

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS CHENIOT

Un théorème du type de Lefschetz

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 1 (1975), p. 195-213

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_195_0

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DU TYPE DE LEFSCHETZ

par D. CHENIOT

On va démontrer le théorème du type de Lefschetz suivant :

THEOREME. — Soit $H \subset \mathbf{P}^{n+1}$ un ensemble algébrique propre de l'espace projectif complexe de dimension $n + 1$. Alors pour tout hyperplan projectif \mathcal{L} d'un ouvert de Zariski non vide de l'espace des hyperplans projectifs de \mathbf{P}^{n+1} (plus précisément pour \mathcal{L} transverse à toutes les strates d'une stratification de Whitney de H) l'inclusion $\mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H \rightarrow \mathbf{P}^{n+1} - H$ induit des homomorphismes :

$$\pi_k(\mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H, e) \rightarrow \pi_k(\mathbf{P}^{n+1} - H, e)$$

avec $e \in \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H$.

bijectifs pour $k < n$

surjectif pour $k = n$.

Dans le cas où H est une hypersurface, ce théorème a été démontré par H. Hamm et Lê Dũng Tráng (cf. [4]) en utilisant la théorie de Morse. O. Zariski en a donné dans ce cas une esquisse de démonstration pour ce qui est du groupe fondamental (cf. [8]). Cette démonstration est complète quand on dispose d'un théorème d'isotopie : celui de Thom-Mather (cf. [2]) ou celui de A.N. Varchenko (cf. [5]).

Ici on démontre ce théorème dans le cas où la codimension de H est au moins 2. La démonstration se fait par récurrence simultanée pour les trois assertions suivantes :

- Le théorème dans le cas $\text{cod } H \geq 2$
- $\pi_1(\mathbf{P}^{n+1} - H, e) = 1$ dans le cas $\text{cod } H \geq 2$
- La proposition suivante pour $\text{cod } H \geq 1$:

PROPOSITION 0. — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème on a*

$$H_k(\mathbf{P}^{n+1} - H, \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H) = 0 \quad \text{pour } k \leq n.$$

Les trois assertions sont trivialement vraies pour $n = 0$. Supposons maintenant qu'elles soient vraies pour $n + 1$ (hypothèse de récurrence). Les propositions 1 à 8 permettront de montrer qu'elles sont alors vraies pour $n + 2$.

Dans [2] les faits suivants sont établis, toutes les démonstrations étant valables pour $\text{cod } H \geq 1$, bien que les énoncés s'y limitent à $\text{cod } H = 1$.

PROPOSITION 1. — *Soit Σ une stratification de Whitney de H (cf. [7]). Il existe un ouvert de Zariski non vide de l'espace des hyperplans de \mathbf{P}^{n+2} dont tout élément est transverse à toutes les strates de Σ . Soit \mathcal{L} un tel élément. Il existe un n -plan A de \mathbf{P}^{n+2} contenu dans \mathcal{L} et transverse à toutes les strates de Σ . Tous les hyperplans issus de A , sauf un nombre fini $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_l$ sont transverses à toutes les strates de Σ .*

Comme dans [2] on fait maintenant la construction suivante :

On considère l'éclatement

$$\varphi : \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} \rightarrow \mathbf{P}^{n+2}$$

de \mathbf{P}^{n+2} le long de A et l'application projective

$$p : \mathbf{P}^{n+2} - A \rightarrow \mathbf{P}^1$$

qui à tout hyperplan passant par A fait correspondre sa direction. On a une submersion analytique

$$\tilde{p} : \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} \rightarrow \mathbf{P}^1$$

telle que $\tilde{p} | \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \varphi^{-1}(A) = p \circ \varphi$

On choisit les notations suivantes :

$$\tilde{A} = \varphi^{-1}(A) ; \tilde{H} = \varphi^{-1}(H) ;$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ transformé strict de \mathcal{L} ; $\tilde{\mathfrak{S}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{S}}_l$ transformés stricts de $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_l$;
 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{S}_l$; $\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{\mathfrak{S}}_1 \cup \dots \cup \tilde{\mathfrak{S}}_l$;

$$\begin{aligned}
 X &= \mathbf{P}^{n+2} - H ; Y = A - A \cap H ; L = \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H ; \\
 S_i &= \mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_i \cap H \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l ; \\
 \tilde{X} &= \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \tilde{H} ; \tilde{Y} = \tilde{A} - \tilde{A} \cap \tilde{H} ; \bar{L} = \bar{\mathcal{L}} - \bar{\mathcal{L}} \cap \tilde{H} ; \\
 \bar{S}_i &= \bar{\mathfrak{S}}_i - \bar{\mathfrak{S}}_i \cap \tilde{H} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l ; \\
 \bar{Y} &= \bar{L} \cap \tilde{Y} ; \bar{Y}_i = \bar{S}_i \cap \tilde{Y} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l ; S = S_1 \cup \dots \cup S_l ; \\
 \tilde{e} &\text{ un point de } \bar{Y} ; e = \varphi(\tilde{e}) ; \quad \bar{S} = \bar{S}_1 \cup \dots \cup \bar{S}_l \\
 \lambda_i &= \tilde{p}(\mathfrak{S}_i) \text{ (qui est r\u00e9duit \u00e0 un point) pour } 1 \leq i \leq l ; \\
 \mathcal{B} &= \mathbf{P}^1 - \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}.
 \end{aligned}$$

On note que :

