

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS GALLISSOT

## **Les formes extérieures en mécanique**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 4 (1952), p. 145-297

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1952\\_\\_4\\_\\_145\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__145_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LES FORMES EXTÉRIEURES EN MÉCANIQUE

par F. GALLISSOT.

---

## INTRODUCTION

La mécanique des systèmes paramétriques développée traditionnellement d'après les idées de Lagrange s'est toujours heurtée à des difficultés notables lorsqu'elle a désiré aborder les questions de frottement entre solides (impossibilité et indétermination) ou la notion générale de liaison (asservissement de M. Béghin), d'autre part la forme lagrangienne des équations du mouvement ne nous donne aucune indication sur la nature du problème de l'intégration.

Dans ces célèbres leçons sur les invariants intégraux Élie Cartan a montré que toutes les propriétés des équations différentielles de la dynamique des systèmes holonomes résultaient de l'existence de l'invariant intégral  $\int \omega$ ,  $\omega = p_i dq^i - H dt$ . Ainsi à tout système holonome dont les forces dérivent d'une fonction de forces est associé une forme  $\omega$ , les équations du mouvement étant les caractéristiques de la forme extérieure  $d\omega$ . Au cours de ces dix dernières années, sous l'influence des topologistes s'est édifiée sur des bases qui semblent définitives la théorie des formes extérieures sur les variétés différentiables. Il est alors naturel de se demander si la mécanique classique ne peut pas bénéficier largement de ce courant d'idées, si elle ne peut pas être construite en plaçant à sa base une forme extérieure de degré deux, si grâce à la notion de variétés, la notion de liaison ne peut pas être envisagée sous un angle plus intelligible, si les indéterminations et impossibilités qui paraissent paradoxales dans le cadre lagrangien n'ont pas une explication naturelle, enfin s'il n'est pas possible de considérer sous un jour nouveau le problème de l'intégration des équations du mouvement, ces dernières étant engendrées par une forme  $\Omega$  de degré deux.

Pour atteindre ces divers objectifs il m'a semblé utile de reprendre dans le chapitre 1 l'étude des bases logiques sur lesquelles est édiflée la mécanique galiléenne. Je montre ainsi dans le § 1 que lorsqu'on se propose de trouver des formes génératrices des équations du mouvement d'un point matériel invariants dans les transformations du groupe galiléen, la forme la plus intéressante est une forme extérieure de degré deux définie sur une variété  $V_7 = E_3 \otimes E \otimes_3 T$  ( $E_3$  espace euclidien,  $T$  droite numérique temporelle)<sup>(1)</sup>. Dans le § 11 on montre qu'à tout système paramétrique holonome à  $n$  degrés de liberté est associé une forme  $\Omega$  de degré deux de rang  $2n$  définie sur une variété différentiable dont les caractéristiques sont les équations du mouvement<sup>(2)</sup>. Cette forme s'exprime si l'on veut au moyen de  $2n$  formes de Pfaff et de  $dt$ , la forme hamiltonienne n'étant qu'un cas particulier simple. Dans le § 3 j'indique sommairement comment on peut s'affranchir de la servitude des coordonnées dans l'étude des systèmes dynamiques et le rôle important joué par l'opérateur  $i(\ )$  antidérivation de M. H. Cartan<sup>(3)</sup>, le champ caractéristique  $E$  de la forme  $\Omega$  étant défini par la relation  $i(E)\Omega = 0$ .

Ces bases posées nous abordons dans le chapitre II la théorie générale d'une liaison imposée à un système matériel. Une liaison imposée à un système matériel se compose de deux éléments distincts :

- 1° une relation arbitraire  $a(p_i, q^i, t) = 0$  liant les paramètres de position  $q^i$ , et de vitesse  $p_i$ , qui définit une sous-variété de  $V_{2n+1}$  ;
- 2° un jeu de forces qu'il faut appliquer au système pour réaliser cette liaison, jeu de forces qui, dans le langage des variétés, se traduit par un champ de liaison  $E_t$  défini dans l'espace tangent à  $V_{2n+1}$ .

Forme  $da$  et champ de liaison  $E_t$  ne sont pas indépendants puisqu'ils sont liés par la condition

$$(II, 1) \quad i(E + E_t)da = 0 \quad \text{ou} \quad i(E_t)da + i(E)da = 0.$$

Une classe importante de liaison est celle où le champ  $E$  est de la forme  $\lambda e$ ,  $\lambda$  fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ ,  $e$  champ de direction connu a priori (une convention permet toujours de se ramener à ce

(1) M. KRAVTCHEVSKO a présenté cette conception au VIII<sup>e</sup> Congrès de Mécanique.

(2) Dès 1946 M. LICHNEROWICZ au *Bulletin des Sciences Mathématiques* tome LXX, p. 90 a déjà introduit les formes extérieures pour la formation des équations des systèmes holonomes et linéairement non holonomes.

(3) M. H. CARTAN, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950. Masson, Paris, 1951.

cas). Dans cette catégorie rentre en effet les contacts entre solides avec ou sans frottement (cf. § 6) les liaisons de puissance nulle dont nous donnons au § 5 une définition générale, liaison d'asservissement de M. Beghin. Pour ces liaisons (II, 1) montre que le facteur  $\lambda$  est le quotient de deux invariants scalaires  $i(E)da$  et  $i(e)da$ . On voit ainsi qu'un des grands avantages de l'opérateur  $i(\ )$  de M. H. Cartan est de permettre la détermination des réactions classiques indépendamment des coordonnées et de la solution des équations du mouvement. En outre pour  $i(e)da = 0$ ,  $i(E)da \neq 0$ , le postulat de la rigidité des solides nous conduit à introduire la notion de compatibilité d'une liaison imposée à un système matériel se traduisant par  $i(e)da \neq 0$ . Enfin au § 7 nous étudions la détermination des équations du mouvement au moyen des caractéristiques d'une forme  $\Omega$ , de degré deux de rang  $2(n - 1)$  auxquelles on adjoint une forme de Pfaff, l'existence de cette forme étant une conséquence de la notion de compatibilité de la liaison.

Le chapitre III est consacré à l'étude des ensembles de  $p$  liaisons au sens donné précédemment à ce mot : Compatibilité de l'ensemble. Possibilité de déterminer les facteurs de liaisons au moyen d'opérateurs de M. H. Cartan indépendamment des équations du mouvement. Détermination des équations du mouvement comme caractéristiques d'une forme de degré deux de rang  $2(n - p)$  jointes à  $p$  formes de Pfaff. On donne divers exemples concrets pour montrer la généralité de la méthode.

Les chapitres IV et V étudient pour une classe spéciale de liaisons qui comprend les liaisons unilatérales classiques, le problème : des signes étant imposés à priori aux facteurs de liaisons et aux formes  $da$ , des conditions initiales étant données quels sont les mouvements possibles du système. L'opérateur  $i(\ )$  permet immédiatement de former  $p$  équations dont les seconds membres ne dépendent que des conditions initiales et des forces autres que les forces de liaisons. Une interprétation géométrique du système permet de transformer le problème en un problème d'Analysis-Situs pour une famille de  $2^p$   $p$ -èdres formée en prenant un vecteur dans chaque colonne du tableau

$$\begin{matrix} \vec{a}^1, & \vec{a}^2, & \dots & \dots & \dots & \vec{a}^p \\ \vec{A}^1, & \vec{A}^2, & \dots & \dots & \dots & \vec{A}^p \end{matrix}$$

On établit que la condition nécessaire et suffisante pour que  $2^p$   $p$ -èdres de même sommet n'aient pas de points internes communs

est que les  $(2^p - 1)$  déterminants mineurs diagonaux extraits de la matrice  $\|r^{hk}\|(\tilde{A}^k = \|-r^{hk}\|\tilde{a}^h)$  soient tous positifs. Cette condition entraîne en particulier que pour les liaisons d'Appell qui comprennent comme cas particulier les liaisons holonomes et linéairement non holonomes classiques, les conditions initiales jointes au jeu de signes imposés à priori aux facteurs de liaisons et aux formes  $da$ , sont suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur. Pour les autres types de liaisons les conditions initiales peuvent ne pas être suffisantes. Le cas du frottement de glissement bien connu depuis les travaux de Painlevé n'a donc à ce point de vue rien d'exceptionnel. Il résulte de là que ce ne sont pas les lois du frottement de Coulomb qui doivent être mises en cause, tout autre loi donnerait lieu à des impossibilités et des indéterminations, tout ne dépendant que du signe de l'invariant  $i(e)da$  au point  $M_0$  de la variété image ( $i(e)da < 0$ ).

Le chapitre vi est consacré à l'étude des systèmes différentiels de la dynamique considérés comme caractéristiques d'une forme  $\Omega$  de degré deux définie sur une variété différentiable  $V_{2n+1}$ . Cette étude s'effectue au moyen d'endomorphismes de l'algèbre extérieure, endomorphismes qui conduisent aux opérateurs antidérivation  $i(\ )$  et dérivation  $\theta(\ )$  de M. H. Cartan. Je me suis permis à ce propos de reprendre le texte de sa célèbre conférence au Colloque de Topologie de Bruxelles 1950 pour faciliter au lecteur la compréhension de ce point de vue. Au lieu d'écrire les équations différentielles sous une forme analytique quelconque, ce qui a toujours l'inconvénient de faire jouer un rôle à un système de coordonnées plus ou moins bien adapté à la question, on raisonne uniquement sur la forme génératrice  $\Omega$ . On sait depuis les travaux de Sophus Lie le rôle capital joué par les transformations infinitésimales dans l'intégration d'un système différentiel. Ce rôle se trouve merveilleusement mis en lumière par l'opérateur  $\theta(X)$  puisque si le champ  $X$  est générateur d'une transformation infinitésimale pour  $\Omega$ ,  $\theta(X)\Omega = 0$ . Deux grands cas apparaissent immédiatement :

A)  $d\Omega = 0$ . A toute transformation infinitésimale correspond une intégrale première et réciproquement. On ne peut intégrer par quadratures que si l'on connaît un sous-anneau de  $n$  fonctions en involution. Il en résulte que pour  $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ , trouver des cas d'intégralité revient à étudier la construction de ce sous-anneau. Dans le cas de la mécanique  $H$  devant être quadratique, on indique la construction de  $H$  relative à l'existence de  $p$  éléments

génériques algébriques de ce sous-anneau, ce qui permet de retrouver par une méthode générale les cas d'intégrabilité connus et d'en construire d'autres.

B)  $d\Omega \neq 0$ . On suppose connus  $r$  champs générateurs de transformations infinitésimales. L'intégration se décompose en deux phases :

1° L'intégration d'un système de Pfaff complètement intégrable de rang  $(2n - r)$ ;

2° L'intégration d'un système de  $r$  formes de Pfaff invariantes résultats qui se trouvent déjà implicitement énoncés dans les leçons sur les invariants intégraux d'Élie Cartan.

Dans les applications mécaniques l'ordre du système complètement intégrable se trouve réduit de  $(p + q)$  unités si d'une part on connaît  $p$  intégrales premières, d'autre part  $q$  liaisons au sens du chapitre II. On peut intégrer par quadratures si  $2n - r = p + q$ , et si les  $r$  formes invariantes sont fermées modulo les intégrales du système complètement intégrable.

Quelques exemples illustrent cette théorie.

---

## CHAPITRE PREMIER

### FORMES DIFFÉRENTIELLES ASSOCIÉES A UN SYSTÈME MATÉRIEL

La mécanique ayant pour premier objectif la formation des équations du mouvement d'un système matériel, il est intéressant d'avoir une méthode permettant de les obtenir dans un système de coordonnées quelconques. C'est pour cette raison qu'il est utile d'étudier la possibilité d'associer à un système une ou plusieurs formes différentielles génératrices des équations, ces formes étant invariantes dans les transformations que l'on précisera.

#### § 1. — Forme extérieure de Cartan associée à un point matériel.

Les formes invariantes que nous nous proposons de rechercher ont leur origine dans les quatre postulats de la mécanique newtonienne :

1) La masse d'un corps est un nombre positif invariable, la masse d'un ensemble matériel est une fonction complètement additive d'ensemble.

2) Le temps  $t$  est une grandeur absolue définie à une constante additive près.

3) Par rapport à tout trièdre galiléen un point  $M$  de masse  $m$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$  soumis à une force  $\vec{F}$  prend une accélération  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  telle que  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ .

4) La force  $\vec{F}$  est indépendante du trièdre galiléen de référence. Deux repères galiléens orthonormés étant en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre désignons par

$x^j, t$  les cordonnées de  $M$  par rapport au premier  $j$  (1, 2, 3);

$v^j$  les composantes de la vitesse  $\vec{v}^j$  de  $M$  par rapport au premier;

$X^j$  les composantes de la force  $\vec{F}$  par rapport au premier;

$\alpha^i$  les composantes de la vitesse de translation  $\vec{a}$  du 2° repère par rapport au 1°;

$\xi^\sigma, \tau$  les cordonnées de  $M$  par rapport au 2°  $\sigma$  (1, 2, 3);

$\alpha^\sigma$  les composantes de la vitesse  $\vec{\alpha}$  de  $M$  par rapport au 2°;

$\bar{E}^\sigma$  les composantes de la force  $\vec{F}$  par rapport au 2°.

Considérons l'espace à sept dimensions produit tensoriel des espaces  $E_3 \otimes E_3 \otimes T$  ( $x^j \in E_3$  euclidien,  $v^i \in E_3$  euclidien,  $t \in T$  droite numérique). Les transformations ou changements de repère galiléen forment un groupe de Lie  $G$  de dimension 10 dont les équations en termes finis sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^j = a_j^\sigma \xi^\sigma + \alpha^j \tau + b^j \\ t = \tau + t_0 \\ u^i = a_i^\sigma \alpha^\sigma + a^i \end{array} \right. \quad i, j, \sigma \text{ égaux à } 1, 2, 3.$$

$\|a_i^\sigma\| = A$  désigne une matrice orthogonale de rang 3 dépendant des 3 paramètres de rotation que l'on peut expliciter en utilisant la représentation de Cayley<sup>(4)</sup>  $A = (E - S) \times (E + S)^{-1}$  dans laquelle  $S$  désigne une matrice symétrique gauche de rang 3,  $E$  la matrice unité de même rang.

Pour le groupe  $G$  « prolongé holoédriquement » [au sens d'Élie Cartan<sup>(5)</sup>] au moyen d'une matrice orthogonale de rang 3,  $L = \|L_j^\rho\|$  arbitraire il existe 10 formes de Pfaff invariantes (formes de Maurer-Cartan)

$$\begin{array}{lll} \omega^\rho = L_j^\rho dv^j & = \Lambda_\rho^\sigma d\alpha^\sigma & \rho \text{ variant de } 1 \text{ à } 3 \\ \omega^{\rho'} = L_j^\rho (dx^j - v^j dt) & = \Lambda_\rho^\sigma (d\xi^\sigma - \alpha^\sigma d\tau) & \rho' \text{ variant de } 4 \text{ à } 6 \\ \omega^7 = dt & = d\tau. & \end{array}$$

Le produit  $\|dL\| \cdot \|L^{-1}\| = \|d\Lambda\| \cdot \|\Lambda\|^{-1}$  donne naissance à 3 formes en ayant posé  $\Lambda = \|L\| \cdot \|A\|$ .

Parmi ces dix formes, les six premières sont indépendantes des différentielles des 3 paramètres de rotation. Il en résulte que pour un point matériel qui n'est soumis à aucune force les formes diffé-

(4) Cf. Hermann WEYL. *The Classical Groups Princeton*, 1946, pp. 56 à 62.

(5) Cf. CARTAN Élie, *La théorie des groupes continus et finis*, Gauthier-Villars, 1937, pp. 121 et 124.

rentielles génératrices des équations différentielles<sup>(6)</sup> du mouvement que nous cherchons, invariantes dans les transformations du groupe  $G$  s'obtiendront en éliminant les 3 paramètres de rotation entre ces six formes.

Cette élimination peut s'effectuer en utilisant soit l'algèbre ordinaire, soit l'algèbre extérieure<sup>(7)</sup> et les propriétés classiques des matrices orthogonales

$$\sum_{\rho=1}^3 l_{\rho}^i \cdot l_{\rho}^j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \cdot \sum_{\rho=1}^3 l_{\rho}^i l_{\rho}^i = 1 \quad \text{pour} \quad i = j.$$

a) En utilisant l'algèbre ordinaire on obtient :

$$\text{I} \quad \begin{cases} (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = \sum_{j=1}^3 (dx^j - v^j dt)^2 \\ (\omega^4)^2 + (\omega^5)^2 + (\omega^6)^2 = \sum_{j=1}^3 (dv^j)^2 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \omega^1 \omega^4 + \omega^2 \omega^5 + \omega^3 \omega^6 = \sum_{j=1}^3 (dx^j - v^j dt) \cdot dv^j.$$

b) En utilisant l'algèbre extérieure

$$\text{III} \quad \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^3 \wedge \omega^6 = \sum k_{ij} dv^i \wedge (dx^j - v^j dt)$$

$$k_{ij} = \sum_{\rho=1}^3 \begin{vmatrix} l_{\rho}^i & 0 \\ 0 & l_{\rho}^j \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\text{IV} \quad \omega^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 \wedge \omega^5 + \omega^2 \wedge \omega^5 \wedge \omega^3 \wedge \omega^6 + \omega^3 \wedge \omega^6 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4.$$

$$\text{V} \quad \begin{cases} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \omega^4 \wedge \omega^5 \wedge \omega^6 \end{cases}$$

On remarquera qu'au sens de l'algèbre extérieure la IV<sup>e</sup> forme est au facteur  $\frac{1}{2!}$  près le carré de la III<sup>e</sup>, que les deux formes V peuvent être remplacées par leur produit qui est au facteur  $\frac{1}{3!}$  près est le cube de la III<sup>e</sup>. Si bien qu'en algèbre extérieure on est conduit à une seule forme génératrice des équations différentielles du mouvement, tandis qu'en algèbre ordinaire on est conduit soit à deux formes du type I, soit à une forme du type II.

(6) En anticipant sur ce qui suit, il est possible d'associer à un système d'équations différentielles des formes, appartenant à des algèbres graduées, qui au moyen d'antidérivations engendrent le système.

(7) Cf. N. BOURBAKI, Algèbre multilinéaire, *Actualités scientifiques*, n° 1044, Hermann et Cie, Paris, 1948, pp. 53 à 76.

Dans le cas où le point matériel M de masse  $m$  est soumis à une force  $\vec{F}$  le postulat (3)  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  conduit à remplacer dans  $\omega^c$   $\rho(1, 2, 3) dv^i$  par  $(mdv^i - X^i dt)$ ,  $X^i$  composantes de la force par rapport au premier repère.

De l'étude précédente résulte le théorème.

**THÉORÈME I.** — *Il existe trois types de formes différentielles génératrices des équations du mouvement d'un point matériel invariants dans les transformations du groupe galiléen*

$$A \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1}{2m} \sum_1^3 (mdv^i - X^i dt)^2 \\ e &= \frac{m}{2} \sum_1^3 (dx^j - v^j dt)^2 \end{aligned} \right.$$

$$B \quad f = \sum_1^3 \delta_{ij} (dx^i - v^i dt)(mdv^j - X^j dt) \quad \delta_{ij} \text{ symboles de Krönecker,}$$

$$C \quad \omega = \sum_1^3 k_{ij} (mdv^i - X^i dt) \wedge (dx^j - v^j dt) \quad k_{ij} \text{ symbole de Krönecker.}$$

Les équations différentielles du mouvement s'obtiennent en annulant les dérivées partielles du premier ordre des formes précédentes par rapport aux différentielles  $dx^i$ ,  $dv^j$  des paramètres de position et de vitesse.

En ce qui concerne l'algèbre extérieure rappelons que si

$$\Omega = A_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad i_1 \dots i_r \text{ étant } r \text{ indices variant de } 1 \text{ à } n,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dx^{i_p})} = (-1)^{p+1} A^{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}.$$

*Choix entre les trois types de formes différentielles invariants dans les transformations du groupes galiléen. Forme extérieure de Cartan.*

En principe les formes des trois types précédents sont génératrices des équations différentielles du mouvement. Lorsqu'on effectue un changement de variables T portant sur l'ensemble des paramètres de position et de vitesse  $x^i = x^i(\rho^\alpha, t)$ ,  $v^j = v^j(\rho^\alpha, t)$  ( $\alpha$  variant de 1 à 6) les trois types ont respectivement pour expression

$$A \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} s_{\alpha\beta} d\rho^\alpha d\rho^\beta - Q_{\alpha_0} d\rho^\alpha dt + \frac{1}{2} s_{00} dt^2, \\ e &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} d\rho^\alpha d\rho^\beta - \Gamma_{\alpha_0} d\rho^\alpha dt + \frac{1}{2} g_{00} dt^2, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{\alpha\beta} = m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\beta} \\ Q_{\alpha_0} = \delta_{ij} \left( X^i \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} - m \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \frac{\partial v^j}{\partial t} \right) \\ s_{00} = \frac{1}{m} \delta_{ij} X^i X^j + m \delta_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\partial v^j}{\partial t} - \delta_{ij} X^i \frac{\partial v^j}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\alpha\beta} = m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\beta} \\ \Gamma_{\alpha_0} = m\delta_{ij} \left( v^i \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} - \frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial t} \right) \\ g_{00} = m\delta_{ij} \left( v^i v^j + \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial t} - \frac{\partial x^i}{\partial t} v^j \right) \end{array} \right.$$

expressions dans lesquelles  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Krönecker

$$B \quad f = f_{\alpha\beta} d\rho^\alpha d\rho^\beta - f_{\alpha_0} d\rho^\alpha dt + f_{00} dt^2.$$

Dans  $f$ ,  $(f_{\alpha\beta}, f_{\alpha_0}, f_{00})$  définissent un tenseur symétrique fonction de  $(\rho^\alpha, t)$  ayant pour expression

$$f_{\alpha\beta} = m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\beta}$$

$$f_{\alpha_0} = m\delta_{ij} v^i \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} + \delta_{ij} X^i \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} - m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} - m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial t}$$

$$f_{00} = \delta_{ij} v^i X^j - m\delta_{ij} v^i \frac{\partial v^j}{\partial t} + m\delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial v^j}{\partial t} - \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t} X^j$$

$$C \quad \omega = k_{\alpha\beta} (d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta) - k_{\alpha_0} d\rho^\alpha \wedge dt$$

où  $(k_{\alpha\beta}, k_{\alpha_0})$  est un tenseur antisymétrique fonction de  $(\rho^\alpha, t)$  ayant pour expression

$$(I, 1) \quad k_{\alpha\beta} = mk_{ij} \begin{vmatrix} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\beta} \\ \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\beta} \end{vmatrix}$$

$$k_{\alpha_0} = -mk_{ij} \begin{vmatrix} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^i}{\partial t} \\ \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial t} \end{vmatrix} + mk_{ij} v^i \begin{vmatrix} \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial v^j}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - k_{ij} X^i \begin{vmatrix} \frac{\partial x^j}{\partial \rho^\alpha} & \frac{\partial x^j}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Remarquons que les deux formes du type A ne s'expriment pas

en général immédiatement en fonction des différentielles des intégrales premières du mouvement, tandis que la propriété est immédiate pour les deux formes B et C : B est une forme quadratique à discriminant nul d'après son origine donc s'exprime au moyen de 6 différentielles qui, pour un choix convenable des intégrales premières, peuvent être les différentielles de ces intégrales ; C est une forme extérieure réductible à une somme de 3 produits extérieurs de deux différentielles et par suite pour un choix convenable des intégrales premières  $C^\alpha$  s'écrit

$$\omega = \bar{k}_{\alpha\beta} dC^\alpha \wedge dC^\beta$$

$\bar{k}_{\alpha\beta}$  tenseur antisymétrique fonction des  $C^\alpha$  et de  $t$ .

Traditionnellement la mécanique est construite à partir du quotient par  $dt^2$  de la forme particulière  $s$  du type A obtenue en envisageant les transformations particulières

$$x^i = x^i(q^h, t), \quad v^j = \frac{\partial x^j}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial x^j}{\partial t}$$

Elle conduit au principe de Gauss-Appell et aux équations de Lagrange : les équations du mouvement rendent minimum la forme quadratique en  $\dot{q}$  non homogène

$$\frac{s}{dt^2} = \frac{1}{2} s_{hk} \ddot{q}^h \ddot{q}^k + s_{h\dot{l}} \dot{q}^h \dot{q}^{\dot{l}} - Q_h \ddot{q}^h$$

Cette forme ne nous donne pas de renseignements immédiats sur la nature du problème de l'intégration du mouvement puisqu'elle dépend du pseudo-groupe ponctuel  $x^i(q^h, t)$  <sup>(8)</sup>. D'autre part cette forme de Gauss-Appell n'est pratique que pour des liaisons holonomes et linéairement non holonomes ; nous verrons au chapitre II que la notion de liaison est susceptible d'une large extension et les calculs conduisent à envisager les transformations les plus générales portant sur l'ensemble des variables position et vitesse. Pour ces raisons les formes B et C se révèlent plus intéressantes.

Entre les formes B et C il y a une différence importante : C est bilinéaire tandis que B est quadratique, donc les calculs sont plus simples avec C qu'avec B ; de plus la forme C conduit immédiatement à l'invariant intégral cinétique de M. Élie Cartan.

Le fait que la forme C ne fait intervenir comme différentielles que

(8) Le pseudo-groupe qui intervient est celui de la variété  $V_{2n+1}$ .

les différentielles des intégrales premières peut encore s'établir comme suit : considérons un deuxième système de différentielles  $\delta$ . On peut associer à la forme  $\omega$  la forme bilinéaire  $\omega(\delta, d)$

$$\begin{aligned}\omega(\delta, d) &= \delta\rho^\alpha \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\alpha)} + \delta\rho^\beta \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\beta)} + \delta t \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(dt)} \\ &= k_{\alpha\beta}[\delta\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta - \delta\rho^\beta \wedge d\rho^\alpha] - k_{\alpha_0}[\delta\rho^\alpha \wedge dt - \delta t \wedge d\rho^\alpha].\end{aligned}$$

Les équations différentielles E du mouvement annulant  $\frac{\partial\omega}{\partial d\rho^\alpha}$ ,  $\frac{\partial\omega}{\partial d\rho^\beta}$  et  $\frac{\partial\omega}{\partial(dt)}$  (conséquence des précédentes) si on considère dans l'espace à 7 dimensions une variété quelconque  $\gamma$  à une dimension le long de laquelle la différentielle est  $\delta$ , sur la variété  $V_2$  à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales du système différentiel des équations du mouvement s'appuyant sur  $\gamma$ ,  $\omega(\delta, d) = 0$ . La forme  $\omega(\delta, d)$  linéaire par rapport au système de différentiel  $d$  étant nulle sur les lignes intégrales des équations du mouvement appartient au sous-module des différentielles des intégrales premières, en d'autres termes  $\omega(\delta, d)$  s'exprime au moyen des différentielles des intégrales premières. Si maintenant on prend  $\delta = d$ , comme  $\omega = \frac{1}{2} \omega(d, d)$  la forme  $\omega$  de degré 2 s'exprime uniquement au moyen des intégrales premières  $C^\alpha$  de E.

$$(I, 2) \quad \omega = \bar{k}_{\alpha\beta} dc^\alpha \wedge dc^\beta$$

$\bar{k}_{\alpha\beta}$  tenseur antisymétrique fonctions des  $C^\alpha$  et de  $t$ .

Le résultat précédent peut encore s'exprimer ainsi : Quelle que soit la variété à une dimension pour la variété  $V_2$  à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales du système différentiel E s'appuyant sur  $\gamma$  l'intégrale  $\int_{V_2} \omega(\delta, d)$  est nulle.

$$(I, 3) \quad \int_{V_2} (\delta, d) = 0.$$

Nous dirons avec M. Lichnerowicz<sup>(9)</sup> que  $\omega$  engendre une relation intégrale d'invariance absolue pour le système des équations différentielles de la mécanique du point matériel.

*Cas particulier.* — Si  $d\omega = 0$   $\omega$  ne s'exprime qu'au moyen des différentielles des intégrales premières de E et réciproquement.

(9) Cf. M. LICHNEROWICZ, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, tome LXX, 2<sup>e</sup> série 1946, p. 90.

$\omega$  peut s'exprimer sous forme canonique en groupant deux à deux les intégrales premières

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha u} \cdot dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*} \quad \text{avec} \quad \alpha^* = \alpha + 3$$

$d\omega = 0$  entraîne le fait qu'un coefficient  $k_{\alpha u}$  n'est fonction que des deux intégrales  $C^\alpha, C^{\alpha^*}$ . En effet si  $u$  désigne une des variables intégrales premières ou temps  $d\omega$  est somme de termes de la forme

$$\frac{\partial k_{\alpha u}}{\partial u} du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$$

$d\omega$  étant nul  $\frac{\partial k_{\alpha u}}{\partial u} = 0$  donc  $k_{\alpha u}$  n'est fonction que de  $C^\alpha$  et de  $C^{\alpha^*}$ .

Par un changement d'intégrales premières de la forme

$$C^\alpha = C^\alpha(\bar{C}^\alpha, \bar{C}^\alpha), \quad C^{\alpha^*} = C^{\alpha^*}(\bar{C}^{\alpha^*}, \bar{C}^{\alpha^*})$$

$\omega$  devient

$$(I, 4) \quad \omega = \sum_{\alpha=1}^3 d\bar{c}^\alpha \wedge d\bar{c}^{\alpha^*}$$

et par suite s'exprime uniquement au moyen des différentielles des intégrales premières de  $E$ .

*Invariant intégral cinétique de M. Elie Cartan.* —  $d\omega$  étant nulle,  $\omega$  est une forme fermée, il existe dans l'espace homéomorphe à  $R^7$  une forme de Pfaff  $\omega'$  tel que  $\omega = d\bar{\omega}'$ . D'après (I, 4)  $\bar{\omega}' = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{c}^{\alpha^*} \cdot d\bar{c}^\alpha$  admet pour différentielle  $\omega$  et ne s'exprime qu'au moyen des intégrales premières du mouvement et de leurs différentielles;  $\bar{\omega}'$  engendre un invariant intégral absolu pour les équations différentielles  $E$  du mouvement. Si on considère la variété  $V_2$  à deux dimensions engendrée par les lignes intégrales de  $E$  s'appuyant sur une variété à une dimension quelconque  $\gamma_0$  l'intégrale (3) devient

$$0 = \int_{v_2} \omega - \omega(\delta, d) = \int_{v_2} d[\bar{\omega}'(\delta)] = \int_{Fv_2} \bar{\omega}'(\delta)$$

$Fv_2$  désigne la frontière de  $V_2$  constituée par un arc de courbe  $\gamma_0 MM'$ , par les arcs d'intégrales de  $E, M_0M, M_0M'$ , issues des points  $M_0$  et  $M'_0$  et par l'arc  $MM'$ . Le long des arcs  $MM_0$  et  $M'_0M'$   $\bar{\omega}'(\delta)$  étant une forme linéaire des différentielles des intégrales premières de  $E$  est nul. Il en résulte que  $\int_{Fv_2} \bar{\omega}'(\delta)$  se réduit aux deux intégrales prises le long

de  $\gamma_0$  et de  $\gamma$ ,  $\gamma$  déduit de  $\gamma_0$  au moyen des trajectoires solutions de  $E$ ; d'où

$$(I, 5) \quad \int_{M_0 M_0'} \bar{\omega}'(\delta) = \int_{MM'} \bar{\omega}'(\delta).$$

L'égalité précédente exprime que  $\bar{\omega}'$  engendre un invariant intégral absolu.

