ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAKOTO OHTSUKA

Sur les ensembles d'accumulation relatifs à des transformations plus générales que les transformations quasi-conformes

Annales de l'institut Fourier, tome 5 (1954), p. 29-37

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1954__5__29_0>

SUR LES ENSEMBLES D'ACCUMULATION RELATIFS A DES TRANSFORMATIONS PLUS GÉNÉRALES QUE LES TRANSFORMATIONS QUASI CONFORMES

par Makoto OHTSUKA

INTRODUCTION

Dans la théorie des ensembles d'accumulation il s'agit souvent de savoir si la différence de l'ensemble d'accumulation intérieure et de l'ensemble d'accumulation frontière est ouverte, si chaque valeur de cette différence, sauf au plus les valeurs d'un certain petit ensemble, est prise dans tout voisinage du point frontière et si une valeur non prise dans un voisinage est valeur asymptotique dans tout voisinage (1). La transformation étant quasi conforme au sens ordinaire et l'ensemble d'accumulation frontière étant défini par rapport à la frontière, un ensemble fermé de capacité logarithmique nulle exclu, K. Noshiro [4] a posé la question de savoir si les deux premiers énoncés sont vrais; dans le deuxième énoncé il demande si le petit ensemble exceptionnel est de capacité logarithmique nulle. Cette question est à l'origine de notre mémoire, quoique la question elle-même ait déjà été résolue par T. Yosida [8].

Dans notre mémoire nous traiterons le problème pour quelque transformations continues assez générales; elles sont des transformations plus générales que les transformations quasi conformes ordinaires des surfaces de recouvrement d'une surface de Rieman ouverte (autrement dit, elles sont des transformations multiformes de cette surface fondamentale) dans une autre surface de Riemann. L'idée fondamentale de la

(1) Voir [4] pour la bibliographie.

démonstration du théorème 1 est celle de W. Gross [3] et nous emploierons la généralisation du théorème étoilé de Gross établi dans [6].

1. Soit $\underline{\mathfrak{R}}$ une surface de Riemann ouverte et $\tilde{\mathfrak{R}}$ une autre surface de Riemann quelconque. On notera $\mathcal{C}_{\underline{\mathfrak{R}}} = \underline{\mathcal{C}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{R}}} = \tilde{\mathcal{C}}$) l'ensemble de toutes les composantes frontières au sens de Kérékjártó-Stoïlow de $\underline{\mathfrak{R}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{R}}$). Soit $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$ un ensemble dénombrable de surfaces de Riemann qui sont des surfaces de recouvrement de $\underline{\mathfrak{R}}$, et soit $f(P)$ une transformation continue de $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$ dans $\tilde{\mathfrak{R}}$, à dérivées partielles continues (par rapport aux paramètres locaux) et de jacobien non nul, sauf au plus en un ensemble fermé E de mesure linéaire nulle, ayant pour image $\tilde{E}$, de mesure linéaire également nulle dans $\tilde{\mathfrak{R}}$ (2). Une approximation régulière d'un ensemble fermé $\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}} \subset \underline{\mathcal{C}}$ sera une suite décroissante $\{\underline{D}_n\}$, sans points adhérents, d'ensembles ouverts dans $\underline{\mathfrak{R}}$ à frontière relative compacte régulière telle que tout filtre définissant un point de $\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}$, et seulement un tel filtre, contienne tout $\{\underline{D}_n\}$. On dira que $f(P)$ est *parabolique* $[\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}]$ (3), si, pour tout compact $\underline{K}$ dans $\underline{\mathfrak{R}}$, il existe une approximation régulière $\{\underline{D}_n\}$ de $\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}$ de frontières relatives $\{\underline{\gamma}_n\}$ et des fonctions harmoniques $\{u_n(\underline{P})\}$, respectivement définies dans $\underline{D}_1 - (\underline{D}_n + \underline{\gamma}_n)$ et égales à 0 sur $\underline{\gamma}_1$ et à 1 sur $\underline{\gamma}_n$, telles que $\underline{D}_1 \cap \underline{K} = \emptyset$ et

$$\int_0^1 \frac{du_n}{\int_{(u_n)} q(P)\, dv_n(\underline{P}(P))} \to \infty \qquad \text{avec } n,$$

où $q(P)$ est le quotient de dilatation de $f(P)$ en P, $v_n(\underline{P})$ est la fonction conjuguée de $u_n(\underline{P})$ et l'intégrale $\int_{(u_n)}$ est prise sur les courbes de $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$ qui se projettent en la courbe de niveau $u_n(\underline{P}) = u_n$; cette intégrale est définie pour presque toute valeur de u_n, car $\underline{E}$ est de mesure linéaire nulle.

