

ALAIN CONNES

**Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés
sous-jacents aux algèbres de von Neumann**

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 4 (1974), p. 121-155

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_121_0

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION
DES ESPACES VECTORIELS ORDONNÉS
SOUS-JACENTS AUX ALGÈBRES
DE VON NEUMANN

par Alain CONNES

Soit M une algèbre de von Neumann (rappelons que M est en particulier une algèbre involutive), l'espace vectoriel M , muni de l'ordre correspondant au cône $M_+ = \{y^*y, y \in M\}$ est l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à M .

Le but de cet article est de caractériser la classe d'espaces vectoriels ordonnés ainsi obtenue. L'un des outils essentiels de cette caractérisation est la théorie de Tomita-Takesaki [10].

Dans [1] et [3], H. Araki et l'auteur ont associé indépendamment à tout vecteur totalisateur et séparateur ξ_0 pour l'algèbre de von Neumann M dans \mathcal{H} le cône

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4} M_+ \xi_0\}^-,$$

où Δ_{ξ_0} désigne l'opérateur modulaire ([10]) du triplet \mathcal{H} , M , ξ_0 . De plus quand M est un facteur le double cône $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} \cup -\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ coïncide avec l'ensemble des vecteurs (M, J_{ξ_0}) positifs au sens de Woronowicz [11]. Le résultat principal obtenu ci-dessous est la caractérisation des cônes $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ par trois propriétés géométriques: autopolarité, homogénéité, orientabilité. Un cône \mathcal{H}^+ dans \mathcal{H} est autopolaire quand $\mathcal{H}^+ = \{\xi \in \mathcal{H}, \langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \forall \eta \in \mathcal{H}^+\}$. Un cône autopolaire \mathcal{H}^+ est orientable quand le quotient par son centre de l'algèbre de Lie involutive du groupe des transformations linéaires du cône est une algèbre de Lie involutive complexe.

Un cône autopolaire \mathcal{H}^+ est homogène quand pour toute face F de \mathcal{H}^+ l'opérateur $P_F - P_{F^\perp}$ appartient à l'algèbre de Lie du cône, où P_F désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par F et F^\perp la face orthogonale à F .

Dans la première section nous caractérisons les formes hermitiennes positives non dégénérées $s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle$ (où φ est un état normal fidèle sur M) par la propriété d'autopolarité: s définit un isomorphisme de M_+ sur une face de M_+^* , propriété qui ne met en jeu que l'espace ordonné sous-jacent à M .

Dans la deuxième section nous comparons les complétions $\{M_+\}_s^-$ de M_+ relatives aux diverses formes autopolaires s sur M et montrons l'unicité du cône $\{M_+\}_s^-$ obtenu et l'égalité $\{M_+\}_s^- = \mathcal{P}_{\xi_\varphi}^h$. La notion de déphasage spatial (élément de M' associé à tout couple ξ_1, ξ_2 de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour M dans \mathcal{H}) conduit aux résultats que nous avons annoncés dans [3]. En particulier pour (\mathcal{H}, M, ξ_0) donné, tout état normal ψ sur M s'écrit $\psi = \omega_\xi$ pour un unique $\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^h$.

Dans la troisième section nous montrons le principal résultat annoncé dans [3]: quand M est un facteur, $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ détermine le couple (M, M') . Puis nous explicitons le groupe des transformations linéaires de $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ (une telle transformation est nécessairement continue car $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ est faiblement complet), ainsi que son algèbre de Lie: au centre près c'est l'algèbre de Lie des dérivations de M , ce qui détermine une orientation I_M de $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ associée à M .

Dans la quatrième section nous montrons que $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ est homogène en mettant les faces fermées en bijection avec les projecteurs de M . Puis nous déterminons les orientations possibles de $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$: quand M est un facteur et $M \neq \mathbb{C}$ il y en a deux: I_M et $I_M = -I_M$, quand M est abélienne il n'y en a qu'une.

Enfin dans la cinquième section nous associons une algèbre de von Neumann à tout cône autopolaire homogène orienté \mathcal{H}^+ . Quand \mathcal{H}^+ est de genre dénombrable (cf. définition 5.8 ci-dessous) elle admet un vecteur totalisateur séparateur ξ_0

tel que $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathbb{H}}$. Cela achève d'établir l'isomorphisme de la catégorie des algèbres de von Neumann avec celle des cônes autopolaires homogènes orientés et conduit à une caractérisation des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnés (Pb posé dans [8]).

1. Formes autopolaires sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann.

Soit E, E^+ un espace vectoriel complexe ordonné (i.e. E^+ est un cône convexe dans E). On suppose que E^+ est saillant et que $E^+ - E^+ + iE^+ - iE^+ = E$.

Pour $\xi_1, \xi_2 \in E, \xi_2 - \xi_1 \in E^+$ on écrit $\xi_1 \leq \xi_2$; et pour toute famille $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E , on note $\vee \xi_\alpha$ (resp. $\wedge \xi_\alpha$) le plus petit majorant (resp. plus grand minorant), s'il existe, de la famille $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$. L'élément ξ est une unité d'ordre quand $\forall \eta \geq 0, \exists n > 0$ tel que $\eta \leq n\xi$. Soit E^* le dual algébrique de E ; on notera E_+^* le cône des formes linéaires positives sur E^+ .

Soient E, E^+ un espace vectoriel ordonné complexe, s une forme sesquilinéaire sur E ; nous notons s^* l'application de E dans E^* qui, à $\xi \in E$ associe s_ξ^* , défini par

$$s_\xi^*(\xi') = s(\xi', \xi), \quad \forall \xi' \in E.$$

DÉFINITION 1.1. — *On appelle forme autopolaire sur l'espace vectoriel ordonné complexe E, E^+ toute forme hermitienne positive non dégénérée s telle que l'image de E^+ par s^* soit une face de E_+^* .*

On note alors \mathcal{H}_s l'espace de Hilbert complété de E, η_s l'injection canonique de E dans \mathcal{H}_s et \mathcal{H}_s^+ la fermeture de $\eta_s(E^+)$.

PROPOSITION 1.2. — *Soient $E, s, \eta_s, \mathcal{H}_s^+$ comme ci-dessus.*

- a) $\xi, \eta \in \mathcal{H}_s^+ \implies \langle \xi, \eta \rangle \geq 0$.
- b) $0 \leq \xi \leq \eta \implies \|\xi\| \leq \|\eta\|$.
- c) $\eta_s(E^+)$ est une face de \mathcal{H}_s^+ .
- d) $\eta_s(x) \geq 0 \iff x \geq 0, \forall x \in E$.

e) Pour tout $x \in E^+$ la forme linéaire s_x^* est normale au sens suivant: pour toute famille filtrante décroissante $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E^+ , telle que $\bigwedge y_\alpha = 0$, on a $s_x^*(y_\alpha) \rightarrow 0$ selon I.

f) Si $x \in E^+$ est une unité d'ordre, la forme linéaire s_x^* est fidèle:

Démonstration. — Pour $x, y \in E^+$ on a $s(x, y) = s_y^*(x) \geq 0$, les assertions a) et b) en résultent facilement.

Soient $x \in E^+$ et $\xi \in \mathcal{H}_s^+$ tels que $\xi \leq \eta_s(x)$. Pour tout $y \in E$ posons $\psi(y) = \langle \eta_s(y), \xi \rangle$. On a $\psi \in E_+^*$, $\psi \leq s_x^*$ donc il existe un $X \in E^+$ tel que $s_X^* = \psi$. Ainsi $\eta_s(X) = \xi$ d'où c).

Soit $x \in E$ tel que $\eta_s(x) \geq 0$. Comme E^+ engendre E il existe des $x_j \in E^+$, $j = 1, 2, 3, 4$, tels que

$$x = x_1 - x_2 + i(x_3 - x_4),$$

de plus η_s étant injective on a $x_3 - x_4 = 0$. On a

$$\eta_s(x) \leq \eta_s(x_1)$$

donc d'après (c) il existe $X \in E^+$ tel que $\eta_s(x) = \eta_s(X)$ d'où $x = X \geq 0$.

Montrons e). Le convexe $[0, \eta_s(y)]$ est faiblement compact d'après (b), pour tout $y \in E^+$. On peut donc supposer que $\eta_s(y_\alpha)$ converge faiblement vers un $\xi \geq 0$ quand $\alpha \rightarrow \infty$. Soit [voir c)] $X \in E^+$ tel que $\eta_s(X) = \xi$; d'après d) on a $X \leq y_\alpha$ pour tout α , donc $X = 0$ et $\xi = 0$.

L'assertion f) est immédiate.

THÉORÈME 1.3. — Soient M, M_+ l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann M et 1 l'unité de M .

Pour toute forme linéaire positive normale fidèle φ sur M , il existe une forme autopolaire unique s telle que $s_1^* = \varphi$.

Remarque 1.4. — L'élément 1 de M^+ est une unité d'ordre ($\forall x \geq 0, \exists n$ tel que $x \leq n1$); le théorème 1.3 reste valable pour toute unité d'ordre h de M_+ , car l'application $x \rightarrow h^{-1/2}xh^{-1/2}$ est de manière évidente un automorphisme d'ordre de (M, M_+) , remplaçant h par 1 .

Nous employons les notations usuelles de la théorie de

Tomita-Takesaki. A φ correspondent \mathcal{H}_φ , π_φ , ξ_φ , Δ_φ , J_φ , S_φ , $D_\varphi^\#$ (cf. [10]).

LEMME 1.5. — Soit φ une forme linéaire positive normale fidèle sur l'algèbre de von Neumann M ; alors la forme sesquilinéaire s vérifiant

$$(1) \quad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle$$

est une forme autopolaire sur M telle que $s_1^* = \varphi$.

Démonstration. — Il est clair que s est hermitienne, positive et non dégénérée car Δ_φ est positif et non singulier. Soit l l'application de $\pi_\varphi(M)'_+$ sur la face de φ dans M_+^* , qui à $y \in \pi_\varphi(M)'_+$ associe la forme linéaire $z \rightarrow \langle \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, y \xi_\varphi \rangle$. Comme $J_\varphi \pi_\varphi(M)'_+ J_\varphi = \pi_\varphi(M)'_+$, on voit que l'application qui à $x \geq 0$ associe $l(J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi)$ est un isomorphisme de M_+ sur la face de φ dans M_+^* . On vérifie que cette application n'est autre que s^* grâce à l'égalité :

$$\langle \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi \xi_\varphi \rangle = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle$$

pour tout $x, z \in M_+$.

Rappelons qu'un isomorphisme de Jordan α de l'algèbre M_1 sur l'algèbre M_2 est une bijection linéaire de M_1 sur M_2 , avec $\alpha(xy + yx) = \alpha(x)\alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x)$ pour tous $x, y \in M$. Rappelons un lemme connu [7].

LEMME 1.6. — Soient M_1 et M_2 des algèbres de von Neumann, α une bijection linéaire de M_1 sur M_2 telle que $\alpha(M_1^+) = M_2^+$ et $\alpha(1) = 1$; alors α est un isomorphisme de Jordan de M_1 sur M_2 .

Dans la suite de la démonstration du théorème 1.3, nous désignons par s une forme autopolaire sur M , par φ la forme linéaire positive normale fidèle $\varphi = s_1^*$ et par t la forme autopolaire associée à φ par (1).

LEMME 1.7. — Il existe un automorphisme de Jordan α de M tel que

$$(2) \quad s(x, y) = t(x, \alpha(y))$$

pour tous $x, y \in M$.