Si l'on revient à l'expression de  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_1^3 k_{ij}(m dv^i - x^i dt) \wedge (dx^j - v^j dt) \\ &= mk_{ij} dv^i \wedge dx^j - mk_{ij} v^i dv^j \wedge dt + k_{ij} X^i dx^j \wedge dt \end{aligned}$$

$d\omega = 0$  impose à la forme de Pfaff  $k_{ij} X^i dx^j$  d'être fermée, par suite de se réduire à la différentielle d'une fonction  $U$ , d'où

$$(I, 6) \quad \omega = mk_{ij} dv^i \wedge dx^j - dH \wedge dt.$$

Avec  $H = T - U$ ,  $T = \frac{1}{2} \sum_1^3 m(v^i)^2$  demi-force vive,  $U$  fonction de force. (I, 6) montre que  $\omega$  est la dérivée extérieure de

$$\omega' = \sum_{i=1}^3 mv^i dx^i - H dt.$$

La forme  $\omega'$  engendre l'invariant intégral d'Elie Cartan (10); elle diffère de la forme  $\bar{\omega}'$  (I, 4) d'une forme fermée.

Le fait que la forme  $\omega$  de degré deux ne fait intervenir comme différentielles que les différentielles des intégrales premières et que dans le cas où  $d\omega$  est nulle,  $\omega$  est la dérivée extérieure de la forme engendrant l'invariant intégral cinétique de M. Elie Cartan conduit à la choisir comme forme génératrice des équations différentielles du mouvement d'un point matériel et à la placer à la base de la mécanique newtonienne.

Nous résumerons l'étude précédente dans le théorème suivant :

**THÉORÈME II.** — *A tout point matériel de masse  $m$ , de coordonnées  $x^j$ , animé d'une vitesse de composantes  $v^i$ , soumis à une force  $\tilde{F}$  de composantes  $X^i$  par rapport à un trièdre galiléen orthonormé on peut associer une forme différentielle extérieure de Cartan du deuxième ordre possédant les propriétés suivantes :*

1.  $\omega$  est invariante dans les transformations du groupe galiléen, en d'autres termes a même expression par rapport à tout repère galiléen orthonormé.

2. les équations différentielles du mouvement du point sont les équations associées à  $\omega$  au sens de Cartan.

3.  $\omega$  est unique.

4.  $\omega$  s'exprime uniquement en fonction des différentielles des intégrales premières des équations du mouvement, les coefficients étant un tenseur antisymétrique fonction des intégrales premières et d'une variable  $t$  par exemple; si  $d\omega = 0$ ,  $\omega$  ne s'exprime qu'au moyen des intégrales premières et de leurs différentielles.

Rappelons que lorsqu'on utilise les variables usuelles  $(x^j, v^i, t)$   $\omega$  sous forme développée s'écrit :

$$(I, 7) \quad \omega = mk_{ij} dv^i \wedge dx^j - mk_{ij} v^i dv^j \wedge dt + k_{ij} X^i dx^j \wedge dt$$

$k_{ij}$  symbole de Krönecker.

Les équations associées à  $\omega$  sont les équations classiques de Newton

$$\frac{\partial \omega}{\partial (dx^j)} = -m(dv^i - X^i dt) = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial (dv^i)} = m(dx^j - v^j dt) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

qui interprétées géométriquement dans l'espace euclidien  $E_3$  signifient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{V}.$$

L'existence de  $\omega$  et les équations associées constituent la traduction analytique naturelle des quatre postulats de la mécanique newtonienne du point matériel.

REMARQUES. — 1.  $\omega$  se compose en deux parties : l'une cinétique  $\omega_c$

$$\omega_c = mk_{ij} dv^i \wedge dx^j - mk_{ij} v^i dv^j \wedge dt$$

qui est une forme fermée

$$\omega_c = d(k_{ij} m v^i dx^j - T dt) \quad T \text{ désignant la demi-force vive } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m(v^i)^2$$

l'autre dynamique  $\omega_d$

$$\omega_d = k_{ij} X^i dx^j \wedge dt$$

(10) Cf. M. Elie CARTAN. *Leçons sur les Invariants intégraux*. Paris 1922, pp. 1 à 6.

(11) Cf. M. GALLISSOT. *Annales de la Faculté de Grenoble*, tome III, 1951, pp. 277 à 285.

produit extérieur du travail élémentaire de la force agissant sur le point par la différentielle du temps.

2. Il est essentiel de remarquer que ce sont les équations associées à  $\omega$  qui lient les paramètres de vitesse aux paramètres de position, comme le montrent en particulier les équations

$$\frac{d\omega}{\delta(dv^i)} = dx^j - v^j dt = 0.$$

3. Signalons que la mécanique relativiste du point matériel peut être construite comme la mécanique newtonienne au moyen d'une forme extérieure  $\omega$ , invariante dans le groupe de Lorentz, et que la forme génératrice des équations de la mécanique newtonienne est la limite de la forme  $\omega$ , quand on fait tendre le rapport  $\beta = \frac{V}{c}$  vers zéro,  $v$  désignant la vitesse du point matériel,  $c$  la vitesse de la lumière (11).

4. Il est également important de remarquer que la forme  $\omega$  peut s'exprimer au moyen de six formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres position vitesse temps, formes qui s'introduisent logiquement dans les problèmes d'intégration et dans l'étude de certaines liaisons,

$$\omega = K_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \quad K_{\alpha\beta} \text{ tenseur antisymétrique } (\alpha, \beta = 1 \text{ à } 6).$$

EXEMPLES. — 1. Point pesant lancé suivant la verticale ascendante et soumis à une résistance fonction de la vitesse  $mf(v)$ .

$m$  étant la masse de ce point,  $V$  la vitesse,  $g$  l'intensité de la pesanteur,  $z$  la cote,  $\omega$  s'écrit

$$\frac{\omega}{m} = dv \wedge dz - [v dv + g dz + f(v) dz] \wedge dt$$

ou encore

$$\frac{\omega}{m} = [g + f(v)] \left[ \frac{dv}{g + f(v)} + dt \right] \wedge \left[ dz + \frac{v dv}{g + f(v)} \right]$$

$\frac{\omega}{m}$  s'exprime donc au moyen des deux formes  $\frac{dv}{g + f(v)} + dt$ ,  $dz + \frac{v dv}{g + f(v)}$  qui annulées sont d'après la théorie précédente les équations du mouvement la dérivée extérieure de chacune d'elles

étant nulle, en d'autres termes chacune d'elles étant fermée, le problème est ramené aux quadratures.

Sur cet exemple simple on saisit le procédé qui nous permettra l'étude de cas d'intégralité des équations du mouvement.

2. Point mobile sous l'action de forces données  $X, Y, Z$ , fonctions de  $x, y, z$  d'autre part soumis à une résistance de milieu  $mf(v)$  opposée à la vitesse. En prenant pour paramètres de vitesse les coordonnées sphériques du vecteur vitesse  $v, \psi, \theta$ , pour paramètres de position les coordonnées  $x, y, z$  du point par rapport à un trièdre fixe,  $m$  étant la masse du point  $\frac{\omega}{m}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{m} = & (dv \sin \theta \cos \psi + v \cos \theta \cos \psi d\theta - v \sin \theta \sin \psi d\psi) \wedge dx \\ & + (dv \sin \theta \sin \psi + v \cos \theta \sin \psi d\theta + v \sin \theta \cos \psi d\psi) \wedge dy \\ & + (dv \cos \theta - v \sin \theta d\theta) \wedge dz - (v dv - X dx - Y dy - Z dz) \wedge dt \\ & - f(v)(\sin \theta \cos \psi dx + \sin \theta \sin \psi dy + \cos \theta dz) \wedge dt. \end{aligned}$$

Cette forme d'apparence plus compliquée que les équations classiques met en évidence les intégrales premières du mouvement pour certains choix de  $X, Y, Z$ . Ainsi pour un point pesant  $X = 0, Y = 0, Z = -mg$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{m} = & [dv + f(v) dt + g \cos \theta dt] \wedge [\sin \theta \cos \psi dx + \sin \theta \sin \psi dy \\ & + \cos \theta dz - v dt] + [vd\theta - g \sin \theta dt] \wedge [\cos \theta \cos \psi dx \\ & + \cos \theta \sin \psi dy - \sin \theta dz] + v d\psi \wedge [-\sin \theta \sin \psi dx + \sin \theta \cos \psi dy]. \end{aligned}$$

Les équations associées s'obtiennent en annulant les 6 formes placées entre crochets ; en particulier

$$d\psi = 0 \quad dv + [f(v) + g \cos \theta] dt = 0 \quad vd\theta - g \sin \theta dt = 0$$

dont l'interprétation géométrique est immédiate : projection des forces sur la tangente et la normale à la trajectoire.

3. Point pesant mobile avec frottement sur un plan incliné.

Soient  $i$  l'angle d'inclinaison du plan horizontal,  $f$  le coefficient de frottement,  $m$  la masse du point,  $Ox$  l'axe dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan,  $Oy$  directement perpendiculaire. Prenons pour paramètres de vitesse les coordonnées polaires  $v, \alpha$ , de la vitesse  $V$ , pour paramètres de position  $x, y$ .  $\omega = \omega_c + \omega_d$

$$\omega_c = d \left[ mv \cos \alpha dx + mv \sin \alpha dy - m \frac{v^2}{2} dt \right]$$

$d$  symbole de la dérivée extérieure

$$\omega_a = mg \sin i \, dx - fmg \cos i \cos \alpha dx - fmg \cos i \sin \alpha dy \wedge dt$$

d'où

$$\frac{\omega}{m} = dv \wedge (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) + v d\alpha \wedge (-\sin \alpha dx + \cos \alpha dy) \\ - v dv \wedge dt + [g \sin i dx - fg \cos i (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy)] \wedge dt$$

$$\frac{\omega}{m} = [d(v \sin \alpha) + fg \cos i \sin \alpha dt] \wedge [dy - v \sin \alpha dt] \\ + [d(v \cos \alpha) + (fg \cos i \cos \alpha - g \sin i) dt] \wedge [dx - v \cos \alpha dt]$$

$\frac{\omega}{m}$  est exprimée au moyen de 4 formes indépendantes qui égalisées à zéro donnent les équations différentielles du mouvement, dont l'interprétation géométrique est immédiate. L'intégration de ces équations sera effectuée au chapitre VI comme application d'une méthode générale.

## § 2. Forme extérieure associée à un système matériel paramétrique

Nous considérerons avec M. Brelot <sup>(12)</sup> un système matériel S. comme porteur

1. d'une distribution de masses  $\geq 0$  ou mesure  $\geq 0$  notée  $m(e)$  fonction finie  $\geq 0$  d'ensemble borélien borné, complètement additive ;

2. d'une distribution de forces, champ de vecteurs de mesure  $\vec{F}(e)$ .

Fonctions et ensembles boréliens étant supposés bornés, nous allons montrer qu'on peut associer à un système paramétrique une forme extérieure  $\Omega = \Omega_c + \Omega_a$ .

a) Calcul de  $\Omega_c$ . — Considérons dans un espace euclidien à 3 dimensions un ensemble borélien borné D, et l'ensemble variable borélien borné  $\Delta$  qui, pour chaque valeur des  $n + 1$  paramètres réelles  $q^i$  ( $i$  variant de 0 à  $n$ , avec  $q^0 = t$ ), est en correspondance biunivoque avec D au moyen de la fonction vectorielle borélienne en M

$$(II, 1) \quad \vec{O}\mu = \vec{f}(M, q^i)$$

Le domaine  $\Delta$  est déterminé géométriquement par la donnée du

<sup>(12)</sup> *Principes mathématiques de la mécanique classique*. ARTHAUD, Grenoble, p. 10 à 19.

point  $q$  de coordonnées locales  $q^i$  dans l'espace des paramètres. En supposant l'existence des dérivées premières de  $\vec{f}$  par rapport aux  $q^i$  bornées pour  $M$  variable dans  $D$  et les  $q^i$  bornées, par différentiation de (II, 1)

$$dO_{\mu} \vec{\mu} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial q^i} dq^i.$$

Nous avons vu au § 1 que la vitesse d'un point matériel pouvait être défini arbitrairement et que les équations associées à la forme  $\omega$  indiquait la manière dont les paramètres de vitesse étaient liées aux paramètres de position du point. Il en résulte que nous définirons la vitesse de la manière suivante. Soit une autre fonction vectorielle borélienne en  $M$

$$(II, 2) \quad \vec{V}_{\mu} = \vec{V}(M, q^i, \rho^{\alpha})$$

des  $(n + 1)$  paramètres  $q^i$  et de  $n$  autres paramètres  $\rho^{\alpha}$  bornés, admettant pour  $M$  dans  $D$  quelconque des dérivées premières bornées par rapport aux  $q^i$  et aux  $\rho^{\alpha}$ .  $\vec{V}_{\mu}$  sera appelé vitesse du point  $\mu$ . Par différentiation de (II, 2)

$$d\vec{V}_{\mu} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \rho^{\alpha}} d\rho^{\alpha}.$$

Les projections de  $d\vec{O}_{\mu}$  et de  $d\vec{V}_{\mu}$  sur trois axes d'un repère galiléen orthonormé définissent  $dx^j$  et  $dv^i$ ; au point  $M$  de  $D$  en correspondance avec le point  $\mu$  de  $\Delta$  est associée la forme  $\omega_c$

$$\begin{aligned} -k_{ij} dv^i \wedge dx^j - k_{ij} v^i dv^j \wedge dt &= k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^{\alpha}} \frac{\partial f^j}{\partial q^h} d\rho^{\alpha} \wedge dq^h \\ &+ k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial q^l} \frac{\partial f^j}{\partial q^h} dq^l \wedge dq^h - k_{ij} v^i \left( \frac{\partial v^j}{\partial \rho^{\alpha}} d\rho^{\alpha} + \frac{\partial v^j}{\partial q^h} dq^h \right) \wedge dt \end{aligned}$$

$\omega_c$  est ainsi une forme de degré 2 définie sur la variété  $V_{2n+1}$  des  $(2n + 1)$  paramètres  $q^i, t, \rho^{\alpha}$ , fibrée, la variété de base étant la variété espace temps de configuration  $V_{n+1}$ . A l'ensemble matériel  $\Delta$  est associée la forme  $\Omega_c = \int_D \omega_c dm$  définie sur la variété  $V_{2n+1}$ . le symbole  $\int$  étant celui de l'intégrale de Radon.

$$\Omega_c = k_{\alpha i} d\rho^{\alpha} \wedge dq^i + k_{ih} dq^i \wedge dq^h - k_{\alpha 0} dz^{\alpha} \wedge dt - k_{hi_0} dq^h \wedge dt$$

avec

$$\begin{aligned} k_{a_i} &= \int_D k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \cdot \frac{\delta f^j}{\delta q^h} & k_{i_h} &= \int_D k_{ij} \left( \frac{\partial v^i}{\partial q^i} \frac{\delta f^j}{\delta q^h} - \frac{\partial v^i}{\partial q^h} \cdot \frac{\delta f^j}{\delta q^i} \right) \delta m \\ k_{a_0} &= \int_D k_{ij} v^i \frac{\partial v^j}{\partial \rho^\alpha} \delta m - \int_D k_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial \rho^\alpha} \frac{\delta f^j}{\delta t} \delta m, \\ k_{h_0} &= \int_D k_{ij} v \frac{\partial v^j}{\partial q^h} - \int_D k_{ij} \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\delta f^j}{\delta q^h} - \frac{\partial v^i}{\partial q^h} \cdot \frac{\delta f^j}{\delta t} \right) \delta m. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut également calculer  $\Omega_c$  comme dérivée extérieure de

$$\int_D (\vec{V}_\mu \cdot d\vec{O}_\mu) \delta m - \frac{1}{2} dt \int_D (\vec{V}_\mu)^2 \delta m$$

et que ce calcul peut se faire en substituant aux différentielles des paramètres de position  $dq^i$ , des formes de Pfaff construites au moyen de ces différentielles, les coefficients de ces formes étant des fonctions boréliennes en  $\mathbf{M}$  et des paramètres  $q^i$ . On obtient ainsi pour la partie cinétique  $\Omega_c$  de  $\Omega$

$$\Omega_c = k_{\sigma\pi} (\omega^\sigma \wedge \omega^\pi) - k_{\sigma_0} (\omega^\sigma \wedge dt)$$

$\omega^\sigma$ ,  $\omega^\pi$  désignant  $2n$  formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres de position  $q^i$  et de vitesse  $\rho^\alpha$ ,  $(k_{\sigma\pi}, k_{\sigma_0})$  un tenseur antisymétrique fonction des  $q^i$  et  $\rho^\alpha$ .

b) Calcul de  $\Omega d$ . — Le calcul de la partie dynamique de  $\Omega$  présente une difficulté jusqu'à ce jour non résolue, provenant du fait qu'il n'est pas possible de définir une mesure de forces intérieures à un système<sup>(13)</sup> (14). Aussi procéderons-nous axiomatiquement.

Soit  $\vec{F}_e$  une mesure vectorielle de force définie sur  $\Delta$  que nous appellerons avec M. Brelot *dyname*. L'exposé qui suit est conforme à celui adopté par l'auteur précité.

Soit un champ de vecteurs  $\vec{w}$ , appelé *champ de vitesses virtuelles*, défini sur  $\Delta$ . Posons

$$P_{\vec{w}} = \int_\Delta \vec{w} \cdot \delta \vec{F}_e.$$

Par définition  $P_{(\vec{w})}$  est la puissance du *dyname*  $\vec{F}_e$  relativement au champ virtuel  $\vec{w}$ . Le travail élémentaire  $\vec{\tau}_e$  de  $\vec{F}_e$  relativement

(13) Cf. M. BRELOT, *Annales de l'Université de Grenoble*, T. XIX, 1943; T. XX, 1944.

à  $\vec{w}$  pendant le temps  $dt$  sera

$$\mathcal{C}_e = P_{\vec{w}} \cdot dt.$$

Si on prend  $\vec{w} = \frac{d\vec{O}\mu}{dt} = \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \dot{q}^i$  ( $i$  variant de 1 à  $n$ ) la puissance  $P_{\vec{w}}$  a pour expression

$$P(\vec{w}) = \left[ \int \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \delta \vec{F}_e \right] \dot{q}^i = Q_i \dot{q}^i$$

en posant

$$Q_i = \int \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \delta \vec{F}_e.$$

Considérons alors la forme de Pfaff  $\pi = Q_i dq^i$ .

D'après la définition précédente  $\pi$  est égale au travail élémentaire de la mesure de forces  $\vec{F}_e$  dans le champ  $\vec{w} = \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \dot{q}^i$

**Dyname impuissant.** Si la puissance  $P_{\vec{w}}$  est nulle, on dira que  $\vec{F}_e$  est impuissant pour  $\vec{w}$ . Ainsi si  $\vec{w}$  se réduit à un champ de moments, ou à plusieurs champs de moments définis sur  $\Delta$ , alors  $\vec{F}_e$  sera impuissant chaque fois que le système de forces  $\vec{F}_e$  sera un système de vecteurs équivalent à 0.

Ces définitions étant posées, pour chaque partie  $\sigma$  de  $\Delta$ , on considèrera le dyname  $\vec{F}_e$  comme la somme d'un dyname équivalent, dit dyname extérieur  $\vec{F}_{1e}$ , et d'un dyname équivalent à 0, dit dyname intérieur  $\vec{F}_{2e}$ . Dans les applications que nous nous proposons de développer le système S sera constitué par un ensemble de solides. Nous admettrons le postulat suivant :

*Pour tout champ de moments la puissance des forces intérieures est nulle.* — Il résulte de ce postulat les conséquences suivantes :

1. La puissance des forces extérieures sera calculée pour chaque solide en prenant pour  $w$  un champ de moments propre à chacun d'eux.

D'où la partie dynamique  $\Omega_a$  de  $\Omega$  c'est-à-dire

$$\Omega_a = Q_i dq^i \wedge dt.$$

(14) M. R. DE POSSEL. Sur les principes mathématiques de la mécanique classique *Gazeta de Matematica*, n° 28, 1946, Lisbonne.

$Q_i$  fonctions de  $(q^i, \rho^h, t)$ ,  $q^i$  paramètres de position,  $\rho^h$  paramètres de vitesse.

2. La partie cinétique  $\Omega_c$  de  $\Omega$  doit être calculée avec le même champ de moments puisque  $d\vec{O}\vec{u} = \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} dq^i$  intervient dans  $\Omega_c$ .  $\Omega_c$  étant la dérivée extérieure de

$$\int_D (\vec{V}_\mu d\vec{O}\vec{u}) \delta m - \frac{dt}{2} \int_D (\vec{V}_\mu)^2 \delta m.$$

En prenant  $d\vec{O}\vec{u} = \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} dq^i$ ,  $V_\mu = \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^h} \rho^h$  en est conduit à deux expressions classiques de  $\Omega_c$

$$\int_D (\vec{V}_\mu d\vec{O}\vec{u}) \delta m = \left[ \int_D \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^h} \cdot \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \delta m \right] \rho^h dq^i = g_{hi} \rho^h dq^i$$

en posant  $g_{hi} = \int_D \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^h} \cdot \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \delta m$  tenseur symétrique covariant d'ordre 2

$$T = \frac{1}{2} \int_D (\vec{V}_\mu)^2 \delta m = \frac{1}{2} \left[ \int_D \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^i} \cdot \frac{\delta \vec{f}}{\delta q^h} \delta m \right] \rho^i \rho^h = \frac{1}{2} g_{hi} \rho^h \rho^i$$

$d$  désignant le symbole de la dérivation extérieure

$$\Omega_c = d \left( g_{hi} \rho^h dq^i - \frac{1}{2} g_{hi} \rho^h \rho^i dt \right).$$

Forme Hamiltonienne de  $\Omega_c$ . — Le choix des paramètres de vitesse  $\rho^h$  étant arbitraire on peut poser

$$p_i = g_{hi} \rho^h$$

opération toujours possible puisque  $2T = g_{hi} \rho^h \rho^i$  est une forme définie positive de rang  $n$  ( $\det g_{hi} \neq 0$ ). Pour envisager simultanément le cas où les liaisons holonomes dépendent ou ne dépendent pas du temps nous ferons varier les indices  $i$  et  $h$  de 0 à  $n$  avec  $dq^0 = dt$ ,  $\rho_0 = 1$

$$T = T_0 + T_1 \rho^0 + T_0 (\rho^0)^2$$

$$p_0 = \frac{\partial T}{\partial \rho_0} = T_1 + 2T_0$$

d'où

$$\begin{aligned} \Omega_c &= d \left[ \sum_{i=1}^n p_i dq^i + p_0 dt - (T_2 + T_1 + T_0) dt \right] \\ &= d \left[ \sum_{i=1}^n p_i dq^i - (T_2 - T_0) dt \right]. \end{aligned}$$

Nous appellerons expression Hamiltonienne de  $\Omega_c$

$$(II, 3) \quad \Omega_c = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i - d(T_2 - T_0) \wedge dt$$

dans  $T_2$  partie quadratique de  $T$  exprimée au moyen des  $\rho^h$ , on doit donc substituer aux  $\rho^h$  leur valeur en fonction des  $p$  calculé au moyen des équations

$$p_i = g_{hi} \rho^h + g_{i0}.$$

Si les liaisons ne dépendent pas du temps  $t$

$$\Omega_c = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i - dT \wedge dt.$$

Forme Lagrangienne de  $\Omega_c$ . — En remarquant que

$$g_{hi} \rho^h = \frac{\partial T}{\partial \rho_i}$$

$$\begin{aligned} (II, 4) \quad \Omega_c &= d \left( \frac{\partial T}{\partial \rho^i} dq^i - T dt \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial \rho^h} (d\rho^h \wedge dq^i) \\ &+ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^i \partial q^k} - \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^k \partial \rho^i} \right) dq^k \wedge dq^i - \frac{\partial T}{\partial \rho^h} d\rho^h \wedge dt - \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i \wedge dt. \end{aligned}$$

C'est cette forme de  $\Omega_c$  qui conduit aux équations de Lagrange.

3. Définition d'un système paramétrique holonome. — Un système paramétrique holonome est un ensemble de solides et de points matériels dont la partie cinétique de  $\Omega$  est susceptible de revêtir la forme Hamiltonienne ou Lagrangienne.

4. Variété Riemannienne et repère naturel  $R$ . — La variété Riemannienne  $V_{n+1}$  associée au système holonome est l'espace temps de configuration muni de la métrique

$$d\sigma^2 = g_{ih} dq^i dq^h + g_{oi} dq^i dt + g_{oo} dt^2 \quad (i, h, \text{ variant de } 1 \text{ à } n).$$

En un point  $M(q^i, t)$  de cette variété le repère  $\mathcal{R}$  est défini par les  $(n+1)$  vecteurs  $\vec{e}_0, \vec{e}_i$  tels que  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_h = g_{ih}$ ;  $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_i = g_{0i}$ ;  $(\vec{e}_0)^2 = g_{00}$ .

Nous appellerons repère naturel  $R$  en  $M$  le système des  $n$  vecteurs  $\vec{e}_i$ .  $R$  se déduit donc de  $\mathcal{R}$  par suppression du vecteur  $\vec{e}_0$ . Le point image du système sur la variété  $V_{n+1}$  a pour vitesse  $\vec{v}$  un vecteur ayant  $(n+1)$  composantes contravariantes  $(\dot{q}^i, 1)$   $\vec{v} = \vec{e}_0 + \dot{q}^i \vec{e}_i$ .

Pour les besoins de la mécanique lorsqu'on dit que le système dépend de  $n$  paramètres de vitesse  $q$ , on considère donc  $\vec{v}$  dans le sous-espace  $R$ .  $\vec{v} = \vec{e}_i \dot{q}^i$ , les  $\dot{q}^i$  sont les composantes contravariantes de  $\vec{v}$  dans  $R$ . Rappelons également que par rapport à  $R$  un vecteur  $\vec{X}$  de composantes contravariantes  $X^i$  a  $n$  composantes covariantes  $X_i = g_{ih} X^h$  et qu'on passe des composantes covariantes aux composantes contravariantes par les formules

$$X^h = g^{hi} X_i \quad \text{avec} \quad g^{hi} = \frac{\text{mineur relatif à } g_{ih} \text{ dans } \det |g_{ih}|}{\det |g_{ih}|}.$$

5. **Force généralisée.** — Nous avons caractérisé une force appliquée à un système par la puissance  $P = Q_i \dot{q}^i$  ( $i$  variant de 1 à  $n$ ). Les  $Q_i$  sont donc les composantes covariantes de la force généralisée par rapport au repère. Remarquons que la puissance réelle est  $\mathcal{X} = Q_i \dot{q}^i + Q_0$ . C'est donc la puissance par rapport au repère Riemannien  $\mathcal{R}$ . Lorsque nous caractérisons le système des forces extérieures par la partie dynamique de  $\Omega$ ,  $\Omega_d = \pi \wedge dt$ ,  $\pi = Q_i dq^i$  est une forme Pfaff définie sur une variété  $V_{n+1}$  ou  $V_n$  (système indépendant du temps).

6. **Équations du mouvement.** — Les équations du mouvement du système sont les équations caractéristiques de  $\Omega$ .

#### Forme Hamiltonienne

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - [d(T_2 - T_0) - Q_i dq^i] \wedge dt.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega}{\partial (dq^i)} = -dp_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i} dt + Q_i dt = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial (dp_i)} = dq^i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p^i} dt = 0. \end{array} \right.$$

*Forme Lagrangienne.*

$$\Omega = \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^i \delta \rho^h} d\rho^h \wedge dq^i + \left( \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^i \delta q^k} - \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^k \delta q^i} \right) dq^k \wedge dq^i - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \rho^h} d\rho^h \wedge dt - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta q^i} dq^i \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt,$$

$$\frac{\delta \Omega}{\delta (d\rho^h)} = \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^i \delta \rho^h} dq^i - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \rho^h} dt = 0,$$

$$\frac{\delta \Omega}{\delta (dq^i)} = - \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^i \delta \rho^h} d\rho^h - \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^i \delta q^k} dq^k + \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^k \delta q^i} dq^k - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta q^i} dt + Q_i dt = 0,$$

or  $\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \rho^h} = g_{hi} \rho^i$ ,  $\frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^h \delta \rho^i} = g_{hi}$ , il en résulte que les  $n$  premières équations

s'écrivent encore  $\frac{\delta \Omega}{\delta (d\rho^h)} = g_{hi} (dq^i - \rho^i dt) = 0$  d'où  $dq^i = \rho^i dt$ .

Les  $n$  dernières compte tenu de  $dq^i = \rho^i dt$  prennent la forme de Lagrange en remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^h \delta q^i} dq^k &= \frac{\delta^2 \mathbf{T}}{\delta \rho^k \delta q^i} \rho^k dt = 2 \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta q^i} dt, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \rho^i} \right) - \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta \rho^i} dt - Q_i dt &= 0. \end{aligned}$$

Ces  $n$  équations conservant la même forme dans les transformations du « pseudo-groupe » ponctuel  $q^i = q^i(r^h, t)$  portant uniquement sur les variables de position  $q^i$  sont traditionnellement placées à la base de la mécanique rationnelle. Elles ont l'inconvénient de se montrer peu maniables dans la recherche des cas d'intégrabilité, ou des propriétés topologiques des trajectoires. C'est pourquoi il est préférable de considérer les équations du mouvement comme les caractéristiques d'une forme de degré deux.

**Forme générale.** — Si on effectue sur les paramètres de position  $q^i$  et les paramètres de vitesse  $p_i$  un changement de variables quelconque

$$p_i = p_i(x^\alpha, t) \quad q^i = q^i(x^\alpha, t)$$

$\alpha$  variant de 1 à  $2n$  en désignant par  $\omega^\alpha$  deux  $n$  formes de Pfaff en  $dx^\alpha$ ,  $\Omega$  s'écrit

$$\Omega = k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - k_{\alpha 0} \omega^\alpha \wedge dt$$

$(k_{\alpha\beta}, k_{\alpha 0})$  tenseur antisymétrique d'ordre 2, fonctions des  $x^\alpha, t$ . Les équations prennent la forme générale

$$\frac{\delta\Omega}{\delta\omega^\alpha} = k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha 0} dt = 0.$$

7. Pour que la théorie ainsi construite ait un sens au point de vue physique il faut évidemment que dans les applications les forces appliquées soient bornées en grandeur, la rigidité des liaisons intérieures devant être respectée.

EXEMPLE. — Calcul de  $\Omega$  pour un solide mobile autour d'un de ses points O fixe.

Oxyz désigne un trièdre invariablement lié au corps (trièdre mobile)  $\Omega_c + \Omega_d = \Omega$

$$\begin{aligned}\Omega_c &= \int_c (k_{ij} dv^i \wedge dx^j) \delta m - \left[ \int_c k_{ij} v^i dv^j \delta m \right] \wedge dt \quad i, j(1, 2, 3) \\ \Omega_d &= \left| \int_c \delta \vec{F} \cdot d\vec{OM} \right| \wedge dt\end{aligned}$$

par rapport à tout trièdre Galiléen. Pour utiliser les axes mobiles il faut donc calculer par rapport à ces axes les différentielles absolues des paramètres de position et de vitesse.