- $\tilde{\mathbf{P}}^{n+2} \subset \mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{P}^1$ est une vari\u00e9t\u00e9 analytique compacte de dimension $n + 2$;
- $\tilde{A} = A \times \mathbf{P}^1$ est une sous-vari\u00e9t\u00e9 de codimension 1 ;
- $\tilde{Y} = Y \times \mathbf{P}^1$ est topologiquement le produit de Y par une 2-sph\u00e8re orient\u00e9e ;
- φ induit des isomorphismes analytiques :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \tilde{A} &\xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n+2} - A \\
 \tilde{X} - \tilde{Y} &\xrightarrow{\sim} X - Y \\
 \bar{\mathcal{L}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \\
 \bar{\mathfrak{S}}_i &\xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l ; \\
 \bar{L} &\xrightarrow{\sim} L \\
 \bar{S}_i &\xrightarrow{\sim} S_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l ; \\
 \bar{Y} &\xrightarrow{\sim} Y \\
 \bar{Y}_i &\xrightarrow{\sim} Y \quad \text{pour } 1 \leq i \leq l .
 \end{aligned}$$

Alors comme dans [2] on obtient :

PROPOSITION 2. - $\tilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \bar{\mathfrak{S}}$ est un fibr\u00e9 localement trivial de base \mathcal{B} , de projection $\tilde{p} | \tilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \bar{\mathfrak{S}}$, de fibre type \mathcal{L} . On a les trois

sous-fibrés $\tilde{H} - \tilde{H} \cap \tilde{S}$, $\tilde{X} - \tilde{S}$, $\tilde{Y} - \tilde{Y} \cap \tilde{S}$ de fibres types respectives $\tilde{\mathcal{L}} \cap \tilde{H}$, \tilde{L} et \tilde{Y} .

PROPOSITION 3. — On a $H_k(S_i, Y) = 0$ pour $k \leq n$ et $1 \leq i \leq l$ et $\pi_k(S_i, Y, e) = 1$ pour $k \leq n$ et $1 \leq i \leq l$ dans le cas où $\text{cod } H \geq 2$.

Démonstration. — On va munir $\mathfrak{S}_i \cap H$ d'une stratification de Whitney Σ_1 aux strates de laquelle A est transverse dans \mathcal{L} . La proposition résultera alors de l'hypothèse d'induction. Nous montrons d'abord que pour tout $M \in \Sigma$, l'ensemble des points de $M \cap \mathfrak{S}_i$ où \mathfrak{S}_i n'est pas transverse à M est un ensemble analytique local de \mathfrak{S}_i dont l'adhérence est algébrique. Pour cela on remarque que \bar{M} est algébrique ainsi que $\bar{M} - M$ et donc que M est un ouvert de Zariski de \bar{M} contenu dans la partie lisse de \bar{M} .

On considère alors l'ensemble $B \subset \mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{G}^{n+2,r}$ ($\mathbf{G}^{n+2,r}$ est la grassmannienne des r -plans de \mathbf{P}^{n+2}) constitué par les couples (x, T) où $x \in M$ et T est la variété projective tangente à M en x . Clairement B est un ensemble analytique local. On montre comme dans [2], lemme 1.2.2, qu'il est la trace d'un ensemble algébrique de $\bar{M} \times \mathbf{G}^{n+2,r}$ sur l'ouvert de Zariski $M \times \mathbf{G}^{n+2,r}$. Il en résulte que \bar{B} est algébrique (cf. [7] lemme 3.9). Ensuite on considère le sous-ensemble C de $\mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \mathbf{P}^{n+2}$ constitué par les triplets (x, T, V) où $(x, T) \in B$ et $T \subset V$, \mathbf{P}^{n+2} étant identifié à l'espace des hyperplans de \mathbf{P}^{n+2} . C'est un ensemble analytique local et \bar{C} est algébrique puisque c'est l'ensemble des (x, T, V) où $(x, T) \in \bar{B}$ et $T \subset V$. Il en est de même de $\bar{C} - C = \bar{C} \cap ((\bar{M} - M) \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \mathbf{P}^{n+2})$. On obtient encore que $C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})$ est un ensemble analytique local, ouvert de Zariski de $\bar{C} \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})$ d'où l'algébricité de

$$\overline{C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})}$$

Maintenant l'ensemble des points de $\mathfrak{S}_i \cap M$ où \mathfrak{S}_i n'est pas transverse à M est la projection sur le premier facteur de

$$C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\}) .$$

Comme $\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\}$ est compact, c'est un ensemble analytique local de \mathfrak{S}_i dont l'adhérence est la projection de

$$\overline{C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})} ,$$

donc est algébrique.

Ainsi l'ensemble D des points de \mathfrak{S}_i où \mathfrak{S}_i n'est pas transverse à toutes les strates de Σ est un ensemble analytique local et \bar{D} est algébrique. Mais A est transverse à toutes les strates de Σ et, par suite, il existe un ouvert U de \mathfrak{S}_i contenant A où \mathfrak{S}_i est transverse à toutes les strates de Σ . On a donc $D \subset \mathfrak{S}_i - U$ et $\bar{D} \subset \mathfrak{S}_i - U$. D'où $\bar{D} \cap A = \emptyset$ et $\dim \bar{D} = 0$. Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de points c_1, \dots, c_k de \mathfrak{S}_i où \mathfrak{S}_i n'est pas transverse à toutes les strates de Σ .

D'après [2], lemme 2.2.2, $\Sigma | (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$ constitué par les $M \cap (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$ pour $M \in \Sigma$ est une stratification de $H \cap (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$. On considère maintenant la partition Σ_1 de $\mathfrak{S}_i \cap H$ dont les éléments sont les $\{c_i\}$ pour $1 \leq i \leq k$ et les strates de $\Sigma | (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$. Il reste à montrer que Σ_1 est une stratification de Whitney.

