est mineure et la limite de $H_u^{D_P^\lambda}(\lambda \to 0)$ est la plus petite majorante harmonique dans $\mathcal{E}_0$.

On en déduit les résultats suivants, peut-être plus ou moins connus :

Applications. — D'abord : *Si u est sousharmonique et de norme finie dans le même type de domaine* ω—E *que plus haut* (E polaire), *u se prolonge sousharmoniquement* (de façon unique) *dans* ω.

On se ramène encore au cas de ω circulaire ou sphérique et l'on voit que u admet comme majorante harmonique dans D_P^λ (P au centre) l'intégrale de Poisson de D_P^λ pour des valeurs-frontière égales à u, là où u existe. u est donc bornée supérieurement au voisinage de chaque point de E d'où le résultat (qui entraine le résultat donné plus haut directement pour u harmonique).

Théorème 7. — *Si u est sousharmonique et de norme finie dans un espace non greenien* $\mathcal{E}$, $u = const$ (comme lorsque u est bornée supérieurement).

C'est évident si $\mathcal{E}$ est compact sans l'hypothèse de norme finie. Supposons $\mathcal{E}$ non compact. Considérons au voisinage d'un point P_0, par exemple non à l'infini, un domaine circulaire ou sphérique D_{P_0} et un autre concentrique un peu plus grand D'_{P_0}. La fonction de Green $G_P^{\mathcal{E}-\overline{D}_{P_0}}$ pour P hors $\overline{D}'_{P_0}$ prend sur $\overset{*}{D}'_{P_0}$ des valeurs $\geqslant \varepsilon_1 > 0$.

Or dans $\mathcal{E} - \overline{D}'_{P_0}$, $G_P^{\mathcal{E}-\overline{D}_{P_0}} - H_\varphi^{\mathcal{E}-\overline{D}'_{P_0}} = G_P^{\mathcal{E}-\overline{D}'_{P_0}}$ où φ vaut $G_P^{\mathcal{E}-\overline{D}_{P_0}}$ sur $\overset{*}{D}'_{P_0}$ et 0 au point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$.

Le premier membre satisfait en effet à certaines conditions suffisant à caractériser la fonction de Green du second membre ([28]). Comme $\{\mathcal{A}\}$ est de mesure harmonique nulle pour $\mathcal{E} - \overline{D}'_{P_0}$, selon un critère pour qu'un espace soit non greenien ([29]),

([28]) Voir le théorème 6'-13 de [5]; ces conditions sont l'allure classique au voisinage du pôle et la condition que si l'on prend un compact K dont l'intérieur contient le pôle, la fonction vaille dans $\mathcal{E}$ — K la solution du problème de Dirichlet pour valeurs égales à 0 en $\mathcal{A}$ et égales à la fonction sur $\overset{*}{K}$.

([29]) Voir critère A, n° 15 de [5]. Il s'exprime par la condition que l'espace soit on voit que $H_{\varphi}^{\mathcal{E}-\overline{D}'_{P_0}} \geqslant \varepsilon_1$. Donc $G_{P}^{\mathcal{E}-\overline{D}_{P_0}}$ majore ε_1 hors $\overline{D}'_{P_0}$ et le lieu où cette fonction de Green vaut $\lambda < \varepsilon_1$ est entièrement situé dans D'_{P_0}. Dans l'ouvert où $G_{\varphi}^{\mathcal{E}-\overline{D}_{P_0}} > \lambda$, u mineure est donc majorée par ε_1; elle l'est aussi dans le complémentaire qui est compact. Aussi u est borné supérieurement donc constante.

VII. — LE PRINCIPE PRÉLIMINAIRE DE DIRICHLET DANS UN ESPACE DE GREEN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

21. Reprenons les fonctions (BLD) dans un espace $\mathcal{E}$ fixé et considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}$ de leurs classes d'équivalence.

Les classes de fonctions (BLD) «*harmoniques dans* $\mathcal{E}$ », c.-à-d. par définition prolongeables aux points à l'infini de façon à devenir harmoniques dans $\mathcal{E}$ tout entier, définissent un *sous espace* $\mathcal{H}_h^{\mathcal{E}}$ *complet*, car le lemme 2 s'étend aussitôt [30]. Mais si $\mathcal{E}$ est non greenien, ce sous espace se réduit à l'origine, d'après le théorème 7.

Les raisonnements du théorème 1 fournissent son extension par projection de la classe de f (brièvement projection de f) sur $H_h^{\mathcal{E}}$ selon le :

THÉORÈME 1'. — f (BLD) *étant donné dans* $\mathcal{E}$, *il existe parmi les fonctions u harmoniques dans* $\mathcal{E}$ *et* (BLD) *dans* $\mathcal{E}$ *une et un seule* (*à une constante additive près*) *telle que* $||u-f||$ *soit minima. C'est la projection de f sur* $\mathcal{H}_h^{\mathcal{E}}$. *De plus pour cette fonction* $||u|| \leqslant ||f||$ *et il n'y a égalité que si f est, hors des points à l'infini, quasi-partout égale à une fonction « harmonique dans* $\mathcal{E}$ ».

22. L'extension du chapitre II se fera en écartant d'abord les points à l'infini. On allégera aussi les démonstrations en dégageant les nouveaux lemmes suivants inspirés du chap. II.

Lemme 9. — *Soit f* (BLD) *dans* $\mathcal{E}$ (*même avec des points à l'infini*) *et un domaine* ω_n [31] *croissant et tendant vers le domaine*

compact, sinon que $\mathcal{A}$ soit de mesure harmonique nulle pour le complémentaire d'un compact non polaire fixé quelconque.

[30] On voit comme au n° 4 la convergence locale hors des points à l'infini et cela entraîne la convergence uniforme au voisinage complet de chaque point à l'infini.

[31] Extension facile à des ouverts ω_n et Ω comme pour le lemme suivant.

$\Omega \subset \mathcal{E}$. *Soit dans* ω_n *une fonction harmonique* (BLD) u_n, *minimisant* $\|u - f\|_{\omega_n}$ *et supposons qu'elle converge localement uniformément vers* U (*harmonique*) *dans* Ω. *Alors* :

α) $\|U\|_\Omega \leqslant \|f\|_\Omega$.

β) U *minimise* $\|u - f\|_\Omega$, *parmi les u harmoniques* (*BLD*).

γ) $\|u_n - U\|_{\omega_n} \to 0$.

δ) *Etant donné* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset \Omega$ *ne contenant pas de points à l'infini, tel que, à partir d'un certain rang*

$$\|u_n\|_{\omega_n - K} < \varepsilon, \qquad \|u_n - U\|_{\omega_n - K} < \varepsilon, \qquad \|u_n - f\|_{\omega_n - K} < \varepsilon.$$

ε) Notons $[f, g]_E$ la fonction égale à f dans E, à g hors E. *Si l'on sait que* $v_n = [u_n, f]_{\omega_n}$ *est* (BLD), *alors* $v = [U, f]_\Omega$ *est* (BLD) *et* $\|v_n - v\|_{\mathcal{E}} \to 0$.