Soit $\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}}$ un sous-ensemble de $\underline{\mathcal{C}}$. *L'ensemble d'accumulation inté-*

(2) $\tilde{E}$ est une union dénombrable d'ensembles compacts dans $\tilde{\mathfrak{R}}$. On notera $\underline{E}$ la projection de E.

(3) Voir [6], mais il faut faire attention aux notations : $\underline{\mathfrak{R}}$ ici correspond à $\mathfrak{R}$ dans [6] et $f(P)$ ici correspond à la fonction réciproque de $f(\tilde{P})$ dans [6].

rieure $S_{\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}}^{(\mathfrak{K})} = S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$ *en* $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ est défini par l'ensemble de points de $\tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$ tel que pour chacun de ses points $\tilde{P}$ il existe une suite $\{P_n\}$ sur $\mathfrak{K}$ dont la projection dans $\underline{\mathfrak{R}}$ tend vers $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ et dont l'image $\{f(P_n)\}$ tend vers $\tilde{P}$. $\underline{U}$ étant un voisinage dans $\underline{\mathfrak{R}} + \underline{\mathfrak{C}}$ de $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ (c'est-à-dire un ensemble ouvert contenant $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$), on note $M_{\underline{U}}$ l'adhérence dans $\tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$ de l'ensemble de toutes les limites $f(P_n) \in \tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$ obtenues lorsque la projection de P_n tend vers un point de $\underline{U} \cap \underline{\mathfrak{R}}$, tandis que $\{P_n\}$ ne s'accumulent pas dans $\mathfrak{K}$. *L'ensemble d'accumulation frontière* $S\Gamma_{\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}}^{(\mathfrak{K})} = S\Gamma(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$ *en* $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ est défini par $\bigcap_{\underline{U}} M_{\underline{U}}$.

2. Pour $D \subset \mathfrak{K}$ on notera $n(\tilde{P}, D)$ le nombre des points dans $D - E$ qui sont transformés en $\tilde{P}$ par $f(P)$; $n(\tilde{P}, \mathfrak{K})$ sera noté simplement $n(\tilde{P})$.

Nous donnons d'abord le

Lemme 1. — *Soit $\mathfrak{K}$ un ensemble dénombrable de surfaces de recouvrement d'une surface de Riemann quelconque $\underline{\mathfrak{R}}$, et soit $f(P)$ une transformation parabolique $[\mathcal{E}_{\underline{\mathfrak{C}}}]$ de $\mathfrak{K}$ dans une autre surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$* ([4]), *$\mathcal{E}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ étant l'ensemble des composantes frontières de $\underline{\mathfrak{R}}$ qui sont adhérentes à la projection de $\mathfrak{K}$. Alors, pour chaque composante connexe $\tilde{\omega}$ de $\tilde{\mathfrak{R}} - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$, $n(\tilde{P}) = \sup\limits_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}} n(\tilde{P})$ quasi partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de capacité logarithmique nulle* ([5])) *dans $\tilde{\omega} - \tilde{E}$. Si $n(\tilde{P}) \not\equiv 0$ dans $\tilde{\omega}$, la mesure harmonique de $\tilde{\omega}^b - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$ est nulle, où $\tilde{\omega}^b$ est la frontière de $\tilde{\omega}$ dans $\tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$.*

Posons $\sup\limits_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}} n(\tilde{P}) = N$ et supposons que $N > 0$ et que l'ensemble $\tilde{B} = \{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E};\ n(\tilde{P}) < N\}$ ([6]) soit de capacité logarithmique positive. Si $N = \infty$ il existe n_0, $0 < n_0 < \infty$, tel que $\tilde{B}' = \{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E};\ n(\tilde{P}) < n_0\}$ est de capacité loga-

([4]) Si $\tilde{\mathfrak{R}}$ est clos, on suppose que f (P) remplit seulement les conditions relatives à ses dérivées et à son jacobien.