Pour cela il suffit de montrer que c'est une partition en sous-variétés analytiques pures de \mathfrak{S}_i vérifiant la propriété de frontière et la propriété b) de Whitney (cf. [2] paragraphe 4 de l'introduction). Comme $\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\}$ est un ouvert de \mathfrak{S}_i , les éléments de Σ_1 sont des sous-variétés analytiques pures de \mathfrak{S}_i . Soit maintenant $M \in \Sigma_1$.

Alors $\bar{M} = (\bar{M} \cap (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})) \cup (\bar{M} \cap \{c_1, \dots, c_k\})$. Le second terme est clairement une union d'éléments de Σ_1 et le premier est l'adhérence de $M - \{c_1, \dots, c_k\}$ dans $\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\}$ donc est une union de strates de $\Sigma | (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$ qui sont éléments de Σ_1 . Ainsi Σ_1 a la propriété de frontière. Soit enfin $N \in \Sigma_1$ avec $N \subset \bar{M}$ et $(x_n), (y_n)$ deux suites de M et N respectivement convergeant vers $y \in N$ et telles que la variété projective tangente à M en x_n tende vers $T \in \mathbf{G}^{n+1, r}$ où $r = \dim M$ et que la droite portée par x_n et y_n tende vers $u \in \mathbf{P}^{n+1}$. Alors ou bien $y \in \mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\}$ et la propriété b) de Whitney pour $\Sigma | (\mathfrak{S}_i - \{c_1, \dots, c_k\})$ implique $u \subset T$, ou bien $N = \{c_i\}$ pour un certain i et on a encore $u \subset T$ d'après [6] 3.1. Ainsi Σ_1 est une stratification de Whitney de $\mathfrak{S}_i \cap H$.

Maintenant A est transverse dans \mathfrak{S}_i à toutes les strates de Σ_1 car les c_i , $1 \leq i \leq k$, n'appartiennent pas à A . On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction à $\mathfrak{S}_i \cap H$, Σ_1 et A et obtenir ainsi la proposition 3.

PROPOSITION 4. — On a pour tout k la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{k-1}(Y) \xrightarrow{\sigma_k} H_{k+1}(\tilde{X}) \xrightarrow{\epsilon_{k+1}} H_{k+1}(X) \rightarrow 0$$

où ϵ_{k+1} est induit par φ et où $(-1)^{k-1} \sigma_k$ est le composé de l'homomorphisme $H_{k+1}(\tilde{Y}) \rightarrow H_{k+1}(\tilde{X})$ induit par l'inclusion et de l'homomorphisme :

$$\beta_k : H_{k-1}(Y) \rightarrow H_{k+1}(\tilde{Y})$$

ainsi défini : si z est un $(k-1)$ -cycle de Y ,

$$\beta_k([z]) = [z \times P^1] .$$

Démonstration. — Elle est identique à celle de [1] § 4 théorème 2, une fois démontré le

LEMME 1. — Pour tout k , ϵ_k possède une section qui est un homomorphisme.

Démonstration du lemme. — Comme X et \tilde{X} sont des variétés analytiques complexes, elles ont une orientation canonique. Pour tout compact K de X (resp. \tilde{K} de \tilde{X}) soit ζ_K (resp. $\tilde{\zeta}_{\tilde{K}}$) le générateur de $H_{2n+4}(X, X-K)$ (resp. $H_{2n+4}(\tilde{X}, \tilde{X}-\tilde{K})$) compatible avec cette orientation. L'application φ étant propre, $\varphi^{-1}(K)$ est compact pour tout $K \subset X$. Nous définissons :

$$D_k^K : H^{2n+4-k}(X, X-K) \rightarrow H_k(X)$$

$$\gamma \mapsto \zeta_K \cap \gamma$$

$$\tilde{D}_k^K : H^{2n+4-k}(\tilde{X}, \tilde{X}-\varphi^{-1}(K)) \rightarrow H_k(\tilde{X})$$

$$\gamma \mapsto \tilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)}$$

où \cap est le cap-produit ; soit

$$\bar{\epsilon}_{2n+4-k}^K : H^{2n+4-k}(X, X-K) \rightarrow H^{2n+4-k}(\tilde{X}, \tilde{X}-\varphi^{-1}(K))$$

l'homomorphisme induit par φ .

On a maintenant la formule de changement de variable

$$\epsilon_k(\tilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)} \cap \bar{\epsilon}_{2n+4-k}^K(\gamma)) = \epsilon_{2n+4}(\tilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)}) \cap \gamma$$

pour tout $\gamma \in H^{2n+4-k}(X, X-K)$. Or il est clair que si $K \subset \tilde{X} - \tilde{Y}$ on a $\epsilon_{2n+4}(\tilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)}) = \zeta_K$, c'est-à-dire que le degré au-dessus de K de $\varphi|_{\tilde{X}}$ est 1. Mais ce degré ne dépend pas du compact $K \subset \tilde{X}$ (cf. [3] VIII.4.5). Donc pour tout compact $K \subset \tilde{X}$ on a

$$\epsilon_k \circ \tilde{D}_k^K \circ \bar{\epsilon}_{2n+4-k}^K = D_k^K .$$

En passant à la limite inductive sur K on obtient

$$\epsilon_k \circ \tilde{D}_k \circ \bar{\epsilon}_{2n+4-k} = D_k$$

où

$$\bar{\epsilon}_{2n+4-k} : H_c^{2n+4-k}(X) \rightarrow H_c^{2n+4-k}(\tilde{X})$$

est l'homomorphisme des groupes de cohomologie à supports compacts induit par l'application propre $\varphi | \tilde{X}$ et où

$$D_k : H_c^{2n+4-k}(X) \xrightarrow{\sim} H_k(X)$$

$$\tilde{D}_k : H_c^{2n+4-k}(\tilde{X}) \xrightarrow{\sim} H_k(\tilde{X})$$

sont les isomorphismes de Poincaré. On a donc

$$\epsilon_k \circ (\tilde{D}_k \circ \bar{\epsilon}_{2n+4-k} \circ D_k^{-1}) = 1_{H_k(X)} ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1 et de la proposition 4.