Les quatre premiers résultats s'obtiennent par adaptation immédiate des raisonnements du théorème 2. Quant au dernier,

$$\|v_{n+p} - v_n\|^2_{\mathcal{E}} = \|v_{n+p} - v_n\|^2_{\omega_n} + \|v_{n+p} - v_n\|^2_{\omega_{n+p} - \omega_n} + \|v_{n+p} - v_n\|^2_{\mathcal{E} - \omega_{n+p}}.$$

D'abord

$$\|v_{n+p} - v_n\|_{\omega_n} \leqslant \|u_{n+p} - U\|_{\omega_{n+p}} + \|u_n - U\|_{\omega_n} \to 0 \ (n \to \infty) \text{ d'aprés } \gamma.$$

Puis comme $v_{n+p} - v_n = 0$ *p. p.* dans $\mathcal{E} - \omega_{n+p}$, le gradient y est aussi nul *p. p* d'où $\|v_{n+p} - v_n\|_{\mathcal{E} - \omega_{n+p}} = 0$.

Enfin

$$\|v_{n+p} - v_n\|_{\omega_{n+p} - \omega_n} \leqslant \|v_{n+p} - f\|_{\omega_{n+p} - \omega_n} + \|f - v_n\|_{\omega_{n+p} - \omega_n}.$$

On voit que $\|v_{n+p} - f\|_{\omega_{n+p} - \omega_n} \to 0 \ (n \to \infty)$ d'aprés (δ) ; l'autre terme est nul parce que $f - v_n = 0$ *p. p.* hors ω_n, donc aussi le gradient.

Lemme 10. — Soit dans $\mathcal{E}$, f_n (BLD) convergeant en norme et quasi-partout vers f, et, dans un domaine Ω de $\mathcal{E}$, u_n harmonique (BLD) minimisant $\|u - f_n\|_\Omega$. Alors u_n converge en norme dans Ω. Si $v_n = [u_n, f_n]_\Omega$ est (BLD), v_n converge en norme; si de plus les points non à l'infini de $\mathcal{E} - \Omega$ forment un ensemble non polaire, il existe une suite extraite v_{n_p} qui converge en norme et quasi-partout vers une fonction égale à f quasi-partout hors Ω.

L'interprétation de u_n comme projection de f_n montre la convergence en norme de u_n dans Ω. De plus si φ_n est (BLD) :

$$\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|_{\mathcal{E}}^2 = \|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|_{\Omega}^2 + \|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|_{\mathcal{E}-\Omega}^2.$$

Le premier terme à droite tend vers 0. Puis

$$\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|_{\mathcal{E}-\Omega} \leqslant \|\varphi_{n+p}-f_{n+p}\|_{\mathcal{E}-\Omega} + \|\varphi_n-f_n\|_{\mathcal{E}-\Omega} + \|f_{n+p}-f_n\|_{\mathcal{E}-\Omega}$$

Les deux premiers termes à droite sont nuls parce que les fonctions sont *p.p.* nulles dans $\mathcal{E}-\Omega$. Le troisième tend vers 0.

Ainsi φ_n converge en norme et une sous-suite

$$\varphi_{n_p} + C_{n_p} (C_{n_p} \text{ const.})$$

convergera quasi-partout vers une limite en norme. Si $\mathcal{E}-\Omega$ diminué de ses points à l'infini n'est pas polaire, C_{n_p} doit avoir une limite finie et la suite φ_{n_p} répond à la question.

On s'appuiera aussi sur le lemme 2 (étendu à un espace $\mathcal{E}$ comme on l'a dit) et *on partira encore essentiellement* du cas particulier exprimé par le lemme 3 étendu à un espace $\mathcal{E}$ sans point à l'infini, à un domaine très régulier Ω et une fonction $f\,C^\infty$ (ou seulement pourvue de dérivées secondes finies continues) dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$. La démonstration initiale s'applique.

THÉORÈME 8 [32]. — *Soit dans $\mathcal{E}$ sans points à l'infini un domaine greenien relativement compact Ω. Soit f(BLD) dans $\mathcal{E}$. Alors H_f^Ω existe et c'est*

1) *la seule fonction* (BLD) *harmonique dans Ω (à une constante près) minimisant* $\|u-f\|_\Omega$ (c. à d. la projection de f sur $\mathcal{H}_n^\Omega$).

2) *la seule fonction harmonique dans Ω dont le prolongement par f soit* (BLD) *dans $\mathcal{E}$.*

Soit d'abord $f\,C^\infty$. Introduisons un domaine Ω_n très régulier tendant en croissant vers Ω. On sait que $H_f^{\Omega_n}$ minimise $\|u-f\|_{\Omega_n}$ et d'autre part, par la théorie du problème de Dirichlet, que $H_f^{\Omega_n}$ tend (uniformément localement) vers H_f^Ω. Donc d'après le lemme 9, H_f^Ω minimise $\|u-f\|_\Omega$. De plus le prolongement $\varphi_n = [H_f^{\Omega_n}, f]_{\Omega_n}$ de $H_f^{\Omega_n}$ est localement (BLD) au voisinage de $\overset{*}{\Omega}_n$ comme ailleurs, car l'allure des dérivées de $H_f^{\Omega_n}$ à la frontière permet de prolonger cette fonction hors Ω_n avec continuité du gradient (voir note 8 et n° 12). Il est évident que φ_n admet

(32) Extension immédiate à un ouvert Ω qui ne soit pas un seul domaine non greenien.

comme f une intégrale de Dirichlet finie. Alors d'après le lemme 9, $[H_f^\Omega, f]_\Omega$ est (BLD).

Soit maintenant f(BLD) bornée quelconque. On introduira f_n C^∞ uniformément bornée tendant vers f quasi-partout et en norme. $H_{f_n}^\Omega$ converge (localement uniformément) vers H_f^Ω, qui minimise donc $\|u-f\|_\Omega$. De plus, d'après le lemme 10, $[H_{f_n}^\Omega, f_n]_\Omega$ converge en norme; donc sa limite quasi-partout $[H_f^\Omega, f]_\Omega$ est (BLD).

Passons à $f \geqslant 0$ quelconque. On introduit $f_n = \inf(f, n)$ bornée, tendant en croissant vers f et convergent aussi en norme vers f. Encore d'après le lemme 10, $s_n = [H_{f_n}, f_n]_{\Omega_n}$ converge en norme; de plus une suite extraite converge quasi-partout vers une limite en norme, donc aussi s_n qui est croissante. On voit donc que H_f^Ω existe ([33]) et est la limite en norme et ponctuellement (localement uniformément) de $H_{f_n}^\Omega$. Elle minimise $\|u-f\|_\Omega$ et $[H_f^\Omega, f]_\Omega$ est (BLD).

Le cas de f quelconque résulte du précédent par la décomposition $f = f^+ - f^-$ grâce à la linéarité de l'opération de projection.

Il reste à voir que H_f^Ω en la seule fonction harmonique dans Ω dont le prolongement par f est (BLD) dans $\mathcal{E}$. Cela vient du théorème d'unicité suivant :

Soit U harmonique dans Ω, dont le prolongement $\varphi = [U, 0]_\Omega$ est (BLD). Alors $U = 0$.

En effet H_φ^Ω qui est nulle doit minimiser $\|u-U\|_\Omega$; comme U est évidemment minimisante, $U = \text{const.}$ Alors φ a un gradient nul presque partout dans Ω et hors Ω (V. nº 13, *e*); φ est donc quasi-partout égale à une constante. Comme $\mathcal{E} - \Omega$ est non polaire cette constante est nulle et $U = 0$

23. Lemme 11 ([34]). — Soient dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ (même

([33]) Cette existence, c.-à-d. la sommabilité de f relativement à la mesure harmonique de Ω résulte localement de (nº 13, *c*) puis globalement de ce que $\overset{*}{\Omega}$ est compact. On pourrait aussi utiliser cette propriété de compacité pour traiter directement le cas de f quelconque à partir du cas de f bornée. Mais comme on introduira plus loin des points à l'infini et un Ω non relativement compact, on évite d'utiliser cette remarque pour donner dans le texte une démonstration qui s'étendra.