([5]) Quand la capacité logarithmique intérieure et la capacité logarithmique extérieure coïncident, on les appelle la capacité logarithmique et l'ensemble est appelé capacitable (logarithmiquement).

([6]) C'est un ensemble borélien et donc capacitable d'après le résultat de Choquet [2].

rithmique positive. Soit $\tilde{B}_0$ un sous-ensemble compact discret de capacité logarithmique positive de $\tilde{B}$ (si $N < \infty$) ou de $\tilde{B}'$ (si $N = \infty$). Soit $\tilde{P}_0 \in \tilde{\omega} - \tilde{E}$ un point tel que $n(\tilde{P}_0) = N$ (si $N < \infty$) ou $n(\tilde{P}_0) = N' \geqq n_0$ (si $N = \infty$), et soient $\{Q_i\}$ ($i = 1, \ldots,$ N ou N′) les points dans $\mathfrak{R} - E$ tels que $f(Q_i) = \tilde{P}_0$. On définit la fonction de Green $G(\tilde{P})$ ayant le pôle $\tilde{P}_0$ dans $\tilde{\omega} - \tilde{B}_0$. Les trajectoires orthogonales maximales issues de $\tilde{P}_0$, sans points multiples, des courbes de niveau de $G(\tilde{P})$ sont appelées lignes de Green (voir [1]). Comme $\tilde{E}$ est de mesure linéaire nulle, presque toutes les lignes de Green ne rencontrent pas $\tilde{E}$. Toutes les images réciproques issues de Q_i des lignes de Green forment un domaine D_i dans $\mathfrak{R}$ autour de Q_i, et si $i \neq j$, $D_i \cap D_j = \emptyset$. L'image sur $\tilde{\mathfrak{R}}$ de D_i nous donne un écoulement harmonique monofeuillet fini, et les trajectoires qui convergent vers $\tilde{B}_0$ forment un sous-écoulement positif (voir [6]) ([7]). D'après le théorème 2 de [6] les images dans $\mathfrak{R}$ de presque toutes ces trajectoires ne s'étendent pas vers $\underline{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}$. Donc ces images sur $\mathfrak{R}$ aboutissent aux points de $\mathfrak{R} - E$. Alors il existe au moins un point de B_0 qui possède N (ou N′) images réciproques dans $\mathfrak{R} - E$. Ainsi il en résulte une contradiction. Comme la projection de l'image réciproque d'une ligne de Green qui tend vers $\tilde{\mathcal{C}} - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$ s'étend vers $\underline{\mathcal{C}}$, encore par suite du théorème 2 de [6], il suit que la mesure harmonique de $\tilde{\omega}^b - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$ est nulle si $n(\tilde{P}) \not\equiv 0$ dans $\tilde{\omega}$ ([7]).

Remarque. — Définissons un ensemble $N_{\underline{U}}$ pour $\underline{U}$ par l'ensemble des points de $\mathfrak{R} + \tilde{\mathcal{C}}$ tel que pour chacun de ses points $\tilde{P}$ il existe une courbe sur $\mathfrak{R}$ tendant vers la frontière de $\mathfrak{R}$ dont l'image converge vers $\tilde{P}$ et dont la projection s'accumule sur un ensemble compact dans $\underline{U} \cap \mathfrak{R}$. Alors $N_{\underline{U}} \subset M_{\underline{U}}$. Si on emploie $N_{\underline{\mathfrak{R}}}$ au lieu de $M_{\underline{\mathfrak{R}}}$ dans le lemme, on a une même conclusion.

Corollaire ([8]). — *Soit $\tilde{\mathfrak{R}}$ une surface de Riemann, soit $\mathfrak{R}$ une*

([7]) La mesure harmonique de $\tilde{B}_0$ à $\tilde{P}_0$ est égale à la mesure de Green des lignes de Green qui convergent vers $\tilde{B}_0$ (voir [1]); il en est de même de $\tilde{\omega}^b - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$.