PROPOSITION 5. — On a les diagrammes commutatifs avec colonne de droite exacte :

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_{k+1}(\tilde{X} - \bar{S}) \\
 & & \downarrow i_{k+1} \\
 H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_{k+1}(\tilde{X}) \\
 \downarrow \delta_k & & \downarrow u_k \\
 \oplus^l H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\tau_k} & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) \\
 \downarrow c_k & & \downarrow g_k \\
 H_k(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{h_k} & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) \\
 & & \downarrow i_k \\
 & & H_k(\tilde{X})
 \end{array}$$

où σ_k est comme dans la proposition 4, i_k et h_k sont induits par les inclusions, δ_k est l'application diagonale, τ_k est induit par les inclusions $Y \hookrightarrow S_i$ composées par les isomorphismes $S_i \rightarrow \bar{S}_i$ réciproques de ceux induits par φ et c_k est définie par :

$$c_k \left(\bigoplus_{i=1}^l [z_i] \right) = \sum_{i=1}^l [e_i \times z_i]$$

où pour tout i , $1 \leq i \leq l$, e_i est un 1-cycle de \mathcal{B} d'indice 1 par rapport à λ_i et 0 par rapport à λ_j pour $j \neq i$.

Démonstration. – Comme pour chaque i , $1 \leq i \leq l$, \bar{S}_i et \tilde{Y} sont des sous-variétés fermées transverses de \tilde{X} , on peut trouver des voisinages tubulaires T_i des \bar{S}_i dans \tilde{X} qui au-dessus de Y_i coïncident avec $Y \times D_i$ où D_i est isomorphe à un disque. On peut ajuster les rayons tubulaires de manière à ce que les T_i soient disjoints et poser $e_i = \partial D_i$.

Alors les classes d'homologie $[e_i]$ engendrent $H_1(\mathcal{B})$ et sont telles que $\sum_{i=1}^l [e_i] = 0$.

On a les suites exactes d'homologie reliées par l'homomorphisme induit par les inclusions :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(\tilde{X}) & \xrightarrow{\bar{t}_k} & H_{k+1}(\tilde{X}, \tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{a}_k} & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{X}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow h_k & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(\tilde{Y}) & \xrightarrow{\bar{k}_k} & H_{k+1}(\tilde{Y}, \tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{b}_k} & H_k(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{i}_k} & H_k(\tilde{Y}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Si on excise $\tilde{X} - \bigcup_{i=1}^l T_i$ on obtient les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i=1}^l H_{k+1}(T_i, \partial T_i) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1} \left(\bigcup_{i=1}^l T_i, \bigcup_{i=1}^l (T_i - \bar{S}_i) \right) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1}(\tilde{X}, \tilde{X} - \bar{S}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{i=1}^l H_{k+1}(Y \times D_i, Y \times \partial D_i) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1} \left(\bigcup_{i=1}^l (Y \times D_i), \bigcup_{i=1}^l (Y \times D_i - \bar{Y}_i) \right) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1}(\tilde{Y}, \tilde{Y} - \bar{S}) \end{array}$$

toutes les flèches étant induites par les inclusions et les flèches horizontales étant des isomorphismes. Les isomorphismes de Thom permettent d'obtenir les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} H_{k-1}(\bar{S}_i) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1}(T_i, \partial T_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\sim} & H_{k+1}(Y \times D_i, Y \times \partial D_i) \end{array}$$

les deux flèches horizontales étant des isomorphismes, la flèche verticale droite étant induite par inclusion, la flèche verticale gauche étant induite par l'inclusion $Y \hookrightarrow S_i$ composée par l'isomorphisme $S_i \xrightarrow{\sim} \bar{S}_i$ réciproque de celui induit par φ et la flèche horizontale inférieure t_k^i étant obtenue comme suit : si z est un $(k - 1)$ -cycle de Y alors

$$t_k^i([z]) = [z \times D_i \text{ mod. } Y \times \partial D_i] .$$

En combinant les isomorphismes précédents on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) & \xrightarrow{\mu_k} & H_{k+1}(\tilde{X}, \tilde{X} - \bar{S}) \\ \uparrow \tau_k & & \uparrow \\ \bigoplus^l H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\bar{\mu}_k} & H_{k+1}(\tilde{Y}, \tilde{Y} - \bar{S}) \end{array}$$

où μ_k et $\bar{\mu}_k$ sont des isomorphismes, où τ_k est dans l'énoncé de la proposition et où la flèche verticale droite est induite par inclusion. Les suites exactes d'homologie ci-dessus deviennent maintenant