([34]) Il suffit de supposer f nulle en $\mathcal{A}$, quelconque dans $\mathcal{E}$ mais nulle sur K. Alors si $H_f^{\Omega_n - K}$ existe et converge uniformément localement vers une fonction harmonique dans $\mathcal{E}$, il en sera de même de $H_f^{\Omega_n}$. Voir [4, *g*] nº 9, dont les démonstrations basées, sur la méthode alternée, s'étendent à notre cas. Nous nous limitons ici à un résultat partiel qui suffira et est démontré plus facilement ici en s'inspirant d'une idée de Choquet (voir [4, *g*] note 19 en bas de page).

avec des points à l'infini) un domaine Ω_n croissant tendant vers $\mathcal{E}$, un compact K tel que $\mathcal{E}$ — K et Ω_n — K soient connexes, et une fonction $f \geqslant 0$, par exemple seulement borélienne à un changement près sur un ensemble polaire, égale à 0 sur K, enfin prolongée par 0 au point d'Alexandroff $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$. Alors si $H_f^{\Omega_n - K}$ existe et a une limite finie (donc harmonique), il en est de même de $H_f^{\Omega_n}$ (ces convergences ont lieu uniformément localement).

D'abord toute $H_f^{\Omega_{n_0}}$ existe. Il suffit de voir que si $f_p = \sup(f, p)$, $H_f^{\Omega_{n_0}}$ qui est croissante a une limite finie $(p \to \infty)$. Sinon en un point A fixé, $H_{f_p}^{\Omega_{n_0}}(A) = \lambda_p \to +\infty$ et une suite extraite de $\frac{1}{\lambda_p} H_{f_p}^{\Omega_{n_0}}$ convergerait vers une fonction harmonique $u > 0$. Or dans Ω_{n_0} — K,

$$\frac{1}{\lambda_p} H_{f_p}^{\Omega_{n_0}} = \frac{1}{\lambda_p} H_p^{\Omega_{n_0} - K} + H_{\varphi_p}^{\Omega_{n_0} - K}$$

où φ_p vaut $\frac{1}{\lambda_p} H_{f_p}^{\Omega_{n_0}}$ sur K et 0 ailleurs.

Le premier terme à droite tend vers 0, le second, pour la suite extraite, tend vers $H_\varphi^{\Omega_{n_0} - K}$ où φ vaut u sur K et 0 ailleurs. Ainsi dans Ω_{n_0} — K, u vaudrait $H_\varphi^{\Omega_{n_0} - K}$. Alors u serait majorée par sa borne supérieure sur K et atteindrait sa borne supérieure, donc serait constante > 0. Cela est incompatible avec son expression $H_\varphi^{\Omega_{n_0} - K}$ et le fait que $\overset{*}{K}$ est de mesure harmonique < 1 pour Ω_{n_0} — K (puisque Ω_{n_0} est un domaine de Green comme $\mathcal{E}$).

Voyons ensuite que $H_f^{\Omega_n}$ reste bornée en A. Sinon pour une suite extraite on aurait $H_f^{\Omega_{n_p}}(A) = \theta_{n_p} \to +\infty$. Par une nouvelle extraction, on introduirait $\frac{1}{\theta_{n_p^0}} H_f^{\Omega_{n_p^0}}$ qui convergerait (localement uniformément) dans $\mathcal{E}$. On obtient alors une contradiction à peu près comme précédemment parce que

$$\frac{1}{\theta_{n_p^0}} H_f^{\Omega_{n_p} - K} \to 0$$

et que $\{\mathcal{A}\}$ est de mesure harmonique > 0 pour $\mathcal{E}$ — K.

Enfin montrons que $H_f^{\Omega_n}$ converge. Sinon deux sous-suites

$H_f^{\Omega_{n'_p}}$, $H_f^{\Omega_{n''_p}}$ convergeraient uniformément localement vers u et v distinctes dans $\mathcal{E}$.

Dans $\Omega_{n_p} - K$, $H_f^{\Omega_{n'_p}} = H_f^{\Omega_{n'_p}-K} + H_{\psi_p}^{\Omega_{n'_p}-K}$

où ψ_p vaut $H_f^{\Omega_{n'_p}}$ sur K et 0 ailleurs. Par soustraction avec l'égalité analogue relative à n''_p, on voit à la limite que $u - v$ vaut dans $\mathcal{E} - K$ la solution du problème de Dirichlet pour des valeurs-frontière égale à $u - v$ sur $\overset{*}{K}$ et 0 ailleurs. On en déduit que $u - v$ est constante, puis nulle.

Théorème 9. — *Soit dans un espace de Green $\mathcal{E}$ sans points à l'infini un domaine Ω (pouvant être identique à $\mathcal{E}$). Soit f* (BLD) *dans $\mathcal{E}$ et une suite de domaines Ω_n relativement compacts dans Ω, croissants, tendant vers Ω. La solution $H_f^{\Omega_n}$ tend (uniformément localement) dans Ω vers une fonction harmonique* (BLD) *dans Ω (indépendante de la suite), notée U_f^{Ω}, et qui minimise $\|u - f\|_{\Omega}$; de plus le prolongement $[H_f^{\Omega_n}, f]_{\Omega_n}$ converge vers $[U_f^{\Omega}, f]_{\Omega}$ en norme dans $\mathcal{E}$. Enfin U_f^{Ω} est caractérisée comme la seule fonction harmonique indifférente (donc la seule harmonique* (BLD)) *dans Ω admettant comme radiale dans Ω (pour un pôle P ou tout pôle) la radiale de f dans Ω.*

Si f est sousharmonique dans Ω entier, U_f^{Ω} est la plus petite (et aussi la meilleure) *majorante harmonique.*

Si Ω est relativement compact dans $\mathcal{E}$, $U_f^{\Omega} = H_f^{\Omega}$; et pour toute suite de domaines ω_n tendant en croissant vers Ω, $H_f^{\omega_n} \to H_f^{\Omega}$ (uniformément localement tandis que $[H_f^{\omega_n}, f]$ converge en norme vers $[H_f^{\Omega}, f]_{\Omega}$.

Montrons d'abord la *convergence* de $H_f^{\Omega_n}$. On peut modifier f au voisinage d'un point P_0 en l'annulant dans un voisinage plus petit où l'on prendra un compact K non polaire et de complémentaire connexe (par exemple tel que son image dans $\mathcal{V}'_{P_0}$ soit l'adhérence d'un domaine circulaire ou sphérique).

Étudions d'abord $u_n = H_f^{\Omega_n - K}$ qui minimise $\|u - f\|_{\Omega_n - K}$.

Les dérivées premières sont uniformément bornées (sur l'image locale) au voisinage de tout point de $\Omega - K$, puisque $\|u_n\|_{\Omega_n - K} \leqslant \|f\|_{\Omega_n - K} \leqslant \|f\|$ (voir lemme 2). Considérons les dans $\mathcal{V}'_{P_0}$ sur une surface très régulière Σ (par exemple sphérique) limitant un domaine contenant K. Il y a une borne uniforme pour le module du gradient. On en déduit que l'oscillation de u_n sur Σ est bornée indépendamment de n.