([8]) C'est une extension des résultats de Nagai, Tsuji, Yûjôbô, Mori et l'auteur; voir [5] et [7].

surface de recouvrement d'une autre surface de Riemann ouverte $\underline{\mathfrak{R}}$, *et soit* $f(\mathrm{P})$ *une transformation parabolique* $[\underline{\mathfrak{C}}]$ *de* $\mathfrak{R}$ *dans* $\tilde{\mathfrak{R}}$. *Nous supposons que la projection de toute courbe asymptotique de* $f(\mathrm{P})$ [9] *qui tend vers la frontière de* $\mathfrak{R}$ *n'est pas compacte dans* $\underline{\mathfrak{R}}$. *Alors, si* $\mathrm{D} \subset \mathfrak{R}$ *est une composante connexe de l'image réciproque d'un domaine quelconque* $\tilde{\mathrm{D}} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$, on conclut que

$$n(\tilde{\mathrm{P}}, \mathrm{D}) = \sup_{\tilde{\mathrm{P}} \in \tilde{\mathrm{D}} - \tilde{\mathrm{E}}} n(\tilde{\mathrm{P}}, \mathrm{D})$$

quasi partout dans $\tilde{\mathrm{D}} - \tilde{\mathrm{E}}$.

3. Soit $\mathfrak{G}$ un ensemble dénombrable de surfaces de Riemann qui sont non nécessairement des surfaces de recouvrement, et soit $f(\mathrm{P})$ une transformation continue de $\mathfrak{G}$ dans une autre surface de Riemann $\tilde{\mathfrak{R}}$. Étant donné un domaine $\tilde{\mathrm{D}} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$, on dira que $f(\mathrm{P})$ *possède la propriété d'Iversen par rapport à* $\tilde{\mathrm{D}}$ si pour un point $\mathrm{P}_1 \in \mathfrak{G}$ quelconque dont l'image est $f(\mathrm{P}_1) = \tilde{\mathrm{P}}_1$ dans $\tilde{\mathrm{D}}$, pour un autre point quelconque $\tilde{\mathrm{P}}_2 \in \tilde{\mathrm{D}}$ et pour un sous-domaine $\tilde{\mathrm{V}} \ni \tilde{\mathrm{P}}_1, \tilde{\mathrm{P}}_2$ de $\tilde{\mathrm{D}}$ quelconque, on peut trouver une courbe $l \subset \mathfrak{G}$, partant de P_1 et ayant la valeur $\tilde{\mathrm{P}}_2$ comme valeur asymptotique lorsque $\mathrm{P} \in l$ tend vers un point extrémité, telle que son image $f(l)$ soit située dans $\tilde{\mathrm{V}}$.

Lemme 2. — *Sous les mêmes conditions que dans le lemme* 1, $f(\mathrm{P})$ *possède la propriété d'Iversen par rapport à* $\tilde{\omega}$.

Soient $\tilde{\mathrm{P}}_1$, $\tilde{\mathrm{P}}_2$ et $\tilde{\mathrm{V}}$ définis comme ci-dessus. Soit $\tilde{\mathrm{V}}' \ni \tilde{\mathrm{P}}_1, \tilde{\mathrm{P}}_2$ un sous-domaine compact dans $\tilde{\mathrm{V}}$. Comme on peut prendre un point $\mathrm{P}_1 \notin \mathrm{E}$ dans un voisinage quelconque de P_1 on peut supposer que $\mathrm{P}_1 \notin \mathrm{E}$. Pour la même raison que dans la démonstration du lemme 1, presque toutes les lignes de Green de la fonction de Green dans $\tilde{\mathrm{V}}'$, ayant le pôle $\tilde{\mathrm{P}}_1$, ne passent pas par $\tilde{\mathrm{E}}$ et ont des images réciproques partant de P_1 et aboutissent aux points de $\mathfrak{R}$ qui correspondent aux points frontières de $\tilde{\mathrm{V}}'$. Il existe au moins une telle ligne de Green $\tilde{l}$ qui passe par un point $\tilde{\mathrm{P}}'$ dans un voisinage de $\tilde{\mathrm{P}}_2$. A partir de $\tilde{\mathrm{P}}'$ au moins une ligne de Green analogue à $\tilde{l}$ passe dans un voisinage plus petit

[9] Ici on suppose que la valeur asymptotique est située dans $\tilde{\mathfrak{R}}$.

de $\tilde{P}_2$. En répétant ce procédé, on obtient une courbe aboutissant en $\tilde{P}_2$ dans $\tilde{V}'$, courbe dont l'image réciproque dans $\mathfrak{R}$ part de P_1 et a $\tilde{P}_2$ comme valeur asymptotique.