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(\tilde{X}) & \xrightarrow{u_k} & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) & \xrightarrow{g_k} & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{i_k} & H_k(\tilde{X}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow \tau_k & & \uparrow h_k & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(\tilde{Y}) & \xrightarrow{\bar{u}_k} & \bigoplus^l H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{c_k} & H_k(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{i}_k} & H_k(\tilde{Y}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} g_k &= (-1)^{k-1} \partial_k \circ \mu_k \\ c_k &= (-1)^{k-1} \bar{\partial}_k \circ \bar{\mu}_k \\ \bar{u}_k &= (-1)^{k-1} \mu_k^{-1} \circ \xi_k \\ \bar{i}_k &= (-1)^{k-1} \bar{\mu}_k^{-1} \circ \bar{\xi}_k . \end{aligned}$$

De la formule donnant les t_k^i et du fait que pour tout $(k - 1)$ -cycle z de Y on a $\partial(z \times D_i) = (-1)^{k-1} z \times \partial D_i = (-1)^{k-1} z \times e_i$ on tire

$$c_k \left(\bigoplus_{i=1}^l [z_i] \right) = \sum_{i=1}^l [e_i \times z_i] .$$

On considère enfin le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{k+1}(\tilde{X}) & \xrightarrow{u_k} & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) \\
 & \nearrow^{(-1)^{k-1}\sigma_k} & \uparrow & & \uparrow \tau_k \\
 H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\beta_k} & H_{k+1}(\tilde{Y}) & \xrightarrow{\bar{u}_k} & \bigoplus^l H_{k-1}(Y) \\
 & & \searrow \bar{\xi}_k & \nearrow & \uparrow (-1)^{k-1}\bar{\mu}_k^{-1} \\
 & & & & H_{k+1}(\tilde{Y}, \tilde{Y} - \bar{S})
 \end{array}$$

où β_k et σ_k sont comme dans la proposition 4 et où la flèche verticale gauche est induite par inclusion. Si z est un $(k - 1)$ -cycle de Y on a $\beta_k([z]) = [z \times \mathbf{P}^1]$. Mais

$$[z \times \mathbf{P}^1 \text{ mod. } \tilde{Y} - \bar{S}] = \left[\sum_{i=1}^l z \times D_i \text{ mod. } \tilde{Y} - \bar{S} \right],$$

de sorte que

$$(\bar{u}_k \circ \beta_k)([z]) = (-1)^{k-1}[z]^l.$$

Cela montre que $(-1)^{k-1} \bar{u}_k \circ \beta_k = \delta_k$ d'où

$$u_k \circ \sigma_k = \tau_k \circ \delta_k,$$

ce qui achève de démontrer la proposition.

PROPOSITION 6. — On a des suites exactes homomorphes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_k(\bar{L}) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{L}) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_k(\bar{Y}) & \xrightarrow{\bar{j}_k} & H_k(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{s}_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{Y}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

pour $k \leq n$ et

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n+1}(L) & \xrightarrow{j_{n+1}} & H_{n+1}(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\bar{L}) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\bar{j}_{n+1}} & H_{n+1}(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{s}_{n+1}} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\bar{Y}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où les flèches verticales, les j_k et les \bar{j}_k , $k \leq n + 1$, sont induits par les inclusions et où pour $k \leq n + 1$, le composé de \bar{s}_k avec l'isomorphisme $H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(\bar{Y}) \rightarrow H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(Y)$ induit par φ a pour section le "cross-produit".

Démonstration. — On utilise la technique des suites spectrales appliquée aux fibrés de la proposition 2. Pour cela on a besoin du

LEMME 2. — Pour $k \leq n$, $\pi_1(\mathcal{B}, \tilde{p}(\tilde{e}))$ opère trivialement sur $H_k(\bar{L})$.

Démonstration du lemme. — Soit $u \in \pi_1(\mathcal{B}, \tilde{p}(\tilde{e}))$ et soit g un élément de la classe d'homotopie d'applications continues de \bar{L} dans \bar{L} induite par u . On peut choisir g de manière à ce que $g(\bar{Y}) \subset \bar{Y}$ puisque $\tilde{Y} - \bar{S}$ est un sous-fibré de $\tilde{X} - \bar{S}$ de fibre type \bar{Y} . Comme $\tilde{Y} - \bar{S}$ est trivialisable $g|_{\bar{Y}}$ induit l'application identique de $H_k(\bar{Y})$ pour tout k . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_k(\bar{L}) & \xrightarrow{g_*} & H_k(\bar{L}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_k(\bar{Y}) & \xrightarrow{1_{H_k(\bar{Y})}} & H_k(\bar{Y}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par l'inclusion. Or, \mathcal{L} étant transverse à toutes les strates de Σ (cf. Proposition 1), $\Sigma|_{\mathcal{L}}$ est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap H$ (cf. [2] lemme 2.2.2). Et A étant transverse à toutes les strates de Σ dans \mathbf{P}^{n+2} est transverse à toutes les strates de $\Sigma|_{\mathcal{L}}$ dans \mathcal{L} . On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à $\mathcal{L} \cap H$, $\Sigma|_{\mathcal{L}}$ et A compte tenu des isomorphismes $\bar{L} \simeq L$ et $\bar{Y} \simeq Y$ induits par φ donne que les flèches verticales du diagramme ci-dessus sont surjectives pour $k \leq n$. Il en résulte que g induit l'identité de $H_k(\bar{L})$ pour $k \leq n$. Le lemme est démontré.

On reprend la démonstration de la proposition 6.

Soit $E_{p,q}^r$ la suite spectrale associée au fibré $\tilde{X} - \bar{S}$ de projection $\tilde{p}|\tilde{X} - \bar{S}$ et de base \mathcal{B} et $E_{p,q}^r$ la suite spectrale associée au sous-fibré trivial $\tilde{Y} - \bar{S}$ de projection $\tilde{p}|_{\tilde{Y}} - \bar{S}$ et de base \mathcal{B} . On rappelle que les fibres types respectives sont \bar{L} et $\bar{Y} \subset \bar{L}$.