$x, y, z$  désignant les coordonnées du point M fixe par rapport au trièdre mobile,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  étant les vecteurs unités des axes mobiles :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ d\vec{OM} &= x d\vec{i} + y d\vec{j} + z d\vec{k}\end{aligned}$$

$\omega^1, \omega^2, \omega^3$  désignant trois formes différentielles de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres caractérisant le déplacement du trièdre Oxyz (angles d'Euler ou tout autre système)

$$\begin{cases} d\vec{i} = \omega^3 \vec{j} - \omega^2 \vec{k} \\ d\vec{j} = \omega^1 \vec{k} - \omega^3 \vec{i} \\ d\vec{k} = \omega^2 \vec{i} - \omega^1 \vec{j} \end{cases}$$

$$d\vec{OM} = \vec{i}(z\omega^2 - y\omega^3) + \vec{j}(x\omega^3 - z\omega^2) + \vec{k}(y\omega^1 - x\omega^2).$$

Prenons pour paramètres de vitesse les composantes  $p, q, r$ , par rapport aux axes mobiles du vecteur rotation instantanée

$$\vec{V} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}.$$

La partie cinétique  $\Omega_c$  de  $\Omega$  se calcule comme dérivée extérieure de la forme scalaire

$$\int_c (\vec{V}_M \cdot d\vec{OM}) \delta m - \frac{dt}{2} \int_c (\vec{V}_M)^2 \delta m$$

$$\int_c (\vec{V}_M \cdot d\vec{OM}) \delta m = \int_c [(qz - ry)(\omega^2 z - \omega^3 y) + (rx - pz)(\omega^3 x - \omega^1 z) + (py - qx)(\omega^1 y - \omega^2 x)] \delta m$$

$$= p\omega^1 \int (y^2 + z^2) \delta m + q\omega^2 \int (z^2 + x^2) \delta m + r\omega^3 \int (x^2 + y^2) \delta m - (r\omega^2 + q\omega^3) \int yz \delta m - (p\omega^3 + r\omega^1) \int zx \delta m - (q\omega^1 + p\omega^2) \int xy \delta m.$$

En choisissant pour trièdre  $Oxyz$  le trièdre principal d'inertie en  $O$  et utilisant les rotations classiques :

$$A = \int (y^2 + z^2) \delta m \quad B = \int (z^2 + x^2) \delta m \quad C = \int (x^2 + y^2) \delta m$$

$$\int_c (\vec{V}_M \cdot d\vec{OM}) \delta m = Ap\omega^1 + Bq\omega^2 + Cr\omega^3$$

$$\frac{1}{2} \int_c (\vec{V}_M)^2 \delta m = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$d$  désignant le symbole de la dérivation extérieure

$$\Omega_c = Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 + Apd\omega^1 + Bqd\omega^2 + Crd\omega^3 - (Amdp + Bqdq + Crdr) \wedge dt.$$

Le calcul de  $d\omega^1$ ,  $d\omega^2$ ,  $d\omega^3$  résulte des différentiations extérieures des relations vectorielles

$$\vec{di} = \omega^3 \vec{j} - \omega^2 \vec{k}, \quad \vec{dj} = \dots, \quad \vec{dk} = \dots$$

$$0 = d\omega^3 \vec{j} - d\omega^2 \vec{k} - \omega^3 \wedge (\omega^1 \vec{k} - \omega^3 \vec{i}) + \omega^2 \wedge (\omega^3 \vec{i} - \omega^1 \vec{j})$$

ou  $(d\omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2) \vec{j} - (d\omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^1) \vec{k} = 0$  et les analogues c'est-à-dire

$$d\omega^3 = -(\omega^1 \wedge \omega^2); \quad d\omega^1 = -(\omega^2 \wedge \omega^3); \quad d\omega^2 = -(\omega^3 \wedge \omega^1)$$

équations de structure du groupe des déplacements autour de  $O$ .

Il en résulte l'expression de  $\Omega_c$

$$\Omega_c = Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 - Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2 - (Amdp + Bqdq + Crdr) \wedge dt.$$

Calcul de la partie dynamique  $\Omega_d$  de  $\Omega$

Les forces extérieures sont définies par leur puissance

$$P = Lp + Mq + Nr$$

d'où la forme de Pfaff

$$\pi = L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega^3 \quad \text{et} \quad \Omega_d = (L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega) \wedge dt$$

en désignant par L, M, N les composantes du moment résultant par rapport à Ox, Oy, Oz des forces appliquées au corps d'où

$$\begin{aligned} \Omega = & A(dp \wedge \omega^1) + B(dq \wedge \omega^2) + C(dr \wedge \omega^3) \\ & - Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2 \\ & - [Apdp + Bqdq + Crdr - (L\omega^1 + M\omega^2 + N\omega^3)] \wedge dt. \end{aligned}$$

Équations différentielles du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1} &= -Adp + Bq\omega^3 - Cr\omega^2 + Ldt = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^2} &= -Bdq + Cr\omega^1 - Ap\omega^3 + Mdt = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^3} &= -Cdr + Ap\omega^2 - Bq\omega^1 + Ndt = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial(dp)} &= A(\omega^1 - pdt) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial(dq)} &= B(\omega^2 - qdt) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial(dr)} &= C(\omega^3 - rdt) = 0. \end{aligned}$$

Les trois premières équations, compte tenu des trois dernières sont les équations du mouvement données par Euler.

Calcul de  $\Omega_c$  trièdre de référence mobile dans le corps et dans l'espace. — Il est intéressant pour les applications de connaître l'expression de  $\Omega_c$  pour un corps solide mobile autour d'un de ses points quelconques O lorsqu'on utilise pour trièdre de référence un trièdre mobile à la fois dans le corps et dans l'espace. Soient  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , les vecteurs unitaires du trièdre de référence,  $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$  trois formes de Pfaff construites sur les paramètres caractérisant la position du trièdre mobile autour du point O fixe,  $x, y, z$ , les coordonnées d'un point M du solide par rapport au trièdre mobile,  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  étant trois formes de Pfaff construites sur les différentielles des paramètres

caractérisant le déplacement absolu du solide,  $p, q, r$ , les composantes de la rotation absolue du corps par rapport au trièdre mobile.

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ d\vec{OM} &= (\omega^2 z - \omega^3 y)\vec{i} + (\omega^3 x - \omega^2 z)\vec{j} + (\omega^1 y - \omega^2 x)\vec{k} \\ \vec{V} &= (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}\end{aligned}$$

Calculons la différentielle de  $d\vec{V}$  compte tenu de l'expression des différentielles de  $d\vec{i}, d\vec{j}, d\vec{k}$

$$\begin{aligned}d\vec{i} &= \Omega^3 \vec{j} - \Omega^2 \vec{k}, & d\vec{j} &= \Omega^1 \vec{k} - \Omega^3 \vec{i}, & d\vec{k} &= \Omega^2 \vec{i} - \Omega^1 \vec{j} \\ d\vec{V} &= [z dq - y dr + q dz - r dy + (rx - pz)(-\Omega^3) + (py - qx)\Omega^2] \vec{i} \\ &+ [x dr - z dp + r dx - p dz + (py - qx)(-\Omega^1) + (qy - ry)\Omega^3] \vec{j} \\ &+ [y dp - x dq + p dy - q dx + (qz - ry)(-\Omega^2) + (rx - pz)\Omega^1] \vec{k}\end{aligned}$$

$dx, dy, dz$ , différentielles des coordonnées de M par rapport aux axes mobiles ont pour valeur :

$$\begin{aligned}dx &= (\omega^2 - \Omega^2)z - (\omega^3 - \Omega^3)y \\ dy &= (\omega^3 - \Omega^3)x - (\omega^1 - \Omega^1)z \\ dz &= (\omega^1 - \Omega^1)y - (\omega^2 - \Omega^2)x\end{aligned}$$

d'où l'expression de  $d\vec{V}$

$$\begin{aligned}d\vec{V} &= \{ -x(q\omega^2 + r\omega^3) + y[p\Omega^2 + q(\omega^1 - \Omega^1) - dr] \\ &\quad + z[p\Omega^3 + r(\omega^1 - \Omega^1) + dq] \} \vec{i} \\ &+ \{ x[q\Omega^1 + p(\omega^2 - \Omega^2) + dr] \\ &\quad - y[r\omega^3 + p\omega^1] + z[q\Omega^3 + r(\omega^2 - \Omega^2) - dp] \} \vec{j} \\ &+ \{ x[r\Omega^1 + p(\omega^3 - \Omega^3) - dq] \\ &\quad + y[r\Omega^2 + q(\omega^3 - \Omega^3) + dp] - z(p\omega^1 + q\omega^2) \} \vec{k}.\end{aligned}$$

Formons dans l'espace à 7 dimensions l'expression  $k_{ij} dv^i \wedge dx^j$   $k_{ij}$  symbole de Kröner

$$\begin{aligned}k_{ij} dv^i \wedge dx^j &= x^2 [dr \wedge \omega^3 + dq \wedge \omega^2 + 2p\omega^2 \wedge \omega^3 - p\Omega^2 \wedge \omega^3 \\ &\quad + q\Omega^1 \wedge \omega^3 - r\Omega^1 \wedge \omega^2 + p\Omega^3 \wedge \omega^2] \\ &+ y^2 [dp \wedge \omega^1 + dr \wedge \omega^3 + 2q\omega^3 \wedge \omega^1 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 \\ &\quad + r\Omega^2 \wedge \omega^1 - p\Omega^2 \wedge \omega^1 + q\Omega^1 \wedge \omega^3] \\ &+ z^2 [dq \wedge \omega^2 + dp \wedge \omega^1 + 2r\omega^1 \wedge \omega^2 - r\Omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + p\Omega^3 \wedge \omega^2 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 + r\Omega^2 \wedge \omega^1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + yz[-dr \wedge \omega^2 - dq \wedge \omega^3 + 2q\omega^1 \wedge \omega^2 + 2r\omega^3 \wedge \omega^1 \\
& \quad + p(\Omega^2 \wedge \omega^2 - \Omega^3 \wedge \omega^3) - q\Omega^1 \wedge \omega^2 + r\Omega^1 \wedge \omega^3] \\
& + zx[-dp \wedge \omega^3 - dr \wedge \omega^1 + 2r\omega^2 \wedge \omega^3 + 2p\omega^1 \wedge \omega^2 \\
& \quad + q(\Omega^3 \wedge \omega^3 - \Omega^1 \wedge \omega^1) - r\Omega^2 \wedge \omega^2 + p\Omega^2 \wedge \omega^1] \\
& + xy[-dq \wedge \omega^1 - dp \wedge \omega^2 + 2p\omega^3 \wedge \omega^1 + 2q\omega^2 \wedge \omega^3 \\
& \quad + r(\Omega^1 \wedge \omega^1 - \Omega^2 \wedge \omega^2) - p\Omega^3 \wedge \omega^1 + q\Omega^3 \wedge \omega^2].
\end{aligned}$$

Calculons de même  $k_{ij}v^i dv^j$

$$\begin{aligned}
k_{ij}v^i dv^j &= x^2[rdr + qdq + pr(\omega^2 - \Omega^2) - pq(\omega^3 - \Omega^3)] \\
& + y^2[pdp + rdr + qp(\omega^3 - \Omega^3) - qr(\omega^1 - \Omega^1)] \\
& + z^2[qdq + pdp + rq(\omega^1 - \Omega^1) - rp(\omega^2 - \Omega^2)] \\
& - yz[rdq + qdr + (q^2 - r^2)(\omega^1 - \Omega^1) - pq(\omega^2 - \Omega^2) + rp(\omega^3 - \Omega^3)] \\
& - zx[pdr + rdp + (r^2 - p^2)(\omega^2 - \Omega^2) - qr(\omega^3 - \Omega^3) + pq(\omega^1 - \Omega^1)] \\
& - xy[qdp + pdq + (p^2 - q^2)(\omega^3 - \Omega^3) - rp(\omega^1 - \Omega^1) + qr(\omega^2 - \Omega^2)].
\end{aligned}$$

Désignons par

$$\begin{aligned}
a &= \int x^2 \delta m, & b &= \int y^2 \delta m, & c &= \int z^2 \delta m, \\
D &= \int yz \delta m, & E &= \int zx \delta m, & F &= \int xy \delta m
\end{aligned}$$

et signalons que ces quantités sont en général variables avec le temps puisque les axes sont mobiles dans le corps et dans l'espace. On en déduit :

$$\Omega_c = \int \omega_c \delta m = \int (k_{ij} dv^i \wedge dx^j - k_{ij} v^i dv^j \wedge dt) \delta m$$

$$\begin{aligned}
\Omega_c &= a[dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + 2p\omega^2 \wedge \omega^3 - p\Omega^2 \wedge \omega^3 \\
& \quad + q\Omega^1 \wedge \omega^3 - r\Omega^1 \wedge \omega^2 + p\Omega^3 \wedge \omega^2] \\
& + b[dr \wedge \omega^3 + dp \wedge \omega^1 + 2q\omega^3 \wedge \omega^1 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 \\
& \quad + r\Omega^2 \wedge \omega^1 - p\Omega^2 \wedge \omega^3 + q\Omega^1 \wedge \omega^3] \\
& + c[dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + 2r\omega^1 \wedge \omega^2 - r\Omega^1 \wedge \omega^3 \\
& \quad + p\Omega^3 \wedge \omega^2 - q\Omega^3 \wedge \omega^1 + r\Omega^2 \wedge \Omega^1] \\
& - D[dq \wedge \omega^3 + dr \wedge \omega^2 - 2q\omega^1 \wedge \omega^2 - 2r\omega^3 \wedge \omega^1 \\
& \quad - p(\Omega^2 \wedge \omega^2 - \Omega^3 \wedge \omega^3) + q\Omega^1 \wedge \omega^2 - r\Omega^1 \wedge \omega^3] \\
& - E[dr \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^3 - 2r\omega^2 \wedge \omega^3 - 2p\omega^1 \wedge \omega^2 \\
& \quad - q(\Omega^3 \wedge \omega^3 - \Omega^1 \wedge \omega^1) + r\Omega^2 \wedge \omega^3 - p\Omega^2 \wedge \omega^1] \\
& - F[dp \wedge \omega^2 + dq \wedge \omega^1 - 2p\omega^3 \wedge \omega^1 - 2q\omega^2 \wedge \omega^3 \\
& \quad - r(\Omega^1 \wedge \omega^1 - \Omega^2 \wedge \omega^2) + p\Omega^3 \wedge \omega^1 - q\Omega^3 \wedge \omega^2] \\
& - a[qdq + rdr + pr(\omega^2 - \Omega^2) - pq(\omega^3 - \Omega^3)] \wedge dt \\
& - b[rdr + pdp + qp(\omega^3 - \Omega^3) - qr(\omega^1 - \Omega^1)] \wedge dt \\
& - c[pdp + qdq + rq(\omega^1 - \Omega^1) - rp(\omega^2 - \Omega^2)] \wedge dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ D[rdq + qdr + (q^2 - r^2)(\omega^1 - \Omega^1) \\
 &\quad - pq(\omega^2 - \Omega^2) + rp(\omega^3 - \Omega^3)] \wedge dt \\
 &+ E[pdr + rdp + (r^2 - p^2)(\omega^2 - \Omega^2) \\
 &\quad - qr(\omega^3 - \Omega^3) + pq(\omega^1 - \Omega^1)] \wedge dt \\
 &+ F[qdp + pdq + (p^2 - q^2)(\omega^3 - \Omega^3) \\
 &\quad - rp(\omega^1 - \Omega^1) + qr(\omega^2 - \Omega^2)] \wedge dt.
 \end{aligned}$$

*Cas particuliers.* — 1. Axes fixes dans le corps

$$a + b = C, \quad b + c = A, \quad c + a = B, \quad \Omega^1 = \omega^1, \quad \Omega^2 = \omega^2, \quad \Omega^3 = \omega^3$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_c = & Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 \\
 & - Ap\omega^2 \wedge \omega^3 - Bq\omega^3 \wedge \omega^1 - Cr\omega^1 \wedge \omega^2 \\
 & - D[dq \wedge \omega^3 + dr \wedge \omega^2 - q\omega^1 \wedge \omega^2 - r\omega^3 \wedge \omega^1] \\
 & - E[dr \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^3 - r\omega^2 \wedge \omega^3 - p\omega^1 \wedge \omega^2] \\
 & - F[dp \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^1 - p\omega^3 \wedge \omega^1 - q\omega^2 \wedge \omega^3] \\
 & - [Apdp + Bqdq + Crdr - D(qdr + rdq) \\
 & \quad - E(rdp + pdr) - F(pdq + qdp)] \wedge dt
 \end{aligned}$$

A, B, C, D, E, F sont des constantes

On vérifie que

$$\begin{aligned}
 \Omega_c = & d[Ap\omega^1 + Bq\omega^2 + Cr\omega^3 - D(q\omega^3 + r\omega^2) - E(r\omega^1 + p\omega^3) \\
 & - F(p\omega^2 + q\omega^1)] - \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)dt].
 \end{aligned}$$

2. Axes fixes dans l'espace

$$a + b = C, \quad b + c = A, \quad c + a = B, \quad \Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_c = & Adp \wedge \omega^1 + Bdq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 + (B + C - A)(\omega^2 \wedge \omega^3) \\
 & + (C + B - A)\omega^3 \wedge \omega^1 + (A + B - C)\omega^1 \wedge \omega^2 \\
 & - D[dq \wedge \omega^3 + dr \wedge \omega^2 - 2q(\omega^1 \wedge \omega^2) - 2r(\omega^3 \wedge \omega^1)] \\
 & - E[dr \wedge \omega^1 + dp \wedge \omega^3 - 2r(\omega^2 \wedge \omega^3) - 2p(\omega^1 \wedge \omega^2)] \\
 & - F[dp \wedge \omega^2 + dq \wedge \omega^1 - 2p(\omega^3 \wedge \omega^1) - 2q(\omega^2 \wedge \omega^3)] \\
 & - \{Apdp + Bqdq + Crdr - D(qdr + rdq) \\
 & \quad - E(rdp + pdr) - F(pdq + qdp) \\
 & + (C - A)pr\omega^2 + (A - B)qp\omega^3 + (B - C)rp\omega^1 \\
 & \quad - D[(q^2 - r^2)\omega^1 - pq\omega^2 + rp\omega^3] \\
 & - E[(r^2 - p^2)\omega^2 - qr\omega^3 + pq\omega^1] \\
 & \quad - F[(p^2 - q^2)\omega^3 - rp\omega^1 + qr\omega^2]\} \wedge dt.
 \end{aligned}$$

3. Corps de révolution. L'axe Oz du trièdre étant l'axe de révo-

lution,  $O_x$  et  $O_y$  sont mobiles dans le corps et dans l'espace

$$a = \frac{C}{2}, \quad c = A - \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned} \Omega_c = & Adp \wedge \omega^1 + Adq \wedge \omega^2 + Cdr \wedge \omega^3 \\ & + Cp\omega^2 \wedge \omega^3 + Cq\omega^3 \wedge \omega^1 + (2A - C)r\omega^1 \wedge \omega^2 \\ & - Ar\Omega^1 \wedge \omega^2 - Cp\Omega^2 \wedge \omega^3 - Aq\Omega^3 \wedge \omega^1 \\ & + Cq\Omega^1 \wedge \omega^3 + Ar\Omega^2 \wedge \omega^1 + Ap\Omega^3 \wedge \omega^2 \\ & - [Apdp + Aqdq + Crdr \\ & + (C - A)pr(\omega^2 - \Omega^2) - (C - A)qr(\omega^1 - \Omega^1)] \wedge dt. \end{aligned}$$

### § III. — Principe de l'étude des systèmes mécaniques sans coordonnées.

L'exposé précédent par son développement pourrait accrédi- ter l'idée qu'il est nécessaire d'utiliser des coordonnées pour étudier les propriétés des systèmes dynamiques. On se libère aisément de la servitude des coordonnées en envisageant la question sous l'angle suivant :

Un système holonome sera caractérisé par une forme  $\Omega$  de degré 2 de rang  $2n$  définie sur une variété <sup>(15)</sup>  $V_{2n+1}$  : la variété  $V_{n+1}$  espace temps étant fibrée et ayant pour fibre  $V_n$ , pour base la droite numérique  $t$ ,  $V_{2n+1}$ , est l'espace des vecteurs tangents aux fibres de  $V_{n+1}$  <sup>(16)</sup>. Soient  $T$  l'espace tangent à la variété  $V_{2n+1}$ ,  $T'$  l'espace dual de  $T$ ,  $A(T')$  l'algèbre extérieure construite sur  $T'$ , somme directe des sous-espaces vectoriels  $A^r$  des divers degrés  $r \geq 0$  engendrés par les formes de degré  $r$ .

Opérateur  $i(x)$  de M. Henri Cartan <sup>(17)</sup>. —  $x$  étant un champ élément de  $T$  on appelle avec M. Henri Cartan antidérivation définie par l'opérateur  $i(x)$  un endomorphisme de  $A(T')$  de degré  $-1$  qui

<sup>(15)</sup> Cf. M. CH. EHRESMANN, *Espaces fibrés associés à une variété différentiable*, C. R. Académie des Sciences, t. 216, p. 628.

<sup>(16)</sup> Cette conception de  $V_{2n+1}$  se justifie car en un point  $M$  de  $V_{n+1}$  les  $n$  directions des fibres définissent un repère  $R$ , qui lorsqu'on munit d'une métrique  $V_{n+1}$ , coïncide avec le repère  $R$  défini au § II, 4.

<sup>(17)</sup> Cf. M. H. CARTAN, *Colloque de Topologie*, Bruxelles 1950, Masson et Co, Paris, 1950, p. 15-27.

d'une part applique un élément de  $A^r$  dans  $A^{r-1}$ , d'autre part pour

$$a \in A^p, \quad b \in A^q, \quad ab \in A^r (r = p + q)$$

satisfait à

$$i(x)a \cdot b = (i(x)a)b + (-1)^p a \cdot (i(x)b).$$

L'algèbre  $A(T')$  étant engendrée au sens multiplicatif par ses éléments de degré 0 et 1 ( $A^0$  est identifié à l'anneau des fonctions numériques) l'antidérivation  $i(x)$  est déterminée quand elle est connue sur  $A^0$  et  $A^1 = T'$ , elle est nulle sur  $A^0$ , elle se réduit sur  $A^1$  au produit scalaire définissant la dualité entre  $T$  et  $T'$ .

Pour  $x \in T, \quad x' \in T' \quad i(x) \cdot x' = \langle x, x' \rangle.$

Il en résulte que l'opérateur  $i(x)$  appliqué à un élément de degré  $r$  de  $A(T')$  noté  $(x'_1 \wedge x'_2 \wedge \dots \wedge x'_r)$  s'écrit

$$i(x)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r) = \sum_{1 \leq k \leq r} (-1)^{k+1} \langle x, x'_k \rangle x'_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x'_k} \wedge \dots \wedge x'_r.$$

le signe  $\widehat{\phantom{x}}$  signifiant que le terme situé au-dessous doit être supprimé.

Notons encore que l'opérateur  $i(x)$  est de carré nul puisque son carré est nul sur  $A^0$  et  $A^1$ .

Ces généralités essentielles extraites de la conférence de M. H. Cartan (<sup>17 bis</sup>) étant rappelées, l'opérateur  $i(x)$  applique en particulier la forme  $\Omega$  de degré 2 dans le sous-espace vectoriel  $T'$  des formes de Pfaff.

$$i(x)\Omega = \pi$$

symbole qui lorsque  $V_{2n+1}$  est rapportée à un système de coordonnées  $\rho^\alpha$ ,  $\alpha$  (0 à  $2n$ ) donne

$$i(x)\Omega = k_{\alpha\beta}(x^\alpha d\rho^\beta - x^\beta d\rho^\alpha)$$

puisque  $\Omega = k_{\alpha\beta} d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta$ ,  $k_{\alpha\beta}$  tenseur anti-symétrique fonction de l'anneau  $A^0$ ,  $x$  a pour composantes  $x^\alpha$ , et que nous supposons le produit scalaire défini par le symbole de Kronecker.

En particulier avec un système de coordonnées Hamiltoniennes

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt$$

$$i(x)\Omega = x_i \left( dq^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) - x^i \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt - Q_i dt \right) + x^0 \left( dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt - Q_i dq^i \right).$$

(<sup>17 bis</sup>) Le point de vue adopté ici est plus restrictif que celui de M. H. Cartan auquel le lecteur est prié de se reporter; toute cette application est rédigée en conservant les idées et les notations de M. H. Cartan.

Le système différentiel  $\Sigma$  des caractéristiques de  $\Omega$  peut s'écrire d'une infinité de manières au moyen de  $2n$  champs  $(x^1, x^2, \dots, x^{2n})$  indépendants c'est-à-dire tels que  $(x^1 \wedge x^2 \cdots \wedge x^{2n} \neq 0)$ . Lorsqu'on écrit les équations caractéristiques de  $\Omega$  sous la forme  $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho^\alpha} = 0$ ,  $\alpha$  (1 à  $2n$ ) cela revient à prendre pour les  $x$   $2n$  champs particuliers  $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ .

Remarquons que pour un  $x$  quelconque  $\in T$ , la forme de Pfaff  $i(x)\Omega$  n'est pas une forme quelconque de  $T'$  elle appartient au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$ .

**Champ caractéristique E.** — La forme  $\Omega$  de degré 2 étant de rang  $2n$ , définie sur  $V_{2n+1}$ , il existe un élément  $E \in T$  défini à un facteur (fonction numérique) près, qui applique  $\Omega$  sur le zéro de l'espace des formes. E est appelé champ caractéristique et on a :

$$i(E)\Omega = 0.$$

Le but de notre étude étant de faire la théorie des liaisons de nature quelconque pour les systèmes paramétriques, les théorèmes suivants jouent un rôle important.

**THÉORÈME I.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme de Pfaff  $\pi$  appartienne au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$  est  $i(E)\pi = 0$ .*

1° La condition est nécessaire car si  $\pi$  appartient au sous-module des formes caractéristiques, il existe  $x \in T$  modulo E tel que  $i(x)\Omega = \pi$ .

$$\begin{aligned} i(E)\pi = i(E) \cdot i(x)\Omega &= -i(x) \cdot i(E)\Omega \\ i(E)\Omega = 0 &\text{ entraîne } i(E)\pi = 0. \end{aligned}$$

2° La condition est suffisante. En effet pour  $a \in T$ ,  $\pi \in T'$ , il suffit de remarquer que la condition  $i(a)\pi = 0$  signifie que  $\pi$  appartient à un sous-module de  $T'$ . Appliquer à  $a = E$  la proposition indique que  $\pi$  appartient au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$ .

**THÉORÈME II.** — *Soit  $f$  une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ , la valeur numérique de  $f$  sur une ligne caractéristique de  $\Omega$  est une fonction du paramètre  $t$  dont la dérivée première par rapport à  $t$  est  $i(E) \cdot df$ , la dérivée  $n^e$   $(i(E) \cdot df)^{(n)}$ .*

Avant de démontrer ce théorème nous remarquerons que  $f$  étant une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ , l'opérateur  $i(E)$  appliqué à la forme  $df$  lui fait correspondre une nouvelle fonction numérique  $f_E^1 = i(E).df$ . Dans le cas particulier où  $E$  a relativement à une base  $x^i$   $2n$  composantes nulles, la 1<sup>e</sup> égale à 1,  $f_{x^i}^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Ceci justifie la définition suivante :

**DÉFINITION.** — *Fonction dérivée première d'une fonction numérique par rapport à un champ.* —  $f$  étant une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$  nous appellerons dérivée première de la fonction  $f$  relativement au champ  $E$  la fonction  $f_E^{(1)} = i(E).df$ . La fonction  $f_E^{(1)}$  étant elle-même une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ , on peut appliquer l'opérateur  $i(E)$  à la forme  $df_E^{(1)}$  et appeler dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $E$   $f_E^{(2)} = i(E).df_E^{(1)}$  que nous écrirons symboliquement  $(i(E).df)^{(2)}$ . D'une manière générale la dérivée  $n^e$  de la fonction  $f$  par rapport à  $E$  est la fonction  $f_E^{(n)} = i(E).df_E^{(n-1)} = (i(E).df)^{(n)}$ .

**REMARQUES.** — 1° Si  $f$  est un produit de deux fonctions  $u.v$  on démontre d'une manière classique

$$(u.v)_E^{(n)} = u_E^{(n)}.v + \dots + C_n^p u_E^{(n-p)}.v_E^{(p)} + \dots + u.v_E^{(n)}.$$

2° Relativement à deux champs pris dans l'ordre  $E_1, E_2$  on peut définir pour les fonctions numériques une dérivation  $i(E_2)d(i(E_1).df)$ . Ces généralités étant posées démontrons le théorème II. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques sur  $V_{2n+1}$ ; considérons les deux fonctions  $i(E).df$  et  $i(E).dg$ . Si  $f$  est une fonction de  $g$ ,  $df$  est proportionnelle à  $dg$ ; l'opérateur  $i(E)$  étant linéaire et homogène

$$\frac{df}{dg} = \frac{i(E).df}{i(E).dg}.$$

En prenant  $g = t$  et choisissant la fonction numérique arbitraire dont dépend le champ  $E$  défini comme solution de  $i(E)\Omega = 0$  telle que  $i(E)dt = 1$

$$\frac{df}{dt} = i(E)df = f_E^1.$$

Au second membre on doit considérer la fonction  $f_E^1$  comme fonction de  $t$  sur la ligne caractéristique.

En répétant sur la fonction  $f_{\mathbf{E}}^{(1)}$  le raisonnement fait sur  $f$  nous écrivons le long d'une ligne caractéristique du champ  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} f_i^{(2)} &= (i(\mathbf{E}) \cdot df)_i^{(2)}. \\ \text{Par récurrence} \quad f_i^{(n)} &= (i(\mathbf{E}) \cdot df)_i^{(n)}. \end{aligned}$$

*Application.* — Si on choisit  $2n$  fonctions  $f_i$  indépendantes sans singularité dans le voisinage d'un point  $\mathbf{M}$ , on a pour représenter les lignes caractéristiques du champ  $\mathbf{E}$  le système de  $2n$  équations différentielles qui s'écrit

$$\frac{df_i}{dt} = i(\mathbf{E}) \cdot df_i.$$

Ce système permet d'étudier l'aspect local du mouvement au voisinage d'un point  $\mathbf{M}_0$  de la variété, puisqu'on peut calculer toutes les dérivées successives en  $\mathbf{M}_0$  au moyen de l'opérateur  $i(\mathbf{E})$ .

---

## CHAPITRE II

### THÉORIE D'UNE LIAISON IMPOSÉE A UN SYSTÈME MATÉRIEL

#### § I. — Généralités.

Soit un système matériel  $S$  formé de points et de solides dépendant de  $n$  paramètres  $q^i$ . Dans ce système il existe des liaisons holonomes dont on a tenu compte en disant que le système dépend de  $n$  paramètres. Il a pour image une variété  $V_{2n+1}$  précisée au chapitre I, § III.

DÉFINITION. — Nous dirons qu'on impose une nouvelle liaison au système holonome  $S$ .