Montrons alors que u_n est bornée sur Σ indépendamment de n. Sinon pour une suite extraite u_{n_p} la borne supérieure λ_{n_p} ou la borne inférieure tendrait vers $+\infty$ ou resp. vers $-\infty$. Par exemple $\lambda_{u_p} \rightarrow +\infty$; alors $\frac{u_{n_p}}{\lambda_{n_p}} \rightarrow 1$ uniformément sur Σ de sorte que $\frac{u_{n_p}}{\lambda_{n_p}}$ considérée dans le domaine entre K et Σ y tendrait vers la solution du problème de Dirichlet avec valeurs-frontière 0 sur $\overset{*}{K}$ et 1 sur Σ. Cette solution ayant une intégrale de Dirichlet non nulle, l'intégrale de Dirichlet de $\frac{u_{n_p}}{\lambda_{n_p}}$ resterait supérieure à un nombre > 0 et celle de u_{n_p} tendrait vers $+\infty$, contradiction cherchée.

Les fonctions u_n bornées sur Σ et également continues en tout point de $\Omega - K$ sont uniformément bornées sur tout compact de $\Omega - K$ (et même de $\Omega - \overset{\circ}{K}$).

Voyons alors que u_n *converge*. Sinon on pourrait extraire deux suites localement uniformément convergentes vers deux fonctions harmoniques différentes dans $\Omega - K$. D'après le lemme 9 ces fonctions devraient minimiser $\|u - f\|_{\Omega - K}$ d'où leur égalité à une constante près; comme on voit qu'elles doivent s'annuler aux points de $\overset{*}{K}$ réguliers pour $\Omega - K$, elles seraient égales.

Ainsi $H_f^{\Omega_n - K}$ converge (uniformément localement) dans $\Omega - K$ vers une fonction harmonique. C'est vrai aussi de $H_{f^+}^{\Omega_n - K}$ et $H_{f^-}^{\Omega_n - K}$. D'où par le lemme précédent la convergence de $H_{f^+}^{\Omega_n}$ et $H_{f^-}^{\Omega_n}$, donc la convergence cherchée de $H_f^{\Omega_n}$.

Mais alors d'après le lemme 9, puisque $u_n = H_f^{\Omega_n}$ minimise $\|u - f\|_\Omega$, la limite U_f^Ω minimise $\|u - f\|_\Omega$ et il y a convergence en norme de $[u_n, f]_{\Omega_n}$ vers $[U_f^\Omega, f]_\Omega$.

La convergence en norme et ponctuelle de $[u_n, f]_{\Omega_n}$ vers U_f^Ω dans Ω entraine que U_f ait pour tout pôle même radiale que f dans Ω (v. théorème 6); et cela, pour un seul pôle, suffit à caractériser U_f dans Ω, comme fonction harmonique (BLD) ou seulement indifférente (v. n° 19) ayant cette radiale.

De plus si f est sousharmonique dans Ω, $H_f^{\Omega_n}$ est à la fois meilleure et plus petite majorante harmonique dans Ω_n, donc tend vers la plus petite majorante harmonique dans Ω (qui est aussi la meilleure).

Enfin supposons Ω relativement compact dans $\mathcal{E}$. Comme $[U_f^\Omega, f]_\Omega$ est (BLD) dans $\mathcal{E}$, on a, par le théorème 8, l'identité $H_f^\Omega = U_f^\Omega$.

Si on introduit ω_n croissant quelconque tendant vers Ω, on formera ω'_n relativement compact dans Ω, tendant en croissant vers Ω, tel que

$$|H_f^{\omega_n}(A) - H_f^{\omega'_n}(A)| < \varepsilon_n \to 0 \quad \text{(A point fixe dans } \Omega).$$

D'où $H_f^{\omega_n}(A) \to H_f^\Omega(A)$. La convergence alors localement uniforme de $H_f^{\omega_n}$ vers H_f^Ω entraîne, comme pour Ω_n, la convergence en norme de $[H_f^{\omega_n}, f]_{\omega_n}$ vers $[H_f^\Omega, f]_\Omega$.

Remarque. — L'extension originale du problème de Dirichlet par Wiener suggère d'étudier la convergence possible de $H_\Phi^{\Omega_n}$ pour des fonctions Φ très générales dans Ω ; en l'absence d'une étude systématique, le cas du théorème 9, étendu plus loin et remontant à [4, *d*], est donc à souligner.

24. Application. — *Étude d'une fonction f(BLD) au voisinage d'un point à l'infini pour $\tau \geqslant 3$. Son prolongement normal en ce point.*

Soit f(BLD) dans un domaine de Green Ω ne contenant qu'un point à l'infini Q. Dans $\Omega - Q$ (35), f a même radiale (de pôle P fixé) que $U_f^{\Omega - Q}$; mais cette fonction a une limite finie K en Q (voir n° 14 § 3). Donc la radiale partielle de f relative au faisceau des lignes de Green convergeant vers Q (36) vaut la constante K, indépendante de P.

K est de plus *indépendant de* Ω, donc ne dépend de f qu'au voisinage de Q. Considérons en effet $\Omega_1 \subset \Omega_2$; soient $(\Omega_1)_n$ et $(\Omega_2)_n$ tendant en croissant vers Ω_1 et Ω_2 où ils sont relativement compacts, enfin ω_n un voisinage sphérique de Q se réduisant à Q. $H_f^{(\Omega_1)_n - \overline{\omega}_n}$ et $H_f^{(\Omega_2)_n - \overline{\omega}_n}$ diffèrent dans un voisinage ω de Q d'une fonction qui tend vers un $H_\varphi^{\omega - Q}$, où φ bornée vaut 0 en Q. Or cette fonction $H_\varphi^{\omega - Q}$ tend vers 0 en Q (régulier). Donc aussi $U_f^{\Omega_1 - Q} - U_f^{\Omega_2 - Q}$.

Un résultat frappant s'obtient en étudiant f sur l'image $\mathcal{V}'_Q$, en la prolongeant dans R^τ (sans l'altérer au voisingage de Q),

(35) On note par brièveté de la même manière un point et l'ensemble qu'il forme.

(36) Rappelons que presque toutes les lignes de Green régulières convergent (pour $G \to 0$) dans la topologie de l'espace déduit de Ω par compactification au moyen d'un point d'Alexandroff (Voir [5] n° 23).

grâce à la multiplication par un facteur C^∞ égal à 1 au voisinage de $\mathcal{R}_\tau$ et à 0 hors d'un autre voisinage de $\mathcal{R}_\tau$. Alors pour un pôle fixé dans R^τ, les lignes de Green sont les droites issues de P et les surfaces $G_P = \lambda$ sont les sphères de centre P. $U_f^{R^\tau}$ est constante; c'est la constante K. Ainsi f admet une convergence sphérique en moyenne vers K. De façon précise soit sur l'image locale une sphère S_r de centre fixe et rayon r; f est sur S_r une fonction $f_{r,\theta}$ de la direction du rayon, c'est-à-dire d'un point θ de la sphère-unité concentrique et $\int |f_{r,\theta} - K| d\sigma_\theta \to 0 (r \to \infty)$ ($d\sigma$ aire de la sphère-unité). Signalons une propriété plus précise établie entre temps dans l'article [9] qui paraît dans ce volume; c'est que f admet à l'infini une pseudolimite (égale à K).

Par convention f sera *prolongée en* Q par cette valeur finie K (*prolongement* dit *normal*).