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes conditions que dans le lemme* 1, *chaque valeur* $\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}$ *telle que* $n(\tilde{P}) < \sup_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}} n(\tilde{P})$ *est une valeur asymptotique suivant une courbe sur* $\mathfrak{R}$ *dont la projection converge vers un point de* $\underline{\mathcal{C}}$; *il en est de même de chaque point de* $\tilde{\omega}^b - M_{\underline{\mathfrak{R}}}$.

En effet, soit $\tilde{P}_0 \in \tilde{\omega} - \tilde{E}$ un point quelconque tel que $n(\tilde{P}_0) = \sup_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}} n(\tilde{P}) = N$, et soient $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ les points sur $\mathfrak{R} - E$ tels que $f(P_n) = \tilde{P}_0$. D'après le lemme 2 on a une courbe $l_n \subset \mathfrak{R}$ partant de P_n et ayant $\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}$, tel que $n(P) < N$, comme valeur asymptotique suivant l_n. On peut choisir $\{l_n\}$ tels que les images $\{f(l_n)\}$ sont égales et ne passent pas par $\tilde{E}$. Alors il existe au moins une courbe de $\{l_n\}$ dont la projection converge vers un point de $\underline{\mathcal{C}}$. Le deuxième énoncé est démontré de la même manière.

Remarque. — Il suit de ce corollaire que, si dans le lemme 1 $\underline{R}$ est clos, $n(\tilde{P}) = C^{te}$ dans $\tilde{\omega} - \tilde{E}$ et que $\tilde{\omega}^b \subset M_{\underline{\mathfrak{R}}}$.

4. Maintenant nous énonçons :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathfrak{R}$ *un ensemble dénombrable de surfaces de recouvrement d'une surface de Riemann ouverte* $\underline{\mathfrak{R}}$. *Soit* $\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}$ *un sous-ensemble isolé de la frontière de Kérékjártó-Stoïlow* $\mathcal{C}_{\underline{\mathfrak{R}}} = \underline{\mathcal{C}}$, *et soit* $f(P)$ *une transformation parabolique* $[\mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}]$ *de* $\mathfrak{R}$ *dans une autre surface de Riemann* $\tilde{\mathfrak{R}}$. *Soient* $S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}})$ *et* $S\Gamma(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}})$ *les ensembles d'accumulation, définis au* § 1, *en un ensemble fermé* $\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}} \subset \mathcal{E}_{\underline{\mathcal{C}}}$. *Alors chaque composante connexe* $\tilde{\Omega}$ *de* $\tilde{\mathfrak{R}} + \mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{R}}} - S\Gamma(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}})$, *telle que* $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}}) \neq \emptyset$, *est contenue dans* $S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}})$, *toute valeur de* $\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{E}$ *est prise sur une suite de points de* $\mathfrak{R}$ *dont la projection converge vers* $\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}}$ *sauf au plus les valeurs d'un ensemble de capacité logarithmique nulle dans* $\tilde{\mathfrak{R}}$, *et la mesure harmonique de* $\tilde{\Omega} \cap \mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ *est nulle dans* $\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}}$; *sinon* $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathcal{C}}}) - \tilde{E}$ *consiste en un ensemble dans* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *de capacité logarithmique nulle* *et en un ensemble dans $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ de mesure harmonique nulle par rapport à* $\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}}$ (10).