D'après le lemme 1 et la trivialité de $\tilde{Y} - \bar{S}$, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}^2 & \xrightarrow{\sim} & H_p(\mathcal{B}, H_q(\bar{L})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_{p,q}^2 & \xrightarrow{\sim} & H_p(\mathcal{B}, H_q(\bar{Y})) \end{array}$$

pour $q \leq n$ où les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales sont induites par les inclusions. On a aussi des isomorphismes

$$E'_{p,q} \xrightarrow{\sim} H_p(\mathcal{B}, H_q(\bar{Y}))$$

pour $q > n$. Or \mathcal{B} a le type d'homotopie d'un graphe, donc

$$E^2_{p,q} = 0 \quad \text{pour } p \geq 2 \quad \text{et } q \leq n,$$

$$E'^2_{p,q} = 0 \quad \text{pour } p \geq 2 \quad \text{et tout } q.$$

Par suite

$$E^2_{0,q} = E^r_{0,q} = E^\infty_{0,q} \quad \text{pour } r \geq 2 \quad \text{et } q \leq n + 1$$

$$E'^2_{0,q} = E'^r_{0,q} = E'^\infty_{0,q} \quad \text{pour } r \geq 2 \quad \text{et tout } q,$$

$$E^2_{1,q} = E^r_{1,q} = E^\infty_{1,q} \quad \text{pour } r \geq 2 \quad \text{et } q \leq n + 1$$

$$E'^2_{1,q} = E'^r_{1,q} = E'^\infty_{1,q} \quad \text{pour } r \geq 2 \quad \text{et tout } q$$

$$E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = 0 \quad \text{pour } p \geq 2, r \geq 2 \quad \text{et } q \leq n$$

$$E'^r_{p,q} = E'^\infty_{p,q} = 0 \quad \text{pour } p \geq 2, r \geq 2 \quad \text{et tout } q.$$

Et comme $H_0(\mathcal{B})$ et $H_1(\mathcal{B})$ sont sans torsion on obtient les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} E^\infty_{0,q} & \xrightarrow{\sim} & H_q(\bar{L}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E'^\infty_{0,q} & \xrightarrow{\sim} & H_q(\bar{Y}) \\ \\ E^\infty_{1,q} & \xrightarrow{\sim} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_q(\bar{L}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E'^\infty_{1,q} & \xrightarrow{\sim} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_q(\bar{Y}) \end{array}$$

pour $q \leq n$, où les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales sont induites par les inclusions.

Soit maintenant $D_{p,q}$ (resp. $D'_{p,q}$) le sous-groupe de $H(\tilde{X} - \bar{S})$ (resp. $H(\tilde{Y} - \bar{S})$) de degré filtrant p et de degré complémentaire q . Pour tout q ,

$D_{0,q}$ est l'image de $H_q(\bar{L})$ dans $H_q(\tilde{X} - \bar{S})$ par j_q .

$D'_{0,q}$ est l'image de $H_q(\bar{Y})$ dans $H_q(\tilde{Y} - \bar{S})$ par \bar{j}_q ,

$D_{p,q} = H_{p+q}(\tilde{X} - \bar{S})$ pour $p \geq 1$,

$D'_{p,q} = H_{p+q}(\tilde{Y} - \bar{S})$ pour $p \geq 1$.

On sait qu'on a, pour tout q , les deux suites exactes reliées par l'homomorphisme induit par les inclusions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_{0,q} & \longrightarrow & E_{0,q} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D'_{0,q} & \longrightarrow & E'_{0,q} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et aussi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_{0,q+1} & \longrightarrow & D_{1,q} & \longrightarrow & E_{1,q}^\infty \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & D'_{0,q+1} & \longrightarrow & D'_{1,q} & \longrightarrow & E'_{1,q}^\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

D'où, en combinant avec ce qui précède, les suites exactes homomorphes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_q(\bar{L}) & \longrightarrow & H_q(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{q-1}(\bar{L}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & H_q(\bar{Y}) & \longrightarrow & H_q(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{q-1}(\bar{Y}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

pour $q \leq n$, et

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(\bar{L}) & \longrightarrow & H_{n+1}(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\bar{L}) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{n+1}(\bar{Y}) & \longrightarrow & H_{n+1}(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\bar{Y}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions.

Or, on sait que c'est bien j_q et j_{n+1} (resp. \bar{j}_q et \bar{j}_{n+1}) qui interviennent dans les suites exactes supérieures (resp. inférieures) précédentes. On sait aussi que, comme $\tilde{Y} - \bar{S} = \mathcal{B} \times Y$, les suites exactes inférieures ne sont autres, à l'isomorphisme $\bar{Y} \cong Y$ induit par φ près, que celles de Künneth. Par conséquent, le composé de \bar{s}_k avec l'isomor-

phisme $H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(\bar{Y}) \rightarrow H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(Y)$ induit par φ a pour section le "cross-produit". La proposition 6 est démontrée.