Démonstration. — En effet l'application $(t^*)^{-1}s^*$ de M_+ dans M_+ a un sens car $s^*(M_+) = \text{Face de } \varphi \text{ dans } M_+$

$$M_*^+ = t^*(M_+).$$

On applique alors le lemme 1.6 en utilisant l'égalité $s_1^* = t_1^*$.

LEMME 1.8. — *Il existe un unitaire* $U \in \mathcal{L}(D_\varphi^\#)$ *tel que*

$$(3) \quad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, U \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle \quad \forall x, y \in M.$$

Démonstration. — Il faut prouver que l'application

$$\pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rightarrow \pi_\varphi(\alpha(y)) \xi_\varphi$$

de $\pi_\varphi(M) \xi_\varphi$ dans $\pi_\varphi(M) \xi_\varphi$ est isométrique pour la norme du domaine $D_\varphi^\#$ de S_φ . Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in M$ avec $x = x^*$, on a

$$\|\pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi\|_{\#} = \|\pi_\varphi(x) \xi_\varphi\|_{\#}, \text{ i.e. } \|\pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi\| = \|\pi_\varphi(x) \xi_\varphi\|$$

On a

$$\begin{aligned} \|\pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi\|^2 &= \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x))^2 \xi_\varphi \rangle = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x^2)) \xi_\varphi \rangle \\ &= s(1, x^2) = s(x^2, 1) = \varphi(x^2) = \|\pi_\varphi(x) \xi_\varphi\|^2. \end{aligned}$$

LEMME 1.9. — *Soit* P_φ *la restriction à* $D_\varphi^\#$ *de l'opérateur* $\Delta_\varphi^{1/2}(1 + \Delta_\varphi)^{-1}$. *Alors* P_φ *et* $P_\varphi U$ *sont des opérateurs positifs de* $D_\varphi^\#$ *dans* $D_\varphi^\#$, *et* $U = 1$.

Démonstration. — Comme $0 \leq t(1 + t^2)^{-1} \leq 1/2$ pour $t \geq 0$, P_φ a un sens; de plus pour $\xi \in D_\varphi^\#$ on a

$$\langle P_\varphi \xi, \xi \rangle_{\#} = \langle P_\varphi \xi, \xi \rangle + \langle \Delta_\varphi^{1/2} P_\varphi \xi, \Delta_\varphi^{1/2} \xi \rangle \geq 0.$$

Pour ξ_1 et ξ_2 dans $D_\varphi^\#$ on a $\langle P_\varphi \xi_1, \xi_2 \rangle_{\#} = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \xi_1, \xi_2 \rangle$. Ainsi pour $x \in M$ on a

$$\langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, U \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, P_\varphi U \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle_{\#}$$

et comme le premier membre de cette égalité est positif, on a montré que $P_\varphi U$ qui est un opérateur borné, est positif de $D_\varphi^\#$ dans $D_\varphi^\#$.

L'unicité de la décomposition polaire, dans l'espace $D_\varphi^\#$, montre que $U = 1$ et achève la démonstration du théorème 1.3 en utilisant l'égalité (3).

Remarque 1.10. — Soient s une forme autopolaire sur l'algèbre de von Neumann M , A une bijection linéaire de M sur M telle que $A(M_+) = M_+$; alors la forme

$$(x, y) \rightarrow s(Ax, Ay)$$

est autopolaire. Nous étudierons en 2.8 une réciproque de ce fait.

2. Comparaison des formes autopolaires sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann.

THÉORÈME 2.1. — Soient s_1 et s_2 deux formes autopolaires sur l'algèbre de von Neumann M ; $\mathcal{H}_{s_1}, \mathcal{H}_{s_1}^+$; $\mathcal{H}_{s_2}, \mathcal{H}_{s_2}^+$ les espaces de Hilbert ordonnés associés.

Il existe une isométrie U de \mathcal{H}_{s_1} sur \mathcal{H}_{s_2} telle que

$$U\mathcal{H}_{s_1}^+ = \mathcal{H}_{s_2}^+.$$

La démonstration utilise plusieurs lemmes qui ont leur intérêt propre.

LEMME 2.2. — Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace \mathcal{H} , ξ_1 et ξ_2 des vecteurs totalisateurs et séparateurs pour M , \mathcal{H}_4 un espace de Hilbert de dimension 4, de base ε_{ij} $i, j = 1, 2$, F le facteur engendré dans \mathcal{H}_4 par les e_{ij} , $e_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{jk}\varepsilon_{il}$, F' le facteur engendré par les f_{ij} où

$$f_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{il}\varepsilon_{kj}.$$

Soient $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_4$, $\eta_0 = \xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + \xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$, $P = M \otimes F$ et U_{ij} l'isométrie de \mathcal{K} dans \mathcal{K} telle que $U_{ij}\xi = \xi \otimes \varepsilon_{ij}$, $\forall \xi \in \mathcal{K}$, $i, j = 1, 2$.

Le vecteur η_0 est totalisateur et séparateur pour P dans \mathcal{K} et l'involution S_{η_0} associée à P et η_0 vérifie :

$$(4) \quad S_{\eta_0} = U_{11}S_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}S_{\xi_1, \xi_2}U_{12}^* + U_{12}S_{\xi_2, \xi_1}U_{21}^* + U_{22}S_{\xi_2}U_{22}^*$$

où S_{ξ_1, ξ_2} désigne la fermeture de l'opérateur défini sur $M\xi_2$ par l'égalité :

$$(5) \quad S_{\xi_1, \xi_2}x\xi_2 = x^*\xi_1 \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Démonstration. — Soient $x_{ij} \in M$; $i, j = 1, 2$, $x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij}$. On a

$$x\eta_0 = x_{11}\xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + x_{12}\xi_2 \otimes \varepsilon_{12} + x_{21}\xi_1 \otimes \varepsilon_{21} + x_{22}\xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$$

ainsi η_0 est totalisateur et séparateur pour P dans \mathcal{X} .

Soit $\alpha \in D_{\eta_0}^\#$, $\alpha = \sum \alpha_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}$. Soit (X_n) une suite d'éléments de P tels que $\text{Lim } X_n \eta_0 = \alpha$ et $\text{Lim } X_n^* \eta_0 = S_{\eta_0} \alpha$. Posons

$$X_n = a_n \otimes e_{11} + b_n \otimes e_{12} + c_n \otimes e_{21} + d_n \otimes e_{22}.$$

On a alors $X_n^* = a_n^* \otimes e_{11} + c_n^* \otimes e_{12} + b_n^* \otimes e_{21} + d_n^* \otimes e_{22}$ et les égalités :

$$\text{Lim } a_n \xi_1 = \alpha_{11}, \text{Lim } b_n \xi_2 = \alpha_{12}, \text{Lim } c_n \xi_1 = \alpha_{21}, \text{Lim } d_n \xi_2 = \alpha_{22}$$

et

$$\text{Lim } a_n^* \xi_1 = (S_{\eta_0} \alpha)_{11}, \text{Lim } b_n^* \xi_1 = (S_{\eta_0} \alpha)_{21}, \text{Lim } c_n^* \xi_2 = (S_{\eta_0} \alpha)_{12},$$

$$\text{Lim } d_n^* \xi_2 = (S_{\eta_0} \alpha)_{22} \text{ d'où l'inclusion}$$

$$S_{\eta_0} \subset U_{11} S_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} S_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{12} S_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{22} S_{\xi_2} U_{22}^*$$

L'inclusion inverse est immédiate.

LEMME 2.3. — Avec les notations du lemme 2.2, soit

$$S_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1, \xi_2} \Delta_{\xi_1, \xi_2}^{1/2}$$

la décomposition polaire de S_{ξ_1, ξ_2} . On a alors

$$(6) \quad J_{\eta_0} = U_{11} J_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} J_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{12} J_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{22} J_{\xi_2} U_{22}^*$$

$$(7) \quad \Delta_{\eta_0} = U_{11} \Delta_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} \Delta_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{12} \Delta_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{22} \Delta_{\xi_2} U_{22}^*$$

Démonstration. — Par construction, le second membre de (6) est une isométrie de \mathcal{X} sur \mathcal{X} et le second membre de (7) un opérateur positif auto adjoint dans \mathcal{X} . Il suffit donc de vérifier l'égalité $S_{\eta_0} = J_{\eta_0} \Delta_{\eta_0}^{1/2}$, ce qui est immédiat.

LEMME 2.4. — Avec les notations des lemmes 2.2 et 2.3, il existe une unitaire unique $\nu \in M'$ tel que

$$(8) \quad J_{\eta_0} (1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} = \nu \otimes f_{12}$$

et on a :

$$(9) \quad J_{\xi_2, \xi_1} = \nu J_{\xi_1}, \quad J_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1} \nu^*, \quad J_{\xi_2} = \nu J_{\xi_1} \nu^*$$

Démonstration. — On a $J_{\eta_0}^2 = 1$ donc

$$J_{\xi_2, \xi_1} J_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1, \xi_2} J_{\xi_2, \xi_1} = 1$$

Pour $\xi_{ij} \in \mathcal{H}$, $i, j = 1, 2$ on a :

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{11}) J_{\eta_0}(\sum \xi_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}) = \xi_{11} \otimes \varepsilon_{11} + (J_{\xi_1, \xi_2} J_{\xi_2, \xi_1} \xi_{21}) \otimes \varepsilon_{21}.$$

De même $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{22}) J_{\eta_0} = 1 \otimes f_{22}$. Comme

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} \in M' \otimes F'$$

il existe un unitaire $\nu \in M'$ tel que $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} = \nu \otimes f_{12}$.
On obtient

$$\begin{aligned} J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21})(\xi \otimes \varepsilon_{11}) &= J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{21}) = J_{\xi_2, \xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12} \\ J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{11}) &= (\nu \otimes f_{12}) J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{11} = \nu J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}$. De même,

$$\begin{aligned} J_{\xi_2} \xi \otimes \varepsilon_{22} &= J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{22}) = J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{12}) \\ &= (\nu \otimes f_{12}) J_{\xi_1} \nu^* \xi \otimes \varepsilon_{21} = \nu J_{\xi_1} \nu^* \xi \otimes \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

d'où les égalités (9). L'unitaire unique ν défini dans le lemme 2.4 sera noté $\theta_M(\xi_2, \xi_1)$ (déphasage spatial de ξ_2 par rapport à ξ_1). On montre facilement que pour tout triplet ξ_1, ξ_2, ξ_3 de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour M dans \mathcal{H} on a $\theta(\xi_3, \xi_1) = \theta(\xi_3, \xi_2)\theta(\xi_2, \xi_1)$.

LEMME 2.5. — Soient \mathcal{H}, M, ξ_1 et ξ_2 comme dans le lemme 2.2, u un unitaire de M' .

a) On a $\theta(u\xi_2, \xi_1) = u\theta(\xi_2, \xi_1)$.

b) Si $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$, posons $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$ (9) et $\tilde{x} = Jx^*J$ pour tout $x \in M$ alors (10) $\langle x\tilde{x}^*\xi_1, \xi_2 \rangle \geq 0$ pour tout $x \in M$.

Démonstration. — a) On a $S_{u\xi_2, \xi_1} = uS_{\xi_2, \xi_1}$, $J_{u\xi_2, \xi_1} = uJ_{\xi_2, \xi_1}$ d'où a) en utilisant (9).

b) Montrons (10) c'est-à-dire montrons que pour tout $x \in M$ on a $\langle x\xi_1, Jx^*\xi_2 \rangle \geq 0$. On a $Jx^*\xi_2 = J_{\xi_2, \xi_1}^{-1} S_{\xi_2, \xi_1} x\xi_1$ donc l'inégalité cherchée résulte de la positivité de l'opérateur $\Delta_{\xi_2, \xi_1}^{1/2}$.