1° si l'image de  $S$  est une sous-variété de  $V_{2n+1}$   $a(M) = 0$ ,  $M \in V_{2n+1}$ .

2° si on ajoute au champ caractéristique  $E$  un champ de liaison  $E_l$ , champ dû aux forces nécessaires à la réalisation de cette liaison.

Quand on emploie un système particulier de variables de position  $q^i$  de vitesse  $\dot{q}^i$ , et le temps  $t$ , cette définition se traduit par

1° une relation  $a(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$ ,  $i$  variant (1 à  $n$ ), admettant des dérivées partielles  $\frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \neq 0$  pour un  $i$  au moins (si la relation est holonome nous conviendrons de la remplacer par sa dérivée par rapport à  $t$ ).

2° une force généralisée  $\vec{L}$  à ajouter aux forces appliquées à  $S$ , dont les composantes covariantes  $L_i$  par rapport au repère naturel  $R$  (chapitre I, § II, 4) sont définies par la puissance relative  $P = \sum_1^n L_i \dot{q}^i$ .

Quand on caractérise le système  $S$  par une forme  $\Omega$  sur  $V_{2n+1}$ , astreindre  $S$  à une nouvelle liaison revient à remplacer  $\Omega$  par  $\Omega + \Omega_l$ ,  $\Omega_l = L_i dq^i \wedge dt$  avec la condition forme  $da = 0$ .

Dans l'expression de  $P$  les  $L_i$  sont des fonctions des  $q^i$ ,  $\dot{q}^i$ ,  $t$ , l'indice  $i$  prenant toutes les valeurs possibles ; dans l'expression de  $P$  on ne tient pas compte de la relation  $a = 0$ .

REMARQUES. — 1° Il existe une relation liant la forme  $da$  et le champ  $E_i$ , qui lorsqu'on utilise des coordonnées se traduit par une relation liant des dérivées partielles de la fonction  $a$  et les  $L_i$ . L'étude de cette relation fait l'objet du § II de ce chapitre.

2° Au point de vue où nous nous plaçons si on considère un solide  $S$  astreint à rouler sans glisser sur une surface donnée cette condition se traduit par trois relations et le solide  $S$  sera considéré comme astreint à trois liaisons du type précité. Pour préciser prenons une sphère  $S$  homogène de rayon  $a$  astreinte à rouler sans glisser sur un plan fixe; par rapport à un repère fixe formé d'un trièdre trirectangle

$\xi, \eta, \zeta$ , désignent les coordonnées du centre de  $S$ ,

$p, q, r$ , désignent les composantes du vecteur rotation instantané,

$u, v, w$ , désignent les composantes de la vitesse du point de contact.

Les liaisons se traduisent par

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \dot{\xi} - aq = 0 \\ P_1 = Xu \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \dot{\eta} + ap = 0 \\ P_2 = Yv \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w = \dot{\zeta} = 0 \\ P_3 = Zw \end{array} \right.$$

Au contraire une sphère qui glisse sur le plan n'est astreinte qu'à une liaison  $\zeta - a = 0$   $P = N(\zeta - f\sqrt{u^2 + v^2})$  (voir la théorie au § 6 de ce chapitre).

## § II. — Relation entre la forme $da$ et le champ $E_i$ .

La relation de liaison étant définie par une fonction numérique  $a = 0$  sur  $V_{2n+1}$  la forme  $da$  doit être nulle sur les lignes intégrales des équations du mouvement, elle appartient donc au sous-module des formes caractéristiques de la forme  $\Omega + \Omega_i$ . D'après le théorème I du § III, chapitre 1, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$(II, 1) \quad i(E + E_i) \cdot da = 0$$

qui s'écrit encore

$$(II, 2) \quad i(E_i) \cdot da + i(E) \cdot da = 0.$$

Explicitons la condition (II, 1) en prenant comme variables les variables Hamiltonniennes. La forme  $\Omega$  caractérisant mécaniquement le système  $S$  est

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - [d(T_2 - T_0) - Q_i dq^i] \wedge dt.$$

La liaison est définie par  $a(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $\Omega_t = L_t dq^i \wedge dt$ .  
 Les équations caractéristiques de la forme  $\Omega + \Omega_t$  sont :

$$\frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dp_i)} = dq^i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} dt,$$

$$\frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dq^i)} = -dp_i + \left[ Q_i + L_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i} \right] dt.$$

La forme  $da = \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt$  devant appartenir au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega + \Omega_t$  dont une base est

$$\frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dp_i)}, \quad \frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dq^i)}, \quad da = -\frac{\partial a}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dq^i)} + \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\Omega + \Omega_t)}{\partial(dp_i)}$$

d'où la condition

$$\frac{\partial a}{\partial p_i} \left[ Q_i + L_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i} \right] + \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0.$$

Interprétation de la condition (II, 1). — La condition (II, 1) peut s'interpréter de deux manières différentes.

*Premier point de vue.* — Les champs  $E$  et  $E_t$  étant connus, la condition (II, 1) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre définissant la fonction  $a$ . Elle exprime la condition nécessaire et suffisante pour que  $a = \text{const.}$  soit une intégrale première du système des équations différentielles des caractéristiques de la forme  $\Omega + \Omega_t$ . Comme l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, du premier ordre dépend d'une fonction arbitraire,  $\mathcal{F}(a) = \text{const.}$  est aussi intégrale première mais ne constitue pas une intégrale distincte.

Conséquence : La relation de liaison  $a = 0$  ne peut être choisie arbitrairement c'est une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles. Cette relation de liaison est aussi représentée analytiquement par  $\mathcal{F}(a) = 0$  avec  $\mathcal{F}(0) = 0$ ; c'est pourquoi nous dirons que par rapport à un système holonome  $S$  une relation de liaison n'est définie analytiquement qu'à une fonction arbitraire près.

*Deuxième point de vue.* — La sous-variété  $a = 0$  de  $V_{2n+1}$  étant donnée, la condition (II, 1) est linéaire par rapport au champ  $E_t$  comme le montre (II, 2). Il existe une infinité de champs  $E_t$  satisfai-

sant à (II, 2). On peut donner une interprétation géométrique à (II, 2) en utilisant le repère naturel R (chapitre 1, § II, 4). Au point M de la variété  $V_{n+1}$ , considérons le vecteur  $\vec{L}$  (composantes covariantes  $L_i$ ) et le vecteur  $\vec{a}$  (composantes contravariantes  $\frac{\partial a}{\partial p_i}$ ).  $i(E) \cdot da = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial p_i} L_i$  est le produit scalaire de ces deux vecteurs  $i(E) \cdot da$  fonction numérique, que nous désignons par  $\alpha$ , ne dépend pas de la force de liaison. L'équation (II, 2) prend ainsi la forme géométrique  $\vec{a} \cdot \vec{L} + \alpha = 0$ , et signifie que l'extrémité du vecteur  $\vec{L}$  d'origine M situé dans un hyperplan défini par l'équation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial p_i} L_i + \alpha = 0.$$

Cette équation détermine si l'on veut une des composantes  $L_i$  en supposant les  $(n - 1)$  autres connues.

### § III. — Distinction entre une intégrale première du mouvement de S et une liaison imposée à S.

Si  $i(E) \cdot da = 0$  en tout point de  $V_{2n+1}$  cela signifie d'après le théorème I (chapitre 1, § III) que  $da$  appartient au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$ , en d'autres termes  $a = 0$  est une intégrale première particulière du système des caractéristiques de  $\Omega$ . Cette liaison peut en particulier être réalisée sans adjonction de forces nouvelles au système mécanique S puisqu'on peut satisfaire à (II, 1) en prenant le champ  $E_t$  nul. Ceci nous permet de préciser la notion de liaison imposée à un système mécanique S.

**DÉFINITION.** — Une liaison est imposée à un système S, quand  $a = 0$  n'est pas une intégrale première particulière des équations du mouvement de S. Cette définition se traduit par la condition  $i(E) \cdot da \neq 0$ , qui lorsqu'on emploie des coordonnées  $p_i, q^i, t$  s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial p_i} \left( Q_i - \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial q^i} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(T_2 - T_0)}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial t} \neq 0.$$

§ IV. — Liaison du type  $a=0$ ,  $\lambda e$ . **Compatibilité.**

Dans un très grand nombre de liaisons usuelles le mécanisme de la liaison est tel qu'on connaît à priori la direction de la force de liaison généralisée  $\vec{L}$ , c'est-à-dire que le champ de liaison  $E_i$  est de la forme  $\lambda e$  champ de direction connue,  $\lambda$  fonction numérique à déterminer. Exemples

1. Deux solides en contact sans frottement, la force de liaison est dirigée suivant la normale commune.

2. Deux solides glissent l'un sur l'autre avec frottement, la force de liaison obéit aux lois de Coulomb ou à des lois de Coulomb généralisées. On connaît donc la direction de la force de liaison puisqu'elle est située d'une part dans le demi-plan défini par la normale commune et le vecteur opposé à la vitesse de glissement  $\vec{V}_g$ , d'autre part fait dans ce demi-plan avec la normale commune l'angle  $\varphi$  tel que  $\text{tg } \varphi = f$  ( $f = \text{const.}$  loi de Coulomb ordinaire,  $f$  fonction de la vitesse de glissement, de la composante normale  $N$  de la pression des deux solides, loi de Coulomb généralisée). Même résultat quand on tient compte du couple de résistance au roulement et de pivotement.

3. Liaison de puissance nulle. Voir ce qu'il faut entendre par là au § V.

4. Liaison par asservissement de M. H. Béghin dont la direction d'action est connue.

En mettant en évidence la direction  $e$  du champ de liaison  $E_i = \lambda e$  l'équation (II, 2) s'écrit

$$(II, 3) \quad \lambda i(e) \cdot da + i(E) \cdot da = 0.$$

Par hypothèse dans le cas d'une liaison imposée à S  $i(E) \cdot da \neq 0$ , l'équation précédente détermine pour le facteur  $\lambda$  une valeur finie si  $i(e) \cdot da \neq 0$ . Les hypothèses  $i(E) \cdot da \neq 0$ ,  $i(e) \cdot da = 0$ , conduisent à attribuer une valeur infinie à  $\lambda$ . Sous l'action d'une force dont la grandeur devient infinie, les liaisons invariables dont on a nécessairement tenu compte dans la mise en équations du système paramétrique cessent de l'être. On doit donc envisager la déformation de ces liaisons. Au sens de la théorie des solides invariables on ne peut aborder l'étude du cas  $i(e) \cdot da = 0$  pour lequel le postulat du

chapitre I § II (système des forces intérieures impuissant) n'est pas valable. Nous rencontrerons un exemple de cette circonstance dans le cas du frottement de glissement, de roulement, de pivotement à la fin de ce chapitre. Ce qui précède nous conduit à la notion de liaison compatible.

**DÉFINITION.** — *Compatibilité d'une liaison du type  $a = 0, \lambda e$ .* — Une liaison imposée à un système mécanique S du type  $a = 0, \lambda e$ , est dite compatible si  $i(e) \cdot da \neq 0$ .

**REMARQUE.** — Si en un point  $M_0$  de  $V_{2n+1}$  appartenant à la sous-variété  $a = 0$  on a simultanément  $(i(e) \cdot da)_0 = 0$ ,  $(i(E) \cdot da)_0 = 0$ ,  $\lambda$  n'est pas déterminé par l'équation (II, 3). On peut alors le déterminer au moyen de la valeur de  $a^{(2)}$  calculée en appliquant le théorème II du chapitre I § III.

$$a^{(2)} = (i(E + \lambda e) \cdot da)^{(2)} = 0.$$

$$\lambda^2 (i(e) da)^{(2)} + \lambda [(i(e) d\lambda) \cdot (i(e) da) + (i(E) d\lambda) \cdot (i(e) da) + i(e) d(i(E) da) + i(E) d(i(e) da)] + (i(E) da)^{(2)} = 0$$

relation qui en  $M_0$  se réduit à

$$\lambda_0^2 (i(e) da)_0^{(2)} + \lambda_0 [i(e) d(i(E) da) + i(E) d(i(e) da)]_0 + (i(E) da)_0^{(2)} = 0.$$

Cette équation du 2<sup>e</sup> degré en  $\lambda_0$  le détermine généralement, sinon on utiliserait la première expression de  $(i(E + \lambda e) \cdot da)_0^{(2)}$  non identiquement nulle.

## V. — Liaison de puissance nulle.

Cette catégorie de liaisons se caractérise aisément quand on prend comme variables les variables lagrangiennes  $(q^i, \dot{q}^i, t)$ . La puissance d'une force définie par  $L_i \dot{q}^i$  dépend comme la vitesse du repère choisi. Elle revêt donc deux aspects distincts suivant le repère (chap. I § II, 4) que l'on envisage

1. Par rapport au repère naturel R,  $P = \sum_{i=1}^n L_i \dot{q}^i$ .

2. Par rapport au repère  $\mathcal{R}$  de l'espace de Riemann à  $(n+1)$  dimensions

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^n L_i \dot{q}^i \quad \text{avec} \quad \dot{q}_0 = 1$$

repère qu'on est obligé d'introduire si les liaisons implicites dont on

a tenu compte pour aboutir à la notion de système paramétrique, dépendent du temps  $t$ . Remarquons que la première expression se déduit de la deuxième en introduisant la convention de langage habituelle : puissance à  $t$  constant et que les deux expressions coïncident si les liaisons implicites ne dépendent pas du temps.

Pour la généralité des raisonnements nous utiliserons dans ce paragraphe la puissance  $\mathcal{F} = \sum_{i=0}^n L_i \dot{q}^i$  par rapport au repère riemannien  $\mathcal{R}$ .

On s'affranchit du rôle des coordonnées de la manière suivante : à la puissance  $\mathcal{F}$  correspond la forme  $\pi = \mathcal{F} dt = \sum_{i=0}^n L_i dq^i$  définie sur  $V_{n+1}$ . Le long d'une ligne intégrale  $\Sigma$  des équations du mouvement relatif au champ  $E + E_l$ , la valeur de la forme  $\pi$  est  $i(E + E_l)\pi$ , la valeur de la forme  $dt$  est conventionnellement  $i(E + E_l) \cdot dt = 1$  (cf. théorème II chap. 1 § III) d'où

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{dt} = i(E + E_l)\pi.$$

Si on considère maintenant l'ensemble des lignes intégrales  $\Sigma$ ,  $\mathcal{F} = i(E + E_l)\pi$  est une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ .

**DÉFINITION.** — Nous dirons qu'une liaison est de puissance nulle si  $i(E + E_l)\pi = \mathcal{F}$  est nulle sur l'ensemble des lignes intégrales du mouvement de  $S$  astreint à la liaison.

**THÉORÈME.** — Une liaison de puissance nulle a pour expression analytique  $\sum_{i=0}^n l_i \dot{q}^i$  les quantités  $l_i$  étant des fonctions de  $q^i, \dot{q}^i, t$ .

Les deux équations  $a = 0, \mathcal{F} = 0$  ne devant pas constituer deux relations de liaison distinctes, sont deux formes analytiques équivalentes de la liaison imposée à  $S$  au sens donné à cette expression au § II. On peut donc prendre comme expression analytique de la liaison  $\mathcal{F} = i(E + E_l)\pi = 0$ . Cette dernière équation montre que  $\pi$  n'est définie qu'à un facteur près fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ . Quand on prend les variables lagrangiennes il en résulte qu'une liaison de puissance nulle est définie par

$$\sum_{i=0}^n l_i \dot{q}^i = 0 \quad \mathcal{F} = \lambda \sum_{i=0}^n l_i \dot{q}^i.$$

*Cas particuliers.* — 1. Les  $l_i$  sont des fonctions des  $q^i$  seulement. Ce sont les liaisons linéairement non holonomes classiques

$$\sum_{i=1}^n l_i \dot{q}^i + l_0 = 0.$$

2. Les  $l_i$  sont les dérivées partielles d'une fonction  $a(q^i, t)$ . Ce sont les liaisons holonomes.

3. Les  $l_i$  sont les dérivées partielles par rapport aux  $\dot{q}^i$  d'une même fonction homogène de degré  $m$  par rapport aux  $\dot{q}^i$   $a(q^i, \dot{q}^i, t)$

$$l_i = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = m a.$$

Ce sont les liaisons découvertes par Appell<sup>(18)</sup>.

REMARQUE. — Les liaisons d'Appell contiennent comme cas particulier les deux précédents :  $m = 1$  liaisons linéairement non holonomes,  $m = 1$ ,  $l_i = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^i}$  liaisons holonomes.

Valeur du facteur  $\lambda$  pour une liaison de puissance nulle. — L'équation (II, 3) avec  $a = l_i \dot{q}^i$ , devient

$$\lambda \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial p_i} l_i \right) + \alpha = 0, \quad \alpha = i(\mathbf{E}) da$$

or 
$$\frac{\partial a}{\partial p_i} = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} g^{ij}$$

( $g^{ij}$  tenseur métrique de  $V_n$  ou  $V_{n+1}$ )  $l_i g^{ij} = \beta$  sont les composantes contra-variantes de la direction d'action de la force de liaison par rapport au repère R.  $\lambda$  est donc déterminé par

$$(II, 4) \quad \lambda \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} \beta \right) + \alpha = 0.$$

*Cas particulier.* — Liaison d'Appell.  $\frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} = l_j$  (II, 4) devient (II, 5)

$$(II, 5) \quad \lambda \left( \sum_{j=1}^n l_j \cdot \beta \right) + \alpha = 0.$$

Comme  $\sum l_j \beta$  est le carré de la grandeur du vecteur  $\vec{l}$  par rapport

(18) Cf. P. APPELL, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1911, tome 152, p. 1197-1199.

au repère R le coefficient de  $\lambda$  pour les liaisons d'Appell est toujours une quantité positive. Ce fait a une très grande importance pour l'unicité des mouvements d'un système S soumis à des liaisons de classe U (liaisons unilatérales) étudiées au chapitre IV et V.

§ VI. — Étude de la liaison constituée par le contact de deux solides glissant, roulant et pivotant l'un par rapport à l'autre.

Considérons un repère mobile formé par un trièdre trirectangle MXYZ ayant pour origine le point de contact des deux solides  $S_1$  et  $S_2$ , pour axes la normale commune dirigée vers  $S_1$ , MX et MY étant situés dans le plan tangent commun liés à un système de deux lignes orthogonales tracées sur  $S_2$ .

Notations par rapport à ce trièdre soient :

- $\vec{\Omega}(P^1, P^2, P^3)$  la rotation du trièdre de coordonnées
- $\vec{\omega}_1(p^1, p^2, p^3)$  la rotation absolue du corps  $S_1$
- $\vec{\gamma}_{AG_1}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$  la vitesse absolue de  $G_1$  centre de gravité de  $S_1$
- $\vec{MG}_1(g^1, g^2, g^3)$  les coordonnées de  $G_1$
- $\vec{\omega}_2(p^4, p^5, p^6)$  la rotation absolue de  $S_2$
- $\vec{\gamma}_{AG_2}(\alpha^4, \alpha^5, \alpha^6)$  la vitesse absolue de  $G_2$
- $\vec{MG}_2(g^4, g^5, g^6)$  les coordonnées de  $G_2$
- $\vec{R}$  la résultante des actions de  $S_2$  sur  $S_1$
- $\vec{K}$  le moment résultant par rapport à M des actions de  $S_2$  sur  $S_1$
- $\vec{V}_{MS_1}$  la vitesse du point de  $S_1$  en contact avec  $S_2$  en M
- $\vec{V}_{MS_2}$  la vitesse du point de  $S_2$  en contact avec  $S_1$  en M.

Le vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2}$  représente l'état cinématique de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ . Ce vecteur a pour composantes :

$$\begin{aligned} u^1 &= \alpha^1 - \alpha^4 + (g^2 p^3 - g^3 p^2) - (g^5 p^6 - g^6 p^5) \\ u^2 &= \alpha^2 - \alpha^5 + (g^3 p^1 - g^1 p^3) - (g^6 p^4 - g^4 p^6) \\ u^3 &= \alpha^3 - \alpha^6 + (g^1 p^2 - g^2 p^1) - (g^4 p^5 - g^5 p^4). \end{aligned}$$

La condition de contact de  $S_1$  et de  $S_2$  se traduit par  $u^3 = 0$ . Elle constitue la relation de liaison au sens du paragraphe I.

$$(II, 11) \quad a = \alpha^3 - \alpha^6 + (g^1 p^2 - g^2 p^1) - (g^4 p^5 - g^5 p^4) = 0.$$

Evaluons la puissance du système des forces de liaison.

Le vecteur caractérisant la rotation relative de  $S_1$  par rapport à  $S_2$  est  $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$  dont les composantes sont :

$$\begin{aligned} & \text{sur le plan tangent commun } \vec{\omega}_r \begin{cases} p^1 - p^4 \\ p^2 - p^5 \end{cases} \\ & \text{sur la normale commune } \vec{\omega}_n p^3 - p^6. \end{aligned}$$

La puissance des forces de liaison est :

$$P = \vec{R}(\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2}) + \vec{K}(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2).$$

Dans l'hypothèse  $\vec{V}_{MS_1} \neq \vec{V}_{MS_2}$ ,  $\vec{\omega}_1 \neq \vec{\omega}_2$ ,  $P$  non nulle n'est déterminée que si on précise direction et grandeur de  $\vec{R}$  et de  $\vec{K}$ . C'est le but des lois de Coulomb que nous rappelons

1) Lois concernant  $\vec{R}$ .  $\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2} = \vec{V}$  dont la composante normale est nulle si  $S_1$  et  $S_2$  sont en contact a une composante tangentielle  $\vec{V}_g$  vitesse de glissement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ .  $\vec{R}$  a une composante tangentielle  $\vec{T}$  et une composante normale  $\vec{N}$ .

a) La composante tangentielle  $\vec{T}$  est colinéaire à  $\vec{V}_g$  mais dirigée en sens opposé.

b)  $|\vec{T}|$  est lié à  $|\vec{N}|$  par la relation  $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$ ,  $f$  coefficient de frottement d'où

$$\vec{R}(\vec{V}_{MS_1} - \vec{V}_{MS_2}) = Nu^3 - f|N\vec{V}_g|.$$

2) Lois concernant  $\vec{K}$ .  $\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$  a une composante tangentielle  $\vec{\omega}_r$  qui caractérise le roulement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ , et une composante normale  $\vec{\omega}_n$  qui caractérise le pivotement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ .  $\vec{K}$  a une composante tangentielle  $\vec{K}_t$ , une composante normale  $\vec{K}_n$ .

a) La composante tangentielle  $\vec{K}_t$  est colinéaire à  $\vec{\omega}_r$ , mais dirigée en sens opposé.

b)  $|\vec{K}_t|$  est lié à  $|\vec{N}|$  par la relation  $|\vec{K}_t| = \delta|\vec{N}|$ ,  $\delta$  étant un coefficient appelé paramètre de résistance au roulement.

c)  $\vec{K}_n$  colinéaire à  $\vec{\omega}_n$  mais dirigé en sens opposé est lié à  $\vec{N}$  par la relation  $|\vec{K}_n| = \omega|\vec{N}|$ ,  $\omega$  étant un coefficient appelé paramètre de résistance au pivotement.

Il résulte de ces lois

$$\vec{K}(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) = -|\vec{N}|[\delta|\vec{\omega}_r| + \bar{\omega}|\vec{\omega}_n|].$$

La puissance du système des forces de liaison au sens de la définition du paragraphe I est

$$(II, 6) \quad P = N[u^3 - f|\vec{V}_g| - \delta|\vec{\omega}_r| - \bar{\omega}|\vec{\omega}_n|] \quad N > 0$$

ou (II, 7)

$$P = N[u^3 - f\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} - \delta\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} - \bar{\omega}\varepsilon(p^3 - p^6)],$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon(p^3 - p^6) > 0.$$

L'expression entre crochets est une fonction des 12 paramètres  $q^i$  caractérisant la position des deux solides dans l'espace et de leurs dérivées premières  $\dot{q}^i$ . Remarquons que les quantités  $u^1, u^2, u^3, p^1, \dots, p^6$  sont des formes linéaires et homogènes des  $\dot{q}^i$ . Pour mettre  $P$  sous la forme classique  $\sum_{i=1}^n L_i \dot{q}^i$ , il suffit d'appliquer le théorème d'Euler à chacune des fonctions homogènes :

$$\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} = \frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial u^1}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i + \frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial u^2}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i$$

$$\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} = \frac{p^1 - p^4}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial (p^1 - p^4)}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i$$

$$+ \frac{p^2 - p^5}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}} \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial (p^2 - p^5)}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i.$$

L'expression des  $L_i$  résulte de là et également celui des  $l_i$  puisque  $N$  se met en facteur dans les  $L_i$ . Il est important de remarquer que ce calcul est valable dans l'hypothèse où les coefficients  $f, \delta, \bar{\omega}$ , sont des fonctions de  $N$  pression des deux solides, de la vitesse de glissement, de la rotation  $\vec{\omega}_r$  ou  $\vec{\omega}_n$ .

*Cas particulier.* —  $f, \delta, \bar{\omega}$ , sont des constantes ou bien des fonctions de  $N$ , pression normale considérée comme un paramètre. Si on pose

$$(II, 8) \quad \Psi = u^3 - f\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} - \delta\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2} - \bar{\omega}\varepsilon(p^3 - p^6)$$

l'expression (II, 7) montre que  $P = N\Psi$ ;  $\Psi$  étant homogène et de

degré 1 par rapport aux  $\dot{q}^i$ , la forme classique de P est alors (II, 9) ce qui permet d'énoncer le théorème

$$(II, 9) \quad P = N \sum \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i.$$

**THÉORÈME I.** — *Dans le contact de deux solides frottant, glissant, pivotant l'un sur l'autre, si les coefficients  $f$ ,  $\delta$ ,  $\bar{\omega}$  sont constants ou des fonctions du paramètre N (pression normale) les composantes covariantes de la force de liaison par rapport au repère naturel R sont proportionnelles aux dérivées partielles par rapport aux  $\dot{q}^i$  d'une fonction  $\Psi(q^i, \dot{q}^i)$ .*

**Calcul de N.** — La liaison constituée par le contact de deux solides étant du type  $a = 0$ , le calcul de N s'effectue au moyen de l'équation (II, 3) qui s'écrit (II, 10)

$$(II, 10) \quad N(i(e) \cdot da) + i(E) \cdot da = 0.$$

Cette équation si  $f$ ,  $\delta$ ,  $\bar{\omega}$  sont indépendants de N est linéaire en N; dans le cas contraire elle constitue une équation implicite définissant N.

La détermination effective de N demande le calcul de  $i(E) \cdot da$  et de  $i(e) \cdot da$ .  $i(E) \cdot da$  ne peut se calculer que si l'on se donne le système des forces extérieures aux deux solides; comme ce dernier est arbitraire,  $i(E) \cdot da$  est une fonction numérique arbitraire sur  $V_{2n+1}$ . Quant à  $i(e) \cdot da$  il est déterminé puisqu'on connaît la relation de liaison et la puissance P.

**THÉORÈME II.** — *Dans le contact de deux solides glissant, roulant, pivotant l'un sur l'autre, l'invariant  $i(e) \cdot da$  est donné par la formule :*

$$(II, 12) \quad i(e) \cdot da = A + f(B \sin s + C \cos s) + \delta(D \cos \sigma + F \sin \sigma) + \varepsilon \bar{\omega} G$$

dans laquelle  $f$ ,  $\delta$ ,  $\bar{\omega}$ , désignent respectivement le coefficient de frottement les paramètres de résistance au roulement et au pivotement,  $s$  et  $\sigma$  sont respectivement l'angle du vecteur de glissement  $\vec{V}_g$  et l'angle du vecteur de rotation de roulement  $\vec{\omega}_r$ , avec une direction choisie arbitrairement dans le plan tangent commun aux deux solides, A, B, C, D, F, G des coefficients ne dépendant que de la distribution des masses dans les deux solides à l'instant  $t$ .