Nous supposons que $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle. Soit $\tilde{P}_0 \in \tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) - \tilde{E}$ tel que pour tout voisinage $\tilde{U} \subset \tilde{\Omega}$ de $\tilde{P}_0$, $\tilde{U} \cap S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle. Soit $\tilde{\Omega}_0 \ni \tilde{P}_0$ un domaine quelconque compact dans $\tilde{\Omega}$, et soit $\underline{U}_0$ un voisinage de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ de frontière relative compacte $\underline{U}_0^b$ tel que la partie de $\underline{\mathcal{C}}$ dans $\underline{U}_0$ est contenue dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ et tel que $M_{\underline{U}_0} \cap \tilde{\Omega}_0 = \emptyset$. Soit $\underline{U} \subset \underline{U}_0$ un autre voisinage de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ de frontière relative compacte $\underline{U}^b \subset \underline{U}_0$ tel que $\underline{U}^b \cap \underline{E} = \emptyset$ et tel que $\tilde{P}_0 \notin f(\underline{U}^b)$, où $f(\underline{U}^b)$ désigne l'image par $f(P)$ des courbes sur $\mathfrak{R}$ qui se projettent en $\underline{U}^b$. Soit $\tilde{\omega}$ la composante connexe de $\tilde{\mathfrak{R}} - M_{\underline{U}} - f(\underline{U}^b)$, qui contient $\tilde{P}_0$ ou dont $\tilde{P}_0$ est un point frontière. D'après le lemme 1, $n(\tilde{P}, U) = \sup\limits_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} - \tilde{E}} n(\tilde{P}, U) = N$ quasi partout dans $\tilde{\omega} - \tilde{E}$, où U est la partie de $\mathfrak{R}$ qui se projette dans $\underline{U} \cap \underline{\mathfrak{R}}$, et la mesure harmonique dans $\tilde{\omega}$ de $\tilde{\omega}^b - M_U - f(\underline{U}^b)$ est nulle. Si $N < \infty$, les points $\tilde{P} \notin \tilde{E}$ tel que $n(\tilde{P}, U) = N$ n'appartient pas à $S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}})$, et donc $S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) \cap \tilde{\omega} - \tilde{E}$ est de capacité logarithmique nulle. Ainsi il arrive une contradiction avec notre hypothèse sur $\tilde{P}_0$. Donc $n(\tilde{P}, U) = \infty$ quasi partout dans $\tilde{\omega} - \tilde{E}$.

Soit $\tilde{\omega}_1$ une composante connexe de $\tilde{\mathfrak{R}} - M_{\underline{U}} - f(\underline{U}^b)$ telle que $n(\tilde{P}, U) = \infty$ quasi partout dans $\tilde{\omega} - \tilde{E}$ et soit $\tilde{\omega}_2$ une autre composante connexe. Supposons qu'elles sont situées à deux côtés d'une section, placée dans $\tilde{\Omega}_0$, de $f(\underline{U}^b)$. Soit $\tilde{P}_1 \notin \tilde{E}$ un point quelconque de cette section. Soit $\underline{U}'$, $\underline{U} \subset \underline{U}''$, un voisinage de $\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}$ tel que $\underline{U}' - \underline{U}$ est compact dans $\underline{\mathfrak{R}}$ et tel que $\underline{U}'^b \subset \underline{U}_0$, $\underline{U}'^b \cap \underline{E} = \emptyset$ et $\tilde{P}_1 \notin f(\underline{U}'^b)$. Soit $\tilde{\omega}_0$ la composante de $\tilde{\mathfrak{R}} - M_{\underline{U}'} - f(\underline{U}'^b)$ qui contient $\tilde{P}_1$. D'après le lemme 1, $n(\tilde{P}, U') = \sup\limits_{\tilde{P} \in \tilde{\omega}_0 - \tilde{E}} n(\tilde{P}, U')$ quasi partout

(10) On dira simplement que $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) - \tilde{E}$ est de mesure harmonique nulle; de la même manière on définira la nullité de la mesure harmonique de $\tilde{G} \cap S(\mathfrak{F}_{\mathcal{C}}) - \tilde{E}$ pour un sous-domaine quelconque $\tilde{G}$ de $\tilde{\Omega}$.