DÉFINITION 2.6. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , J_{ξ_0} l'involution isométrique correspondante, et pour tout $x \in M$, $\tilde{x} = J_{\xi_0} x^* J_{\xi_0}$.

On pose $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} = \{x\tilde{x}^*\xi_0, x \in M\}^-$ et $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ est appelé cône autopolaire associé à M et ξ_0 (cf. Thm. 2.7).

Le théorème 2.1 est une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , $J = J_{\xi_0}$ et $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ comme dans la définition 2.6, $\varphi = \omega_{\xi_0}$ et s la forme autopolaire associée à φ par (1).

a) Soit $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\#} = \{M^+\xi_0\}^-$ ([10]), alors

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4} \mathcal{P}_{\xi_0}^{\#}\}^- = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4} M^+ \xi_0\}^-.$$

b) L'application qui à $\eta_s(x)$, $x \in M$, associe $\Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_0$ se prolonge en une isométrie V de \mathcal{H}_s sur \mathcal{H} telle que

$$V\mathcal{H}_s^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}.$$

c) $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ est un cône convexe fermé autopolaire; autrement dit $(\langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \ \forall \eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}) \iff (\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural})$.

d) Soit $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ un vecteur totalisateur et séparateur pour M , alors $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$.

e) Soit ξ_1 un vecteur totalisateur et séparateur pour M tel que $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$; alors $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$, $\mathcal{P}_{\xi_1}^{\natural} = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$.

f) Soit φ_1 une forme linéaire positive normale fidèle sur M ; il existe un vecteur totalisateur et séparateur $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ unique tel que $\omega_{\xi_1} = \varphi_1$.

Démonstration. — a) La restriction de $\Delta_{\xi_0}^{1/4}$ à l'espace vectoriel réel des $\xi \in D_{\xi_0}^{\#}$, $S_{\xi_0} \xi = \xi$ est continue.

L'assertion a) résultera donc de l'égalité

$$\{\Delta_{\xi_0}^{1/4} M^+ \xi_0\}^- = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}.$$

Rappelons que $\mathcal{A} = M\xi_0$ est muni d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche ([10]) telle que $x\xi_0 y \xi_0 = xy\xi_0$ pour

$x, y \in M$, et $(x\xi_0)^\# = x^*\xi_0$ pour $x \in M$. Soit \mathcal{B} une algèbre hilbertienne modulaire contenue dans \mathcal{A} , équivalente à \mathcal{A} au sens de [10]; \mathcal{B} est stable par $\Delta_{\xi_0}^z$, $z \in \mathbf{C}$ et pour ξ_1, ξ_2 , $\Delta_{\xi_0}^z \xi_1 \xi_2 = \Delta_{\xi_0}^z \xi_1 \Delta_{\xi_0}^z \xi_2$. Le théorème de densité de Kaplansky montre que l'ensemble des $y\tilde{y}^*\xi_0, y\xi_0 \in \mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}}$, et que l'ensemble des $x^*x\xi_0, x\xi_0 \in \mathcal{B}$ est dense dans $M_+\xi_0$. Si $y\xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0$ on a :

$$y\tilde{y}^*\xi_0 = yJy\xi_0 = (\Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0)(\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0) = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*x\xi_0$$

d'où a).

b) On a

$$\langle \eta_s(x), \eta_s(y) \rangle = \langle \Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0, \Delta_{\xi_0}^{1/4}y\xi_0 \rangle,$$

donc b) résulte de l'assertion a).

c) Soit $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0}$ le polaire de $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}}$ dans \mathcal{H} .

On a pour $t \in \mathbf{R}$ l'égalité

$$\Delta_{\xi_0}^{it}\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}} = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}},$$

donc $\Delta_{\xi_0}^{it}\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0} = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0}$ et $(\int f(t)\Delta_{\xi_0}^{it} dt)(\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0} \subset \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0}$ pour toute $f \in L^1(\mathbf{R}), f \geq 0$.

Ainsi l'intersection de $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0}$ avec le domaine de $\Delta_{\xi_0}^z$ est dense dans $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0}$, quel que soit $z \in \mathbf{C}$. Pour

$$\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}0} \cap \text{Dom}(\Delta_{\xi_0}^{-1/4})$$

et $\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\#$ on a $\langle \Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta, \Delta_{\xi_0}^{1/2}\xi \rangle = \langle \eta, \Delta_{\xi_0}^{1/4}\xi \rangle \geq 0$.

Comme $\Delta_{\xi_0}^{1/2}\mathcal{P}_{\xi_0}^\# = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\#0}$ ([10]) on a $\Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\#$ et $\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}}$.

d) On a $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\mathfrak{h}}$, donc $\langle \xi_1, xJ_{\xi_0}x\xi_0 \rangle \geq 0$ pour tout $x \in M$. Ainsi: $\langle S_{\xi_1, \xi_0}x\xi_0, J_{\xi_0}x\xi_0 \rangle \geq 0$ pour tout $x \in M$ donc $\langle J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0}\eta, \eta \rangle \geq 0$ pour tout $\eta \in \text{Dom}(S_{\xi_1, \xi_0})$.

Le lemme 2.2 montre que l'adjoint de S_{ξ_1, ξ_0} est la fermeture de l'opérateur de domaine $M'\xi_0$ qui à $y\xi_0$ $y \in M'$ associe $y^*\xi_1$. Pour $y \in M'$ on a

$$\langle y^*\xi_1, J_{\xi_0}y\xi_0 \rangle = \langle \xi_1, (J_{\xi_0}yJ_{\xi_0})J_{\xi_0}(J_{\xi_0}yJ_{\xi_0})\xi_0 \rangle \geq 0$$

donc on a $\langle (J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0})^*\eta, \eta \rangle \geq 0$ pour tout η dans le domaine de $(J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0})^*$. Par unicité de décomposition polaire de S_{ξ_1, ξ_0} on a $J_{\xi_1, \xi_0} = J_{\xi_0}$ et d).

e) Le lemme 2.5 b) montre que $J_{\xi_0} = J_{\xi_1}$; d'après 2.7 c), ξ_1 est limite d'éléments de la forme $x\tilde{x}^*\xi_0$ car $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^h$. Pour tout $y \in M$, $y\tilde{y}^*\xi_1$ est limite d'éléments de la forme $y\tilde{y}^*x\tilde{x}^*\xi_0 = yx(yx)^*\xi_0$ donc est dans $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$.

L'égalité $\mathcal{P}_{\xi_1}^h = \mathcal{P}_{\xi_0}^h$ en résulte.

f) L'existence de ξ_1 résulte facilement du lemme 2.5 a) et de e). Soit ξ_2 tel que $\omega_{\xi_2} = \omega_{\xi_1}$, avec ξ_2 séparateur et totalisateur pour M . Il existe alors un unitaire $u \in M'$ tel que $\xi_2 = u\xi_1$. Le lemme 2.5 a) montre qu'alors $\theta(\xi_2, \xi_0) = u$. En particulier (d) si $\xi_2 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^h$ on a $u = 1$ et $\xi_2 = \xi_1$.

COROLLAIRE 2.8. — Soient M une algèbre de von Neumann, s_1 et s_2 deux formes autopolaires sur M , $\varepsilon > 0$. Il existe un $h \in M$, positif et inversible, tel que :

$$|s_1(hxh, hyh) - s_2(x, y)| \leq \varepsilon \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in M$$

Démonstration. — Soient \mathcal{H} un espace hilbertien dans lequel M admet deux vecteurs séparateurs et totalisateurs ξ_1 et ξ_2 tels que :

$\mathcal{P}_{\xi_1}^h = \mathcal{P}_{\xi_2}^h$, $s_j(x, y) = \langle \Delta_{\xi_j}^{1/2} x \xi_j, y \xi_j \rangle$, $j = 1, 2$, $x, y \in M$.
Soit $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$; pour $x, y \in M$ on a

$$s_2(x, y) = \langle x \xi_2, Jy^* \xi_2 \rangle = \langle x Jy J \xi_2, \xi_2 \rangle$$

et pour $h \in M$, $h = h^*$

$$s_1(hxh, hyh) = \langle hxh Jhyh J \xi_1, \xi_1 \rangle = \langle x Jy Jh Jh J \xi_1, h Jh J \xi_1 \rangle$$

Le corollaire 2.8 résulte donc du lemme suivant :

LEMME 2.9. — Soient M , ξ_0 , J , $\mathcal{P}_{\xi_0}^h$ comme dans 2.6 alors :

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^h = \{h Jh J \xi_0, h \in M_+\}^-$$

Démonstration. — Soit $y \in M_+$ inversible, montrons que $\Delta_{\xi_0}^{1/4} y \xi_0$ est limite d'éléments de la forme $b Jb \xi_0$, $b \in M_+$. Soit $u = \theta_M(y^{1/2} \xi_0, \xi_0)$; on a $u \in M$, $u^* y^{1/2} \xi_0 = \xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^h$. Soient $a = u^* y^{1/2}$ et (a_n) ($n \in \mathbb{N}$) une suite d'éléments de M , analytiques pour le groupe d'automorphismes modulaires σ_t de ω_{ξ_0} et de la forme $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) \sigma_t(a) dt$ avec $f_n \geq 0$,

$f_n \in L^1(\mathbf{R})$, telle que $a_n \rightarrow a$, quand $n \rightarrow \infty$, pour la topologie $*$ forte.

On a $a_n \xi_0 = \int f_n(t) \Delta_{\xi_0}^t a \xi_0$ donc $\Delta_{\xi_0}^{1/4} b_n \xi_0 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\sharp}$, $\forall n$ où $b_n = \sigma_{1/4}(a_n)$. Ainsi $b_n \xi_0 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\sharp}$ et $b_n \geq 0$.

On a $Jb_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/2} b_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n \xi_0$ donc

$$b_n Jb_n J\xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n^* a_n \xi_0$$

converge vers $\Delta_{\xi_0}^{1/4} a^* a \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} y \xi_0$, quand $n \rightarrow \infty$.

3. Groupe des transformations linéaires du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

Soient M_j une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H}_j , ξ_j un vecteur totalisateur et séparateur pour M_j , $\mathcal{H}_j^+ = \mathcal{P}_{\xi_j}^{\sharp}$ le cône autopolaire correspondant.

THÉORÈME 3.1. — (Isomorphismes d'algèbres).

Soit Φ un isomorphisme de l'algèbre M_1 sur l'algèbre M_2 (pas nécessairement un $*$ -isomorphisme). Il existe alors une application linéaire $L = L_{\Phi}$ unique de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ telle que: $\Phi(x) = LxL^{-1} \forall x \in M_1$.

THÉORÈME 3.2. — (Isomorphismes de Jordan.)

Soit α un $*$ -isomorphisme de Jordan de l'algèbre M_1 sur l'algèbre M_2 . Alors il existe une isométrie unique U_{α} de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ telle que $\langle \alpha(x)\xi, \xi \rangle = \langle xU_{\alpha}^{-1}\xi, U_{\alpha}^{-1}\xi \rangle$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}_2^+$ et tout $x \in M_1$.

THÉORÈME 3.3. — (Isomorphismes des espaces ordonnés.)

Soit L une bijection linéaire de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ et soit $L = UT$ la décomposition polaire de L .

Il existe un isomorphisme de Jordan unique α de M_1 sur M_2 tel que $U = U_{\alpha}$.