Remarquons que relation de liaison et puissance s'expriment

simplement au moyen des paramètres de vitesse  $\alpha^1 \dots \alpha^6, p^1 \dots p^6$  :

$$(II, 11) \quad a = \alpha^3 - \alpha^6 + g^1 p^2 - g^2 p^1 - g^4 p^5 + g^5 p^4 = 0$$

$$(II, 13)$$

$$P = N \left[ \frac{\partial u^3}{\partial \beta^c} \beta^c - f \frac{\partial \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}}{\partial (\beta^c)} \beta^c - \delta \frac{\partial \sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}}{\partial (\beta^c)} \beta^c - \bar{\omega} \varepsilon (p^3 - p^6) \right]$$

$\beta^c$  désignant un des paramètres quelconques  $\alpha^c$  ou  $p^c$ . L'expression (II, 13) de P fait intervenir les dérivées partielles par rapport à  $u^1, u^2$  et  $p^1 - p^4, p^2 - p^5$ , qui ont une signification géométrique. Si  $s$  désigne l'angle que fait la vitesse de glissement  $\vec{V}_g$  avec l'axe MX

$$\cos s = \frac{u^1}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} \quad \sin s = \frac{u^2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}}$$

si  $\sigma$  désigne l'angle que fait le vecteur rotation de roulement  $\vec{\omega}$ , avec MX

$$\cos \sigma = \frac{p^1 - p^4}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}} \quad \sin \sigma = \frac{p^2 - p^5}{\sqrt{(p^1 - p^4)^2 + (p^2 - p^5)^2}}$$

d'où la nouvelle expression de la puissance

$$(II, 14) \quad P = N l_c \beta^c$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{\alpha_1} = -f \cos s \\ l_{\alpha_2} = -f \sin s \\ l_{\alpha_3} = 1 \\ l_{p_1} = -g^2 - f \sin s g^3 - \delta \cos \sigma \\ l_{p_2} = g^1 + f \cos s g^3 - \delta \sin \sigma \\ l_{p_3} = -f \cos s g^3 + f \sin s g^1 - \varepsilon \bar{\omega} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l_{\alpha_4} = f \cos s \\ l_{\alpha_5} = f \sin s \\ l_{\alpha_6} = -1 \\ l_{p_4} = g^5 + f \sin s g^6 + \delta \cos \sigma \\ l_{p_5} = -g^4 - f \cos s g^6 + \delta \sin \sigma \\ l_{p_6} = f \cos s g^6 - f \sin s g^4 + \varepsilon \bar{\omega} \end{array} \right.$$

Tout revient à établir la formule permettant de calculer l'invariant  $i(e)da$  au moyen de ces paramètres  $\beta^c$ . Or quand on utilise des variables hamiltonniennes  $i(e).da = \sum l_i \frac{\partial a}{\partial p_i}$ ; quand on utilise des variables lagrangiennes,  $g^{ij}$  étant le tenseur métrique fondamental

$$i(e).da = \sum_{ij} g^{ij} l_i \frac{\partial a}{\partial q^j}$$

Si l'on utilise des paramètres de vitesse quelconques liés aux paramètres  $\dot{q}^i$  par des relations linéaires  $\beta^c = \mu_i^c \dot{q}^i$

$$l_i = \mu_i^c l_c, \quad \frac{\partial a}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial a}{\partial \beta^c} \cdot \frac{\partial \beta^c}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial a}{\partial \beta^c} \cdot \mu_j^c,$$

$$i(e) \cdot da = g^{ij} \mu_i^c \mu_j^c l_c \frac{\partial a}{\partial \beta^c} = \gamma^{c\sigma} l_c \frac{\partial a}{\partial \beta^\sigma}$$

$\gamma^{c\sigma} = g^{ij} \mu_i^c \mu_j^\sigma$  étant l'expression contravariante du tenseur fondamental dans le nouveau système de paramètres. Le tenseur contravariant  $\gamma^{c\sigma}$  se déduit du tenseur covariant  $\gamma_{c\sigma}$  qui est connu puisqu'il est donné par les coefficients de la force vive absolue dans le système d'axes MXYZ. Soit

$$2T = m_1 [(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2] + A_1 (p^1)^2 + B_1 (p^2)^2 \\ + C_1 (p^3)^2 - 2D_1 p^2 p^2 - 2E_1 p^3 p^1 - 2F_1 p^1 p^2 \\ + m_2 [(\alpha^4)^2 + (\alpha^5)^2 + (\alpha^6)^2] + A_2 (p^4)^2 + B_2 (p^5)^2 \\ + C_2 (p^6)^2 - 2D_2 p^3 p^6 - 2E_2 p^6 p^4 - 2F_2 p^4 p^5$$

dans laquelle  $m_1, m_2$  désignent les masses des deux solides,  $A_1, \dots, F_1$ , les coefficients de l'ellipsoïde d'inertie de  $S_1$  par rapport à des axes parallèles à MXYZ issus de  $G$ ,  $A_2, \dots, F_2$  les analogues pour  $S_2$ . De là résulte

$$\gamma^{\alpha_1 \alpha_1} = \gamma^{\alpha_2 \alpha_2} = \gamma^{\alpha_3 \alpha_3} = \frac{1}{m_1}; \quad \gamma^{\alpha_4 \alpha_4} = \gamma^{\alpha_5 \alpha_5} = \gamma^{\alpha_6 \alpha_6} = \frac{1}{m_2};$$

$$\gamma^{\alpha_i \alpha_j} = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

$$\gamma^{p_1 p_1} = a^1, \quad \gamma^{p_2 p_2} = b^1, \quad \gamma^{p_3 p_3} = c^1, \quad \gamma^{p_2 p_3} = d^1, \quad \gamma^{p_3 p_1} = e^1, \quad \gamma^{p_1 p_2} = f^1$$

$$\gamma^{p_4 p_4} = a^2, \quad \gamma^{p_5 p_5} = b^2, \quad \gamma^{p_6 p_6} = c^2, \quad \gamma^{p_6 p_4} = d^2, \quad \gamma^{p_4 p_6} = e^2, \quad \gamma^{p_4 p_5} = f^2,$$

$i(e) \cdot da = \gamma^{c\sigma} l_c \frac{\partial a}{\partial \beta^\sigma}$  donne la formule (II, 12) avec pour A, B, C, D,

F, G des valeurs qui ne dépendent que de la distribution des masses à l'intérieur des deux solides à l'instant  $t$ .

$$A = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + a^1 (g^2)^2 + b^1 (g^1)^2 - 2f^1 g^1 g^2 + a^2 (g^4)^2 + b^2 (g^5)^2 - 2f^2 g^4 g^5$$

$$B = a^1 g^2 g^3 + d^1 (g^1)^2 - e^1 g^1 g^2 - f^1 g^1 g^3 + a^2 g^3 g^6 + d^2 (g^4)^2 - e^2 g^4 g^5 - f^2 g^4 g^6$$

$$C = b^1 g^1 g^3 - d^1 g^1 g^2 + e^1 (g^2)^2 - f^1 g^2 g^3 + b^2 g^4 g^5 - d^2 g^4 g^5 + e^2 (g^5)^2 - f^2 g^5 g^6$$

$$D = a^1 g^2 - f^1 g^1 + a^2 g^5 - f^2 g^4$$

$$F = -b^1 g^1 + f^1 g^2 - b^2 g^4 + f^2 g^5$$

$$G = -d^1 g^1 + e^1 g^2 - d^2 g^4 + e^2 g^5$$

Dans le cas où on suppose  $f, \delta, \bar{\omega}$  indépendants de  $N$ ,  $N$  n'est fini pour  $i(E) \cdot da \neq 0$  que si  $i(e) \cdot da \neq 0$ .

Cette question présentant un certain intérêt pratique, nous allons montrer brièvement que la distribution de la matière dans les deux solides doit être assez particulière pour que  $i(e) \cdot da = 0$  soit réalisé pour des valeurs de  $f < 1$ .

Pour simplifier prenons le cas d'un solide de révolution glissant avec frottement sur un plan, l'axe du solide restant dans un plan de symétrie vertical. Dans les calculs précédents on doit prendre :

$$g^2 = 0, \quad p^1 = 0, \quad p^3 = 0, \quad p^4 = p^5 = p^6 = 0, \\ g^4 = g^5 = g^6 = 0, \quad d^1 = 0, \quad f^1 = 0, \quad b^1 = \frac{1}{m_1 k^2},$$

d'où la condition

$$k^2 + (g^1)^2 + f g^1 g^3 = 0 \quad \text{si} \quad \cos s = 1.$$

Le glissement ayant lieu dans le sens positif de l'axe des  $X$ ,  $g^3$  étant positif il faut que  $g^1$  soit négatif. Prenons pour système de référence des axes parallèles issus de  $G$ ; les coordonnées de  $M$  par rapport à  $O$  sont  $\xi = -g^1, \zeta = -g^3 \cdot k$  et  $f$  étant donné on en déduit que le point de contact  $M$  du solide est par rapport à  $G$  sur la branche d'hyperbole

$$(\xi)^2 + f \xi \zeta = -k^2$$

la distance minimum de  $G$  à  $M$  est donnée par la longueur du demi-axe transverse  $\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1+f^2}-1}}$ ; d'où l'inégalité  $\frac{k}{GM} \leq \frac{\sqrt{\sqrt{1+f^2}-1}}{\sqrt{2}}$ .

Si le corps se réduit à une barre homogène  $\frac{k}{GM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , donc pour un corps homogène  $\frac{k}{GM} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . La double inégalité n'est vérifiée que si  $f > \frac{4}{3}$ .

### § VII. — Méthode générale de formation des équations du mouvement d'un système mécanique astreint à une liaison.

Tout repose sur la forme extérieure de degré deux associée au système mécanique  $S$ , car cette forme est susceptible de s'exprimer au moyen de formes de Pfaff.

Nous supposons la liaison  $l$  définie par  $a(p_i, q^i, t) = 0$ ,

$\Omega_l = \Lambda l dq^i \wedge dt$  : le cas où  $\Omega_l = L_i dq^i \wedge dt$ , tous les  $L_i$  étant connus sauf l'un d'eux pouvant être considéré comme un cas particulier puisqu'il suffit de grouper tous les  $L_i$  connus avec les  $Q_i$  qui correspondent aux forces extérieures pour être ramené au cas précédent, la fonction  $L_i$  inconnue jouant le rôle de  $\Lambda$ . La forme  $\Omega$  associée au système astreint à la liaison  $l$  s'écrit

$$\Omega = dp_i \wedge dq^i - d(T_2 - T_0) \wedge dt + Q_i dq^i \wedge dt + \Lambda l dq^i \wedge dt.$$

La liaison imposée à  $S$  étant par hypothèse compatible (cf. chapitre II, § IV)  $i(e)da = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial p_i} l^i \neq 0$ ; il en résulte qu'on peut toujours substituer à deux différentielles associées  $dp_i, dq^i$  les deux formes de Pfaff  $\pi$  et  $\sigma$  définies par

$$\begin{aligned} \pi &= l_i dq^i \\ \sigma &= \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt \end{aligned}$$

résolubles par rapport à deux différentielles associées, soient pour fixer les idées  $dp_1, dq_1$ ,

$$\begin{aligned} dp_1 &= \frac{\sigma - \sum_{i=2}^n \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial a}{\partial t} dt}{\frac{\partial a}{\partial p_1}} \\ dq^1 &= \frac{\pi - \sum_{i=1}^n l_i dq^i}{l_1}. \end{aligned}$$

La forme extérieure associée au système exprimée un moyen d'un système de  $2n$  formes de Pfaff  $\sigma, \pi, \omega^\alpha, \alpha$  variant de 3 à  $2n$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega &= k_{12}(\sigma \wedge \pi) + k_{1\alpha}(\sigma \wedge \omega^\alpha) + k_{2\alpha}(\pi \wedge \omega^\alpha) \\ &\quad + k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (k_{\alpha_0} \omega^\alpha + k_{1_0} \pi + k_{2_0} \pi - \Lambda \pi) \wedge dt. \end{aligned}$$

Les équations différentielles du mouvement sont les équations associées à  $\Omega$ .

- (1)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta} \omega^\beta - k_{1\alpha} \sigma - k_{2\alpha} \pi - k_{\alpha_0} dt = 0$  en nombre égal à  $2(n-1)$
- (2)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \pi} = -k_{12} \sigma + k_{2\alpha} \omega^\alpha - (k_{2_0} - \Lambda) dt = 0$
- (3)  $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = k_{12} \pi + k_{1\alpha} \omega^\alpha - k_{1_0} dt = 0$

auxquelles on adjoint la liaison  $a = 0$  et les relations de définition des formes.

**Forme réduite  $\Omega_r$ .** — Remarquons que si dans  $\Omega$  on tient compte de la liaison en annulant  $\sigma$ , on obtient une forme réduite  $\Omega_r$ .

$$\Omega_r = k_{2\alpha}(\pi \wedge \omega^\alpha) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{20}\omega^\alpha + k_{20}\pi - \Lambda\pi) \wedge dt.$$

Comparons les  $(2n - 1)$  premières équations associées à  $\Omega_r$  et à  $\Omega$  dans lesquelles on fait  $\sigma = 0$

$$(1') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta} \omega^\beta - k_{2\alpha} \pi - k_{20} \cdot dt = 0 \quad \text{en nombre égal à } 2(n-1)$$

$$(2') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \pi} = k_{2\alpha} \omega^\alpha - (k_{20} - \Lambda) dt = 0.$$

On constate que ces  $(2n - 1)$  premières équations sont les mêmes. La dernière équation du premier système qui manque quand on utilise  $\Omega_r$  peut être remplacée par une équation indépendante des précédentes. En remarquant que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial (dp_1)} \cdot \frac{\partial (dp_1)}{\partial \sigma} = 0$$

$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0$  est équivalente à  $\frac{\partial \Omega}{\partial (dp_1)} = 0$  est réciproquement. On en déduit qu'il suffit d'adjoindre aux équations (1') et (2') cette équation qui s'écrit

$$dq^1 - \frac{\partial T_2}{\partial p_1} dt = 0.$$

Dans l'ensemble des équations ainsi écrites on remplace  $p_1$  par sa valeur calculée au moyen de l'équation  $a = 0$ , d'où le théorème :

**THÉORÈME I.** — *Étant donné un système mécanique à  $n$  paramètres astreint à une liaison compatible  $a(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $\Omega_i = \Lambda l_i dq^i \wedge dt$ , on peut obtenir les équations du mouvement et le facteur de liaison  $\Lambda$ , en adjoignant aux équations associées à  $\Omega_r$ , déduite de  $\Omega$  en tenant compte de la liaison, d'une part  $\pi = l_i dq^i$  d'autre part une des équations  $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0$ ,  $i$  étant tel que  $\frac{\partial a}{\partial p^i} l_i \neq 0$   $p_i$  étant dans les équations remplacé par sa valeur calculée au moyen de la relation  $a = 0$ .*

REMARQUE. — Dans la pratique si  $\Omega$  est exprimée au moyen des variables lagrangiennes  $q^i, \dot{q}^i, t$ , et de leurs différentielles ce théorème se traduit par la règle suivante :

Règle. — Pour obtenir les équations différentielles du mouvement on substitue dans  $\Omega$  à deux différentielles associées  $dq^i, d\dot{q}^i$ , par exemple les deux formes  $\pi$  et  $\sigma$ ,  $\Omega_r$  se réduit de  $\Omega$  en faisant  $\sigma = 0$  et en remplaçant  $\dot{q}^i$  par sa valeur calculée au moyen de l'équation  $a(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$ . Les équations associées à  $\Omega_r$  auxquelles on adjoint d'une part  $dq^i - \dot{q}^i dt = 0$ , d'autre part  $\pi = l_i dq^i$  déterminent les équations du mouvement et le facteur de liaison.

Forme réduite  $\Omega_r$  donnant uniquement les équations différentielles du mouvement. —  $\Omega_r$  formé comme on vient de l'indiquer dépend de  $2(n-1)$  formes  $\omega^\alpha$  de  $dt$  et de  $\pi$ .

$$\Omega_r = k_{2\alpha} \pi \wedge \omega^\alpha + k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (k_{\alpha_0} \omega^\alpha + k_{2_0} \pi - \lambda \pi) \wedge dt.$$

Comme  $\pi = P_u dt$ , ( $P$  étant la puissance des forces nécessaires à la réalisation de la liaison  $P = \lambda P_u$ ,  $P_u = l_i \dot{q}^i$ ), remplaçons  $\pi$  par  $P_u dt$  dans  $\Omega_r$ . On obtient ainsi une forme

$$\begin{aligned} \Omega_s &= k_{2\alpha} P_u dt \wedge \omega^\alpha + k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - k_{\alpha_0} \omega^\alpha \wedge dt \\ &= k_{\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta - (P_u k_{2\alpha} + k_{\alpha_0}) \omega^\alpha \wedge dt \end{aligned}$$

dans laquelle ne figure plus  $\lambda$ . En comparant les équations associées à  $\Omega_s$  et à  $\Omega_r$  dans lesquelles on a remplacé  $\pi$  par  $P_u dt$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta} \omega^\beta - (P_u k_{2\alpha} + k_{\alpha_0}) dt = 0 \quad \text{en nombre égal à } 2(n-1)$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha\beta} \omega^\beta - k_{2\alpha} P_u dt - k_{\alpha_0} dt = 0 \quad \text{en nombre égal à } 2(n-1),$$

on constate que ce sont les mêmes. On peut donc obtenir les équations du mouvement indépendamment de  $\lambda$  au moyen de  $\Omega_s$  dans laquelle ne figure plus que  $2(n-1)$  différentielles  $dq^i, dp_i$ , et  $(2n-1)$  variables  $p_i, q^i, p_1$  par exemple étant remplacé par sa valeur au moyen de la liaison  $a = 0$ ; l'équation à adjoindre aux équations caractéristiques de  $\Omega_s$  étant  $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0$ .

Formation de  $\Omega_s$ . —  $\Omega_s$  s'obtient en remplaçant dans  $\Omega$  deux différentielles associées  $dp_i, dq^i$  par les valeurs

$$dq^i = P_u dt - \sum_2^n l_i dq^i$$

$$dp_i = - \frac{\sum_2^n \frac{\partial a}{\partial p_i} dp_i + \sum_1^n \frac{\partial a}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a}{\partial t} dt}{\frac{\partial a}{\partial p_i}}$$

THÉORÈME II. — *Etant donné un système mécanique à  $n$  paramètres astreint à une liaison compatible  $a(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $\Omega_i = \lambda_i dq^i \wedge dt$ , on peut obtenir les équations différentielles du mouvement comme caractéristiques d'une forme  $\Omega_s$  de rang  $2(n-1)$ , déduite de  $\Omega$ , en substituant à deux différentielles associées  $dp_i, dq^i$ , leur valeur étant calculée pour la première au moyen de la différentielle de l'équation de liaison, pour la deuxième au moyen de l'équation  $\sum_{i=1}^n l_i dq^i - P_u dt = 0$ ; si la variable  $p_i$  est remplacée par sa valeur extraite de  $a = 0$  on adjoint au système des équations caractéristiques de  $\Omega_s$  la forme  $dq^i - \frac{\delta T_2}{\delta p_i} dt = 0$ .*

REMARQUES. — 1. Liaison de puissance nulle  $\mathcal{F} = 0$ ; comme  $\mathcal{F} = P_u + l_0$  on remplace dans les formules précédentes  $P_u$  par  $-l_0$ .

2. Liaison de puissance nulle indépendante du temps  $P = 0$ .  $dq^i$  est une fonction linéaire des  $(n-1)$  autres différentielles.

3. Liaison holonome indépendante du temps. Dans  $\Omega_s$  ne figure plus un couple de variables  $p_i, q^i$ , et leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme extérieure de degré deux de rang  $2(n-1)$ .

4. Si une variable  $q^i$  ne figure ni dans  $\Omega$  ni dans la relation de liaison ni dans  $P_u$ , il y a un avantage évident à éliminer  $dq^i$  car  $\Omega_s$  ne dépendra plus que de  $2(n-1)$  variables et de leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme de degré deux de rang  $2(n-1)$ , la variable  $q^i$  étant déterminée par une quadrature.

## CHAPITRE III

### SYSTÈME MATÉRIEL ASTREINT A $p$ LIAISONS

**DÉFINITION.** — Un système matériel holonome  $S$  caractérisé par une forme extérieure  $\Omega$  de degré deux de rang  $2n$  définie sur une variété différentiable est astreint à  $p$  liaisons.

1° si l'image de  $S$  est une sous-variété de  $V_{2n+1}$  définie par

$$a^1(M) = 0, \dots, a^p(M) = 0, \quad M \in V_{2n+1}.$$

2° si on ajoute au champ caractéristique  $E$  défini par  $i(E)\Omega = 0$ ,  $p$  champs de liaisons  $E^1, \dots, E^p$ , champs déterminés par les forces nécessaires à la réalisation de cette liaison.

Quand on emploie un système particulier de coordonnées les  $p$  liaisons sont définies

a) au point de vue théorique par :

1°  $p$  relations  $a^h(p_i, q^i, t) = 0$  ( $h$  variant de 1 à  $p$ );

2°  $p$  formes  $\Omega^h = L_i^h dq^i \wedge dt$  qu'on doit ajouter à  $\Omega$  ( $i$  variant de 1 à  $p$ );

b) au point de vue pratique par :

1°  $p$  relations  $a^h(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$  ( $h$  de 1 à  $p$ );

2°  $p$  puissances  $P^h = L_i^h \dot{q}^i$  ( $i$  de 1 à  $n$ ).

**REMARQUES** — 1. L'ensemble des  $p$  relations de liaisons  $a^1 = 0, \dots, a^p = 0$ , peut être aussi défini par un ensemble quelconque de  $p$  fonctions de classe  $C^\infty$   $f_k(a^1, \dots, a^p) = 0$  ( $k$  de 1 à  $p$ ) nulles au point  $O$ , dont le jacobien n'est pas nul. Un ensemble de  $p$  relations constitue donc un sous-anneau de fonction numériques sur l'anneau des fonctions numériques dont un choix  $a^1, \dots, a^p$  indépendantes constituent les  $p$  éléments génériques. Dans la pratique il y a un intérêt évident à choisir ces  $p$  éléments aussi simples que possible, dans la théorie ce choix n'interviendra pas.

2. On peut toujours supposer que le champ  $E^h$  relatif à la  $h^e$

liaison est de la forme  $E^h = \lambda_h e^h$ ,  $e^h$  champ de direction connu,  $\lambda_h$  fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ , car si dans les  $n$  composantes de  $E^h$ ,  $(n-1)$  sont connues la  $n^e$  inconnue, on peut écrire  $E^h = E_c^h + \lambda_h e^h$ , et considérer le nouveau champ  $\bar{E} = E + E_c^h$  ce qui revient au point de vue mécanique à faire passer la partie des forces de liaisons qui est connue dans les forces extérieures appliquées à S. Il en résulte qu'on peut toujours sans restreindre la généralité des raisonnements considérer d'une part la puissance de l'ensemble des liaisons sous la forme  $P = \lambda_h l_i^h \dot{q}^i$ , d'autre part la forme  $\Omega_l$  somme des  $\Omega^h$  à ajouter à  $\Omega$  écrite comme suit  $\Omega_l = \lambda_h l_i^h dq^i \wedge dt$ , les  $\lambda_h$  étant  $p$  fonctions numériques sur  $V_{2n+1}$  à déterminer, les  $l_i^h$  étant  $np$  fonctions numériques connues.

§ II. — Compatibilité des  $p$  liaisons.

Le champ caractéristique pour le système matériel astreint aux  $p$  liaisons est  $E + \sum_{h=1}^p \lambda_h e^h$ . Les formes  $da^1, \dots, da^p$ , devant être nulles sur les lignes intégrales des équations du mouvement, doivent appartenir au sous-module des formes caractéristiques de la forme  $\Omega + \Omega_l$ . D'après le théorème I du chapitre I § III les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$(III, 1) \quad i\left(E + \sum_{h=1}^p \lambda_h e^h\right) da^k = 0 \quad h, k(1 \text{ à } p)$$

conditions qui s'écrivent encore

$$(III, 2) \quad \lambda_h i(e^h) da^k + i(E) da^k = 0.$$

Remarquons que si l'on change la représentation analytique des liaisons, les conditions que l'on obtiendrait ne sont que des combinaisons linéaires des  $p$  équations (III, 2) car  $df_j = \frac{\partial f_j}{\partial a^k} da^k$ , et

$$i(E + \lambda_h e^h) df_j = \lambda_h i(e^h) df_j + i(E) df_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial a^k} [\lambda_h i(e^h) da^k + i(E) da^k].$$

Les  $p$  conditions (III, 2) constituent un système linéaire aux  $p$  inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Les  $\lambda$  ne sont déterminés que si  $\det |i(e^h) da^k| \neq 0$ . Cette condition est évidemment indépendante des variables utilisées

pour caractériser le système et ses  $p$  liaisons. Nous l'appellerons condition de compatibilité des  $p$  liaisons, car si elle est réalisée les facteurs de liaisons  $\lambda_h$  ne sont ni indéterminés ni infinis. Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre précédent le postulat « Système des forces intérieures impuissant » est valable. Pour cette raison nous poserons la définition :

$p$  liaisons imposées à un système matériel sont compatibles si  $\det |i(e^h)da^k| \neq 0$ .

REMARQUE. — Cette notion de compatibilité des liaisons élimine une classe importante de mouvements dans lesquels les liaisons sont indéterminées au sens de la mécanique du solide rigide, mais cette notion est indispensable si l'on veut éviter des résultats paradoxaux.

Prenons par exemple une barre pesante dont les extrémités A et B glissent sans frottement sur un cercle vertical de rayon R. Pour  $AB = 2R$ , abstraction faite des liaisons un mouvement de rotation uniforme de la barre autour du centre O du cercle paraît possible ; si on considère les réactions en A et B, un semblable mouvement est impossible car ces réactions ne peuvent équilibrer l'action de la pesanteur. Montrons que deux telles liaisons sont d'après notre théorie incompatibles.

Soient M la masse de la barre,  $k$  son rayon de giration autour de son centre de gravité. En prenant pour axe polaire la verticale descendante issue du centre du cercle, pour coordonnées polaires du centre de gravité de la barre supposée homogène  $r, \theta$ , pour angle de rotation de la barre  $\varphi$ , la forme  $\Omega$  est

$$\frac{\Omega}{M} = \dot{r} \wedge dr + r^2 \dot{\theta} \wedge d\theta + 2r\dot{\theta} dr \wedge d\theta + k^2 d\dot{\varphi} \wedge d\varphi \\ - (\dot{r} \dot{r} + r^2 \dot{\theta} \dot{\theta} + r\dot{\theta}^2 dr + k^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}) \wedge dt + g(\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \wedge dt.$$

Le champ caractéristique E a pour composantes :

$$r^2 \dot{\theta} + g \cos \theta, \quad \frac{-1}{r} (2r\dot{\theta} + g \sin \theta), \quad 0, \quad \dot{r}; \quad \dot{\theta}, \quad \dot{\varphi}, \quad 1.$$

Supposons que la barre ait une longueur  $2R \sin u$  avec  $u \leq \frac{\pi}{2}$ , classiquement les deux liaisons se traduisent par les deux relations  $r = R \cos u$ ,  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$  à notre point de vue par  $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{\varphi} - \dot{\theta} = 0$ , la barre glissant sans frottement elles sont de puissance nulle  $P^1 = \lambda_1 \dot{r}$ ,  $P^2 = \lambda_2 (\dot{\varphi} - \dot{\theta})$ . On en déduit :

1° les deux formes  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$ ,

$$\Omega^1 = \lambda_1 dr \wedge dt, \quad \Omega^2 = \lambda_2 (d\phi - d\theta) \wedge dt$$

2° les composantes des deux champs de direction des liaisons  $e^1$  et  $e^2$

$$e^1(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad e^2\left(0, \frac{-1}{r^2}, \frac{1}{k^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Comme nous voulons examiner ce qui se produit lorsque  $r = R \cos u$  pour  $u = \frac{\pi}{2}$  les deux champs  $E$  et  $e^2$  devenant infinis pour cette valeur, nous prendrons pour composantes des champs :  $E(r^2(r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta), -2r(r\dot{\theta} + g \sin \theta), 0, r^2\dot{r}, r^2\dot{\theta}, r^2\dot{\phi}, r^2)$ .

$$e^1(r^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad e^2\left(0, -1, \frac{r^2}{k^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

On obtient immédiatement :

$$i(e^1)dr = r^2, \quad i(e^2)dr = 0, \quad i(e^1)d(\phi - \theta) = 0, \quad i(e^2)d(\phi - \theta) = 1 + \frac{r^2}{k^2}.$$

La condition de compatibilité s'écrit :

$$i(e^1)dr \cdot i(e^2)d(\phi - \theta) = r^2\left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) = R^2 \cos^2 u \left(1 + \frac{R^2 \cos^2 u}{k^2}\right) \neq 0.$$

Pour  $u = \frac{\pi}{2}$  les deux liaisons sont donc incompatibles.

**Interprétation géométrique de la fonction scalaire  $\det|i(e^h)da^k|$ .** — La fonction numérique  $\det|i(e^h)da^k|$  peut s'interpréter géométriquement sur  $V_{2n+1}$  en considérant d'une part le champ d'ordre  $p$   $e^1 \wedge e^2 \dots \wedge e^p$  construit sur les  $p$  champs  $e^1, e^2, \dots, e^p$ , de l'espace  $T$  tangent à  $V_{2n+1}$ , d'autre part la forme d'ordre  $p$   $da^1 \wedge da^2 \dots \wedge da^p$ , construite sur les  $p$  formes  $da^1, \dots, da^p$  de l'espace  $T'$  dual de  $T$ . En un point  $M$  de la variété, le champ d'ordre  $p$  et la forme d'ordre  $p$  donnent respectivement naissance à un  $p$ -vecteur et à une  $p$ -forme dont le produit intérieur est  $\det|i(e^h)da^k|^{(19)}$ . La condition de compatibilité  $\det|i(e^h)da^k| \neq 0$  entraîne donc la non nullité de ce  $p$ -vecteur et de cette  $p$ -forme dont les significations sont les suivantes :

1° la non nullité du  $p$ -vecteur signifie que les directions des

(19) Cf. N. BOURBAKI, Algèbre multilinéaire, *Actualités scientifiques* N° 1044, Hermann, Paris, 1948, p. 106.

forces de liaisons en un point M de la variété  $V_{2n+1}$  forment un  $p$ -èdre par conséquent sont indépendantes.

2° la non nullité de la  $p$ -forme entraîne que les  $p$  fonctions définissant les relations de liaisons sont indépendantes.

Au point de vue analytique la condition de compatibilité se traduit ainsi :

Si on désigne d'une part par A la matrice à  $p$  lignes dont les éléments d'une ligne sont les composantes d'une des  $p$  formes  $da^1, \dots, da^p$  par rapport à la base  $(dp_i, dq^i, dt)$ , d'autre part par L la matrice à  $p$  colonnes dont les éléments d'une colonne sont les composantes d'un des  $p$  champs  $e^1, \dots, e^p$  le produit de A par L définit une matrice carrée d'ordre  $p$  dont le déterminant est le produit intérieur du  $p$ -vecteur et de la  $p$ -forme.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial a^1}{\partial p^1} & \dots & \frac{\partial a^1}{\partial p^n}, \frac{\partial a^1}{\partial q^1}, \dots & \frac{\partial a^1}{\partial q^n}, \frac{\partial a^1}{\partial t} \\ \frac{\partial a^p}{\partial p^1} & \dots & \frac{\partial a^p}{\partial p^n}, \frac{\partial a^p}{\partial q^1}, \dots & \frac{\partial a^p}{\partial q^n}, \frac{\partial a^p}{\partial t} \end{vmatrix} \quad L = \begin{vmatrix} l_1^1 & \dots & \dots & l_1^p \\ l_n^1 & \dots & \dots & l_n^p \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Les composantes  $L_{i_1 \dots i_p}$  du  $p$ -vecteur sont formées au moyen des déterminants d'ordre  $p$  extraits de la matrice L. Les composantes  $A^{i_1 \dots i_p}$  de la  $p$ -forme sont formées au moyen des déterminants d'ordre  $p$  extraits de la matrice A.

$$A^{i_1 \dots i_p} L_{i_1 \dots i_p} = \det |A \cdot L|.$$

§ III. — Forme  $\Omega_r$  réduite associée à S astreint à  $p$  liaisons donnant les équations du mouvement et les facteurs de liaisons.

Nous allons montrer que l'existence du  $p$ -vecteur  $L_{i_1 \dots i_p}$  et de la  $p$ -forme  $A^{i_1 \dots i_p}$  dont le produit intérieur n'est pas nul permet de construire une forme  $\Omega_r$  réduite dont  $(2n - p)$  équations associées jointes à  $p$  équations convenablement choisies donnent d'une part les équations du mouvement, d'autre part les  $p$  facteurs de liaisons.

Posons

$$l_i^h dq^i = \pi^h \quad h(1 \text{ à } p).$$

L'existence du  $p$ -vecteur  $L_{i_1 \dots i_p}$  nous permet de calculer  $p$  différentielles  $dq^i$  en fonction des  $\pi^h$ .

Posons

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a^h}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a^h}{\partial t} dt = \sigma^h \quad h \text{ (1 à } p\text{)}.$$

L'existence de la  $p$ -forme  $A^{i_1 \dots i_p}$  nous permet de calculer  $p$  différentielles  $dp_i$  en fonction des  $\sigma^h$ .

Le produit intérieur du  $p$ -vecteur et de la  $p$ -forme n'étant pas nul, on peut choisir pour les deux systèmes de différentielles  $dq^i$ ,  $dp_i$ , qu'on exprime en fonction des formes  $\pi^h$ ,  $\sigma^h$ , la même partition d'indices, de 1 à  $p$  pour fixer les idées, ce qui est toujours possible avec un choix approprié de notations. Il en résulte que la forme  $\Omega$  associée au système exprimée au moyen de  $2n$  formes de Pfaff  $\pi^h$ ,  $\sigma^h$  ( $h$  variant de 1 à  $p$ )  $\omega^\alpha$  ( $\alpha$  variant de  $2p + 1$  à  $2n$ ) s'écrit :

$$\Omega = k_{ih}(\sigma^i \wedge \pi^h) + k_{\alpha i}(\omega^\alpha \wedge \sigma^i) + k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha o}\omega^\alpha + k_{io}\sigma^i + k_{ho}\pi^h - \lambda_h\pi^h) \wedge dt.$$

Les équations du mouvement et les facteurs de liaisons sont données par les caractéristiques de  $\Omega$ .

$$(1) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha i}\sigma^i + k_{\alpha h}\pi^h + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha o} dt = 0$$

en nombre égal à  $2(n - p)$

$$(2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \pi^h} = -k_{ih}\sigma^i - k_{\alpha h}\omega^\alpha - k_{ho} dt + \lambda_h dt = 0$$

en nombre égal à  $p$

$$(3) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^i} = k_{ih}\pi^h - k_{\alpha i}\omega^\alpha - k_{io} dt = 0$$

en nombre égal à  $p$

auxquelles on adjoint les relations de liaisons  $a^h = 0$ , les équations de définition des formes avec les  $p$  conditions  $\sigma^h = 0$ .