dans $\tilde{\omega}_0 - \tilde{E}$, où U' est la partie de $\mathfrak{R}$ qui se projette dans $\underline{U}'$. Comme il existe un point $\tilde{P} \in \tilde{\omega}_1 \cap \tilde{\omega}_0 - E$ tel que $n(\tilde{P}, U) = \infty$, alors $n(\tilde{P}, U') = \infty$ quasi partout dans $\tilde{\omega}_0 - \tilde{E}$. Donc on doit avoir $n(\tilde{P}, U) = \infty$ quasi partout dans $\tilde{\omega}_0 - \tilde{E}$ et dans $\tilde{\omega}_2 - \tilde{E}$, car $0 \leqq n(\tilde{P}, U' - U) < \infty$ pour tout $\tilde{P} \in \tilde{\Omega}_0 - \tilde{E}$. Ainsi on voit que $n(\tilde{P}, U) = \infty$ quasi-partout non seulement sur $\tilde{\Omega}_0 - f(\underline{U}^b) - \tilde{E}$ mais aussi sur $f(\underline{U}^b) \cap \tilde{\Omega}_0 - \tilde{E}$. A cause de l'arbitraire de $\underline{U}$, $\tilde{\Omega}_0 \subset S(\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}})$ et toute valeur de $\tilde{\Omega}_0 \cap \tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{E}$ est prise sur une suite de points de $\mathfrak{R}$ dont la projection converge vers $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ sauf au plus un ensemble de capacité logarithmique nulle. $\tilde{\Omega}_0$ étant prise arbitrairement dans $\tilde{\Omega}$, on a la même conclusion pour $\tilde{\Omega}$. Il est facile de voir que la mesure harmonique de $\tilde{\Omega} \cap \mathfrak{C}_{\tilde{\mathfrak{R}}}$ est nulle dans $\tilde{\Omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}}$.

Remarque. — Supposons que $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}) \neq \emptyset$. Si pour tout voisinage $\underline{U}$ de $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$, dans toute composante connexe de la partie de $\mathfrak{R}$ qui est située au-dessus de $\underline{U}$, il existe une courbe tendant vers la frontière de $\mathfrak{R}$ telle que sa projection est compacte dans $\underline{U} \cap \underline{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}) - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle.

En effet, soit $\{\underline{U}_n\}$ une suite de voisinages de $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ qui converge vers $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ et soit $\{P_n\}$ une suite de points de $\mathfrak{R}$ telle que sa projection converge vers $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$ et telle que $f(P_n)$ converge vers un point $\tilde{P}$ de $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$. Menons une courbe l_n sur $\mathfrak{R}$ partant de P_n et tendant vers la frontière de $\mathfrak{R}$ telle que sa projection soit compacte dans $U_n \cap \underline{\mathfrak{R}}$. L'image $f(l_n)$ est une courbe qui part de $f(P_n)$ et tend vers $M_{\underline{U}_n}$. L'ensemble d'accumulation de $\{f(l_n)\}$ est un continu qui est contenu dans $S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$ et joint $\tilde{P}$ avec $S\Gamma(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$ dans $\tilde{\Omega}$. Donc $S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}) \cap \tilde{\Omega} - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle.

D'après le corollaire du lemme 2 on a

Théorème 2. — *Sous les mêmes conditions que celles du théorème 1, si $\tilde{\Omega} \subset S(\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}})$ et si $f(P) \neq \tilde{P} \in \tilde{\Omega}$ dans la partie de $\mathfrak{R}$ qui se projette dans un voisinage $\underline{V}$ de $\mathfrak{F}_{\underline{\mathfrak{C}}}$, $\tilde{P}$ est la valeur asymptotique suivant une courbe sur $\mathfrak{R}$ dont la projection est située dans $\underline{V}$ et converge vers $\underline{\mathfrak{C}}$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot et G. Choquet : Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, 3 (1952), pp. 199-263.
[2] G. Choquet : Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1954), pp. 131-295.
[3] W. Gross : Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen, *Math. Zeit.*, 2 (1918), pp. 3-47.
[4] K. Noshiro : A theorem on the cluster sets of pseudo-analytic functions, *Nagoya Math. Journ.*, 1 (1950), pp. 83-89.
[5] M. Ohtsuka : On a covering surface over an abstract Riemann surface, *Nagoya Math. Journ.*, 4 (1952), pp. 109-118.
[6] M. Ohtsuka : Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1954), pp. 1-28.
[7] M. Tsuji : Theory of meromorphic functions on an open Riemann surface with null boundary, *Nagoya Math. Journ.*, 6 (1953), pp. 137-150.
[8] T. Yosida : Theorems on the cluster sets of pseudo-analytic functions, *Proc. Japan Acad.*, 27 (1951), pp. 268-274.

Université de Nagoya.