Il existe un opérateur positif inversible unique $h \in M_1$ tel que $T = hJhJ$.

THÉORÈME 3.4. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M ,

$\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ et $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $J = J_{\xi_0}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $e^{t\delta}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

b) $J\delta = \delta J$ et $[\delta, M] \subset M$.

c) Il existe $x \in M$ tel que $\delta = x + JxJ$.

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}_j^+$, séparateur (et totalisateur) pour M_j , soit b_ξ l'application $x \rightarrow b_\xi(x) = \Delta_{\xi}^{1/4}x\xi$ de M_j dans \mathcal{H}_j .

LEMME 3.5. — Soit α un $*$ -isomorphisme de M_1 sur M_2 . Il existe une isométrie U_α de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ telle que :

a) pour tout $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ séparateur et totalisateur pour M_1 on a, pour tout $x \in M_2$:

$$\langle xU_\alpha\xi, U_\alpha\xi \rangle = \langle \alpha^{-1}(x)\xi, \xi \rangle$$

b) Pour tout ξ comme dans a) on a $U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha\xi}(\alpha(x))$ pour tout $x \in M_1$.

c) On a $U_\alpha x U_\alpha^* = \alpha(x)$ pour tout $x \in M_1$.

Démonstration. — Soit U_1 une isométrie de \mathcal{H}_1 sur \mathcal{H}_2 telle que $\alpha(x) = U_1 x U_1^*$ pour tout $x \in M_1$. Comme

$$\theta(U_1\xi_1, \xi_2) \in M_2'$$

on peut supposer que $\theta(U_1\xi_1, \xi_2) = 1$ donc que $U_1\xi_1 \in \mathcal{H}_2^+$. Comme $U_1 M_1 U_1^* = M_2$ on a

$$S_{U_1\xi_1} = U_1 S_{\xi_1} U_1^*, \quad J_{U_1\xi_1} = U_1 J_{\xi_1} U_1^*$$

donc $\mathcal{P}_{U_1\xi_1}^{\natural} = U_1 \mathcal{P}_{\xi_1}^{\natural}$. Ainsi $U_1 \mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_2^+$ et on a trouvé une isométrie de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ vérifiant c).

On déduit facilement a) et b) de la condition c).

LEMME 3.6. — Soit e un projecteur du centre de M_1 . On suppose que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, $\xi_1 = \xi_2$ et que M_2 est l'image de M_1 par l'application β définie par $\beta(x) = ex + (1 - e)Jx^*J$ pour tout $x \in M_1$.

Alors l'isométrie $U_\beta = 1$ vérifie les conditions a) et b) du lemme 3.5 relativement à l'isomorphisme de Jordan β de M_1 sur M_2 .

Démonstration. — On vérifie facilement que $\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_2^+$. Soit $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ totalisateur et séparateur pour M_1 . On a

$$\begin{aligned} \langle \beta(x)\xi, \xi \rangle &= \langle ex\xi, \xi \rangle + \langle J(1 - e)x^*J\xi, \xi \rangle \\ &= \langle (e + (1 - e))x\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

pour tout $x \in M_1$. L'opérateur modulaire relatif à ξ_2 et $M_2 = eM_1 + (1 - e)M'_1$ est égal à $e\Delta_{\xi_1} + (1 - e)\Delta_{\xi_1}^{-1}$ avec les notations évidentes. L'égalité 3.5 b) résulte donc de :

$$\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1 = (e\Delta_{\xi_1}^{1/4} + (1 - e)\Delta_{\xi_1}^{-1/4})(ex + (1 - e)Jx^*J)\xi_1$$

pour tout $x \in M_1$.

LEMME 3.7. — Soit U une isométrie de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ telle que $\langle UxU^*\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle$ pour $x \in M_1$ et $\xi \in \mathcal{H}_1^+$.

Alors $U = 1$.

Démonstration. — Soit ξ un vecteur totalisateur et séparateur pour M avec $\xi \in \mathcal{H}_1^+$. Alors $U^*\xi$ est un vecteur totalisateur et séparateur pour M car $U^*\xi \in \mathcal{H}_1^+$ et la face qu'il engendre dans \mathcal{H}_1^+ est totale dans \mathcal{H}_1 . Le théorème 2.7 f) montre donc que $U^*\xi = \xi$.

Démonstration du théorème 3.1. — Le corollaire 4.1.21 de [9] montre qu'il existe un $*$ -isomorphisme Φ_1 de M_1 sur M_2 et un opérateur inversible $h \in M_1$ tels que pour tout $x \in M_1$, $\Phi(x) = \Phi_1(hxh^{-1})$. Le lemme 3.5 montre qu'il existe une isométrie U de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ telle que

$$\Phi(x) = (UhJhJ)x(UhJhJ)^{-1}$$

pour tout $x \in M_1$. Il suffit donc de poser $L = UhJhJ$ pour obtenir l'assertion d'existence dans 3.1. L'unicité résulte du lemme 3.7.

Démonstration du théorème 3.2. — Il existe ([7], p. 334) un projecteur e du centre de M_1 tel que la restriction de α à $M_{1,e}$ soit multiplicative et que la restriction de α à $M_{1,1-e}$ soit antimultiplicative. Il suffit alors d'appliquer les lemmes 3.5 et 3.6 en utilisant l'algèbre de von Neumann

$$M_{1,e} + M'_{1,1-e}$$

comme intermédiaire.

Remarque 3.8. — Soient α et U_α comme dans le théorème 3.2 et $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ un vecteur totalisateur et séparateur pour M_1 . On a alors :

$$U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha \xi}(\alpha(x)) \quad \text{pour tout } x \in M_1$$

Démonstration du théorème 3.3. — Soit d'abord U une isométrie de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ . Le vecteur $U\xi_1$ est totalisateur et séparateur pour M_2 ; on peut donc supposer $\xi_2 = U\xi_1$. On a alors $U([0, \xi_1]) = [0, \xi_2]$ et il existe une application linéaire α de M_1 sur M_2 telle que $U b_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}(\alpha(x))$ pour tout $x \in M_1$ (proposition 1.2 c)). Comme α vérifie les hypothèses du lemme 1.6, c'est un $*$ -isomorphisme de Jordan de M_1 sur M_2 .

Pour tout $x \in M_1$, on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha(x)\xi_2, \xi_2 \rangle &= \langle b_{\xi_2}(\alpha(x)), \xi_2 \rangle = \langle U b_{\xi_1}(x), \xi_2 \rangle \\ &= \langle b_{\xi_1}(x), \xi_1 \rangle = \langle x\xi_1, \xi_1 \rangle \end{aligned}$$

donc $U_\alpha^* \xi_2 = \xi_1$. On a donc $U_\alpha b_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}(\alpha(x)) = U b_{\xi_1}(x)$ pour tout $x \in M_1$ et $U = U_\alpha$. Soit L une bijection linéaire de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_2^+ ; comme \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont autopolaires L^* est une bijection linéaire de \mathcal{H}_2^+ sur \mathcal{H}_1^+ et L^*L une bijection linéaire positive de \mathcal{H}_1^+ sur \mathcal{H}_1^+ . Le théorème suivant montre qu'il en est de même de $(L^*L)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et achève la démonstration du théorème 3.3.

THÉORÈME 3.9. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$. Pour tout opérateur positif inversible de \mathcal{H} dans \mathcal{H} tel que $T\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ il existe un $h \in M$ tel que $T = hJhJ$. On vérifie facilement que h est unique et nécessairement inversible.

LEMME 3.10. — Soient $M, \mathcal{H}, \xi, \mathcal{H}^+$ comme ci-dessus et b une application linéaire de M dans \mathcal{H} telle que $b(M_+)$ soit une face dense de \mathcal{H}_+ . Il existe alors une isométrie $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que $U\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_+$ et un $\xi_2 \in \mathcal{H}_+$, séparateur et totalisateur pour M tels que :

$$b(x) = U b_{\xi_2}(x) \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Démonstration. — Comme $b(M_+)$ est dense dans \mathcal{H}^+ , l'intervalle $[0, b(1)]$ est total dans \mathcal{H} . Soit $\xi_1 = b(1)$ et soit $x \in M$; $xJxJ\xi_1 = 0$ implique $xJxJ = 0$ donc $x = 0$. Ainsi ξ_1 est séparateur et totalisateur pour M , car $J\xi_1 = \xi_1$. L'application $b_{\xi_1}, b_{\xi_1}(x) = \Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1$ est un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ_1 dans \mathcal{H}^+ . Il existe donc une bijection linéaire α de M_+ sur M_+ telle que $\alpha(1) = 1$ et que

$$b(x) = b_{\xi_1}(\alpha(x))$$

pour tout $x \in M_+$. Soit $\xi_2 = U_{\alpha}^{-1}\xi_1$; on a

$$U_{\alpha}b_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}\alpha(x) = b(x)$$

pour tout $x \in M$.

LEMME 3.11. — Soient $M, \mathcal{H}, \xi_0, \mathcal{H}^+$ et T comme dans 3.9. Il existe alors un $\xi_2 \in \mathcal{H}^+$ totalisateur et séparateur pour M tel que l'opérateur $\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0 \rightarrow \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2$, soit borné, inversible et de module égal à T .

Démonstration. — L'application $b = Tb_{\xi_0}$ est un isomorphisme de M_+ sur une face dense de \mathcal{H}^+ donc il existe U et ξ_2 vérifiant les conditions 3.10. On a

$$U^*T\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0 = \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2$$

pour tout $x \in M$. L'opérateur U^*T étant borné et inversible on a 3.11.

LEMME 3.12. — Soient P une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , η_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour P , $\varphi = \omega_{\eta_0}$ et $a \in P$ tel que la fonction $t \rightarrow \sigma_t^{\varphi}(a)$ se prolonge en une fonction analytique $z \rightarrow \sigma_z^{\varphi}(a)$ de $D_{-1/4} = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z \in]-1/4, 0[\}$ dans M , continue dans $D_{-1/4}$. Alors pour tout $x \in P$ on a

$$\sigma_{-i/4}^{\varphi}(a)J_{\eta_0}\sigma_{-i/4}^{\varphi}aJ_{\eta_0}\Delta_{\eta_0}^{1/4}x\xi_0 = \Delta_{\eta_0}^{1/4}axa^*\eta_0.$$

Démonstration. — Soient $t \in \mathbb{R}, x \in P, J = J_{\eta_0}$ on a

$$\sigma_t(a)\Delta^{it}x^*\eta_0 = \Delta^{it}ax^*\eta_0$$

donc

$$\sigma_{-i/4}(a)\Delta^{1/4}x^*\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0$$

et

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}x\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0.$$

Remplaçant x par ax^* on obtient

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}ax^*\eta_0 = \Delta^{1/4}axa^*\eta_0$$

et l'égalité cherchée.