*Réduction de  $\Omega$ .* — Soit  $\Omega_r$ , ce que devient  $\Omega$  quand on annule les  $\sigma^h$ .

$$\Omega_r = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha o}\omega^\alpha + k_{ho}\pi^h - \lambda_h\pi^h) \wedge dt.$$

Les  $(2n - p)$  premières équations associées à  $\Omega_r$  sont :

$$(1') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h}\pi^h + k_{\alpha\beta}\omega^\beta - k_{\alpha o} dt = 0$$

en nombre égal à  $2(n - p)$

$$(2') \quad \frac{\partial \Omega_r}{\partial \pi^h} = -k_{\alpha h}\omega^\alpha - k_{ho} dt + \lambda_h dt = 0$$

en nombre égal à  $p$ .

On remarque que l'ensemble des  $(2n - p)$  équations (1') et (2') ne sont autres que les équations (1) et (2) dans lesquelles on annule

les  $\sigma^h$ . Pour compléter ce système il faut théoriquement adjoindre à (1') et (2') les  $p$  équations  $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^i} = 0$  ou  $p$  équations équivalentes. Or si  $\Omega$  est exprimée au moyen des variables  $p_i, q^i$ , on a pour les équations associées,  $n$  équations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial (dp_i)} = dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0.$$

Quand on effectue un changement de formes

$$dp_i = \alpha_{ih} \sigma^h, \quad \text{avec} \quad \det |\alpha_{ih}| \neq 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial (\sigma^h)} = \frac{\partial \Omega}{\partial (dp_i)} \cdot \alpha_{ih}.$$

de sorte que les  $p$  équations  $\frac{\partial \Omega}{\partial (dp_i)} = 0$  entraînent  $\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^h} = 0$  et réciproquement. Il suffit donc d'adjoindre à (1') et (2') les  $p$  équations  $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0$  dans lesquelles on remplace  $p$  des quantités  $p_i$  par leur valeur calculée au moyen des  $p$  équations de liaisons  $a^h(p_i, q^i, t) = 0$ . On peut donc énoncer le théorème :

**THÉORÈME I.** — *Étant donné un système mécanique à  $n$  paramètres astreint à  $p$  liaisons compatibles du type  $a^h(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $P^h = \lambda_h l_h^i \dot{q}^i dt$ , on peut obtenir les équations différentielles du mouvement et les  $p$  facteurs  $\lambda_h$  des liaisons en adjoignant aux  $(2n - p)$  premières équations associées à la forme  $\Omega_r$ , d'une part les  $p$  équations  $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt = 0$ , d'autre part les  $p$  équations  $l_h^i dq^i = \pi^h$ ,  $p$  des variables  $p_i$  étant calculées au moyen des  $p$  liaisons  $a^h = 0$ .*

**REMARQUE.** — Dans la pratique si  $\Omega$  est exprimée au moyen des variables lagrangiennes  $q^i, \dot{q}^i, t$  et de leurs différentielles, ce théorème se traduit par la règle suivante :

**Règle.** — Pour obtenir les équations différentielles du mouvement et les facteurs de liaisons, on substitue dans  $\Omega$  à  $p$  couples de différentielles associées  $dq^i, d\dot{q}^i$ , les  $2p$  formes  $\pi^h, \sigma^h$ ,  $\Omega_r$  se déduit de  $\Omega$  en annulant les  $\sigma^h$ , et en remplaçant  $p$  des variables  $\dot{q}^i$  par leur valeur calculée au moyen des  $p$  équations de liaisons. Les  $(2n - p)$  premières équations associées à  $\Omega_r$  auxquelles on adjoint d'une part les  $p$  équations  $dq^i - \dot{q}^i dt = 0$ , d'autre part les  $p$  équations de définition des  $\pi^h$ ,  $\pi^h = l_h^i dq^i$ , déterminent les équations du mouvement et les  $p$  facteurs de liaisons.

§ IV. — Forme réduite  $\Omega_r$  donnant uniquement les équations différentielles du mouvement.

$\Omega_r$ , formé comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent dépend de  $2(n - p)$  formes  $\omega^\alpha$ , de  $p$  formes  $\pi^h$  et de  $dt$ .

$$\Omega_r = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge \pi^h) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - (k_{\alpha_0}\omega^\alpha + k_{h_0}\pi^h - \lambda_h\pi^h) \wedge dt.$$

Comme  $\pi^h = P_u^h dt$  ( $P^h$  étant la puissance des forces nécessaires à la réalisation de la  $h^e$  liaison  $P^h = \lambda_h P_u^h$ ), remplaçons chaque  $\pi^h$  par  $P_u^h dt$  dans  $\Omega_r$ , on obtient ainsi une forme

$$\Omega_s = k_{\alpha h}(\omega^\alpha \wedge P_u^h dt) + k_{\alpha\beta}(\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) - k_{\alpha_0}\omega^\alpha \wedge dt$$

dans laquelle ne figure plus aucun des facteurs de liaisons  $\lambda_h$ . Cette forme  $\Omega_s$  est de rang  $2(n - p)$  car sa puissance  $(n - p)^e$  est :

$$\Omega_s^{(n-p)} = K \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^{2n-2p} \wedge dt \quad (K \text{ fonction numérique}).$$

En comparant les  $2(n - p)$  équations caractéristiques de  $\Omega_s$  et les  $2(n - p)$  premières équations associées à  $\Omega_r$  dans lesquelles on a remplacé chaque  $\pi^h$  par  $P_u^h dt$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h} P_u^h dt + k_{\alpha\beta} \omega^\beta - k_{\alpha_0} dt = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_r}{\partial \omega^\alpha} = k_{\alpha h} P_u^h dt + k_{\alpha\beta} \omega^\beta - k_{\alpha_0} dt = 0$$

on constate que ce sont les mêmes. On peut donc obtenir les équations du mouvement indépendamment des facteurs de liaisons au moyen de  $\Omega_s$  dans laquelle ne figure plus que  $2(n - p)$  différentielles  $dq^i$ ,  $dp_i$ , et  $(2n - p)$  variables  $p_i$ ,  $q^i$ ,  $p$  des variables  $p_i$  étant remplacées par leur valeur calculée au moyen des  $p$  équations de liaisons. Il faut en outre adjoindre aux équations caractéristiques de  $\Omega_s$  les  $p$  équations  $dq^i - \frac{\partial T_2}{\partial p_i} dt$  correspondant aux différentielles  $dq$  ne figurant pas dans  $\Omega_s$ .

Formation de  $\Omega_s$ . —  $\Omega_s$  se déduit de  $\Omega$  en remplaçant  $p$  couples de différentielles associées  $dp_i$ ,  $dq^i$  par les valeurs calculées au moyen des deux systèmes

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial a^h}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial a^h}{\partial t} dt = 0; \quad l_i^h dq^i - P_u^h dt = 0 \quad h(1 \text{ à } p).$$

**THÉOREME II.** — *Étant donné un système mécanique à  $n$  paramètres astreint à  $p$  liaisons compatibles  $a^h(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $\Omega_1 = \lambda_h l_i^h dq^i \wedge dt$ , on peut obtenir les équations différentielles du mouvement comme caractéristiques d'une forme  $\Omega_s$  de rang  $2(n-p)$  déduite de  $\Omega$ , en substituant à  $p$  couples de différentielles associées  $dp_i, dq^i$ , les valeurs calculées pour les  $dp_i$  au moyen des  $p$  différentielles des équations de liaisons, pour les  $dq^i$  au moyen des  $p$  relations  $l_i^h dq^i - P_u^h dt = 0$ ; si les  $p$  variables  $p_i$  sont calculées au moyen des  $p$  équations de liaisons  $a^h = 0$ , on adjoint au système des caractéristiques de  $\Omega_s$  les  $p$  formes  $dq^i - \frac{\delta T_i}{\delta p_i} dt = 0$ .*

**REMARQUES.** — 1. Liaisons de puissance nulle.  $\mathcal{F}^h = 0$ , comme  $\mathcal{F}_u^h = P_u^h + l_0^h$ , on remplace  $P_u^h$  par  $-l_0^h$ .

2. Liaisons de puissance nulle indépendantes du temps  $P_u^h = 0$ ,  $p$  des différentielles  $dq^i$  s'expriment en fonction des  $(n-p)$  autres.

3. Liaisons holonomes ou pseudo-holonomes indépendantes du temps. Dans  $\Omega_s$  ne figure plus  $p$  couples de variables  $p_i, q^i$ , ainsi que leurs différentielles. Les équations du mouvement sont les caractéristiques d'une forme extérieure de degré deux de rang  $2(n-p)$ .

4. Si  $p$  variables  $q^i$  ne figurent ni dans  $\Omega$ , ni dans les  $p$  relations de liaisons, ni dans les puissances  $P_u^h$  des liaisons, il y a un avantage évident à éliminer les  $p$  différentielles  $dq^i$ , car  $\Omega_s$  ne dépendra plus que de  $2(n-p)$  variables et de leurs différentielles. Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques d'une forme de degré deux de rang  $2(n-p)$ , les  $p$  variables  $q^i$  étant déterminées par des quadratures puisque les  $p$  formes  $dq^i - \frac{\delta T_i}{\delta p_i} dt$  sont fermées modulo les caractéristiques de  $\Omega_s$ .

## § V. — Méthode générale pour l'étude d'un système mécanique à $n$ paramètres. Applications.

De l'ensemble des quatre paragraphes précédents se dégagent naturellement une méthode générale pour l'étude des systèmes mécaniques dépendant de  $n$  paramètres. Ces systèmes sont toujours constitués par des ensembles de solides et de points matériels astreints à un certain ensemble de liaisons du type  $a(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $P = \lambda l_i \dot{q}^i$ , supposées compatibles.

1° Les facteurs de liaisons  $\lambda$  se déterminent toujours indépendamment des mouvements par l'utilisation combinée de la forme  $\Omega$  et de l'opérateur  $i(\ )$  de M. H. Cartan. Il suffit pour cela de déterminer pour le système libéré de ces liaisons :

a) le champ caractéristique  $E$  de la forme  $\Omega$  correspondante, ce qui est immédiat si  $\Omega$  est écrite sous forme canonique.

b) les champs  $e^1, \dots, e^p$ , de direction des forces de liaisons.

Les  $p$  équations (III, 2) déterminent complètement le système des forces de liaisons.

Remarquons à ce sujet que si  $e^1, \dots, e^p$ , ne dépendent pas des  $\lambda$ , ces équations sont linéaires en  $\lambda$ , mais si pour des raisons physiques  $e^1, \dots, e^p$  dépendent des  $\lambda$ , le système (III, 2) constitue un système d'équations implicites par rapport aux  $\lambda$ . C'est ce qui se produit en particulier dans le cas du frottement de glissement, de roulement, de pivotement, lorsqu'on considère coefficients de frottement, paramètres de résistance au roulement et au pivotement comme fonctions des pressions normales.

2° Les équations du mouvement peuvent toujours s'obtenir indépendamment des facteurs de liaisons au moyen des équations caractéristiques d'une forme  $\Omega$ , auxquelles on adjoint  $p$  formes différentielles convenables (cf. ; Th. II, § IV). Les propriétés de ce système différentiel seront étudiées dans le chapitre vi de ce travail. Au préalable nous donnerons quelques exemples simples d'applications des méthodes précédentes.

EXEMPLE I. — Un disque homogène pesant, de masse  $M$ , de rayon  $R$ , de moment d'inertie  $Mk^2$  par rapport à son centre roule et glisse sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant l'angle  $i$  avec l'horizontal. On suppose que le coefficient de frottement est une fonction de la vitesse de glissement  $v$  et de la pression normale  $N$  soit  $f(v, N)$ .

En prenant pour axe des  $x$ , la ligne de plus grande pente du plan orienté vers le bas, pour axe  $Oy$  la perpendiculaire,  $\xi, \eta$ , étant les coordonnées du centre du cercle,  $\theta$  son angle de rotation, la forme  $\Omega$  pour le disque libre est :

$$\Omega = Md\xi \wedge d\xi + Md\eta \wedge d\eta + Mk^2 d\theta \wedge d\theta \\ - M(\xi d\xi + \eta d\eta + k^2 \theta d\theta) \wedge dt + Mg(\sin i d\xi - \cos i d\eta) \wedge dt.$$

Le champ caractéristique  $E$  a pour composantes

$$E(g \sin i, -g \cos i, 0, \xi, \eta, \theta, 1).$$

La liaison se traduit par  $\dot{\eta} = 0$ , puissance  $P = N[\varepsilon f(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) + \dot{\eta}]$  avec  $\varepsilon(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) < 0$  d'où  $\Omega_i = N[\varepsilon f(d\xi + R d\theta) + d\eta]$ ; notons que  $V = \dot{\xi} + R\dot{\theta}$ .

Le champ  $e$  de direction de la liaison a pour composantes

$$e\left(\frac{\varepsilon f}{M}, \frac{1}{M}, \frac{\varepsilon f R}{M k^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

La pression normale  $N$  est donné par  $Ni(e) d\eta + i(E) d\eta = 0$

$$i(e) d\eta = \frac{1}{M} \quad i(E) d\eta = -g \cos i \quad \text{d'où} \quad N = Mg \cos i$$

Pour obtenir les équations différentielles formons  $\Omega$ , déduite de  $\Omega + \Omega_i$  en remplaçant  $d\eta$  par 0,  $d\eta$  par

$$\begin{aligned} & -\varepsilon f(d\xi + R d\theta) + [\dot{\eta} + \varepsilon f(\dot{\xi} + R\dot{\theta})] dt \\ \frac{\Omega_i}{M} = & d\xi \wedge d\xi + k^2 d\theta \wedge d\theta - (\xi d\xi + k^2 \theta d\theta) \wedge dt \\ & + g \sin i d\xi \wedge dt + g \cos i \varepsilon f(d\xi + R d\theta) \wedge dt. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont les caractéristiques de  $\Omega$ . Un choix intuitif de 4 opérateurs de M. H. Cartan permet de les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} i(x^1)\Omega_i = & \frac{dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} - g dt = 0, \\ i(x^2)\Omega_i = & d\theta - \frac{\dot{\theta} dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} \cdot \frac{1}{g} = 0 \\ i(x^3)\Omega_i = & d\dot{\theta} \frac{-\varepsilon R \cos i f(v) dv}{k^2 \sin i + \varepsilon f(v) \cos i (k^2 + R^2)} = 0; \\ i(x^4)\Omega_i = & d\xi + R d\theta - \frac{1}{g} \frac{v dv}{\sin i + \varepsilon f(v) \cos i \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

L'existence des champs  $x^1, \dots, x^4$  précédents tient aux transformations infinitésimales de la forme  $\Omega$ , comme nous le démontrerons au chapitre vi, § II. Ce système est intégrable par quadratures.

**Roulement sans glissement.** — Dans notre théorie ce sont deux liaisons de puissance nulle :

$$\dot{\eta} = 0, \quad P^1 = N\dot{\eta}, \quad \dot{\xi} + R\dot{\theta} = 0, \quad P^2 = T(\dot{\xi} + R\dot{\theta}),$$

$$P_u^1 = \dot{\eta}, \quad P_u^2 = \dot{\xi} + R\dot{\theta}.$$

Les composantes des champs de direction des liaisons sont :

$$e^1\left(0, \frac{1}{M}, 0, 0, 0, 0, 0\right) \quad e^2\left(\frac{1}{M}, 0, \frac{R}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Déterminons d'abord les composantes de la réaction au moyen des opérateurs

$$i(e^1) d\dot{\eta} = \frac{1}{M}, \quad i(e^2) d\dot{\eta} = 0, \quad i(E) d\dot{\eta} = -g \cos i$$

$$i(e^1) d(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) = 0, \quad i(e^2) d(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right),$$

$$i(E) d(\dot{\xi} + R\dot{\theta}) = g \sin i$$

d'où

$$N = -\frac{i(E) d\dot{\eta}}{i(e^1) d\dot{\eta}} = Mg \cos i, \quad T = \frac{-i(E) d(\dot{\xi} + R\dot{\theta})}{i(e^2) d(\dot{\xi} + R\dot{\theta})} = -\frac{Mg \sin i}{1 + \frac{R^2}{k^2}}.$$

Les équations différentielles du mouvement se déduisent de  $\Omega$ , obtenue à partir de

$$\frac{\Omega + \Omega_t}{M} = d\dot{\xi} \wedge d\dot{\xi} + d\dot{\eta} \wedge d\dot{\eta} + k^2 d\dot{\theta} \wedge d\dot{\theta} - (\dot{\xi} d\dot{\xi} + \dot{\eta} d\dot{\eta} + k^2 \dot{\theta} d\dot{\theta}) \wedge dt$$

$$+ g (\sin i d\dot{\xi} - \cos i d\dot{\eta}) \wedge dt + N d\dot{\eta} \wedge dt + T(d\dot{\xi} + R d\dot{\theta}) \wedge dt$$

en remplaçant  $d\dot{\eta}$  par 0,  $d\dot{\eta}$  par  $+ P_u^1 dt = 0$  puisque  $P^1 = 0$ ,  $d\dot{\theta}$  par  $-\frac{1}{R} d\dot{\xi}$ ,  $d\dot{\theta}$  par  $\frac{1}{R} (-d\dot{\xi} + P_u^2 dt) = -\frac{d\dot{\xi}}{R}$  puisque  $P_u^2 = 0$ .

$$\frac{\Omega_s}{M} = \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right) d\dot{\xi} \wedge d\dot{\xi} - \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right) \dot{\xi} d\dot{\xi} \wedge dt - g \sin i d\dot{\xi} \wedge dt.$$

On en déduit immédiatement  $d\dot{\xi} = \frac{g \sin i}{1 + \frac{k^2}{R^2}} dt$ ,  $d\dot{\xi} = \dot{\xi} dt$ , résultats classiques.

**EXEMPLE II.** — Disque homogène roulant et glissant sur une courbe plane fixe, le disque restant dans le plan de la courbe.

Soient  $Ox$  et  $Oy$  deux axes fixes,  $m$  la masse du disque,  $a$  son rayon,  $mk^2$  son moment d'inertie autour de son centre de gravité  $G$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , les coordonnées de  $G$ ,  $\theta$  l'angle de rotation du disque autour

de  $G$ ,  $X$ ,  $Y$  les composantes de la résultante des forces extérieures autres que celles de l'action de contact de la courbe sur le disque,  $\Gamma$  le moment résultant des forces extérieures dans les mêmes conditions.

Au disque entièrement libre est associée la forme extérieure :

$$\Omega = d(m\xi d\xi + m\eta d\eta + mk^2\theta d\theta - T dt) + (X d\xi + Y d\eta + \Gamma d\theta) \wedge dt$$

dans laquelle  $T$  désigne la demi-force vive du disque.

La courbe  $C$  sur laquelle roule et glisse le disque est supposée définie par  $x, y$  fonctions de l'arc  $s$  de la courbe. La demi-tangente orientée  $Pt$  à  $C$  fait en un point  $P$  quelconque un angle  $\alpha = (Ox, Pt)$ , le rayon de courbure en  $P$  est  $\rho = \frac{ds}{d\alpha}$ . Il est commode de prendre des axes mobiles  $Pt, Pn$  avec  $(Pt, Pn) = \frac{\pi}{2}$ . Les coordonnées de  $G$  dans ce système sont d'une part  $\alpha$ , d'autre part  $PG = R$  obtenues de la manière suivante : par un point  $G$  du plan on mène une normale  $GP$  à  $C$  d'où le point  $P(\alpha)$  et  $PG = R$  sur cette normale orientée.

Les différentielles  $d\xi, d\eta$  s'expriment au moyen de  $d\alpha, dR$  par les formules

$$d\xi = \cos \alpha (\rho - R) d\alpha - dR \sin \alpha \quad d\eta = (\rho - R) \sin \alpha d\alpha + dR \cos \alpha.$$

Soient  $u, v$  les composantes de la vitesse de  $G$  par rapport aux axes  $Pt, Pn$

$$\dot{\xi} = u \cos \alpha - v \sin \alpha \quad \dot{\eta} = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

d'où les expressions de  $T, \dot{\xi} d\xi + \dot{\eta} d\eta$ , et de  $\Omega$  en fonction des variables choisies :

$$T = \frac{1}{2} m(u^2 + v^2 + k^2\dot{\theta}^2), \quad \dot{\xi} d\xi + \dot{\eta} d\eta = (\rho - R)u d\alpha + v dR$$

$$\Omega = m[(\rho - R) du \wedge d\alpha - u dR \wedge d\alpha + dv \wedge dR + k^2 \dot{\theta} \wedge d\theta] - m(u du + v dv + k^2\dot{\theta} d\theta) \wedge dt + [(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)(\rho - R) d\alpha + (Y \cos \alpha - X \sin \alpha) dR + \Gamma d\theta] \wedge dt.$$

Le champ caractéristique  $E$  a pour composantes dans l'hypothèse  $\rho - R \neq 0$

$$E \left( \frac{X \cos \alpha + Y \sin \alpha}{m} + \frac{uv}{\rho - R}, \quad \frac{Y \cos \alpha - X \sin \alpha}{m} - \frac{u^2}{\rho - R}, \right. \\ \left. \frac{\Gamma}{mk^2}, \quad \frac{u}{\rho - R}, \quad v, \quad \dot{\theta}, \quad 1 \right).$$

La liaison se traduit par  $v = 0$ , puissance

$$P = N \{ v + \varepsilon f [(\rho - R)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}] \}$$

avec  $\varepsilon = -1$  si  $u + a\dot{\theta} > 0$ ,  $\varepsilon = +1$  si  $u + a\dot{\theta} < 0$ . On en déduit

$$\Omega_l = N \{ dR + \varepsilon f [(\rho - R) d\alpha + a d\theta] \}.$$

D'où les composantes de la direction du champ de liaison

$$e \left( \frac{\varepsilon f}{m}, \frac{1}{m}, \frac{\varepsilon f a}{mk^2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

La valeur de la réaction normale  $N$  se déduit de  $Ni(e)dv + i(E)dv = 0$

$$N = - \frac{i(E)dv}{i(e)dv} = X \sin \alpha - Y \cos \alpha + m \frac{u^2}{\rho - a}.$$

Pour obtenir les équations différentielles formons  $\Omega_s$ , qui s'obtient à partir de  $\Omega$  en remplaçant  $dv$  par  $0$ ,  $dR$  par

$$- \varepsilon f [(\rho - R) d\alpha + a d\theta] + \varepsilon f [(\rho - r)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}] dt$$

puisque  $v = 0$

$$\begin{aligned} \Omega_s = & m(\rho - R) du \wedge d\alpha + m u a \varepsilon f d\theta \wedge d\alpha + m u \varepsilon f [(\rho - r)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}] d\alpha \wedge dt \\ & + mk^2 d\dot{\theta} \wedge d\theta - m(u du + k^2 \dot{\theta} d\theta) \wedge dt \\ & + (X \cos \alpha + Y \sin \alpha)(\rho - R) d\alpha \wedge dt \\ & - (Y \cos \alpha - X \sin \alpha) \varepsilon f [(\rho - R) d\alpha + a d\theta] \wedge dt + \Gamma d\theta \wedge dt. \end{aligned}$$

Les équations associées à  $\Omega_s$  donnent

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\alpha)} = -m(\rho - R) du - m a \varepsilon f d\theta + m u \varepsilon f [(\rho - R)\dot{\alpha} + a\dot{\theta}] dt + (X \cos \alpha + Y \sin \alpha)(\rho - R) dt - (Y \cos \alpha - X \sin \alpha) \varepsilon f (\rho - R) dt = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\theta)} = -mk^2 d\dot{\theta} + m \varepsilon f a u d\alpha + \Gamma dt - \varepsilon f a (Y \cos \alpha - X \sin \alpha) dt = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (du)} = m(\rho - R) d\alpha - m u dt = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (a\dot{\theta})} = mk^2 (d\theta - \dot{\theta} dt) = 0$$

auxquelles on adjoint  $\frac{\partial \Omega}{\partial (dv)} = m(dR - v dt) = 0$ . Cette dernière compte tenue de la liaison donne  $R = a$ . Le système s'écrit encore

sous la forme :

$$\frac{1}{2} \frac{du^2}{d\alpha} - \varepsilon f u^2 = \frac{\rho - a}{m} [X \cos \alpha + Y \sin \alpha - \varepsilon f (Y \cos \alpha - X \sin \alpha)]$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -1 & \text{si } u + a\dot{\theta} > 0 \\ \varepsilon &= +1 & \text{si } u + a\dot{\theta} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m k^2 \frac{d\dot{\theta}}{d\alpha} &= \Gamma \frac{\rho - a}{u} + m \varepsilon f a u - \varepsilon f a (Y \cos \alpha - X \sin \alpha) \frac{\rho - a}{u} \\ \frac{d\dot{\theta}}{d\alpha} &= \dot{\theta} \frac{\rho - a}{u} & dt &= \frac{\rho - a}{u} d\alpha. \end{aligned}$$

REMARQUE. — Les points pour lesquels  $\rho - a = 0$  sont des points singuliers, dont la signification géométrique est la suivante : le centre de gravité du disque décrit une courbe  $\Gamma$  parallèle à  $C$ , dont le rayon de courbure est  $\rho - a$ , aux points pour lesquels  $\rho - a = 0$ , la courbure de  $\Gamma$  est infinie, ces points sont les points de rebroussement de  $\Gamma$  en général ( $\rho - a$  changeant de signe en s'annulant) : en un pareil point le cercle devrait traverser la courbe  $C$ , ce qui matériellement est impossible. Notre théorie de la compatibilité des liaisons montre qu'en de semblables points la liaison doit être considérée comme incompatible. Il suffit pour cela de procéder comme nous l'avons fait dans l'exemple de la barre, certaines composantes du champ  $E$  devenant infinies, on commencera par multiplier toutes les composantes de  $E$  et de  $e$  par  $(\rho - a)$ ; d'où la condition de compatibilité  $(i(e) dv = \frac{\rho - a}{m} \neq 0$ .

2. Si  $X, Y$ , sont fonctions uniquement de la position de  $G$ , donc ne dépendent que de  $\alpha$ , lorsque la liaison est réalisée, le mouvement du centre  $G$  du cercle est le même que celui d'un point matériel glissant avec frottement sur la courbe parallèle à  $C$  à la distance  $a$ .

3. Si en plus des conditions précédentes  $\Gamma$  ne dépend que de  $\alpha$  les équations différentielles du mouvement s'intègrent par quadrature.

**Roulement sans glissement du disque sur la courbe  $C$ .** — Le disque est astreint à deux liaisons de puissance nulle :

$$1^\circ \quad v = 0 \quad P^1 = N \cdot v \quad \Omega^1 = N dR \wedge dt$$

$$2^\circ \quad u + a\dot{\theta} = 0 \quad P^2 = T(u + a\dot{\theta}) \quad \Omega^2 = T[(\rho - R) d\alpha + a d\dot{\theta}] \wedge dt.$$

Les composantes des directions des champs de liaisons sont :

$$e^1\left(0, \frac{1}{m}, 0, 0, 0, 0, 0\right) \quad e^2\left(\frac{1}{m}, 0, \frac{a}{mk^2}, 0, 0, 0, 0\right)$$

$$i(e^1) dv = \frac{1}{m}, \quad i(e^2) dv = 0 \quad i(E) dv = \frac{Y \cos \alpha - X \sin \alpha}{m} - \frac{u^2}{\rho - a}$$

$$i(e^1) d(u + a\dot{\theta}) = 0, \quad i(e^2) d(u + a\dot{\theta}) = \frac{1}{m} + \frac{a^2}{mk^2},$$

$$i(E) d(u + a\dot{\theta}) = \frac{X \cos \alpha + Y \sin \alpha}{m} + \frac{uv}{\rho - a} + \frac{a\Gamma}{mk^2}$$

d où

$$N = X \sin \alpha - Y \cos \alpha + m \frac{u^2}{\rho - a} \quad T = - \frac{(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)k^2 + a\Gamma}{a^2 + k^2}$$

Les équations différentielles du mouvement sont les caractéristiques de  $\Omega_s$ , déduite de  $\Omega + \Omega_i$ , en remplaçant  $dv$  par 0,  $dR$  par 0 car  $vdt$  est nul,  $R$  par  $a$ ,  $d\dot{\theta}$  par  $-\frac{du}{a}$ ,  $\dot{\theta}$  par  $-\frac{u}{a}$ ,  $d\theta$  par  $-\frac{\rho - a}{a} d\alpha$ .

$$\Omega_s = m(\rho - a)\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) du \wedge d\alpha - m\left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) u du \wedge dt$$

$$+ \left[ X \cos \alpha + Y \sin \alpha - \frac{\Gamma}{a} \right] (\rho - a) d\alpha \wedge dt.$$

Si  $X, Y, \Gamma$ , ne dépendent que de la position du cercle dans le plan, lorsque la liaison est réalisée ces fonctions ne dépendent que de  $\alpha$ . Dans ces conditions la forme  $\Omega_s$  est la même que celle d'un point matériel qui se meut sans frottement sur la courbe parallèle à  $C$  à la distance  $a$ .

EXEMPLE III. — Glissement et roulement d'une sphère sur un plan fixe. La sphère est supposée homogène, de masse  $M$ , de rayon  $a$ , de moment d'inertie  $Mk^2$  par rapport à un de ses diamètres. Par rapport à 3 axes rectangulaires fixes,  $O$  pris dans le plan,  $Oz$  dirigé suivant la normale au plan soient :

$\xi, \eta, \zeta$ , les coordonnées de  $G$  centre de la sphère,

$p, q, r$ , les composantes de la rotation absolue de la sphère,

$\omega^1, \omega^2, \omega^3$ , 3 formes de Pfafl construites sur les différentielles absolues des paramètres fixant la position d'un trièdre invariablement lié à la sphère.

$X, Y, Z$ , les composantes de la résultante générale des forces extérieures appliquées à la sphère autres que la réaction du plan

La forme  $\Omega$  associée à la sphère libre est :

$$\begin{aligned} \Omega = & M(d\xi \wedge d\xi + d\eta \wedge d\eta + d\zeta \wedge d\zeta) \\ & + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 + q\omega^3 \wedge \omega^1 + r\omega^1 \wedge \omega^2) \\ & - M[\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta + k^2(p dp + q dq + r dr)] \wedge dt \\ & + (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta) \wedge dt \end{aligned}$$

(pour l'expression cinétique de  $\Omega$  se reporter au chapitre 1, § II solide mobile autour d'un point fixe).

La liaison dans l'hypothèse du glissement de la sphère se traduit par

$$\zeta = 0 \quad P = N[\zeta - f\sqrt{(\xi - aq)^2 + (\eta + ap)^2}]$$

$f$  désignant le coefficient de frottement de la sphère sur le plan supposé constant.