Noter que K est aussi la limite de la moyenne sur S_r quand $\Omega \to \infty$. Ainsi pour une fonction sousharmonique au voisinage d'un point à l'infini Q (ce point inclus) et (BLD), le prolongement normal en Q de cette fonction (BLD) considérée hors Q est justement égal à la valeur en Q de la fonction sousharmonique donnée.

Le prolongement normal jouit des propriétés des radiales (V. nos 10 et 17). Par exemple, lorsque f_n (BLD) converge quasi-partout et en norme vers f, le prolongement normal de f_n en un point à l'infini tend vers celui de f.

Lorsque $\tau = 2$, en structure isométrique, on ne définit pas de prolongement aux points à l'infini (qui forment justement un ensemble polaire comme celui des autres points où une fonction (BLD) n'est pas définie).

25. Extension des théorèmes 8 et 9 dans le cas d'existence de points à l'infini. *Les énoncés restent valables avec la modification suivante : lorsque* $\tau \geqslant 3$, *on utilisera, pour définir les solutions de problème de Dirichlet, les prolongements normaux aux points à l'infini des fonctions* (BLD) *et dans le théorème* 8, *la seconde caractérisation de* H_f^Ω *devient :* H_f^Ω *est la seule fonction harmonique dans* Ω, *dont le prolongement par* f *soit* (BLD) *dans* $\mathcal{E}$ *et admette en tout point à l'infini* [37] *de* $\overset{*}{\Omega}$ *un prolongement normal égal à celui de* f.

[37] Il suffit de retenir ceux qui ne forment pas chacun un ensemble de mesure harmonique nulle pour Ω.

On se basera sur une

Extension du lemme 3. — On considère dans $\mathcal{E}$ un domaine très régulier Ω pouvant contenir des points à l'infini et dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, une fonction *bornée* (BLD) à dérivées secondes finies continues hors des points à l'infini. Alors H_f^Ω minimise $\|u-f\|_\Omega$, parmi les u harmoniques dans Ω.

On reprendra la fonction de type V, avec les mêmes hypothèses, locales hors des points à l'infini, au voisinage desquels elle est supposée (BLD) et comprise entre deux nombres >0. Voyons alors que si h est harmonique dans tout Ω et (BLD) dans Ω, ou a $(V, h)=0$.

On reprendra le raisonnement du n° 5 en isolant dans Ω_ε les points à l'infini Q_i par des cercles ou sphères. Il suffira de voir que $\int_\Sigma V\frac{dh}{dn}d\sigma \to 0$ pour une telle sphère ou cercle Σ (sur l'image $\mathcal{V}_{Q_i}$) de rayon $r\to\infty$. Cela résulte de ce que V est bornée et que $|\text{grad}\, h| < \alpha r^{-\tau}$ ($\alpha = c^{te}$, r assez grand).

Reprenons alors le théorème 8. Si la frontière de Ω ne contient pas de point à l'infini, l'extension du lemme 3 permet de généraliser tous les raisonnements en partant du cas f bornée. Supposons qu'il y ait des points à l'infini Q_i sur la frontière. D'abord si f est (BLD) bornée continue, avec des limites aux Q_i, l'approximation par Ω_n (tel qu'il n'y ait pas de points à l'infini sur la frontière $\overset{*}{\Omega}_n$) montre par le raisonnement initial du théorème 8 que H_f^Ω (définie en utilisant pour $\tau \geqslant 3$ le prolongement par continuité de f aux Q_i) minimise $\|u-f\|_\Omega$ et que $[H_f, f]_\Omega$ est (BLD).

Si f est (BLD) bornée, continue (hors des points à l'infini), on formera f_n du type précédent, tendant vers f quasi-partout et en norme, de la façon suivante : on remplace dans des voisinages ω_n^i de chaque point à l'infini Q_i de $\overset{*}{\Omega}$, f par $H_f^{\omega_n^i}$ (l'image de ω_n^i est dans R^τ de centre fixé et rayon $\to\infty$). Alors le prolongement par continuité de f_n en Q_i c.-à-d. $H_f^{\omega_n^i}(Q_i)$ tend si $\tau \geqslant 3$ vers le prolongement normal de f en Q_i. En utilisant ces prolongements on voit que $H_{f_n}^\Omega$ tend vers H_f^Ω et que $(H_f^\Omega, f]$ est (BLD).

On passe ensuite, comme au théorème 8, au cas de f (BLD) bornée quelconque, puis $\geqslant 0$, puis quelconque. D'autre part on verra pour les divers f successifs, et le plus général, que

$[H_f, f]_\Omega$ admet en chaque Q_i, si $\tau \geqslant 3$, un prolongement normal égal à celui de f.

Le résultat final d'unicité du théorème 8, modifié comme il a été dit plus haut, et le théorème 9 s'étendent sans difficulté.

Remarque. — L'artifice précédent, consistant à utiliser l'approximation f_n (obtenue en remplaçant f au voisinage des Q_i par $H_f^{\omega'_n}$) peut être appliqué à la remarque finale du n° 18 pour l'extension du lemme 8 lorsqu'il y a des points à l'infini sur l'ensemble noté $\overset{*}{\omega} \cap D_P^\lambda$. $H_f^{\omega_n}$ doit alors être pris, si $\tau \geqslant 3$, avec le prolongement normal de f. Nous allons d'ailleurs étendre ce lemme sous une forme qui fera partie du nouvel énoncé suivant du théorème 9.

26. Nouvelle extension des théorèmes 8 et 9.

Pour tout domaine d'un espace $\mathcal{E}$, on a rappelé (n° 8) qu'on sait étudier le problème de Dirichlet donc la mesure harmonique [5]. Alors un domaine partiel ω d'un domaine $\Omega \subset \mathcal{E}$, sera dit *harmoniquement intérieur à* Ω, si la frontière de ω dans Ω admet relativement à ω une mesure harmonique égale à 1, ce qui est indépendant du choix de $\mathcal{E}$ contenant Ω ([5] n° 14). Cela équivaut à dire que si l'on prend $\mathcal{E} = \Omega$, le point d'Alexandroff de $\mathcal{E}$ est extérieur à ω ou bien de mesure harmonique nulle relativement à ω.

Alors les théorèmes 8 et 9 s'étendent sous la forme déjà modifiée dans la première extension en remplaçant, dans les énoncés, les hypothèses pour certains domaines d'être relativement compacts dans d'autres domaines par celles qu'ils y soient harmoniquement intérieurs.

Pour le théorème 8 on introduira un domaine ω_n relativement compact dans $\mathcal{E}$ et par exemple très régulier tendant en croissant vers $\mathcal{E}$ et on considère dans $\omega_n \cup \Omega u_n$ domaine composant ω'_n contenant un point fixé de Ω. Supposons f (BLD) bornée. Comme la mesure harmonique de $\overset{*}{\omega}'_n \cup \Omega$ relative à ω'_n tend vers 0, $H_f^{\omega'_n} \to H_f^\Omega$ (uniformément localement) et d'après le lemme 9, H_f^Ω minimisera $\|u - f\|_\Omega$ et $[H_f^\Omega, f]$ est (BLD).

Passons à $f \geqslant 0$. On raisonnera à partir de $f_n = \inf(f, n)$ comme au n° 22; mais il y aurait une difficulté si $\mathcal{E} - \Omega$ ne contenait, outre les points à l'infini, qu'un ensemble polaire. On ôtera alors de Ω un petit compact sphérique d'où un domaine Ω_1 pour lequel $H_f^{\Omega_1}$ existera. D'après le lemme 11, H_f^{Ω} existe donc aussi. On achève alors comme au nº 22.