PROPOSITION 7. — *Les notations étant celles des propositions 5 et 6, $s_k \circ g_k$ est surjectif pour $k \leq n + 1$ et pour $k \leq n$ le noyau de $s_k \circ g_k$, le noyau de g_k , l'image de $\tau_k \circ \delta_k$ et l'image de u_k sont égaux.*

Démonstration. — Les propositions 5 et 6 donnent, pour $k \leq n + 1$ le diagramme commutatif avec suite verticale droite et suites horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_{k+1}(\tilde{X}) & & & & \\
 \downarrow \delta_k & & \downarrow u_k & & & & \\
 \oplus' H_{k-1}(Y) & \xrightarrow{\tau_k} & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) & & & & \\
 \downarrow c_k & & \downarrow g_k & & & & \\
 & & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{L}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \nearrow h_k & & & \uparrow f_{k-1} & & \\
 H_k(\tilde{Y} - \bar{S}) & \xrightarrow{\bar{s}_k} & & & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{Y}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où f_{k-1} est induit par l'inclusion $\bar{Y} \hookrightarrow \bar{L}$. Comme dans la démonstration du lemme 2, l'hypothèse d'induction donne que l'homomorphisme $H_{k-1}(\bar{Y}) \rightarrow H_{k-1}(\bar{L})$ induit par l'inclusion est surjectif pour $k \leq n + 1$ et bijectif pour $k \leq n$. Comme $H_1(\mathcal{B})$ est sans torsion, f_{k-1} est bijectif pour $k \leq n$ et surjectif pour $k = n + 1$.

On prend les $[e_i]$, $1 \leq i \leq l$, de la proposition 5 comme générateurs (non indépendants) de $H_1(\mathcal{B})$.

Soit $\left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \right] \otimes [z]$ un élément décomposable de

$$H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{L}) \quad \text{avec} \quad k \leq n + 1 .$$

Soit $[z_1] \in H_{k-1}(\bar{Y})$ tel que

$$f_{k-1} \left(\left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \right] \otimes [z_1] \right) = \left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \right] \otimes [z] .$$

Soit z_2 le cycle de Y correspondant à z_1 par l'isomorphisme $\bar{Y} \xrightarrow{\sim} Y$ induit par φ . D'après la proposition 6 on a

$$\bar{s}_k \left(\left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \times z_2 \right] \right) = \left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \right] \otimes [z_1] ,$$

donc d'après le diagramme ci-dessus

$$(s_k \circ h_k) \left(\left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \times z_2 \right] \right) = \left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \right] \otimes [z]$$

Mais

$$\left[\sum_{i=1}^l \alpha_i e_i \times z_2 \right] = \sum_{i=1}^l [e_i \times \alpha_i z_2] = c_k \left(\bigoplus_{i=1}^l [\alpha_i z_2] \right) .$$

Cela montre que $s_k \circ h_k \circ C_k$ est surjectif. Comme

$$s_k \circ h_k \circ c_k = s_k \circ g_k \circ \tau_k ,$$

$s_k \circ g_k$ est surjectif.

Soit maintenant $x \in \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i)$ avec $k \leq n$. D'après la proposition 3, τ_k est surjectif et on peut trouver des $(k-1)$ -cycles de Y z_1, \dots, z_l tels que $x = \tau_k \left(\bigoplus_{i=1}^l [z_i] \right)$. Donc si x est dans le noyau de $s_k \circ g_k$ on a

$$(f_{k-1} \circ \bar{s}_k \circ c_k) \left(\bigoplus_{i=1}^l [z_i] \right) = 0 ,$$

d'où
$$f_{k-1} \left(\sum_{i=1}^l [e_i] \otimes [\bar{z}_i] \right) = 0$$

où \bar{z}_i correspond à z_i par l'isomorphisme $Y \xrightarrow{\sim} \bar{Y}$ réciproque de celui induit par φ . Comme f_{k-1} est un isomorphisme, on a

$$\sum_{i=1}^l [e_i] \otimes [\bar{z}_i] = 0 .$$

D'après le choix des e_i cela n'est possible que si $\bar{z}_1 = \dots = \bar{z}_l$ c'est-à-dire $z_1 = \dots = z_l$.

Alors

$$x = \tau_k(\oplus^l [z_1]) = (\tau_k \circ \delta_k)([z_1]) .$$

On a ainsi montré que noyau $s_k \circ g_k \subset$ image $\tau_k \circ \delta_k$ pour $k \leq n$. Or, pour $k \leq n$, on a les inclusions triviales

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k \subset \text{image } u_k = \text{noyau } g_k \subset \text{noyau } s_k \circ g_k .$$

D'où, pour $k \leq n$,

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k = \text{image } u_k = \text{noyau } g_k = \text{noyau } s_k \circ g_k .$$

La démonstration de la proposition 7 est ainsi achevée.

Les propositions 3, 4, 5, 6 et 7 donnent les diagrammes commutatifs avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H_{k+1}(\tilde{X}) & & \\
 & & & & \downarrow u_k & & \\
 & & & & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i) & & \\
 & & & & \downarrow g_k & & \\
 0 \longrightarrow & H_k(\bar{L}) & \xrightarrow{j_k} & H_k(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_k} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\bar{L}) & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow i_k & & & \\
 0 & H_{k-2}(Y) & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & H_k(\tilde{X}) & \xrightarrow{\epsilon_k} & H_k(X) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta_{k-1} & & \downarrow u_{k-1} & & & \\
 \oplus^l H_{k-2}(Y) & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & \bigoplus_{i=1}^l H_{k-2}(\bar{S}_i) & & & & \\
 & & \downarrow g_{k-1} & & & & \\
 & & H_{k-1}(\tilde{X} - \bar{S}) & & & &
 \end{array}$$