LEMME 3.13. — Soient $M, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, J$ comme dans 3.9, $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^+$ séparateurs (et totalisateurs) pour M , $\varphi_1 = \omega_{\xi_1}$, $\varphi_2 = \omega_{\xi_2}$, s_1 et s_2 les formes autopolaires associées à φ_1 et φ_2 respectivement. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'application $t \rightarrow u_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ se prolonge analytiquement à $D_{-1/4}$ et continûment à $D_{-1/4}^-$ avec $\|u_t\| \leq 1 \forall z \in D_{-1/4}$ (cf. [4]).

b) $\|\Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2\| \leq \|\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1\| \forall x \in M.$

c) $s_2(x, x) \leq s_1(x, x) \forall x \in M.$

d) $s_2(x, x) \leq s_1(x, x) \forall x \in M_+.$

e) $\xi_2 \leq \xi_1 (\mathcal{H}^+).$

Démonstration. — a) \implies b). Reprenons les notations de 2.4. On a $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$, $J_{\xi_i} = J_{\xi_i, \xi_i} = \dots = J$, $J_{\eta_0} = \sum U_{ij}JU_{ji}^*$ $i, j = 1, 2$. Par hypothèse $a = 1 \otimes e_{21}$ vérifie les conditions du lemme 3.13 et ([4]) $\sigma_{-i/4}(a) = u_{-i/4} \otimes e_{21}$. Ainsi pour tout $x \in M$

$$\begin{aligned} (u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}\Delta_{\eta_0}^{1/4}(x \otimes e_{11})\eta_0 \\ = \Delta_{\eta_0}^{1/4}(1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{12})\eta_0. \end{aligned}$$

On a $(x \otimes e_{11})\eta_0 = x\xi_1 \otimes \varepsilon_{11}$ donc le premier membre de l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned} (u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})[J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1 \otimes \varepsilon_{11}] \\ = (u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1) \otimes \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

d'où l'égalité

$$(11) \quad \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2 = u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1.$$

b) \implies c) et c) \implies d) sont immédiats.

d) \implies e). On a par hypothèse $\langle hJhJ\xi_2, \xi_2 \rangle \leq \langle hJhJ\xi_1, \xi_1 \rangle$ pour tout $h \in M_+$. Soit $H = hJhJ$ pour $h \in M_+$; comme

H est positif, on a (inégalité de Schwartz) :

$$| \langle H\xi_1, \xi_2 \rangle |^2 \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle \langle H\xi_2, \xi_2 \rangle$$

et comme $\langle H\xi_1, \xi_2 \rangle \geq 0$ et $\langle H\xi_2, \xi_2 \rangle \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle$ il vient :

$$\langle H\xi_1, \xi_2 \rangle \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle \text{ et } \langle hJhJ\xi_1, \xi_1 - \xi_2 \rangle \geq 0$$

Le lemme 2.19 montre alors que $\xi_2 \leq \xi_1$ (\mathcal{H}^+).

e) \implies a). Reprenons les notations de 2.4. On a

$$S_{\xi, \xi} = J\Delta_{\xi, \xi}^{1/2}$$

donc pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\xi, \xi}^{1/2} x\xi_1, x\xi_1 \rangle &= \langle Jx^*\xi_2, x\xi_1 \rangle = \langle \xi_2, JxJx\xi_1 \rangle \\ &\leq \langle \xi_1, JxJx\xi_1 \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout ξ dans le domaine de $\Delta_{\xi, \xi}^{1/4}$ on a

$$\| \Delta_{\xi, \xi}^{1/4} \xi \| \leq \| \Delta_{\xi, \xi}^{1/4} \xi \|.$$

La fonction $t \rightarrow \Delta_{\xi, \xi}^{it} \Delta_{\xi, \xi}^{-it}$ se prolonge donc analytiquement à $D_{-1/4}$ continûment à $\overline{D}_{-1/4}$ avec une norme ≤ 1 .

Pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi, \xi}^{it} \xi \otimes \varepsilon_{21} &= \Delta_{\eta_0}^{it} (\xi \otimes \varepsilon_{21}) = \Delta_{\eta_0}^{it} (1 \otimes e_{21}) \Delta_{\eta_0}^{-it} (\Delta_{\eta_0}^{it} (\xi \otimes \varepsilon_{11})) \\ &= (u_t \otimes e_{21}) (\Delta_{\xi, \xi}^{-it} \xi \otimes \varepsilon_{11}). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\Delta_{\xi, \xi}^{-it} \Delta_{\xi, \xi}^{it} = u_t$.

Démonstration du théorème 3.9. — Le lemme 3.11 montre que T est le module d'un opérateur de la forme

$$\Delta_{\xi_0}^{1/4} x\xi_0 \rightarrow \Delta_{\xi_2}^{1/4} x\xi_2, x \in M.$$

Les conditions équivalentes du lemme 3.13 montrent, en appliquant l'égalité 11 que T est le module d'un opérateur de la forme XJXJ, $X \in M$. On a donc $T = hJhJ$, où h est le module de X.

Démonstration du théorème 3.4. — a) \implies b) : L'ensemble $D(\mathcal{H}^+)$ des $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tels que $e^{t\delta} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+, \forall t$, est un sous-espace vectoriel réel auto-adjoint de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (formule de Trotter) on peut donc supposer que $\delta = \delta^*$ ou $\delta = -\delta^*$. Si $\delta = \delta^*$ le théorème 3.9 montre qu'il existe un groupe à

un paramètre $t \rightarrow h_t$ d'opérateurs positifs inversibles de M tels que $e^{t\delta} = h_t J h_t J \forall t \in \mathbf{R}$. D'où $e^{t\delta} M e^{-t\delta} = M$ et

$$[\delta, M] \subset M.$$

Si $\delta = -\delta^*$ il existe (théorème 3.3) pour tout $t \in \mathbf{R}$ un isomorphisme de Jordan α_t de M sur M tel que $e^{t\delta} = U_{\alpha_t}$. Comme δ est borné l'application $t \rightarrow U_{\alpha_t}$ est continue en norme et le théorème 3.2 montre que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t, |t| \leq t_0$ on ait :

$$\|\alpha_t(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Il est donc clair que le centre de M est invariant par les α_t et, comme $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$, que chaque α_t est un automorphisme de M . On a alors $U_{\alpha_t} M U_{\alpha_t}^{-1} = M$ et $[\delta, M] \subset M$.

b) \Rightarrow c) Par hypothèse l'application $x \rightarrow [\delta, x]$ est une dérivation de M il existe donc $h \in M$ ([9]) tel que

$$\delta - h \in M'.$$

Alors $\delta - (h + JhJ)$ commute avec M et M' donc appartient à $M \cap M'$ et commute avec J . Il existe donc un $x \in M$ tel que $\delta = x + JxJ$.

c) \Rightarrow a) On a, comme x et JxJ commutent :

$$e^{t(x+JxJ)} = e^{tx} J e^{tx} J$$

4. Propriétés du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

PROPOSITION 4.1. — Soient \mathcal{H} un espace hilbertien complexe, \mathcal{H}^+ un cône convexe autopolaire dans \mathcal{H} et $\mathcal{H}^J = (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^+)^-$.

a) \mathcal{H}^J est un espace hilbertien réel dans lequel \mathcal{H}^+ est autopolaire.

b) $\mathcal{H} = \mathcal{H}^J \oplus i\mathcal{H}^J$ et l'application qui à $\xi_1 + i\xi_2, \xi_j \in \mathcal{H}^J$ associe $J(\xi_1 + i\xi_2) = \xi_1 - i\xi_2$ est une involution isométrique de \mathcal{H} sur \mathcal{H} .

c) Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^J$ il existe $\xi^+, \xi^- \in \mathcal{H}^+$ tels que

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \xi^+ \perp \xi^-.$$

d) Pour toute face F de \mathcal{H}^+ , l'ensemble

$$F^\perp = \{\xi \in \mathcal{H}^+, \xi \perp \eta, \forall \eta \in F\}$$

est une face fermée de \mathcal{H}^+ .

Démonstration. — a) Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$ on a $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \mathbf{R}$.

b) Comme \mathcal{H}^+ est autopolaire il est total dans \mathcal{H} donc $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$ est dense dans \mathcal{H} . Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$ on a $\operatorname{Re}\langle \xi_1, i\xi_2 \rangle = 0$ donc $i\mathcal{H}^J$ est orthogonal à \mathcal{H}^J pour la structure réelle sous-jacente à \mathcal{H} et $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$ est fermé donc égal à \mathcal{H} .

c) Soient ξ^+ la projection orthogonale de ξ sur \mathcal{H}^+ , $\xi^- = \xi^+ - \xi$. On a par construction $\langle \xi^-, \eta \rangle \geq 0, \forall \eta \in \mathcal{H}^+$ donc $\xi^- \in \mathcal{H}^+, \xi^+ \perp \xi^-$.

d) Immédiat.

THÉORÈME 4.2. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , $\mathcal{H}^+ = \mathcal{D}_{\xi_0}^{\square}$.

a) Pour toute face F de \mathcal{H}^+ il existe un projecteur $e \in M$ tel que $\bar{F} = eJeJ\mathcal{H}^+$, on a alors $P_F = eJeJ$, où P_F désigne le projecteur orthogonal de \mathcal{H} sur l'espace vectoriel fermé engendré par F .

b) Pour tout projecteur $e \in M$, $eJeJ\mathcal{H}^+$ est une face fermée F_e de \mathcal{H}^+ et $P_{F_e} = eJeJ$.

c) L'application $e \rightarrow F_e$ est un isomorphisme d'ordre de l'ensemble des projecteurs de M sur l'ensemble des faces fermées de \mathcal{H}^+ et on a $F_{1-e} = F_e^\perp$ pour tout projecteur $e \in M$.

La démonstration utilise les lemmes suivants :

LEMME 4.3. — Soient $M, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, \xi_0$ comme dans 4.2.

Pour $\xi \in \mathcal{H}^+$ les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\eta \geq 0, \xi \perp \eta \implies \eta = 0$.

b) ξ est séparateur pour M .

c) ξ est totalisateur pour M .

d) La face de ξ dans \mathcal{H}^+ est dense dans \mathcal{H}^+ .

Démonstration. — $a) \implies b)$ Soit e un projecteur de M tel que $e\xi = 0$ alors $\langle eJeJ\eta, \xi \rangle = 0$ pour tout $\eta \in \mathcal{H}^+$ et comme $eJeJ\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ on a $eJeJ = 0$ puis $e = 0$.

$b) \implies c)$ On a $J\xi = \xi$ et $JMJ = M'$.

$c) \implies d)$ Si ξ est totalisateur pour M , il est aussi totalisateur et séparateur, le lemme 2.7 $d) e)$ montre que $\mathcal{P}_\xi^{\natural} = \mathcal{H}^+$. L'application qui à $x \in M$ associe $\Delta_{\xi}^{\frac{1}{2}}x\xi$ définit alors (2.7 et 1.2) un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ dans \mathcal{H}^+ , d'où la conclusion.

LEMME 4.4. — Soient $M, \mathcal{H}, \mathcal{H}^+, \xi_0$ comme dans 4.2 et $\eta \in \mathcal{H}^+, e \in M$ le support de ω_η . Il existe $\xi \in \mathcal{H}^+$ séparateur pour M tel que :

$$a) e\Delta_{\xi}^{it} = \Delta_{\xi}^{it}e \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

$$b) eJeJ\xi = \eta.$$

$c)$ La construction de Gelfand Segal associée à la restriction ψ de ω_η à M_e s'identifie au triplet $(eJeJ\mathcal{H}, \eta, \pi)$ où, pour $x \in M_e$, $\pi(x)$ désigne la restriction de x à $\mathcal{X} = eJeJ\mathcal{H}$.

$d)$ Le cône autopolaire correspondant au couple $\pi(M_e), \eta$ dans \mathcal{X} est $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{X} = eJeJ\mathcal{H}^+$.