Quant au théorème 9, le plus simple est d'introduire Ω'_n relativement compact dans Ω_n, croissant, tendant vers Ω et tel que $\Omega'_n \subset \Omega_n$ et que $H_f^{\Omega'_n}(A) - H_f^{\Omega_n}(A) \to 0$ (Point fixé A). On voit donc la convergence de $H_f^{\Omega_n}$ vers U_f^{Ω} et le lemme 9 permet d'achever.

Définition. — La fonction U_f^{Ω} sera dite *fonction harmonique minimisante exacte de f dans Ω.* En tout point P elle vaut $U_f^{\Omega}(P) = \int \underset{\leftrightarrow}{f}_P \, dg$.

Cela résulte aussitôt du théorème 9 étendu en considérant les domaines D_P^λ $(G_P^\Omega > \lambda)$ qui sont harmoniquement intérieurs à Ω et $H_f^{D_P^\lambda}(P) = \int f_\lambda \, dg$, où l'on fera tendre λ vers 0.

VIII. — THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION ET FORME GÉNÉRALE DU PRINCIPE DE DIRICHLET DANS UN ESPACE DE GREEN. EXTENSION DU CAS CLASSIQUE AVEC FRONTIÈRE PARTIELLE LIBRE

27. Fonctions de radiale nulle et théorème de décomposition.
Pour f (BLD) dans un espace de Green $\mathcal{E}$, la condition d'avoir pour un pôle une radiale nulle est indépendante du pôle et signifie que la minimisante exacte U_f est nulle.

En effet U_f qui a même radiale que f pour tout pôle a donc une radiale nulle pour un pôle et par suite est nulle.

On pourra donc parler de fonctions ayant la même radiale sans préciser le pôle et on explicitera, grâce au chapitre précédent, le

Théoréme de décomposition canonique 10. — *Toute fonction* (BLD) *dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ est la somme.*

a) D'une fonction (BLD) « *harmonique dans $\mathcal{E}$* » [38] *et de même radiale donc unique, et qui est U_f et aussi la projection* [39] *de f sur le sous espace $H_h^{\mathcal{E}}$ des fonctions harmoniques.*

b) D'une fonction (BLD) *de radiale nulle.*

[38] C'est à dire prolongeable aux points à l'infini (où une fonction BLD n'est pas définie) de façon à devenir harmonique dans $\mathcal{E}$.

[39] C à d que sa classe d'équivalence est la projection de celle de f sur $\mathcal{H}_h^{\mathcal{E}}$.

Théoréme 11. — *Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}$, les classes d'équivalence des fonctions de radiale nulle et celles des fonctions harmoniques dans $\mathcal{E}$ forment deux sous espaces complets $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{*0}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{h}$ orthogonaux complémentaires et la décomposition canonique s'obtient, pour les classes d'équivalence, en projetant celle de f sur ces sous-espaces.*

Rappelons en effet que la projection f_0 de f sur un sous espace est caractérisée par l'orthogonalité de $f_0 - f$ avec les fonctions du sous-espace.

Donc les fonctions orthogonales à tous les $h \in \mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{h}$ sont les fonctions dont la projection sur $\mathcal{H}_h$ est à l'origine, c.-à-d. les fonctions de radiale nulle, à une équivalence près. Celles-ci forment donc bien un espace complet, comme il résulterait directement facilement du théorème 6 ou aussi du théorème suivant.

Théoréme 12. — *Les fonctions* (BLD) *de radiale nulle* ([40]) *sont toutes les limites possibles quasi-partout et en norme de suites de Cauchy de fonctions* (BLD) *nulles chacune hors d'un compact.*

Pour une telle suite, la limite quasi-partout a une radiale nulle d'après le théorème 6. Inversement soit f de radiale nulle et un domaine Ω_n relativement compact tendant en croissant vers $\mathcal{E}$. On sait que le prolongement $[H_f^{\Omega_n}, f]_{\Omega_n}$ converge en norme vers U_f qui est nulle. Donc $f - [H_f^{\Omega_n}, f]_{\Omega_n}$ converge en norme et quasi-partout vers f; elle est nulle quasi-partout hors Ω_n.

Remarque : Nous retrouvons donc, pour le cas plus général des espaces de Green et avec l'interprétation supplémentaire par les radiales, les variétés orthogonales et la décomposition de Deny ([8] puis [9]).

28. Le principe de Dirichlet. Théoréme 13. — *Parmi les fonctions* (BLD) *de même radiale qu'une fonction donnée* (BLD) f_0, *il existe une fonction unique (à un changement près sur un ensemble polaire) de norme minima. C'est la fonction « minimisante exacte »* U_{f_0}. *Sa classe d'équivalence est donc, dans $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}$, la projection de l'origine sur l'hyperplan $\mathcal{H}^{\mathcal{E}}_{*f_0}$ défini par les*

([40]) Et celles de radiale constante sont les limites en norme des suites de Cauchy considérées.

fonctions de même radiale que f_0, c.à.d déduit de $\underset{*}{\mathcal{H}}_0^{\mathcal{E}}$ par la translation f_0.

U_{f_0} ne dépend que de la radiale de f_0 et on sait que sa norme est majorée par la norme de f_0 donc de toute fonction f(BLD) de même radiale. On sait que la majoration est stricte si f n'est pas quasi-partout égale à une fonction harmonique dans $\mathcal{E}$, et que si f est harmonique, f vaut U_f. Doù le « principe de la norme minima », qui se traduit géométriquement par la projection indiquée dans l'énoncé.

Cet aspect géométrique, c'est-à-dire le fait que la projection A de l'origine sur $\underset{*}{\mathcal{H}}_{f_0}$ est aussi la projection de f_0 sur $\mathcal{H}_h$, résulte trivialement de ce que $\underset{*}{\mathcal{H}}_0$ et $\mathcal{H}_h$ sont des sous-espaces orthogonaux complémentaires. En effet la projection de tout point α de $\underset{*}{\mathcal{H}}_{f_0}$ sur $\mathcal{H}_h$ donne un point β de $\underset{*}{\mathcal{H}}_{f_0}$ (car $\beta - \alpha$ orthogonal à $\mathcal{H}_h$ est un élément de $\underset{*}{\mathcal{H}}_0$) et d'autre part cette projection diminue la norme si $\beta \neq \alpha$. Donc A reste invariant par projection sur $\mathcal{H}_h$, c. à d. est dans $\mathcal{H}_h$. Alors A et $f_0 - A$, de somme f_0 et appartenant à $\mathcal{H}_h$ et $\underset{*}{\mathcal{H}}_0$, sont nécessairement les projections de f_0 sur ces sous-espaces.

29. Extension du principe classique avec « frontière libre ».

THÉORÈME 14. — *Soit dans l'espace de Green $\mathcal{E}$, un ensemble α de lignes de Green régulières issues de P. On suppose α mesurable-dg et de mesure >0. Si f_0 (BLD) est donnée dans $\mathcal{E}$, il existe parmi les f(BLD) ayant même radiale partielle relative à α que f_0 une et une seule fonction (à un changement près sur un ensemble polaire) de norme minima et c'est une fonction « harmonique dans $\mathcal{E}$ ».*

Soit $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha, f_0}$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions (BLD) qui ont même radiale partielle sur α que f_0. On voit grâce au théorème 6 que $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha, 0}$ et la translatée $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha, f_0}$ sont complets. La projection de l'origine sur cet hyperplan est harmonique. Sinon une nouvelle projection sur $\mathcal{H}_h$ donnerait, à une équivalence près, une fonction de norme plus petite et de même radiale donc de même radiale partielle. La question est donc résolue, à une équivalence près, d'où le résultat.