Substituons aux paramètres de vitesse  $\xi$ ,  $\eta$  les coordonnées polaires  $\rho$ ,  $\alpha$  de la vitesse de glissement du point de contact P de la sphère sur le plan

$$\begin{aligned} \xi - aq &= \rho \cos \alpha & \xi &= \rho \cos \alpha + aq & d\xi &= d\rho \cos \alpha - \rho \sin \alpha d\alpha + a dq \\ \eta + ap &= \rho \sin \alpha & \eta &= \rho \sin \alpha - ap & d\eta &= d\rho \sin \alpha + \rho \cos \alpha d\alpha - a dp \end{aligned}$$

La liaison se traduit alors par  $\zeta = 0$ ,

$$P = N[\zeta - f \cos \alpha (\xi - aq) - f \sin \alpha (\eta + ap)]$$

d'où la forme

$$\Omega_t = N[d\zeta - f \cos \alpha (d\xi - a\omega^2) - f \sin \alpha (d\eta + a\omega^1)] \wedge dt.$$

Formons  $\Omega_r$  qui jointe à  $d\zeta - \zeta dt = 0$ , donnera la composante normale de la réaction et les équations différentielles du mouvement. Pour cela remplaçons dans  $\Omega d\zeta$  par 0 et  $d\zeta$  par

$$d\zeta = \pi + f \cos \alpha (d\xi - a\omega^2) + f \sin \alpha (d\eta + a\omega^1)$$

$$\begin{aligned} \Omega_r = & M[(d\rho \cos \alpha - \rho \sin \alpha d\alpha + a dq) \wedge d\xi \\ & + (d\rho \sin \alpha + \rho \cos \alpha d\alpha - a dp) \wedge d\eta] \\ & + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 \\ & + Mk^2[p(\omega^2 \wedge \omega^3) + q(\omega^3 \wedge \omega^1) + r(\omega^1 \wedge \omega^2)] \\ & + [X d\xi + Y d\eta + (Z + N)\pi + Zf \cos \alpha (d\xi - a\omega^2) \\ & + Zf \sin \alpha (d\eta + a\omega^1)] \wedge dt \\ & - M[(\rho + a \cos \alpha q - a \sin \alpha p) d\rho - a\rho(p \cos \alpha + q \sin \alpha) d\alpha \\ & + a\rho(\cos \alpha dq - \sin \alpha dp) + k^2 r dr] \wedge dt \\ & - M(k^2 + a^2)(p dp + q dq) \wedge dt. \end{aligned}$$

Les équations associées à  $\Omega_r$  sont :

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (d\xi)} = -M(d\rho \cos \alpha - \rho \sin \alpha d\alpha + a dq) + X dt + Zf \cos \alpha dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (d\eta)} = -M(d\rho \sin \alpha + \rho \cos \alpha d\alpha - a dp) + Y dt + Zf \sin \alpha dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (d\rho)} = M(d\xi \cos \alpha + d\eta \sin \alpha) - M(\rho + a \cos \alpha q - a \sin \alpha p) dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (d\alpha)} = M\rho(-\sin \alpha d\xi + \cos \alpha d\eta) + M(p \cos \alpha + q \sin \alpha) a \rho dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (dp)} = -Ma d\eta + Mk^2 \omega^1 + Ma\rho \sin \alpha dt - M(k^2 + a^2)p dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (dq)} = Ma d\xi + Mk^2 \omega^2 - Ma\rho \cos \alpha dt - M(k^2 + a^2)q dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta (dr)} = Mk^2(\omega^3 - r dt) = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta \omega^1} = -Mk^2(dp + q\omega^3 - r\omega^2) + Zaf \sin \alpha dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta \omega^2} = -Mk^2(dq - p\omega^3 + r\omega^1) - Zaf \cos \alpha dt = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta \omega^3} = -Mk^2(dr + p\omega^2 - q\omega^1) = 0$$

$$\frac{\delta \Omega_r}{\delta \pi} = (Z + N) dt = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d\xi - aq dt}{\cos \alpha} = \frac{d\eta + ap dt}{\sin \alpha} = \rho dt,$$

$$\omega^1 = p dt, \quad \omega^2 = q dt, \quad \omega^3 = r dt, \quad \frac{dr}{dt} = 0$$

$$M \frac{d\rho}{dt} = Zf \frac{a^2 + k^2}{k^2} + X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \quad M\rho \frac{d\alpha}{dt} = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

$$M \frac{dp}{dt} = \frac{Zaf}{k^2} \sin \alpha, \quad M \frac{dq}{dt} = -\frac{Zaf}{k^2} \cos \alpha.$$

Les équations donnant  $\frac{d\rho}{dt}$ ,  $\frac{d\alpha}{dt}$  définissent l'hodographe de la vitesse de glissement.

*Cas particulier.* — Sphère homogène pesante glissant sur un plan incliné, si  $i$  désigne l'angle d'inclinaison  $X = Mg \sin i$ ,  $Y = 0$ .

$Z = -Mg \cos i$ , on retrouve le résultat de Painlevé : les équations donnant le mouvement du centre s'intègre par quadrature.

Cas du roulement sans glissement. — Le champ caractéristique  $E$  de la forme  $\Omega$  correspondant à la sphère complètement libre a pour composantes :

$$E\left(\frac{X}{M}, \frac{Y}{M}, \frac{Z}{M}, 0, 0, 0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r, 1\right).$$

Le roulement sans glissement se traduit dans notre théorie par 3 liaisons de puissance nulle :

$$\begin{aligned} \xi - aq = 0 \quad \eta + ap = 0 \quad \zeta = 0 \\ P^1 = \lambda(\xi - aq) \quad P^2 = \mu(\eta + ap) \quad P^3 = \nu\zeta \\ \Omega^1 = \lambda(d\xi - a\omega^2) \wedge dt \quad \Omega^2 = \mu(d\eta + a\omega^1) \wedge dt \quad \Omega^3 = \nu d\zeta \wedge dt. \end{aligned}$$

Les champs de direction de liaisons ont pour composantes :

$$\begin{aligned} e^1\left(\frac{1}{M}, 0, 0, 0, \frac{-a}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right) \\ e^2\left(0, \frac{1}{M}, 0, \frac{a}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right) \\ e^3\left(0, 0, \frac{1}{M}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right) \end{aligned}$$

Le calcul de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , composantes de la réaction du plan sur la sphère peut s'effectuer au moyen des opérateurs de M. H. Cartan :

$$\begin{aligned} i(e^1)d(\xi - aq) &= \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right), & i(e^2)d(\xi - aq) &= 0, \\ i(e^3)d(\xi - aq) &= 0, & i(E)d(\xi - aq) &= \frac{X}{M}, & i(e^1)d(\eta + ap) &= 0, \\ i(e^2)d(\eta + ap) &= \frac{1}{M}\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right), & i(e^3)d(\eta + ap) &= 0 \\ i(E)d(\eta + ap) &= \frac{Y}{M}, & i(e^1)d\zeta &= 0, & i(e^2)d\zeta &= 0, \\ i(e^3)d\zeta &= \frac{1}{M}, & i(E)d\zeta &= \frac{Z}{M}, \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda = -\frac{X}{1 + \frac{a^2}{k^2}}, \quad \mu = -\frac{Y}{1 + \frac{a^2}{k^2}}, \quad \nu = -z.$$

On désire connaître les équations différentielles définissant le mouvement du centre de la sphère, formons  $\Omega_s$  déduite de  $\Omega + \Omega_t$  en remplaçant  $d\zeta$  par 0,  $d\xi$  par 0,  $dp$  par  $-\frac{d\dot{\eta}}{a}$ ,  $dq$  par  $\frac{d\dot{\xi}}{a}$ ,  $\omega^1$  par  $-\frac{d\eta}{a}$ ,  $\omega^2$  par  $\frac{d\xi}{a}$

$$\begin{aligned} \Omega_s = & M \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) (d\dot{\xi} \wedge d\xi + d\dot{\eta} \wedge d\eta) + Mk^2 dr \wedge \omega^3 \\ & + M \frac{k^2}{a^2} (-\dot{\eta} d\xi \wedge \omega^3 + \dot{\xi} d\eta \wedge \omega^3 - r d\eta \wedge d\xi) \\ & - M \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) (\dot{\xi} d\xi + \dot{\eta} d\eta) \wedge dt - Mk^2 r dr \wedge dt \\ & + (X d\xi + Y d\eta) \wedge dt. \end{aligned}$$

Les équations associées à  $\Omega_s$  sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\xi)} = & -M \frac{k^2 + a^2}{a^2} d\dot{\xi} + M \frac{k^2}{a^2} (-\dot{\eta} \omega^3 + r d\eta) + X dt = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\dot{\xi})} = & M \frac{k^2 + a^2}{a^2} (d\xi - \dot{\xi} dt) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\eta)} = & -M \frac{k^2 + a^2}{a^2} d\dot{\eta} + M \frac{k^2}{a^2} (\dot{\xi} \omega^3 - r d\xi) + Y dt = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\dot{\eta})} = & M \frac{k^2 + a^2}{a^2} (d\eta - \dot{\eta} dt) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^3} = & -Mk^2 dr + M \frac{k^2}{a^2} (\dot{\eta} d\xi - \dot{\xi} d\eta) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial (dr)} = & Mk^2 (\omega^3 - r dt) = 0 \end{aligned}$$

Les deux premières se réduisent à

$$M \frac{d\dot{\xi}}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} X \quad M \frac{d\dot{\eta}}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} Y.$$

Elles montrent que le centre de la sphère se meut dans le plan  $\xi = a$ , comme un point matériel soumis aux forces  $\frac{a^2}{a^2 + k^2} X$ ,  $\frac{a^2}{a^2 + k^2} Y$  cas particulier d'un théorème de Routh.

EXEMPLE IV. — Glissement d'une sphère homogène de masse  $M$ , de rayon  $a$  sur deux plans rectangulaires fixes  $xOy$ ,  $zOx$ . On suppose que les forces extérieures se réduisent à la résultante générale dont les composantes par rapport aux axes  $Oxyz$  sont  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Par rapport à des axes fixes soient :

$\xi, \eta, \zeta$ , les coordonnées du centre G de la sphère,  
 $p, q, r$ , les composantes de la rotation instantanée de la sphère,  
 $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ , 3 formes de Pfaff construites sur les différentielles des  
paramètres fixant la position d'un trièdre invariablement à la sphère.

La forme extérieure associée à la sphère libre est :

$$\begin{aligned} M(d\xi \wedge d\eta + d\eta \wedge d\zeta + d\zeta \wedge d\xi) \\ + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 + r\omega^1 \wedge \omega^2) \\ + Mk^2q\omega^3 \wedge \omega^1 - M[\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta + (p dp + q dq \\ + r dr)] \wedge dt + (X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta) \wedge dt. \end{aligned}$$

Le champ caractéristique correspondant E a pour composantes :

$$E\left(\frac{X}{M}, \frac{Y}{M}, \frac{Z}{M}, 0, 0, 0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r, 1\right).$$

La première liaison contact de la sphère avec le plan  $xOy$  se traduit par

$$\zeta = 0 \quad P^1 = N_A[\zeta - f_A \sqrt{(\xi - aq)^2 + (\eta + ap)^2}],$$

$f_A$  coefficient de frottement sur  $xOy$  ou en introduisant les coordonnées polaires  $\rho_A, \alpha$  de la vitesse de glissement du point de contact A de la sphère avec le plan  $xOy$

$$\begin{aligned} \xi - aq = \rho_A \cos \alpha & \quad P^1 = N_A[\zeta - f_A \cos \alpha (\xi - aq) - f_A \sin \alpha (\eta + ap)] \\ \eta + ap = \rho_A \sin \alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\Omega^1 = N_A[d\zeta - f_A \cos \alpha (d\xi - a\omega^2) - f_A \sin \alpha (d\eta + a\omega^1)] \wedge dt.$$

Les composantes du champ de direction de cette liaison sont :

$$e^1\left(\frac{-f_A \cos \alpha}{M}, \frac{-f_A \sin \alpha}{M}, \frac{1}{M}, \frac{-af_A \sin \alpha}{Mk^2}, \frac{af_A \cos \alpha}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right).$$

La deuxième liaison contact de la sphère avec le plan  $zOx$  se traduit par

$$\eta = 0 \quad P^2 = N_B[\eta - f_B \sqrt{(\zeta - ap)^2 + (\xi + ar)^2}]$$

$f_B$  coefficient de frottement sur  $zOx$  ou en introduisant les coordonnées polaires  $\rho_B, \beta$  de la vitesse de glissement du point de contact B de la sphère avec le plan  $zOx$

$$\begin{aligned} \zeta - ap = \rho_B \cos \beta & \quad P^2 = N_B[\eta - f_B \cos \beta (\zeta - ap) - f_B \sin \beta (\xi + ar)] \\ \xi + ar = \rho_B \sin \beta \end{aligned}$$

d'où

$$\Omega^2 = N_B [d\eta - f_B \cos \beta (d\zeta - a\omega^1) - f_B \sin \beta (d\xi + a\omega^3)] \wedge dt.$$

Les composantes de direction du champ de cette liaison sont :

$$e^2 \left( \frac{-f_B \sin \beta}{M}, \frac{1}{M}, \frac{-f_B \cos \beta}{M}, \frac{af_B \cos \beta}{M}, 0, \right. \\ \left. \frac{-af_B \sin \beta}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Déterminons les composantes normales des réactions au moyen des opérateurs

$$i(e^1)d\zeta = \frac{1}{M} \quad i(e^2)d\zeta = \frac{-f_B \cos \beta}{M} \quad i(E)d\zeta = \frac{Z}{M} \\ i(e^1)d\eta = \frac{-f_A \sin \alpha}{M} \quad i(e^2)d\eta = \frac{1}{M} \quad i(E)d\eta = \frac{Y}{M}$$

La condition de compatibilité de ces deux liaisons est :

$$i(e^1)d\zeta i(e^2)d\eta - i(e^1)d\eta i(e^2)d\zeta = \frac{1}{M^2} (1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta) \neq 0.$$

En la supposant satisfaite on en déduit

$$N_A = - \frac{Z + f_B \cos \beta Y}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} \quad N_B = - \frac{Y + f_A \sin \alpha Z}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta}.$$

Pour obtenir les équations différentielles du mouvement construisons  $\Omega_s$  en remplaçant dans  $\Omega$ ,  $d\zeta$  par 0,  $d\eta$  par 0,  $d\zeta$  et  $d\eta$  différentielles associées par le système

$$d\zeta - f_A \sin \alpha d\eta = f_A \cos \alpha (d\xi - a\omega^3) + af_A \sin \alpha \omega^1 + P_a^1 dt \\ - f_B \cos \beta d\zeta + d\eta = f_B \sin \beta (d\xi + a\omega^3) - af_B \cos \beta \omega^1 + P_a^2 dt$$

$$\Omega_s = Md\xi \wedge d\xi + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 \\ + q\omega^3 \wedge \omega^1 + r\omega^1 \wedge \omega^2) + M[\xi d\xi + k^2(p dp + q dq + r dr)] \wedge dt \\ + \frac{Y}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [f_B \sin \beta (d\xi + a\omega^3) \\ + f_A f_B \cos \alpha \cos \beta (d\xi - a\omega^3) + af_B \cos \beta (1 - f_A \sin \alpha) \omega^1] \wedge dt \\ + \frac{Z}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [f_A \cos \alpha (d\xi - a\omega^3) \\ + f_A f_B \sin \alpha \sin \beta (d\xi + a\omega^3) + af_A \sin \alpha (1 - \cos \beta f_B) \omega^1] \wedge dt \\ + X d\xi \wedge dt$$

d'où les équations associées à  $\Omega_s$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\xi)} = -M d\xi + X dt + \frac{dt}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y(f_B \sin \beta + f_A f_B \cos \alpha \cos \beta) + Z(f_A \cos \alpha + f_A f_B \sin \alpha \sin \beta)] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^1} = M k^2 (-dp - q \omega^3 + r \omega^2) + \frac{a dt}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y f_B \cos \beta (1 - \sin \alpha f_A) + Z f_A \sin \alpha (1 - \cos \beta f_B)] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^2} = M k^2 (-dq - r \omega^1 + p \omega^3) - \frac{a dt}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y f_A f_B \cos \alpha \cos \beta + Z f_A \cos \alpha] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^3} = M k^2 (-dr - p \omega^2 + q \omega^1) + \frac{a dt}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y f_B \sin \beta + Z f_A f_B \sin \alpha \sin \beta] = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\xi)} = M(d\xi - \xi dt) = 0, \quad \frac{\partial \Omega_s}{\partial (dp)} = M k^2 (\omega^1 - p dt) = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial (dq)} = M k^2 (\omega^2 - q dt) = 0, \quad \frac{\partial \Omega_s}{\partial (dr)} = M k^2 (\omega^3 - r dt) = 0$$

auxquelles on doit adjoindre  $d\zeta - \zeta dt = 0$ ,  $dr_1 - r_1 dt = 0$  et les relations de définition de  $\alpha$  et de  $\beta$ , qui compte tenus de  $\zeta = a$ ,  $r_1 = a$ , permettent de définir  $q$  et  $r$  en fonction de  $\xi$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

$$aq = \xi - ap \cotg \alpha \quad ar = -\xi - ap \tg \beta.$$

Ce système se met encore sous la forme suivante

$$M \frac{d\xi}{dt} = X + \frac{1}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y(f_B \sin \beta + f_A f_B \cos \alpha \cos \beta) + Z(f_A \cos \alpha + f_A f_B \sin \alpha \sin \beta)]$$

$$M k^2 \frac{dp}{dt} = \frac{a}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} [Y(1 - \sin \alpha f_A) f_B \cos \beta + Z(1 - \cos \beta f_B) f_A \sin \alpha]$$

$$M \frac{k^2}{a^2} \left( \frac{d\xi}{dt} - a \frac{d(p \cotg \alpha)}{dt} \right) = \frac{-f_A \cos \alpha}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} (Z + Y f_B \cos \beta)$$

$$M \frac{k^2}{a^2} \left( \frac{d\xi}{dt} + a \frac{d(p \tg \beta)}{dt} \right) = \frac{-f_B \sin \beta}{1 - f_A f_B \sin \alpha \cos \beta} (Y + Z f_A \sin \alpha)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi, \quad \omega^1 = p dt, \quad \omega^2 = q dt, \quad \omega^3 = r dt$$

**EXEMPLE V. — Liaison par asservissement de M. H. Beghin. —**  
 Un plan matériel P peut glisser sans frottement par translation sur un plan fixe  $xOy$ . Sur ce plan une sphère homogène pesante  $\Sigma$  de rayon  $a$  peut rouler sans glisser. Le mouvement du plan est réglé automatiquement de manière que le centre de la sphère tourne uniformément autour de la verticale fixe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$  donnée. Calculer les réactions et former les équations du mouvement du système.

Soient :  $u, v$  les coordonnées d'un point du plan

$\xi, \eta, \zeta$ , les coordonnées absolues du centre de la sphère

$p, q, r$ , les composantes de la rotation absolue de la sphère

$\omega^1, \omega^2, \omega^3$ , 3 formes de Pfaff construites sur les différentielles absolues de trois paramètres caractérisant le déplacement d'un trièdre lié à la sphère.

$\mu$  la masse du plan

$M$  la masse de la sphère,  $Mk^2$  le moment d'inertie de la sphère par rapport à un de ses diamètres.

$g$  l'intensité de la pesanteur dirigée suivant la verticale descendante.

La forme extérieure associée au système sans liaisons est

$$\begin{aligned} \Omega = & M(d\xi \wedge d\xi + d\eta \wedge d\eta + d\zeta \wedge d\zeta) + Mk^2(dp \wedge \omega^1 + dq \wedge \omega^2 \\ & + dr \wedge \omega^3 + p\omega^2 \wedge \omega^3 + q\omega^3 \wedge \omega^1 + r\omega^1 \wedge \omega^2) + \mu(du \wedge du + dv \wedge dv) \\ & - M[\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta + k^2(pdp + qdq + rdr) + g d\zeta] \wedge dt \\ & - \mu(\dot{u} du + \dot{v} dv) \wedge dt. \end{aligned}$$

*Liaisons.* — A notre point de vue les liaisons se traduisant par :

1. contact de la sphère et du plan

$$\zeta = 0 \quad \text{puissance} \quad P^1 = N\zeta \quad \text{forme} \quad \Omega^1 = Nd\zeta \wedge dt$$

roulement sans glissement de la sphère sur le plan

$$2. \xi - aq - \dot{u} = 0$$

$$\text{puissance} \quad P^2 = X(\xi - aq - \dot{u}) \quad \text{forme} \quad \Omega^2 = X(d\xi - a\omega^2 - du) \wedge dt$$

$$3. \eta + ap - \dot{v} = 0$$

$$\text{puissance} \quad P^3 = Y(\eta + ap - \dot{v}) \quad \text{forme} \quad \Omega^3 = Y(d\eta + a\omega^1 - dv) \wedge dt$$

liaison par asservissement

$$4. \xi - \omega\eta = 0 \quad \text{puissance} \quad P^4 = P\dot{u} \quad \text{forme} \quad \Omega^4 = P du \wedge dt$$

$$5. \eta + \omega\xi = 0 \quad \text{puissance} \quad P^5 = Q\dot{v} \quad \text{forme} \quad \Omega^5 = Q dv \wedge dt$$

Calcul des réactions. — Utilisons les opérateurs  $i(\ )$ . Formons le tableau des composantes des champs :

$d\xi : d\dot{\eta} : d\zeta : d\dot{u} : d\dot{v} : dp : dq : dr : d\xi : d\dot{\eta} : d\zeta : du : dv : \omega^1 : \omega^2 : \omega^3 : dt$
E 0 : 0 : $-g$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : $\xi : \dot{\eta} : \zeta : \dot{u} : \dot{v} : p : q : r : 1$
$e^1$ 0 : 0 : $\frac{1}{M}$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0
$e^2$ $\frac{1}{M}$ : 0 : 0 : $\frac{-1}{\mu}$ : 0 : 0 : $\frac{-a}{Mk^2}$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0
$e^3$ 0 : $\frac{1}{M}$ : 0 : 0 : $\frac{-1}{\mu}$ : $\frac{a}{Mk^2}$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0
$e^4$ 0 : 0 : 0 : $\frac{1}{\mu}$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0
$e^5$ 0 : 0 : 0 : 0 : $\frac{1}{\mu}$ : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0

On en déduit immédiatement les valeurs des  $i(\ )d$  relatifs aux diverses liaisons qui ne sont pas nulles :

1.  $i(e^1)d\zeta = \frac{1}{M}$ ,  $i(E)d\zeta = -g$
2.  $i(e^2)d(\xi - aq - \dot{u}) = \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) + \frac{1}{\mu}$ ,  
 $i(e^4)d(\xi - aq - \dot{u}) = -\frac{1}{\mu}$ ,  $i(E)d(\xi - aq - \dot{u}) = 0$
3.  $i(e^3)d(+ap - \dot{v} + \dot{\eta}) = \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) + \frac{1}{\mu}$ ,  
 $i(e^5)d(\dot{\eta} + ap - v) = -\frac{1}{\mu}$ ,  $i(E)d(\dot{\eta} + ap - v) = 0$
4.  $i(e^2)d(\xi - \omega\eta) = \frac{1}{M}$ ,  $i(E)d(\xi - \omega\eta) = -\omega\dot{\eta}$
5.  $i(e^3)d(\dot{\eta} + \omega\xi) = \frac{1}{M}$ ,  $i(E)d(\dot{\eta} + \omega\xi) = \omega\dot{\xi}$ .

On vérifie que les liaisons sont compatibles, le déterminant étant égal à  $\frac{1}{M^2\mu^2}$  d'où les valeurs des coefficients des liaisons que nous interprétons comme composantes des réactions :

du plan sur la sphère

$$\Lambda = M\omega\dot{\eta} = -M\omega^2\xi, \quad Y = -M\omega\xi = -M\omega^2\dot{\eta}, \quad N = Mg :$$

du plan fixe sur le plan mobile. en d'autres termes les composantes

de la force qu'il faut appliquer au plan mobile pour réaliser l'asservissement :

$$P = - \left[ M + \mu \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) \right] \omega^2 \xi \quad Q = - \left[ M + \mu \left( 1 + \frac{a^2}{k^2} \right) \right] \omega^2 \eta.$$

Équations du mouvement. — Formons  $\Omega_s$  déduite de  $\Omega$  en remplaçant  $d\zeta$  par 0,  $d\eta$  par 0 puisque cette liaison est de puissance nulle,  $dp$  et  $dq$  par leur valeur extraite de la différentiation des conditions de roulement sans glissement,  $\omega^1$ ,  $\omega^2$ , par leur valeur calculée en annulant les formes  $\Omega^2$ ,  $\Omega^3$  puisque ces liaisons sont de puissance nulle,  $d\xi$  et  $d\eta$  par leur valeur calculée en différentiant les liaisons d'asservissement,  $du$  et  $dv$  par leur valeur calculée au moyen de  $du = P_u^1 dt = \dot{u} dt$ ,  $dv = P_u^2 dt = \dot{v} dt$  :

$$\begin{aligned} \xi &= \omega \eta, & \dot{\eta} &= -\omega \xi, & ap &= \dot{v} + \omega \xi \\ aq &= \omega \eta - \dot{u}, & du &= \dot{u} dt, & \omega^1 &= \frac{1}{a} (\dot{v} dt - d\eta) \\ d\xi &= \omega d\eta, & d\dot{\eta} &= -\omega d\xi, & a dp &= d\dot{v} + \omega d\xi, \\ a dq &= \omega d\eta - d\dot{u}, & dv &= \dot{v} dt, & \omega^2 &= \frac{1}{a} (d\xi - \dot{u} dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_s &= 2M\omega d\eta \wedge d\xi + M \frac{k^2}{a^2} [(d\eta + \omega \xi dt) \wedge (d\dot{v} + \omega d\xi) \\ &+ (\omega d\eta - d\dot{u}) \wedge (d\xi - \omega \eta dt) + dr \wedge \omega^3 + r dr \wedge dt] \\ &+ M \frac{k^2}{a^2} [(\dot{v} + \omega \xi)(d\xi - \dot{u} dt) \wedge \omega^3 + (\omega \eta - \dot{u})\omega^3 \wedge (\dot{v} dt - d\eta) \\ &+ r(\dot{v} dt - d\eta) \wedge (d\xi - \dot{u} dt)] - M\omega^2(\eta d\eta + \xi d\xi) \wedge dt. \end{aligned}$$

Comme les coefficients de  $\Omega_s$  des relations de liaisons, des puissances des liaisons sont des constantes ou ne dépendent que de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $u$ ,  $v$ , les équations différentielles du mouvement sont données par les caractéristiques de  $\Omega_s$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\dot{u})} &= -M \frac{k^2}{a^2} (d\xi - \omega \eta dt) = 0 & \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\dot{v})} &= -M \frac{k^2}{a^2} (d\eta + \omega \xi dt) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_s}{\partial (dr)} &= -M \frac{k^2}{a^2} (\omega^3 - r dt) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\xi)} &= -2M\omega d\eta + M \frac{k^2}{a^2} [-\omega (d\eta + \omega \xi dt) - (\omega d\eta - d\dot{u}) \\ &+ (\dot{v} + \omega \xi)\omega^3 - r(\dot{v} dt - d\eta)] - M\omega^2 \xi dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_s}{\partial (d\eta)} &= +2M\omega d\xi + M \frac{k^2}{a^2} [d\dot{v} + \omega d\xi] + \omega (d\xi - \omega \eta dt) \\ &+ (\omega \eta - \dot{u})\omega^3 + r(\dot{v} dt - d\eta)] - M\omega^2 \eta dt = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega_s}{\partial \omega^3} = M \frac{k^2}{a^2} [-dr - (\dot{v} + \omega \xi)(d\xi - \dot{u} dt) + (\omega \eta - \dot{u})(\dot{v} dt - d\eta)] = 0$$

Les deux premières équations donnent

$$d\xi - \omega r_1 dt = 0, \quad dr_1 + \omega \xi dt = 0$$

et en intégrant

$$\xi = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad r_1 = -A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

la dernière, compte tenu des deux premières  $dr = 0$ ; les équations (4) et (5) définissent  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$ , c'est-à-dire la vitesse du mouvement du plan

$$M \frac{k^2}{a^2} d\dot{u} = -M\omega^2 \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) \xi dt \quad M \frac{k^2}{a^2} d\dot{v} = -M\omega^2 \left(1 + \frac{k^2}{a^2}\right) \eta dt.$$

**EXEMPLE VI. — Liaison généralisée : Problème simplifié des engins radio-guidés.** — Un corps solide pesant est soumis à l'action d'un moteur qui exerce à chaque instant sur le solide une force  $\vec{F}$  connue dirigée suivant la tangente à la trajectoire du centre de gravité  $G$  du solide. Le mouvement sera supposé plan et s'effectuant dans le plan de symétrie matérielle du solide dont nous postulons l'existence, soit  $xOz$ . On suppose qu'un mécanisme dirige la tangente à la trajectoire de  $G$  vers un mobile  $M$  dont les coordonnées sont des fonctions du temps  $t$ :  $x(t)$ ,  $z(t)$ . Trouver le système de forces équivalent nécessaire à la réalisation de ce mouvement.

Soient:  $\xi$ ,  $\eta$ , les coordonnées du centre de gravité  $G$  du corps  
 $\theta$  la rotation du solide autour de son centre de gravité  
 $\alpha$  l'angle de la tangente à la trajectoire de  $G$  avec l'axe horizontal

$M$  la masse du corps,  $Mk^2$  son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire au plan de symétrie  $zOx$ .

La forme extérieure associée au corps solide libre est :

$$\Omega = M(d\xi \wedge d\eta + d\zeta \wedge d\zeta + k^2 d\theta \wedge d\theta) - M(\xi d\dot{\xi} + \zeta d\dot{\zeta} + k^2 \dot{\theta} d\dot{\theta}) \wedge dt + (F \cos \alpha d\xi + F \sin \alpha d\zeta - Mg d\zeta) \wedge dt.$$

*Liaisons* : 1. La tangente à la trajectoire de  $G$  devant être dirigée suivant  $GM$

$$a' = \dot{\xi}(\zeta - z) - \dot{\zeta}(\xi - x) = 0.$$

2. L'angle de rotation du corps sur lui-même devant être égal à  $\alpha$  à une constante près

$$(\xi - x) \sin \theta - (\zeta - z) \cos \theta = 0$$

d'où

$$a^2 = (\ddot{\xi} - \ddot{x}) \sin \theta - (\ddot{\zeta} - \ddot{z}) \cos \theta + [(\dot{\xi} - \dot{x}) \cos \theta + (\dot{\zeta} - \dot{z}) \sin \theta] \dot{\theta} = 0.$$

Comme on ne connaît rien à priori sur les forces nécessaires à la réalisation d'une semblable liaison nous prendrons pour puissance de l'ensemble  $P = \lambda \dot{\xi} + \mu \dot{\zeta} + \nu \dot{\theta}$  d'où la forme  $\Omega$ . Les composantes du champ de la forme  $\Omega + \Omega_l$  sont :

$$E \left( \frac{1}{M} (F \cos \alpha + \lambda), \quad \frac{1}{M} (F \sin \alpha + \mu - Mg), \quad \frac{\nu}{Mk^2}, \quad \xi, \quad \zeta, \quad \dot{\theta}, \quad 1. \right)$$

Écrivons que les formes  $da^1$  et  $da^2$  appartiennent au sous-module des caractéristiques de  $\Omega + \Omega_l$  c'est-à-dire que

$$i(E) da^1 = 0, \quad i(E) da^2 = 0$$

En désignant par  $D$  la distance  $GM$ , par  $V$  la vitesse du corps on doit avoir

$$\lambda \sin \alpha - (\mu - Mg) \cos \alpha - M \frac{V}{D} (\cos \alpha \dot{z} - \sin \alpha \dot{x}) = 0$$

$$\lambda \sin \alpha - (\mu - Mg) \cos \alpha + D \frac{\nu}{k^2} + M(\ddot{z} \cos \alpha - \ddot{x} \sin \alpha) + 2M[(\dot{\xi} - \dot{x}) \cos \alpha + (\dot{\zeta} - \dot{z}) \sin \alpha] \dot{\alpha}$$

système qui montre que  $\nu$  et  $\lambda \sin \alpha - \mu \cos \alpha$  sont seuls déterminés.