Démonstration. — Soit $\xi = \eta + (1 - e)J(1 - e)\xi_0$. On a $\xi \in \mathcal{H}^+$. Pour $x \in M$,

$$\langle x\eta, (1 - e)J(1 - e)\xi_0 \rangle = \langle (1 - e)J(1 - e)\xi_0, JxJ\eta \rangle = 0$$

car

$$JxJ\eta \in M'\eta \subset e\mathcal{H}.$$

Ainsi

$$\langle x\xi, \xi \rangle = \langle x\eta, \eta \rangle + \langle x(1 - e)J(1 - e)\xi_0, (1 - e)J(1 - e)\xi_0 \rangle.$$

Pour $x \in M_+$, $\langle x\xi, \xi \rangle = 0$ entraîne $x\eta = 0$ et

$$x(1 - e)J(1 - e)\xi_0 = 0.$$

La dernière égalité implique

$$(1 - e)x(1 - e)J(1 - e)x(1 - e)J\xi_0 = 0$$

donc $(1 - e)x(1 - e) = 0$

$$(y \in M, yJy\xi_0 = 0 \implies \langle \Delta_{\xi_0}^{\frac{1}{2}}y\xi_0, y\xi_0 \rangle = 0 \implies y = 0)$$

On a montré que ξ est séparateur pour M , donc totalisateur pour M (4.3). Pour $x \in M$, $\omega_\xi(ex) = \langle x\eta, \eta \rangle = \omega_\xi(xe)$ donc $\Delta_\xi^{\text{it}}e = e\Delta_\xi^{\text{it}} \forall t \in \mathbf{R}$.

On a $e\eta = \eta$ donc $eJeJ\xi = \eta$.

La condition c) résulte des égalités $J_\xi = J$ (lemme 2.7), $\langle x\xi, \xi \rangle = \langle x\eta, \eta \rangle \forall x \in M_e$, $eJeJ\xi = \eta$ et de [5]. L'involution J_ψ est donc la restriction de J à $\mathcal{K} = eJeJ\mathcal{H}$, ce qui montre que le cône autopolaire associé à $\pi(M_e)$, η dans \mathcal{K} , est contenu dans $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$. Comme le produit scalaire de deux éléments quelconques de \mathcal{H}^+ est positif, il est en fait égal à $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$. On a $eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ d'où d).

LEMME 4.5. — Soient $M, \mathcal{H}, \xi_0, \mathcal{H}^+$ comme ci-dessus.

a) Soit f un projecteur de M , ξ_1 et ξ_2 des éléments de \mathcal{H}^+ avec $\xi_1 \leq \xi_2$ (\mathcal{H}^+). Alors si $fJfJ\xi_2 = \xi_2$, on a $fJfJ\xi_1 = \xi_1$ et $f\xi_1 = \xi_1$.

b) Soit $\eta \in \mathcal{H}^+$, e le support de ω_η , alors $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$ est la fermeture de la face de η dans \mathcal{H}^+ .

Démonstration. — a) On a

$$(1 - f)J(1 - f)\xi_1 \leq (1 - f)J(1 - f)\xi_2 \ (\mathcal{H}^+)$$

donc $(1 - f)J(1 - f)\xi_1 = 0$. Soient ξ séparateur et totalisateur pour M , tel que $\mathcal{P}_\xi^{\text{it}} = \mathcal{H}^+$ et e un projecteur de M_e tels que $eJeJ\xi = \xi_1$. On a, avec $y = (1 - f)e$

$$yJy\xi = (1 - f)eJ(1 - f)J^2e\xi = (1 - f)J(1 - f)J\xi_1 = 0.$$

Ainsi $y = 0$ et $(1 - f)\xi_1 = 0$ donc $\xi_1 = f\xi_1 = fJfJ\xi_1$.

b) L'assertion a) montre que $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$ est une face fermée de \mathcal{H}^+ contenant η . Comme η est totalisateur et séparateur pour $\pi(M_e)$ dans \mathcal{K} , la fermeture de la face engendrée par η dans $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ est $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ (4.3). On a donc montré que $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{K}$ est la fermeture de la face de η dans \mathcal{H}^+ .

Démonstration du théorème 4.2. — a) Pour tout $\eta \in \mathcal{H}^+$, soit $F(\eta)$ la face engendrée par η . On a $F = \bigcup_{\eta \in F} F(\eta)$ et la famille des $F(\eta)$, $\eta \in F$ est filtrante croissante. Pour tout $\eta \in F$, soit e_η le support de ω_η , le lemme 4.5 montre

que $\bar{F}(\eta) = F_{e_\eta}$ donc que $P_{F_\eta} = e_\eta J e_\eta J$. Pour $\eta_1 \leq \eta_2$ on a

$$(x \in M^+, x \eta_2 = 0) \implies (x J x J \eta_1 = 0) \implies (x \eta_1 = 0)$$

donc $e_{\eta_1} \leq e_{\eta_2}$. Soit $e = \vee e_\eta = \lim e_\eta$ pour la topologie forte, quand $\eta \rightarrow \infty$ selon \bar{F} . Pour $\xi \in J e J e \mathcal{H}$, on a $\xi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} e_\eta J e_\eta J \xi$ donc $P_F \xi = \xi$. Enfin pour $\xi \in F$ on a $e J e J \xi = \xi$, ce qui montre que $P_F = e J e J$. Pour $\xi \in P_F \mathcal{H}^+$ on a $\xi = \lim e_\eta J e_\eta J \xi \in \overline{U_{\eta \in F} F(\eta)}$ car $\xi \in \mathcal{H}^+$.

Ainsi $\xi \in \bar{F}$. L'inclusion $\bar{F} \subset P_F \mathcal{H}^+$ est immédiate.

b) résulte de 4.5 a).

c) L'application $e \rightarrow F_e$ est surjective et croissante. Elle est injective car e est le support de ω_ξ , $\xi_1 = e J e J \xi_0$ pour tout projecteur $e \in M$. Soient e et f des projecteurs de M , avec $F_f = F_e^\perp$. On a $e J e J \xi_0 \perp f J f J \xi_0$ donc $f e J f e J = 0$ et $f e = 0$. Ainsi $f = 1 - e$.

THÉORÈME 4.6. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur séparateur et totalisateur pour M , $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\text{h}}$.

a) Pour toute face F de \mathcal{H}^+ on a $\bar{F} = F^{\perp\perp}$.

b) Pour toute face F de \mathcal{H}^+ et tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+.$$

Démonstration. — L'assertion a) résulte facilement de 4.2 a)

c). Montrons b). Soit $e_0 \in M$ tel que $P_F = e_0 J e_0 J$,

$$P_{F^\perp} = (1 - e_0) J (1 - e_0) J.$$

On a $P_F - P_{F^\perp} = -1 + e_0 + J e_0 J$; et pour $t \in \mathbf{R}$,

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})} = e^{-t} e^{t e_0} J e^{t e_0} J$$

d'où la conclusion.

PROPOSITION 4.7. — Soient \mathcal{H} un espace hilbertien complexe, \mathcal{H}^+ un cône convexe autopolaire dans \mathcal{H} , J comme dans 4.1 b) et $D(\mathcal{H}^+)$ l'ensemble des $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tels que

$$e^{t\delta} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Alors $D(\mathcal{H}^+)$ est un sous-espace vectoriel réel, stable par involution, et stable par crochet $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow [\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Démonstration. — Montrons que

$$\delta_1, \delta_2 \in D(\mathcal{H}^+) \implies [\delta_1, \delta_2] \in D(\mathcal{H}^+).$$

Soit $\delta_3 = [\delta_1, \delta_2]$. On a très facilement :

$$t^{-2}(e^{t\delta_1}e^{t\delta_2}e^{-t\delta_1}e^{-t\delta_2} - 1) \rightarrow \delta_3$$

en norme, quand $t \rightarrow 0$. Il existe donc une suite (x_n) d'automorphismes de \mathcal{H}^+ tels que $x_n = 1 + \frac{1}{n}(\delta_3 + o(1))$. On a donc $e^{\delta_3}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ car $e^{\delta_3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n$.

DÉFINITION 4.8. — Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}^+, J$ comme ci-dessus, $D(\mathcal{H}^+)$ sera appelée algèbre de Lie involutive du cône \mathcal{H}^+ .

THÉORÈME 4.9. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$.

L'application qui à $x \in M$ associe $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$ définit par passage au quotient un isomorphisme de l'algèbre de Lie involutive des dérivations de M sur le quotient $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ de $D(\mathcal{H}^+)$ par son centre.

Démonstration. — Pour $x \in M$ on a $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$ (3.4) et pour $x_1, x_2 \in M$ on a

$$[x_1 + Jx_1J, x_2 + Jx_2J] = [x_1, x_2] + J[x_1, x_2]J$$

Le théorème 3.4 montre donc que l'application $x \rightarrow x + JxJ$ est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie involutive de M sur $D(\mathcal{H}^+)$. L'image du centre de M est donc contenue dans le centre de $D(\mathcal{H}^+)$ et la conclusion 4.9 résulte facilement du a) de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.10. — Soient $M, \mathcal{H}, \xi_0, \mathcal{H}^+$ comme ci-dessus.

a) On a Centre $D(\mathcal{H}^+) = \{ x \in \text{Centre } M, x = x^* \}$.

b) Soit F une face fermée de \mathcal{H}^+ , alors

$$P_F + P_{F^\perp} = 1 \iff \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp \iff \exists e$$

projecteur, $e \in M \cap M'$, tel que $F = F_e$.

c) Soit F une face fermée de \mathcal{H}^+ vérifiant les conditions b), alors :

$$\mathcal{H} = e\mathcal{H} \oplus (1 - e)\mathcal{H}, \quad M = M_e \oplus M_{1-e}, \quad \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp, \\ D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

Démonstration. — a) Soit $x \in M$ tel que $x + JxJ \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$. Pour tout $y \in M$ on a $[x, y] + J[x, y]J = 0$ donc $[x, y] \in \text{Centre } M$ et $[x, y] = 0$. Ainsi $x \in \text{Centre } M$ et $x + JxJ = x + x^*$.

b) Comme $\xi \geq 0 \implies P_F \xi \geq 0$ pour tout ξ , on a

$$\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$$

dès que $P_F + P_{F^\perp} = 1$.

Inversement $\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$ entraîne $P_F + P_{F^\perp} = 1$. Soit e un projecteur de M , on a

$$P_{F_e} + P_{F_{1-e}} = 1 + 2(eJeJ) - (e + JeJ).$$

Ainsi $P_F + P_{F^\perp} = 1$ est équivalent à $(e - JeJ)^2 = 0$, donc à $e = JeJ$ ($e - JeJ$ est normal). Enfin

$$e = JeJ \iff e \in \text{Centre } M.$$

c) La seule assertion à montrer est

$$D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

Comme $e \in M \cap M'$, e commute avec tout $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$, donc δ laisse $e\mathcal{H}$ et $(1 - e)\mathcal{H}$ globalement invariants.

DÉFINITION 4.11. — Soient \mathcal{H} un espace hilbertien complexe, \mathcal{H}^+ un cône convexe autopolaire dans \mathcal{H} . On appelle orientation de \mathcal{H}^+ la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, compatible avec la structure d'algèbre de Lie involutive de $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$.

Une orientation de \mathcal{H}^+ est donc caractérisée par un opérateur I , $I^2 = -1$ sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ tel que

$$[I\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, I\delta_2] = I[\delta_1, \delta_2]$$

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ et que $I(\delta^*) = -I(\delta)^* \forall \delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$. Soient \mathcal{H}, M, ξ_0 et \mathcal{H}^+ comme ci-dessus, l'orientation I_M de \mathcal{H}^+ déduite de la structure d'algèbre de Lie involutive complexe de l'ensemble des dérivations de M , sera appelée orientation canonique de \mathcal{H}^+ associée à M .