Une étude plus poussée conduit à introduire le sous-espace orthogonal complémentaire de $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha, 0}$ soit H évidemment contenu dans $\mathcal{H}_h$. Le raisonnement de plus haut (fin n° 28) montre que la projection de l'origine sur $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha, f_0}$ est aussi la projection de f_0

sur H. Il resterait à caractériser H directement pour donner de l'intérêt à la décomposition de toute f par projection sur $\underset{*}{\mathcal{H}}_{\alpha,0}$ et H.

IX. — QUELQUES APPLICATIONS

30. Diverses formes du principe de Dirichlet. — Soit dans un espace de Green une famille particulière de fonctions (BLD), admettant une radiale commune ψ, ou, ce qui est équivalent, une même fonction minimisante exacte U_f. Alors si cette U_f commune fait partie de la famille, elle en sera l'unique fonction de norme minima (puisque c'est l'unique fonction de norme minima dans la famille plus vaste des (BLD) de radiale ψ).

APPLICATION. — *Le principe classique* (amélioré chap III). On considère dans le domaine euclidien borné Ω toutes les fonctions f (BLD) bornées à gradient continu (même, si l'on veut, par morceaux) prenant chacune à la frontière, presque partout en mesure harmonique, les valeurs d'une fonction donnée φ. On suppose qu'il existe au moins une telle fonction f.

Introduisons le domaine Ω_n relativement compact tendant en croissant vers Ω. $H_f^{\Omega_n} \to H_\varphi^\Omega$ d'après le lemme 5; comme d'autre part $H_f^{\Omega_n} \to U_f$, on conclut que U_f est indépendant de f [41] et vaut H_φ^Ω, qui d'ailleurs satisfait aux conditions-frontière des f [42].

On conclut que la fonction commune U_f est dans la famille des f, l'unique fonction de norme minima.

Si les points-frontière sont tous réguliers on peut supprimer la restriction du presque-partout et on obtient par un raisonnement simplifié le principe classique.

APPLICATION PLUS GÉNÉRALE. — Considérons dans l'espace de Green $\mathcal{E}$ une métrique donnant par complétion l'espace $\widehat{\mathcal{E}}$ et la frontière $\widehat{\mathcal{E}}-\mathcal{E}$. Supposons que pour *certains* points-frontière les voisinages donnent par intersection avec $\mathcal{E}$ des filtres $\mathcal{F}$

[41] La convergence de presque toutes les lignes de Green régulières permet de voir directement que toutes les f ont même radiale.

[42] Car H_φ tend vers φ (Q) en tout point frontière régulier où f tend vers φ (Q), (parce qu'en un tel point φ est continue sur la frontière diminuée d'un ensemble de mesure harmonique nulle); et cette propriété $H_\varphi \to \varphi$ (Q) a donc lieu presque partout en mesure harmonique. On peut aussi conclure en étudiant $H_f^{\Omega_n}$.

satisfaisant aux conditions axiomatiques fondamentales du problème de Dirichlet selon [5] n° 27. Pour la mesure harmonique correspondante, les autres points-frontière forment un ensemble de mesure nulle.

Soit alors dans $\mathcal{E}$ une famille non vide formée de toutes les fonctions f (BLD) dont chacune soit bornée (au moins hors d'un compact de $\mathcal{E}$) et qui satisfassent :

1° à des conditions locales intérieures vérifiées par les fonctions harmoniques.

2° à la condition que sur la frontière, presque-partout en mesure harmonique, f (prise là où elle est définie) admette une limite égale à une fonction φ donnée (choisie par exemple à l'aide des limites d'une fonction (BLD) particulière), nécessairement mesurable et bornée en mesure harmonique.

Alors U_f est la même pour toutes les fonctions f, vaut $H_\varphi^{\mathcal{E}}$ et c'est la seule fonction f de norme minima.

En effet introduisons un domaine Ω_n relativement compact croissant tendant vers $\mathcal{E}$, par exemple tel que $\overset{*}{\Omega}_n$ ne contienne pas de points à l'infini. La limite de $H_f^{\Omega_n}$ dont on sait qu'elle existe et vaut U_f tend vers $\varphi(Q)$ en tout point frontière Q où $f \to \varphi(Q)$, d'après la formule 22 de [5]; il s'ensuit qu'elle vaut $H_\varphi^{\mathcal{E}}$ et qu'elle fait partie de la famille considérée des f([43]).

On retrouve le cas particulier précédent avec la métrique euclidienne en prenant comme filtres $\mathcal{F}$ les traces sur Ω des voisinages des points réguliers. L'extension est immédiate à un domaine greenien Ω relativement compact d'un espace $\mathcal{E}$, en prenant une métrique dont la structure uniforme est celle de l'adhérence $\overline{\Omega}$.

Un autre cas particulier consiste à prendre ce dernier Ω relativement compact et la structure uniforme *ramifiée* qu'on y définit à partir de celle de $\overline{\Omega}$ (comme dans le cas particulier de $\overline{R}^\tau$; voir [4] *b*); on choisit une métrique correspondante et on prend pour $\mathcal{F}$ les traces sur Ω des filtres de voisinages

([43]) En effet lim $H_f^{\Omega_n}$ tend vers $\varphi(Q)$ presque-partout à la frontière; et cette propriété, qui caractérise une fonction harmonique bornée est satisfaite par $H_\varphi^{\mathcal{E}}$. On peut voir que H_φ satisfait à cette propriété par le raisonnement de la note 42 grâce à la formule 21 de [5], ou montrer comme il suit, qu'une fonction harmonique bornée satisfaisant à cette propriété vaut H_φ : il suffit d'introduire v surharmonique > 0 tendant vers $+\infty$ aux points-frontière où u ne tend pas vers $\varphi(Q)$ et remarquer que $u \pm \lambda v$ encadrent H_φ ($\lambda > 0$ quelconque).

ramifiés des points-frontière ramifiés réguliers (càd des points où $G \to 0$ ou encore tels que les traces précédentes soient des filtres réguliers). On montre en effet que les conditions axiomatiques sont satisfaites ([44]).

31. Un théorème d'existence pour une surface de Riemann hyperbolique à connexion finie.

On sait que dans un cercle de rayon R il existe des fonctions harmoniques dont les limites radiales existent presque partout et sont presque partout égales à une fonction donnée $\varphi(\theta)$ sommable par rapport à l'angle polaire θ. Telle est l'intégrale de Poisson I_φ pour cette fonction φ.

Or φ est aux notations près, la radiale de I_φ pour un pôle au centre. C'est évident si φ est bornée. On traite le cas de $\varphi \geqslant 0$ grâce à un passage à la limite par croissance sur $\inf(\varphi, n)$ (voir n° 19) d'où le cas général. D'autre part il n'existe pour φ sommable qu'une fonction harmonique l'admettant comme radiale (V. n° 19).

On songera à des extensions dans un espace de Green c.-à-d. à chercher une fonction harmonique admettant comme radiale pour un pôle P, une fonction donnée sommable-*dg* sur l'ensemble des lignes de Green issues de P. On sait que pour les fonctions harmoniques *indifférentes*, il y a au plus une solution, mais pas nécessairement une solution ([4] *g*).