pour $k \leq n$, et

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \bigoplus_{i=1}^l H_n(\bar{S}_i) & & & & \\
 & & \downarrow g_{n+1} & & & & \\
 H_{n+1}(\bar{L}) & \xrightarrow{j_{n+1}} & H_{n+1}(\tilde{X} - \bar{S}) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\bar{L}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow i_{n+1} & & & & \\
 0 \longrightarrow & H_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\sigma_n} & H_{n+1}(\tilde{X}) & \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} & H_{n+1}(X) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \delta_n & & \downarrow u_n & & & \\
 & \bigoplus^l H_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\tau_n} & \bigoplus_{i=1}^l H_{n-1}(\bar{S}_i) & & & \\
 & & & \downarrow g_n & & & \\
 & & & H_n(\tilde{X} - \bar{S}) & & &
 \end{array}$$

avec les propriétés suivantes :

i) pour $k \leq n + 1$, j_k, i_k sont induits par inclusion et ϵ_k est induit par φ

ii) pour $k \leq n + 1$, $s_k \circ g_k$ est surjectif

iii) pour $k \leq n$,

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k = \text{image } u_k = \text{noyau } g_k = \text{noyau } s_k \circ g_k$$

iv) pour $k \leq n$, $\tau_k \circ \delta_k$ est injectif.

Cela permet d'obtenir la

PROPOSITION 8. — *L'homomorphisme*

$$\epsilon_k \circ i_k \circ j_k : H_k(\bar{L}) \rightarrow H_k(X)$$

est bijectif pour $k \leq n$ et surjectif pour $k = n + 1$.

Démonstration. — Elle consiste à se livrer à la chasse dans les diagrammes précédents.

1) $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ est injectif pour $k \leq n$: Soit x dans le noyau de $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$. Alors $(i_k \circ j_k)(x)$ est dans le noyau de ϵ_k . Donc il existe $y \in H_{k-2}(Y)$ tel que $(i_k \circ j_k)(x) = \sigma_{k-1}(y)$. Mais

$$(\tau_{k-1} \circ \delta_{k-1})(y) = (u_{k-1} \circ i_k)(j_k(x)) = 0 .$$

D'après iv), $y = 0$ et $(i_k \circ j_k)(x) = 0$, c'est-à-dire que $j_k(x)$ est dans le noyau de i_k . Donc il existe $j \in \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i)$ tel que $j_k(x) = g_k(z)$.

Mais $(s_k \circ g_k)(z) = (s_k \circ j_k)(x) = 0$. D'après iii), il existe $t \in H_{k+1}(\tilde{X})$ tel que $z = u_k(t)$. Alors $j_k(x) = (g_k \circ u_k)(t) = 0$. Comme j_k est injective, on a $x = 0$.

2) $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ est surjectif pour $k \leq n + 1$: Soit $x \in H_k(X)$. Alors il existe $y \in H_k(\tilde{X})$ tel que $\epsilon_k(y) = x$. Mais $(g_{k-1} \circ u_{k-1})(y) = 0$ donc $u_{k-1}(y)$ est dans le noyau de g_{k-1} . D'après iii) il existe $z \in H_{k-2}(Y)$ tel que $(\tau_{k-1} \circ \delta_{k-1})(z) = u_{k-1}(y)$. Donc $y - \sigma_{k-1}(z)$ appartient au noyau de u_{k-1} et il existe $t \in H_k(\tilde{X} - \bar{S})$ tel que $i_k(t) = y - \sigma_{k-1}(z)$ donc tel que $(\epsilon_k \circ i_k)(t) = \epsilon_k(y) = x$. Maintenant d'après ii) il existe $u \in \bigoplus_{i=1}^l H_{k-1}(\bar{S}_i)$ tel que $s_k(t) = (s_k \circ g_k)(u)$ d'où il résulte que $t - g_k(u)$ est dans le noyau de s_k . Donc il existe $v \in H_k(\bar{L})$ tel que $j_k(v) = t - g_k(u)$. De là on tire que $(i_k \circ j_k)(v) = i_k(t)$ et que $(\epsilon_k \circ i_k \circ j_k)(v) = (\epsilon_k \circ i_k)(t) = x$. La proposition 8 est démontrée.

COROLLAIRE 1. — Pour $k \leq n + 1$, $H_k(X, L) = 0$.

Démonstration. — D'après i), si l'on compose $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ par l'isomorphisme $H_k(\bar{L}) \rightarrow H_k(\bar{L})$ induit par l'isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} \bar{L}$ réciproque de celui induit par φ , on obtient l'homomorphisme $H_k(L) \rightarrow H_k(X)$ induit par l'inclusion : le corollaire résulte alors de la proposition 8 et de la suite exacte d'homologie.

COROLLAIRE 2. — Si $\text{cod } H \geq 2$, on a $\pi_k(X, L, e) = 1$ pour $k \leq n + 1$ et $\pi_1(X, e) = 1$.

Démonstration. — D'après l'hypothèse de récurrence on a $\pi_1(L, e) = 1$ puisque, \mathcal{L} étant transverse à toutes les strates Σ , la codimension de $\mathcal{L} \cap H$ dans \mathcal{L} est ≥ 2 . Alors le corollaire 1 et le théorème d'Hurewicz relatif donnent $\pi_k(X, L, e) = 1$ pour $k \leq n + 1$. En particulier $\pi_1(X, L, e) = 1$ et comme $\pi_1(L, e) = 1$ on obtient $\pi_1(X, e) = 1$.

Les corollaires 1 et 2 achèvent la récurrence.

Ajouté à l'impression : Prof. Ludger Kaup me signale qu'avec G. Weidner il a obtenu le même résultat par d'autres méthodes ; à paraître dans *Mathematische Zeitschrift*.