PROPOSITION 4.12. — Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H}, ξ_0 un vecteur séparateur et totalisateur pour $M, \mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\perp}, I_1$ et I_2 deux orientations de \mathcal{H}^+ .

Il existe alors une face fermée $F = F_e, e$ projecteur de $M \cap M'$ de \mathcal{H}^+ (vérifiant les conditions 4.11 b)) telle que I_1 coïncide avec I_2 sur $\underline{D}(F)$ et que I_1 coïncide avec $-I_2$ sur $\underline{D}(F^\perp)$.

Quand M est un facteur I_M et $-I_M$ sont les seules orientations de \mathcal{H}^+ .

Démonstration. — Soit j l'isomorphisme canonique de l'algèbre de Lie des dérivations de $M, D(M)$ sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$. On a facilement Centre $\underline{D}(\mathcal{H}^+) = \{0\}$. Soit $\varepsilon = I_2 \circ I_1^{-1}$. On a

$$[\varepsilon\delta_1, \delta_2] = \varepsilon[\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, \varepsilon\delta_2] \forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$$

et

$$[\varepsilon\delta_1, \varepsilon\delta_2] = [I_2 I_1^{-1} \delta_1, I_2 I_1^{-1} \delta_2] = -[I_1^{-1} \delta_1, I_1^{-1} \delta_2] = [\delta_1, \delta_2].$$

Donc pour tout $\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ on a $\delta - \varepsilon^2 \delta \in \text{Centre } \underline{D}(\mathcal{H}^+)$, d'où $\varepsilon^2 = 1$. Ainsi $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ est la somme directe des deux idéaux

$$\varepsilon_1 = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \varepsilon\delta = \delta\} \text{ et } \varepsilon_{-1} = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \varepsilon\delta = -\delta\}.$$

Comme $\varepsilon(\delta^*) = (\varepsilon(\delta))^*$ ces deux idéaux sont autoadjoints. Soient

$$M_1 = \{x \in M, j \circ \text{Ad}x \in \varepsilon_1\}, \quad M_{-1} = \{x \in M, j \circ \text{Ad}x \in \varepsilon_{-1}\}$$

Pour $x \in M_1, y \in M_{-1}$ on a $j \circ \text{Ad}[x, y] = 0$ donc

$$[x, y] \in \text{Centre } M$$

et $[x, y] = 0$. Pour $x \in M'_1 \cap M, j \circ \text{Ad}x$ commute avec tout $\delta \in \varepsilon_1$ donc appartient à ε_{-1} . On a montré que

$$M_{-1} = M'_1 \cap M$$

donc, comme M_1 est autoadjoint, que M_{-1} est une sous-algèbre de von Neumann de M . De même $M_1 = M'_{-1} \cap M$ est une sous-algèbre de von Neumann de M , et M_1 et M_{-1} contiennent le centre de M . Pour tout $x \in M$ on a

$$j \circ Adx \in \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}$$

donc il existe $x_1 \in M_1$, $x_{-1} \in M_{-1}$ avec $x = x_1 + x_{-1}$. Pour $x, y \in M_1$ on a $[x, y] = [x_1, y] \in M_1$. Pour $x, y \in M_1$ et $z \in M$ on a

$$[x, y]z = [x, y]z_1 + xyz_2 - yxz_2 = [x, y]z_1 + [x, yz_2] \in M_1$$

Ainsi $M_e \subset M_1$, où e désigne le plus grand projecteur de l'idéal bilatère fermé de M_1 engendré par les $[x, y]$ pour $x, y \in M_1$. On a $e \in \text{Centre } M_1 = \text{Centre } M$. Comme $M_{1,1-e}$ est abélienne on a $M_1 = M_e + \text{Centre } M$ puis

$$M_{-1} = M_{1-e} + \text{Centre } M$$

car $M_{-1} = M'_1$. Il en résulte que ε vaut $+1$ sur $\underline{D}(F_e)$ et -1 sur $\underline{D}(F_{1-e})$.

5. Algèbre de von Neumann associée à un cône autopolaire homogène orienté.

DÉFINITION 5.1. — Soit \mathcal{H}^+ un cône convexe autopolaire dans l'espace hilbertien \mathcal{H} . Nous dirons que \mathcal{H}^+ est *facialement homogène* quand pour toute face F de \mathcal{H}^+ on a $e^{(P_F - P_{F^\perp})} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$, $\forall t \in \mathbf{R}$ (où P_F (resp P_{F^\perp}) désigne la projection orthogonale de \mathcal{H} sur l'espace vectoriel fermé engendré par F (resp F^\perp)).

On vérifie facilement que cette condition est équivalente à $\lambda P_F \xi + (1 - P_F - P_{F^\perp}) \xi + \lambda^{-1} P_{F^\perp} \xi \in \mathcal{H}^+$ pour tous $\lambda \geq 0$, $\xi \geq 0$. Dans la suite nous écrirons simplement « homogène » pour « facialement homogène ».

THÉORÈME 5.2. — Soit \mathcal{H}^+ un cône convexe autopolaire homogène dans l'espace hilbertien \mathcal{H} , I une orientation de \mathcal{H}^+ .

a) $M = \{\delta_1 - i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$ est une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} .

b) On a $M' = \{\delta_1 + i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$ et

$$JMJ = M'.$$

c) Pour tout $x \in M$ on a $xJxJ \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$.

d) Pour tout $\xi_0 \in \mathcal{H}^+$ tel que $(\eta \geq 0, \eta \perp \xi_0) \implies (\eta = 0)$. ξ_0 est séparateur et totalisateur pour M , et

$$J = J_{\xi_0, M} \quad \mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0, M}^{\text{h}}.$$

LEMME 5.3. — Soit $\mathcal{H}, \mathcal{H}^+$ un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène \mathcal{H}^+ , et soit $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$.

b) $J\delta = \delta J$ et $\xi, \eta \geq 0, \xi \perp \eta \implies \delta\xi \perp \eta$.

Démonstration. — Soient ξ, η comme dans b), alors

$$\langle e^{t\delta}\xi, \eta \rangle \sim t\langle \delta\xi, \eta \rangle \text{ qd } t \rightarrow 0, \langle \delta\xi, \eta \rangle \neq 0$$

L'implication a) \implies b) est donc immédiate. Montrons que b) \implies a). Il suffit de montrer que $e^{t(\delta-\lambda_0)}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ pour $t \geq 0$ et un $\lambda_0 \geq 0$. On peut choisir λ_0 tel que la partie réelle de tout élément du spectre de $\lambda_0 - \delta$ soit positive et que

$$\text{Re}\langle (\lambda_0 - \delta)\xi, \xi \rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

L'opérateur A de \mathcal{H}^J dans \mathcal{H}^J qui à $\xi \in \mathcal{H}^J$ associe $(\lambda_0 - \delta)\xi \in \mathcal{H}^J$ est monotone au sens de [2]. Il est maximal monotone au sens de [2] car $1 + \mu A$ est surjectif pour tout $\mu > 0$, et c'est le générateur du semi-groupe $t \rightarrow e^{t(\lambda_0 - \delta)}$ de contractions de \mathcal{H}^J . Soit $\xi \in \mathcal{H}^J, \xi = \xi^+ - \xi^-$ (4.1 c)) alors en utilisant b) on a $\langle A\xi, \xi - \xi^+ \rangle = \langle A\xi^-, \xi^- \rangle \geq 0$. Comme avec les notations de [2] on a $A^0\xi = A\xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^J$, la proposition 4.5 de [2] montre que

$$e^{t(\lambda_0 - \delta)}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$$

pour tout $t \geq 0$.

LEMME 5.4. — Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^+)$ un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène \mathcal{H}^+ .

a) Soit U un unitaire de \mathcal{H} tel que $U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ et que U commute avec tout $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ alors $U = 1$.

b) Soit δ un élément du centre de $D(\mathcal{H}^+)$ alors $\delta = \delta^*$.

Démonstration. — a) Il suffit de montrer que $\operatorname{Re}(\operatorname{Sp} U) \geq 0$ puis d'appliquer le résultat à U^n pour tout n . On a

$$U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$$

donc $UJ = JU$ et pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$

$$\operatorname{Re} \langle U(\xi_1 + i\xi_2), \xi_1 + i\xi_2 \rangle = \langle U\xi_1, \xi_1 \rangle + \langle U\xi_2, \xi_2 \rangle$$

Il suffit donc de montrer que $\langle U\xi, \xi \rangle \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}^J$. Le lemme 4.1 c) montre que $\xi = \xi^+ - \xi^-$ avec $\xi^+, \xi^- \geq 0$, $\xi^+ \perp \xi^-$. Soit F la face de ξ^+ dans \mathcal{H}^+ ; F^\perp la face orthogonale contient ξ^- . Comme $P_F - P_{F^\perp}$ commute avec U , on a $U\xi^+ \in P_F\mathcal{H}$ et $U\xi^- \in P_{F^\perp}\mathcal{H}$ donc

$$\langle U\xi, \xi \rangle = \langle U\xi^+, \xi^+ \rangle + \langle U\xi^-, \xi^- \rangle \geq 0$$

b) Il suffit de montrer que si $\delta = -\delta^*$ on a $\delta = 0$ ce qui résulte facilement de a) appliqué à $e^{it\delta}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

LEMME 5.5. — Soient $\mathcal{H}, \mathcal{H}^+$ un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène \mathcal{H}^+ , I une structure complexe sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, $M_1 = \{\delta_1 + i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$,

$$M_{-1} = \{\delta_1 - i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}.$$

a) On a $M_1 \subset M'_{-1}, M_{-1} \subset M'_1$.

b) Si $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$, $\delta = \delta^*$ il existe un unique

$$\delta_0 = I_0(\delta) \in I(\delta)$$

tel que $\delta_0^* = -\delta_0$.

c) Soient F une face de \mathcal{H}^+ et $\delta_F = 1/2(1 - P_F + P_{F^\perp})$, $\varepsilon_F^+ = \delta_F + iI_0(\delta_F)$, $\varepsilon_F^- = \delta_F - iI_0(\delta_F)$ alors :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_F^+)^* &= \varepsilon_F^+, \quad (\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-, \quad \varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F \\ J\varepsilon_F^+J &= \varepsilon_F^-, \quad \varepsilon_F^+\xi = \xi \quad \forall \xi \in F, \quad \varepsilon_F^+\xi = 0 \quad \forall \xi \in F^\perp \end{aligned}$$

d) $X \in M'_1 \implies X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+)$,

$$X \in M'_{-1} \implies X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+).$$

e) M_1 et M_{-1} sont des algèbres de von Neumann dans \mathcal{H} , on a $M_{-1} = M_1'$, $M_{-1}' = M_1$ et $JM_1J = M_{-1}$.