THÉORÈME 15. — *Dans un espace de Green à 2 dimensions dont grad* G_P *pour un pôle* P *n'a qu'un nombre fini de zéros, par exemple sur une surface de Riemann hyperbolique à connexion finie* ([45]), *il existe une fonction harmonique indifférente unique qui admet comme radiale de pôle* P *une fonction* $\varphi(l)$ *donnée sommable-dg.*

Le cas de la structure isométrique se ramène aussitôt à

([44]) La condition axiomatique A de [5] n° 27 se montre avec les lignes de Green ou directement comme dans l'espace R^τ ([4] *b*). La condition B dérive de la remarque du n° 33 de [5] ce qui nous ramène à l'étude connue dans $\overline{R}^\tau$.

([45]) Pour voir que dans ce cas la fonction de Green de pôle quelconque n'a qu'un nombre fini de zéros, utilisons, selon une remarque de Choquet et Parreau, la représentation conforme d'une telle surface de Riemann sur un domaine relativement compact Ω d'une autre surface de Riemann avec une frontière formée d'un nombre fini de points ou courbes simples fermées analytiques. Le prolongement harmonique de la fonction de Green de Ω à travers la frontière montre que les zéros du gradient sont isolés sur le compact $\overline{\Omega}$, donc en nombre fini. D'où cette dernière propriété pour la fonction de Green initiale.

celui de la structure conforme. Supposons donc qu'il n'y ait pas de points à l'infini.

Soit ω l'ensemble des points des lignes de Green issues de P; c'est un domaine dont le complémentaire est formé de quelques lignes de Green non issues de P, mais issues de points où le gradient G est nul [46].

Introduisons une petite courbe de niveau $\Sigma_P^{\lambda_0}(G_P = \lambda_0)$ autour du pôle et sur elle une fonction $\varphi(s)$ de l'arc, avec dérivée première finie continue et de plus nulle au voisinage des points « exceptionnels » (en nombre fini) d'où partent des lignes de Green aboutissant (pour G décroissant) à des points où $\operatorname{grad} G = 0$. Considérons dans $\omega - D_P^{\lambda}$ la fonction égale à une constante sur chaque ligne de Green issue de P et égale à ψ sur $\Sigma_P^{\lambda_0}$. Son gradient est fini continu et un calcul élémentaire (qui ne s'étendrait pas à l'espace) donne pour l'intégrale de Dirichlet $\lambda_0 \int_{\Sigma_P^{\lambda_0}} \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 \frac{ds}{\frac{dG}{dn}}$ (dérivée normale de G le long de Σ_P^{λ} notée $\left.\frac{dG}{dn}\right)$ et cela est fini.

La fonction considérée étant nulle au voisinage des points des lignes de Green non issues de P sera prolongée par 0 sur ces lignes, ce qui donne une fonction continue (BLD) dans $\mathcal{E} - \overline{D}_P^{\lambda_0}$. Il est aisé de la prolonger dans $\mathcal{E}$ selon une fonction (BLD). Si Φ est une telle fonction, la minimisante exacte U_Φ (fonction harmonique (BLD) donc indifférente) admet même radiale que Φ; cette radiale est évidemment la fonction de la ligne l égale à $\psi(s)$ au point s de $\Sigma_P^{\lambda_0}$ sur l.

Notons φ_s la fonction sur $\Sigma_P^{\lambda_0}$ correspondant à une fonction $\varphi(l)$ de la ligne de Green l issue de P. On traitera maintenant le théorème d'existence pour une $\varphi(l)$ dont la φ_s est pourvue de dérivée finie continue : par différence, on se ramène au cas $\varphi \geqslant 0$ et on traite ce cas au moyen d'une suite croissante de fonctions de s nulles au voisinage des points exceptionnels et tendant vers φ_s hors de ces points. On passe à φ finie continue quelconque au moyen d'une approximation uniforme par des fonctions du type précédent. Enfin en utilisant successivement

[46] Dans le voisinage d'un tel point A, quelques lignes de Green partent de A (pour G croissant ou décroissant) avec une tangente en A. Les autres lignes de Green sont localement à distance > 0 de A.

deux suites monotones, on arrivera au cas de φ sommable-dg quelconque.

La démonstration s'appliquerait d'ailleurs à des espaces à connexion infinie avec des restrictions sur la disposition des points où grad $G = 0$, ou bien des lignes de Green non issues de P.

Cette question suggère d'examiner diverses extensions du problème de Dirichlet à l'aide des lignes de Green et des radiales; on renvoie là-dessus à ([4], g).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, Das Dirichletsche Prinzip (*Math. Annalen*, 120, p. 36).

[2] N. ARONSZAJN et K. T. SMITH, Functional spaces and functional completion (Report 10 (1954), about « Studies on eigenvalues problems », written under Contract with the office of Naval Research, and improving the Report 7 of N. Aronszajn with the same title (1952). Kansas University, Lawrence, USA).

[3] BOCHNER, Dirichlet problem for domains bounded by spheres (*Annals of Math. Studies*, n° 25, Princeton, 1950).

[4] BRELOT *a*) Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques (*Annales Ecole Norm. Sup.*, 61, 1944, p. 301-332).

b) Le problème de Dirichlet ramifié (*Annales Univ. Grenoble*, 22, 1946, p. 167-200).

c) Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier (*Annales Inst. Fourier*, 1, 1949, p. 121-156).

d) Principe et problème de Dirichlet dans les espaces de Green (*C. R. Ac. Sc*, 235, 1952, p. 598).

e) Lignes de Green et problème de Dirichlet (*C. R.*, 235, 1952 p. 1595).

f) La théorie moderne du potentiel (*Annales Inst. Fourier*, 4, année 52, paru en 54, p. 113-140).

g) Majorantes harmoniques et principe du maximum (*Archiv. der Math.*, 5, 1954, p. 429-440).

[5] BRELOT et CHOQUET, Espaces et lignes de Green (*Annales Institut Fourier*, 3, année 1951, paru fin 52, p. 119-263).

[6] CALKIN et MORREY, Functions of several variables and absolute continuity (Part. I by Calkin, part II by Morrey, *Duke Math. J.*, 6, 1940, p. 170-215).

[7] COURANT, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces (*Pure and applied math.*, 3, *Interscience publishers*, New York 1950).

[8] DENY, Les potentiels d'énergie finie (*Acta math.*, 82, 1950 p. 107-183).

[9] DENY et LIONS, Les espaces du type de Beppo Levi (*Annales Inst. Fourier*, 5, années 53-54 ce vol. p. 305-370).

[10] NIKODYM, *a*) Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet (*Fundamenta* Math., 21, 1933, p. 129-150).

b) Sur un théorème de M. Zaremba concernant les fonctions harmoniques (*J. de math.*, 12, 1933, p. 95-108).

c) Sur le principe du minimum (*Mathematica*, 9, 1935 p. 110-128).

[11] SCHAUDER, Potential theoretische Untersuchungen (*Math. Zeitsch.*, 33, 1931, p. 602-640).

[12] B. von Sz. NAGY, Spektraldarstellungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes (*Ergebn. der Math.*, 5, 1942).

[13] ZAREMBA, Sur un problème toujours possible comprenant à titre de cas particuliers le problème de Dirichlet et celui de Neumann (*J. math.*, 6, 1927, p. 127-163).