Démonstration. — a) Soient $\delta_1, \delta_3 \in D(\mathcal{H}^+)$, $\delta \rightarrow \underline{\delta}$ l'application canonique de $D(\mathcal{H}^+)$ sur $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$, $\delta_2 \in I(\delta_1)$, $\delta_4 \in I(\delta_3)$. On a

$$[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4] = [\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] + i([\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4])$$

La bilinéarité du crochet dans $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ montre que

$$\begin{aligned} & [\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+), \\ & [\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4] \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+) \\ & ([\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] + [I\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0, [I\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] - [\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0) \end{aligned}$$

Ainsi $[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4]$ appartient au centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par M_1 et M_{-1} , donc est nul.

b) On a $I(\delta)^* = -I(\delta)$ donc $\delta_1 + \delta_1^* \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$ pour tout $\delta_1 \in I(\delta)$. Alors $\delta_0 = \delta_{1-1/2}(\delta_1 + \delta_1^*)$ vérifie b). Si δ_0 et δ_0' vérifient b), on a $\delta_0 - \delta_0' \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$ donc $\delta_0 - \delta_0' = \delta_0^* - \delta_0'^*$ (5.4) et $\delta_0 = \delta_0'$.

c) On a $\delta_F^* = \delta_F$ donc $(\varepsilon_F^+)^* = \varepsilon_F^+$, de même $(\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-$ en utilisant b), $\varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F$, $J\varepsilon_F^+J = J\delta_FJ - iJI_0(\delta_F)J = \varepsilon_F^-$. M_{+1} et M_{-1} sont des sous-espaces vectoriels autoadjoints de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $(M_{+1})''$ commute avec $(M_{-1})''$. Pour tout

$$\delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \quad \delta_2 \in I(\delta_1)$$

on a $J(\delta_1 + i\delta_2)J = \delta_1 - i\delta_2$ donc $JM_1J = M_{-1}$, $JM_1'J = M_{-1}''$. Soit $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$ et soit $\delta = x + JxJ$. On a $J\delta = \delta J$ et δ commute avec $P_F - P_{F'}$ pour toute face F de \mathcal{H}^+ donc :

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \xi \perp \eta \implies \delta\xi \perp \eta$$

Le lemme 5.4 montre que $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ et le lemme 5.6 que $\delta = \delta^*$. On en déduit facilement que $JxJ = x^*$ pour tout $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$. Il en résulte que pour tout projecteur $e \neq 0$, $e \in M_{+1}''$ on a $eJeJ \neq 0$. En effet si $eJeJ = 0$ on a $ueu^*JeJ = 0$ pour tout unitaire u de M_{+1}'' ; puis $\bar{e}JeJ = 0$

où \bar{e} est le support central de e dans M''_{+1} ; puis $\bar{e}J\bar{e}J = 0$ et $\bar{e} = 0$ car $J\bar{e}J = \bar{e}$. Comme $\varepsilon_F^\dagger + J\varepsilon_F^\dagger J = 2\delta_F$ et $\varepsilon_F^\dagger \in M_{+1}$, $\text{Sp } 2\delta_F \subset [0, 2]$ l'opérateur auto-adjoint ε_F^\dagger vérifie $0 \leq \varepsilon_F^\dagger \leq 1$. Soit $\xi \in F$, on a

$$2\langle \varepsilon_F^\dagger \xi, \xi \rangle = \langle \varepsilon_F^\dagger \xi, \xi \rangle + \langle \xi, \varepsilon_F^\dagger \xi \rangle \\ = \langle (\varepsilon_F^\dagger + J\varepsilon_F^\dagger J)\xi, \xi \rangle = \langle 2\delta_F \xi, \xi \rangle$$

donc $\varepsilon_F^\dagger \xi = \xi$ car $\langle \delta_F \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$. Soit $\xi \in F^\perp$, on a de même $2\langle \varepsilon_F^\dagger \xi, \xi \rangle = \langle 2\delta_F \xi, \xi \rangle = 0$ et $\varepsilon_F^\dagger \xi = 0$.

d) Soit $X \in M'_1$, alors $\delta = X + JXJ$ vérifie $\delta J = J\delta$. Pour toute face F de \mathcal{H}^+ , X commute avec ε_F^\dagger donc :

$$\xi_1 \in F \implies \varepsilon_F^\dagger X \xi_1 = X \xi_1, \quad \xi_2 \in F^\perp \implies \varepsilon_F^\dagger \xi_2 = 0$$

et on a alors $X\xi_1 \perp \xi_2$, $JX\xi_1 \perp J\xi_2$, $JXJ\xi_1 \perp \xi_2$ et $\delta\xi_1 \perp \xi_2$.

e) Il suffit de montrer que tout élément X de M'_1 est dans M_{+1} . Soit $\delta_1 \in D(\mathcal{H}^+)$ tel que $2\delta_1 = X + JXJ$ et soient $\delta_2 \in I(\delta_1)$, $X_1 = \delta_1 - i\delta_2$. On a

$$X_1 \in M'_1, \quad (X - X_1) + J(X - X_1)J = 0$$

Ainsi

$$X - X_1 \in M'_1 \cap JM'_1J = (M_1 \cup M_{-1})' = \text{Centre } D(\mathcal{H}^+) \\ + i \text{ Centre } D(\mathcal{H}^+).$$

(Tout élément auto-adjoint de $(M_1 \cup M_{-1})'$ vérifie $JxJ = x$ et $x \in D(\mathcal{H}^+)$ donc $x \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$.) Il existe donc $\delta'_1 \in D(\mathcal{H}^+)$, $\delta'_2 \in I(\delta'_1)$ tels que $X = \delta'_1 - i\delta'_2$.

Démonstration du théorème 5.2. — Les assertions a) et b) résultent du lemme 5.5 e). Démontrons c). Soit d'abord u un unitaire de M . Il existe un opérateur $h = -h^*$, $h \in M$ tel que $u = e^h$. On a $uJuJ = e^h J e^{-h} J = e^h e^{JhJ}$ et comme JhJ commute avec h on a $uJuJ = e^{(h+JhJ)}$. Comme $h \in M$ on a $h + JhJ \in D(\mathcal{H}^+)$ (5.7 d)), donc

$$e^{(h+JhJ)} \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+.$$

Soit ρ un opérateur positif inversible, $\rho \in M$, écrivant $\rho = e^f$ avec $f \in M$, $f = f^*$ on vérifie de même que

$$\rho J \rho J \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+.$$

Pour $x \in M$, x inversible, il existe un unitaire $u \in M$, un

opérateur positif inversible $\rho \in M$ tels que $x = u\rho$. On a alors

$$xJxJ = u\rho Ju\rho J = uJuJ\rho J\rho J \quad \text{car} \quad JMJ = M'.$$

Enfin pour tout $x \neq 0$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments inversibles de M ([6]) telle que $\|x_n\| \leq \|x\|$ pour tout n et que $x_n \rightarrow x$ fortement quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi

$$xJxJ\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n Jx_n J\xi \in \mathcal{H}^+ \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{H}^+.$$

d) Soit $\xi_0 \in \mathcal{H}^+$ tel que $\eta \in \mathcal{H}^+, \eta \perp \xi_0 \implies \eta = 0$. Montrons d'abord que ξ_0 est séparateur (donc totalisateur car $J\xi_0 = \xi_0$) pour M . Soit $e \in M$ un projecteur tel que $e\xi_0 = 0$. Pour tout $\xi \in \mathcal{H}^+$ on a $eJeJ\xi \in \mathcal{H}^+$ (c)) et $\langle eJeJ\xi, \xi_0 \rangle = 0$ donc par hypothèse $eJeJ\xi = 0$. Ainsi $eJeJ = 0$ et $e = 0$. Pour tout $x \in M$, on a $xJxJ\xi_0 \in \mathcal{H}^+$ donc

$$\langle xJxJ\xi_0, \xi_0 \rangle \geq 0,$$

ce qui montre en utilisant [11] thm 4.2 que J est égal à J_{ξ_0} l'involution isométrique associée à l'algèbre de von Neumann M dans \mathcal{H} et au vecteur séparateur et totalisateur ξ_0 . Pour tout $x \in M$ on a $xJ_{\xi_0}xJ_{\xi_0}\xi_0 \in \mathcal{H}^+$ donc $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} \subset \mathcal{H}^+$; comme $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$ et \mathcal{H}^+ sont autopolaires, on a $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} = \mathcal{H}^+$.

DÉFINITION 5.6. — *Un cône autopolaire \mathcal{H}^+ dans \mathcal{H} est de genre dénombrable quand toute famille de vecteurs $\neq 0$ orthogonaux positifs est au plus dénombrable.*

On vérifie facilement que cette condition équivaut à l'existence d'un $\xi \geq 0$ tel que $\eta \geq 0, \eta \perp \xi \implies \eta = 0$.

THÉORÈME 5.7. — *Soient M une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} , ξ_0 un vecteur totalisateur et séparateur pour M , $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$, $I = I_M$ l'orientation canonique de \mathcal{H}^+ .*

Alors l'algèbre de von Neumann associée à \mathcal{H}^+ et I par le théorème 5.2 est égale à M .

Démonstration. — Soit $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$, et soit $x \in M$ tel que $\delta = x + JxJ$. Par hypothèse $I(\delta)$ est la classe de

$$ix + JixJ = i(x - JxJ)$$

modulo le centre de $D(\mathcal{H}^+)$.

Comme $x + JxJ - ii(x - JxJ) = 2x$ on voit que l'algèbre de von Neumann associée à \mathcal{H}^+ est contenue dans M (le lemme 4.10 montre que Centre $D(\mathcal{H}^+) \subset M$). L'inclusion inverse est immédiate.

THÉORÈME 5.8. — Soit E, E^+ un espace vectoriel complexe ordonné avec unité d'ordre. Pour que E, E^+ soit l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe une forme autopolaire s sur E telle que le complété $\{E^+\}_s^-$ de E^+ soit un cône autopolaire homogène et orientable.

Démonstration. — La nécessité résulte de 1.3, 2.7 c), 4.6, 4.9. Inversement soit u l'unité d'ordre de E^+ et soit $\xi_0 = \eta_s(u)$. Dans $\mathcal{H}_s = \overline{\eta_s(E)}$, ξ_0 vérifie : $\xi \in \mathcal{H}_s^+, \xi \perp \xi_0 \implies \xi = 0$. D'après 1.2 et 5.2, E^+ est isomorphe à la face engendrée par ξ_0 dans $\mathcal{P}_{\xi_0, M}^{\natural}$ où M désigne l'algèbre de von Neumann de genre dénombrable associée à une orientation de \mathcal{H}_s^+ par le théorème 5.2. De plus, l'application $b_{\xi_0}, x \rightarrow \Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_0$ est un isomorphisme de M^+ sur la face de ξ_0 dans $\mathcal{P}_{\xi_0, M}^{\natural}$ (thm 2.7 b) et prop. 1.2 c)).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ARAKI, Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non commutative Radon Nikodym| theorem (à paraître).
- [2] H. BRÉZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de hilbert, Amst. North Holland, Pub. 1973,
- [3] A. CONNES, Groupe modulaire d'une algèbre de Von Neumann, *C. R. Acad. Sci.*, t. 274, série A (1972), 523-526.
- [4] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Annales Sci. de l'École Normale Supérieure*, 4^e série, t. 6 (1973), 133-252.
- [5] A. CONNES et A. VAN DAELE, The Group property of the invariant S (à paraître dans *Math. Scand.*).
- [6] J. DIXMIER et O. MARECHAL, Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann, *Commun. Math. Phys.*, 22 (1972).
- [7] R. V. KADISON, Isometries of operator algebras, *Ann. Math.*, Princeton, 54 (1951), 325.
- [8] S. SAKAI, The absolute value of W^* algebras of finite type, *Tohoku Math. J.*, 8 (1956), 70.

- [9] S. SAKAI, C^* and W^* algebras, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd 60.
- [10] M. TAKESAKI, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, *Lectures notes in Math.* n° 128, Berlin Springer, 1970.
- [11] S. L. WORONOWICZ, On the purification of factor states, *Commun. Math. Phys.*, 28 (1972), 221.

Manuscrit reçu le 2 octobre 1973,
accepté par G. Choquet.

Alain CONNES,
C.N.R.S.
Centre de Physique théorique
31, chemin J.-Aiguier
13274 Marseille.