Si on désigne par  $W$  la vitesse du mobile  $M$  et par  $\varphi$  l'angle de la tangente à sa trajectoire avec l'horizontal, on obtient :

$$\lambda \sin \alpha - \mu \cos \alpha = -Mg \cos \alpha + \frac{M}{D} VW \cos(\alpha - \varphi)$$

$$\frac{\nu}{k^2} = \frac{M}{D} g \cos \alpha - \frac{M}{D^2} VW \cos(\alpha - \varphi) - 2 \frac{M}{D} \dot{\alpha} [V - W \cos(\alpha - \varphi)] + \frac{M}{D} (\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha).$$

## CHAPITRE IV

### THÉORIE DES LIAISONS UNILATÉRALES: CAS D'UNE LIAISON

#### § 1. — Considérations générales.

Pour un système mécanique  $S$  défini par le champ  $E$  caractéristique d'une forme  $\Omega$  de degré 2 sur une variété différentiable  $V_{2n+1}$ , astreint à une liaison du type  $a = 0$ ,  $\lambda e$  (liaison dont on connaît la direction de la force de liaison définie par le champ  $e$ ) des raisons physiques imposent à  $\lambda$  un signe connu a priori. On peut toujours en remplaçant  $e$  par  $-e$ , s'arranger pour que le signe imposé à  $\lambda$  soit positif. Dans tout ce qui suit  $\lambda$  et  $e$  sont supposés satisfaire à cette condition. Soit  $M$  un point de  $V_{2n+1}$  appartenant à la sous-variété  $a = 0$ .

**DÉFINITION.** — Nous dirons qu'une liaison du type  $a = 0$ ,  $\lambda e$ , est de classe  $U$ , si la fonction  $a(t)$  définie par la valeur de  $a$  sur la ligne intégrale tangente au vecteur champ  $E$  en  $M_0$  doit avoir un signe déterminé.

On peut toujours supposer que le signe imposé à  $a(t)$  est le signe positif pour le voisinage à droite  $t > t_0$  ( $t_0$  valeur de  $t$  en  $M_0$ ) car on peut toujours remplacer  $a$  par  $-a$ , hypothèse que nous supposons réaliser dans ce qui suit.

**Justification de ces considérations.** — Les conventions précédentes peuvent paraître arbitraire. Montrons sur quelques exemples qu'elle en est l'origine.

1° Un solide  $S$  est en contact avec un autre  $S'$  avec ou sans frottement.

Nous avons vu (chap. II § VI) qu'une semblable liaison est définie par

$$u^2 = 0 \quad P = N [u^2 - f |\vec{V}_g| - \partial_1 \omega_2 - \omega |\omega_n^*|].$$

La séparation des solides ne peut avoir lieu que si  $a^3 > 0$  ; le contact que si  $N > 0$ .

Ce type de liaison est à l'origine de l'appellation liaison unilatérale donné aux liaisons de classe U.

2° Liaison par asservissement de M. H. Béghin.

Un disque B repéré par un angle  $\beta$  est coaxial avec un disque A repéré par un angle  $\alpha$ . La liaison  $a = \beta - \alpha = 0$  est réalisée en appliquant au disque B un couple de puissance  $P = \lambda\beta$ , par un dispositif de commande électrique constitué par un index invariablement lié à B. Lorsque l'index lié à A vient toucher l'index lié à B un courant électrique s'établit et un moteur tournant dans le sens trigonométrique applique à B un couple de puissance  $P = \lambda\beta$  ; le sens unique de rotation du moteur impose  $\lambda > 0$ . La rupture de la liaison ne peut avoir lieu sans détériorations des contacts que si  $a = \beta - \alpha > 0$ .

3° Plus généralement les liaisons de puissance nulle, les liaisons d'Appell dans lesquels le mécanisme de réalisation impose des conditions  $a > 0$  pour la rupture,  $\lambda > 0$  pour que la liaison soit acceptable.

Les questions qui se posent alors sont : connaissant les conditions initiales point  $M_0$  de  $V_{2n+1}$  appartenant à la sous-variété  $a = 0$ , quel mouvement va se produire ? les conditions mécaniques posées à priori  $a(t) > 0$ ,  $\lambda > 0$  départagent-elles les mouvements possibles ?

## § II. — Mouvements possibles en $M_0$ .

En  $M_0$  deux mouvements sont possibles :

1° Le mouvement (M) sans liaison défini par la ligne intégrale  $\Sigma$  issue de  $M_0$ , tangente au vecteur champ E.  $a$  est une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$  qui devient une fonction de  $t$  sur la ligne  $\Sigma$ . Ce mouvement est acceptable si cette fonction nulle à  $t_0$  devient positive, hypothèse qui se traduit par  $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 > 0$  et si cette dérivée est nulle par  $a_0^{(n+1)} > 0$  dérivée qui existe certainement car pour une liaison imposée  $i(E) \cdot da \neq 0$  (chap. II, § III).

D'après le théorème II du chapitre I, § III cette condition se traduit par  $(i(E) \cdot da)_0 > 0$  ou par  $(i(E) \cdot da)_0^{(n+1)} > 0$  si les  $n$  premières dérivées sont nulles.

2° Le mouvement  $(M_t)$  avec liaison défini par la ligne intégrale  $\Sigma_t$

issue de  $M_0$ , tangente au vecteur champ  $E + \lambda e$ . Ce mouvement est acceptable si  $\lambda > 0$ .

Or  $\lambda$  est défini par l'équation  $i(E) \cdot da + \lambda i(e) \cdot da = 0$ . La liaison étant supposée compatible (chap. II, § IV)  $i(e) \cdot da \neq 0$ .

$$\lambda = - \frac{i(E) da}{i(e) da}$$

$\lambda$  est ainsi défini comme une fonction numérique sur  $V_{2n+1}$ , cette fonction numérique devient une fonction de  $t$  sur la ligne intégrale  $\Sigma_t$  dont la dérivés  $n^e$  est

$$\lambda^{(n)} = [i(E + \lambda e) d\lambda]^{(n)}.$$

**THÉORÈME I.** — Si en  $M_0$   $(i(E) \cdot da)^{(r)}$  est nulle pour  $r \leq n$ , différent de zéro pour  $r = n + 1$ ,  $\lambda$  et ses  $(n - 1)$  dérivées premières sont nulles en  $M_0$ , et

$$- (i(e) \cdot da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E) \cdot da)_0^{(n+1)}.$$

Par définition

$$\lambda^{(r)} = i(E + \lambda e) d\lambda^{(r-1)} = i(E) d\lambda^{(r-1)} + \lambda i(e) d\lambda^{(r-1)}$$

$(i(E) \cdot da)_0 = 0$  entraînant  $\lambda_0 = 0$

$$\lambda_0^{(r)} = (i(E) d\lambda^{(r-1)})_0 = (i(E) d\lambda)_0^{(r-1)}$$

par récurrence  $\lambda$  se présentant sous la forme d'un produit  $u \cdot v$ , avec  $u = i(E) \cdot da$ ,  $v = \frac{-1}{(ie) da}$ ,  $\lambda$  et ses  $(n - 1)$  dérivées premières en  $M_0$  sont nulles, la  $n^e$  est donnée par

$$\lambda_0^{(n)} = - \frac{(i(E) da)_0^{(n+1)}}{(i(e) \cdot da)_0}.$$

Conséquence. Si  $(i(E) \cdot da)_0^{(r)} = 0$  pour  $r \leq n$ ,  $\neq 0$  pour  $r = n + 1$

1° Pour un mouvement  $M$  la première dérivée non nulle de la fonction  $a(t)$  est d'ordre  $(n + 1)$  et a pour valeur  $a_0^{(n+1)} = (i(E) \cdot da)_0^{(n+1)}$ ,

2° Pour un mouvement  $(M_t)\lambda$  et ses  $(n - 1)$  dérivées premières sont nulles en  $M_0$ , la dérivée  $n^e$  de  $\lambda$  se calcule au moyen de

$$- (i(e) \cdot da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E) \cdot da)_0^{(n+1)}.$$

On peut résumer les résultats précédents dans la formule

$$(II, 1) \quad a_0^{(n+1)} - (i(e) \cdot da)_0 \lambda_0^{(n)} = (i(E) \cdot da)_0^{(n+1)}$$

dans laquelle on fait  $\lambda = 0$  pour un mouvement  $M$ ,  $a = 0$  pour un

mouvement ( $M_t$ ). Il est important de remarquer pour les applications mécaniques que  $(i(\mathbf{E}).da)_0^{(n+1)}$  ne dépend que des conditions initiales et des forces appliquées au système autres que celles nécessaires à la réalisation de la liaison. La formule (II, 1) peut encore s'établir au moyen du théorème suivant :

**THÉORÈME II.** —  $f$  et  $\lambda$  étant deux fonctions numériques sur  $V_{2n+1}$ , régulières ainsi que leurs dérivées partielles dans le voisinage d'un point  $M$ ,  $\mathbf{E}$  et  $e$  deux champs donnés sans singularités dans le voisinage de  $M$ , la dérivée  $(n+1)^e$  de la fonction  $f$  relativement au champ  $\mathbf{E} + \lambda e$  peut se calculer au moyen de la formule

(II, 2)

$f_{\mathbf{E}+\lambda e}^{(n+1)} = (\lambda\varphi_1)^{(n)} + \dots + (\lambda\varphi_p)^{(n-p+1)} + \dots + \lambda\varphi_{n+1} + (i(\mathbf{E})df)^{(n+1)}$   
 dans laquelle  $\varphi_1 = i(e).df$ ,  $\varphi_p = i(e).d(i(\mathbf{E}).df)^{(p-1)}$ ,  $(\lambda\varphi_p)^{(n-p+1)}$  désigne la dérivée  $(n-p+1)^e$  du produit  $\lambda\varphi_p$  prise par rapport au champ  $\mathbf{E} + \lambda e$ .

Par définition  $f_{\mathbf{E}+\lambda e}^{(1)} = i(\mathbf{E}).df + \lambda i(e).df$ .

En posant  $i(\mathbf{E}).df = \Phi_1$ ,  $i(e).df = \varphi_1$ , la dérivée  $n^e$  de  $f^{(1)}$  s'écrit :

$$(1) \quad f^{(n+1)} = \Phi_1^{(n)} + (\lambda\varphi_1)^{(n)}.$$

On peut appliquer à la fonction  $\Phi_1$ , le procédé employé pour la fonction  $f$

$$\Phi_1^{(1)} = i(\mathbf{E}).d\Phi_1 + \lambda i(e).d\Phi_1.$$

En posant  $i(\mathbf{E}).d\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $i(e).d\Phi_1 = \varphi_2$ , la dérivée  $(n-1)^e$  de  $\Phi_1^{(1)}$  s'écrit :

$$(2) \quad \Phi_1^{(n)} = \Phi_2^{(n-1)} + (\lambda\varphi_2)^{(n-1)}.$$

Le raisonnement se poursuit et on obtient après  $(n+1)$  opérations

$$(n+1) \quad \Phi_n^{(1)} = i(\mathbf{E}).d\Phi_n + \lambda\varphi_{n+1}.$$

En ajoutant membre à membre les  $(n+1)$  relations précédentes après avoir remarqué que  $i(\mathbf{E}).d\Phi_n = (i(\mathbf{E}).df)^{(n+1)}$ , on obtient (II, 2).

*Application.* — Si en  $M_0$ ,  $\lambda$  et ses  $(n-1)$  dérivées premières sont nulles, la formule (II, 2) donne

$$(II, 3) \quad f_0^{(n+1)} - \lambda_0^{(n)}(i(e).df)_0 = (i(\mathbf{E}).df)_0^{(n+1)}.$$

Cette relation appliquée à  $f = a$  donne (II, 1). La formule (II, 1)

ainsi démontrée donne pour un mouvement (M) en faisant  $\lambda = 0$ ,  $a_0^{(n+1)} = (i(E).da)_0^{(n+1)}$  pour un mouvement (M<sub>l</sub>) en faisant  $a = 0$ ,  $\lambda_0^{(n)}$ , et elle montre de plus qu'en faisant varier  $n$ ,  $\lambda$  et ses  $(n-1)$  dérivées premières sont nulles en M<sub>0</sub>, si  $(i(E).da)_0^{(n+1)}$  est la première dérivée non nulle en M<sub>0</sub>.

### Discussion des éventualités.

**THÉORÈME.** — 1° Si  $(i(e).da)_0 > 0$  les conditions initiales suffisent à déterminer le mouvement ultérieur.

2° Si  $(i(e).da)_0 < 0$  les conditions initiales ne peuvent déterminer le mouvement ultérieur, il y a impossibilité si  $(i(E).da)_0 < 0$  ou  $(i(E).da)_0^{(n+1)} < 0$  indétermination pour

$$(i(E).da)_0 > 0 \quad \text{ou} \quad (i(E).da)_0^{(n+1)} > 0.$$

En effet 1° Si  $(i(e).da)_0 > 0$  et  $(i(E).da)_0 \neq 0$  la relation (II, 1) avec  $n = 0$  donne pour

$$(i(E).da)_0 > 0 \begin{cases} \lambda = 0, & \left(\frac{da}{dt}\right)_0 > 0 & \text{mouvement M acceptable} \\ a = 0, & \lambda_0 < 0 & \text{mouvement M inacceptable} \end{cases}$$

$$(i(E).da)_0 < 0 \begin{cases} \lambda = 0, & \left(\frac{da}{dt}\right)_0 < 0 & \text{mouvement (M) inacceptable} \\ a = 0, & \lambda_0 > 0 & \text{mouvement (M}_l\text{) acceptable} \end{cases}$$

si  $(i(E).da)_0 = 0$ ,  $(i(E).da)_0^{(n+1)} \neq 0$  mêmes résultats en utilisant (II, 1).

2° Si  $(i(e).da)_0 < 0$  et  $i(E).da \neq 0$  la relation (II, 1) avec  $n = 0$ , donne pour  $(i(E).da)_0 > 0$  (M) et (M<sub>l</sub>) tous deux possibles

$$\begin{cases} \text{pour } \lambda = 0, & \left(\frac{da}{dt}\right)_0 > 0 \\ \text{pour } a = 0, & \lambda_0 > 0. \end{cases}$$

Il y a donc indétermination.

Si  $(i(E).da)_0 < 0$  (M) et (M<sub>l</sub>) sont tous deux impossibles

$$\begin{cases} \text{pour } \lambda = 0, & \left(\frac{da}{dt}\right)_0 < 0 \\ \text{pour } a = 0, & \lambda_0 < 0. \end{cases}$$

Si  $(i(E).da)_0 = 0$ ,  $(i(E).da)_0^{(n+1)} \neq 0$  mêmes résultats en utilisant (II, 1).

**Image géométrique de cette discussion.** — En  $M_0$  de  $V_{2n+1}$  considérons les vecteurs  $\vec{E}_0$  et  $\vec{e}_0$  de l'espace tangent. La sous-variété  $a=0$  partage au voisinage de  $M_0$   $V_{2n+1}$  en deux régions. A la forme  $da$  associons le vecteur  $\vec{a}$  d'origine  $M_0$  orientée dans le sens de la région positive. Aux deux composantes covariantes relativement à  $\vec{a}$  de  $\vec{E}_0$  et de  $\vec{e}_0$  associons respectivement les vecteurs colinéaires à  $\vec{a}$

$$\vec{\alpha} = (i(\vec{E}) \cdot da)_0 \vec{a}, \quad \vec{A} = - (i(\vec{e}) \cdot da)_0 \vec{a}.$$

Si  $(i(\vec{e}) \cdot da)_0 > 0$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$  sont de sens contraire, à  $\vec{\alpha}$  correspond un mouvement (M) ou  $(M_l)$ .

Si  $(i(\vec{e}) \cdot da)_0 < 0$ ,  $\vec{a}$  et  $\vec{A}$  sont de même sens : à  $\vec{\alpha}$  de sens contraire à  $\vec{a}$  ne correspond aucun mouvement, à  $\vec{\alpha}$  ayant le sens de  $\vec{a}$  deux mouvements.

### § III. — Conséquences mécaniques.

L'étude précédente montre le rôle important jouer par le signe de l'invariant  $i(\vec{e}) \cdot da$  dont l'expression analytique est quand emploie des coordonnées hamiltonniennes

$$i(\vec{e}) \cdot da = \sum_n^{i-1} \frac{\partial a}{\partial p_i} l_i.$$

Pour une liaison du type d'Appell qui comme nous l'avons vu au chapitre II, § V comprend comme cas particulier les liaisons holonomes et les liaisons linéairement non holonomes  $i(\vec{e}) \cdot da$  est égale à la norme de  $e$ , il est donc toujours positif. Pour de pareilles liaisons, les conditions initiales suffisent à déterminer le mouvement ultérieur. Pour les autres types de liaisons, en particulier pour les liaisons avec frottement, avec résistance au roulement et au pivotement sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe suivant les conditions initiales jointes aux conditions mécaniques peuvent ne pas être suffisantes. Dans les cas d'indétermination, si l'on veut préciser le mouvement ultérieur il est nécessaire d'ajouter aux conditions initiales une condition sélective pour (M) et  $(M_l)$ .

**Raison analytique de l'indétermination.** — En utilisant l'interprétation géométrique du système différentiel des équations du

mouvement comme définissant les lignes tangentes à un champ  $F$  sur une variété  $V_{2n+1}$  avec  $F = E$  pour un mouvement  $(M)$ ,  $F = E + \lambda e$  pour un mouvement  $(M_1)$ , le champ  $F$  ainsi défini est discontinu sur la sous-variété  $a = 0$ . Il y a donc deux intégrales possibles qui correspondent aux mouvements  $(M)$  et  $(M_1)$  quand on prend le point initial  $M_0$  sur la sous-variété  $a = 0$ . Les considérations mécaniques  $\lambda > 0$  si  $a = 0$ ,  $a > 0$  si  $\lambda = 0$  ne permettent de séparer les deux mouvements que si  $i(e) \cdot da > 0$ .

**THÉORÈME.** — *Apparition ou cessation d'une liaison entraîne nécessairement une discontinuité pour les dérivées des fonctions représentant le mouvement. Si sur  $V_{2n+1}$  on se donne  $2n$  fonctions  $f_i$  indépendantes sans singularité dans le voisinage de  $M_0$  pris sur la variété  $a = 0$ , les mouvements  $(M)$  et  $(M_1)$  sont définis par les systèmes différentiels*

$$(M) \quad \frac{df_i}{dt} = i(E) \cdot df_i \quad (M_1) \quad \frac{df_i}{dt} = i(E + \lambda e) \cdot df_i$$

$$\text{avec} \quad \lambda i(e) \cdot da + i(E) \cdot da = 0.$$

En  $M_0$  si  $\lambda^0 \neq 0$ , on en déduit :  $(f_{E+\lambda e}^{(1)})_0 - (f_E^{(1)})_0 = \lambda_0 (i(e) df_i)_0$  ce qui montre la discontinuité des dérivées du premier ordre des fonctions  $f_i$ .

Si en  $M_0$   $\lambda$  et ses  $(n-1)$  premières dérivées sont nulles la formule (II, 3) donne

$$(f_{E+\lambda e}^{(n+1)})_0 - (f_E^{(n+1)})_0 = \lambda_0^{(n)} (i(e) df_i)_0$$

ce qui montre que les dérivées d'ordre  $(n+1)$  des fonctions  $f_i$  sont discontinues.

#### § IV. — Exemples montrant l'existence d'indétermination due à une liaison.

1° Revenons à l'exemple d'asservissement décrit au début de ce chapitre.

Désignons par  $I_1$  le moment d'inertie du disque A, par  $\Gamma$  le couple qui lui est appliqué, par  $I_2$  le moment d'inertie du disque B, et supposons que le moteur asservi entraînant B ne peut tourner que dans le sens négatif.

La liaison se traduit par  $\beta - \alpha = 0$ , ou conformément au point

de vue du chapitre II, § I par  $a = \dot{\beta} - \dot{\alpha} = 0$ , la puissance des forces nécessaires à sa réalisation étant  $P = -\lambda\dot{\beta}$ .

La forme  $\Omega$  génératrice des équations du mouvement est

$$\Omega = I_1 d\dot{\alpha} \wedge d\alpha + I_2 d\dot{\beta} \wedge d\beta - I_1 \dot{\alpha} d\dot{\alpha} \wedge dt - I_2 \dot{\beta} d\dot{\beta} \wedge dt + \Gamma_1 d\alpha \wedge dt - \lambda d\beta \wedge dt$$

d'où les équations

Mouvement (M)  $\lambda = 0$ .      Mouvement (M<sub>l</sub>)  $a = 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -I_1 d\dot{\alpha} + \Gamma_1 dt = 0 \\ d\alpha - \dot{\alpha} dt = 0 \\ I_2 d\dot{\beta} = 0 \\ d\beta - \dot{\beta} dt = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -I_1 d\dot{\alpha} + \Gamma_1 dt = 0 \\ d\alpha - \dot{\alpha} dt = 0 \\ -I_2 d\dot{\beta} - \lambda dt = 0 \\ d\beta - \dot{\beta} dt = 0 \end{array} \right.$$

Les composantes du champ E sont  $\frac{\Gamma_1}{I_1}, 0, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, 1$  celles du champ e sont  $0, -\frac{1}{I_2}, 0, 0, 0$ .

Il en résulte  $i(e) \cdot da = -\frac{1}{I_2}, i(E) \cdot da = -\frac{\Gamma_1}{I_1}$ . La relation (II, 1) permettant de discuter les éventualités s'écrit dans ce cas

$$\frac{da}{dt} + \frac{\lambda}{I_2} = -\frac{\Gamma_1}{I_1}$$

Discussion.

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \Gamma_1 > 0 \\ \text{si } \Gamma_1 < 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \lambda = 0, \frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{I_1} < 0 \text{ donc (M) inacceptable} \\ \text{puisque } \frac{da}{dt} \text{ doit être positif} \\ \text{pour } a = 0, \lambda = -\frac{\Gamma_1}{I_2} < 0 \text{ donc (M}_l\text{) inacceptable} \\ \text{puisque } \lambda \text{ doit être positif} \\ \text{pour } \lambda = 0, \frac{da}{dt} = -\frac{\Gamma_1}{I_1} > 0 \text{ donc (M) acceptable} \\ \text{puisque } \frac{da}{dt} \text{ est positif} \\ \text{pour } a = 0, \lambda = -\frac{\Gamma_1}{I_2} > 0 \text{ donc (M}_l\text{) acceptable les} \\ \text{deux disques tournant dans le sens des aiguilles} \\ \text{d'une montre.} \end{array} \right.$$

Dans le cas où  $\Gamma_1$  est négatif il y a indétermination ; cette indétermination ne peut être levée que par un choix arbitraire  $\frac{da}{dt} \neq 0$  mouvement (M),  $\lambda \neq 0$  mouvement (M<sub>l</sub>).

2° Il est clair qu'on peut multiplier les exemples du genre précé-

dent en associant à un contact électrique créant un champ de forces une relation de liaison liée au contact.

3° Cas de deux solides en contact avec frottement de glissement, avec résistance au roulement et au pivotement.

Nous avons au chapitre II, § VI calculer  $i(e) \cdot da$  pour deux solides en contact ponctuel. La relation permettant de discuter les éventualités est de la forme

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_0 - (i(e) \cdot da)_0 N = (i(E) \cdot da)_0$$

avec

$$i(e) \cdot da = A + f(B \sin s + C \cos s) + \delta(D \cos \tau + F \sin \tau) + \varepsilon \bar{\omega} G.$$

Si  $(i(e) \cdot da)_0 > 0$ , pour  $(i(E) \cdot da)_0 > 0$  la seule éventualité possible est  $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 = (i(E) \cdot da)_0$  c'est-à-dire séparation des deux solides pour  $(i(E) \cdot da)_0 < 0$   $(i(e) \cdot da)_0 N = -(i(E) \cdot da)_0$ , glissement des deux solides l'un sur l'autre.

Si  $(i(e) \cdot da)_0 < 0$ , pour  $(i(E) \cdot da)_0 < 0$  deux éventualités possibles :  $\left(\frac{da}{dt}\right)_0 > 0$  séparation des solides,  $N > 0$  contact avec glissement des solides pour  $(i(E) \cdot da)_0 < 0$  impossibilité de la séparation ou du contact.

Si on néglige les résistances au roulement et au pivotement le cas d'impossibilité a été signalé pour la première fois par Painlevé et est connu sous le nom de paradoxe de Painlevé<sup>(20)</sup> qui signale également qu'on peut rencontrer des indéterminations dans les problèmes avec frottement. Si on néglige le frottement de glissement et la résistance au pivotement M. L. Roy<sup>(21)</sup> a signalé que la résistance au roulement pouvait également donner naissance à des indéterminations et des impossibilités.

Remarquons que le frottement de pivotement ou l'ensemble frottement de glissement résistance au roulement et au pivotement peuvent donner naissance aux mêmes phénomènes.

Ces anomalies qui ne paraissent telles que par rapport aux liaisons classiques holonomes et linéairement non holonomes, ont

<sup>(20)</sup> Cf. PAINLEVÉ, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, tome CXXVI, 1895 et *Leçons sur le frottement*, Hermann, Paris, 1895.

<sup>(21)</sup> Cf. M. Louis ROY, Congrès de mécanique appliquée.

conduit certains à penser qu'elles étaient dues à l'imperfection des lois de Coulomb et que des lois plus précises les éviteraient. L'étude faite dans ce chapitre montre qu'il n'en est rien puisque l'origine des paradoxes et des indéterminations réside dans le concept même de liaison et tient à une disposition des vecteurs  $\vec{e}$  (champ de liaison) et  $\vec{a}$  (associé à la forme  $da$ ) en un point  $M_0$  de la sous-variété  $a = 0$  de  $V_{2n+1}$  si  $i(e) \cdot da$  est négatif.

Le cas du frottement de glissement n'est donc historiquement que le premier cas où ces faits ont été constatés.

---

## CHAPITRE V

### THÉORIE DES LIAISONS UNILATÉRALES : CAS DE PLUSIEURS LIAISONS

#### § I. — Aspect mécanique du problème.

Quand on considère un système mécanique  $S$  astreint à  $p$  liaisons de classe  $U$  (chap. IV, § I) les conditions initiales étant données, il est naturel de se demander quels sont les mouvements possibles et dans quels cas les conditions posées à priori pour la rupture des liaisons et pour les facteurs de liaisons sont suffisantes pour séparer les mouvements.

Le système mécanique  $S$  sera défini par le champ  $E$  caractéristique d'une forme  $\Omega$  de degré deux sur une variété différentiable  $V_{2n+1}$ , chacune des  $p$  liaisons sera caractérisée par une sous-variété analytique  $a^h = 0$  et par un champ de liaison  $\lambda_h e^h$ ,  $\lambda_h$  fonction numérique à déterminer,  $e^h$  champ connu, l'indice  $h$  variant de 1 à  $p$ . Se donner les conditions initiales revient à se donner un point  $M_0$  de  $V_{2n+1}$ . Toute la discussion repose sur le théorème suivant.

**THÉORÈME I.** —  *$f, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  étant  $(p+1)$  fonctions numériques sur  $V_{2n+1}$  régulières ainsi que leurs dérivées partielles dans le voisinage d'un point  $M, E, e^1, e^2, \dots, e^p$  ( $p+1$ ) champs donnés sans singularités dans le voisinage de  $M$  la dérivée  $(n+1)^e$  de la fonction  $f$  relativement au champ  $E + \sum_p \lambda_h e^h$  peut se calculer au moyen de la formule :*

$$f_{(n+1)}^{(V, 1)} = (\lambda_h \varphi_1^h)^{(n)} + \dots + (\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)} + \dots + \lambda_h \varphi_{n+1}^h + (i(E)df)^{(n+1)}$$

avec  $\varphi_1^h = i(e^h) \cdot df$ ,  $\varphi_p^h = i(e^h) \cdot d(i(E) \cdot df)^{(p)}$ , avec sommation relativement à l'indice muet  $h$  dans chaque parenthèse  $(\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)}$ , l'exposant  $(n-p+1)$  indiquant une dérivation par rapport au champ  $E + \sum_1^p \lambda_h e^h$ .

La démonstration s'effectue comme celle du théorème II, chap. IV.

Par définition

$$f^{(1)} = i(E)df + \lambda_h i(e^h).df.$$

En posant  $i(E).df = \Phi_1$ ,  $i(e^h).df = \varphi_1^h$ , la dérivée  $n^e$  de  $f^{(1)}$

$$(1) \quad f^{(n+1)} = \Phi_1^{(n)} + (\lambda_h \varphi_1^h)^{(n)}.$$

On peut appliquer à la fonction  $\Phi_1$  le procédé employé pour la fonction  $f$ .

Par définition

$$\Phi_1^{(1)} = i(E).d\Phi_1 + \lambda_h i(e^h).d\Phi_1.$$

En posant  $i(E).d\Phi_1 = \Phi_2$ ,  $i(e^h).d\Phi_1 = \varphi_2^h$ , la dérivée  $(n-1)^e$  de  $\Phi_1^{(1)}$  donne

$$(2) \quad \Phi_1^{(n)} = \Phi_2^{(n-1)} + (\lambda_h \varphi_2^h)^{(n-1)}.$$

Le raisonnement se poursuit et on obtient après  $(n+1)$  opérations analogues

$$(n+1) \quad \Phi_n^{(1)} = i(E).d\Phi_n + \lambda_h \varphi_n^h.$$

En ajoutant membre à membre les  $(n+1)$  relations précédentes et remarquant que  $i(E).d\Phi_n = (i(E).df)^{(n+1)}$  on obtient (V, 1).

On peut appliquer (V, 1) aux  $p$  fonctions  $a^1, \dots, a^p$  en un point  $M_0$ , ce qui donne

$$(V, 2) \quad (a^k)_0^{(n+1)} - (\lambda_h \varphi_1^{hk})_0^{(n)} \dots - (\lambda_h \varphi_p^h)^{(n-p+1)} \dots - (\lambda_h \varphi_{n+1}^{hk})_0 = (i(E).da^k)_0^{(n+1)}.$$

En particulier si  $(i(E).da^k)_0 \neq 0$  pour tout  $k$  de 1 à  $p$  ce qui signifie que  $E$  n'appartient à aucun des espaces tangents aux sous-variétés  $a^k = 0$

$$(V, 3) \quad (a^k)_0^{(1)} - \lambda_h (i(e^h).da^k)_0 = (i(E).da^k)_0 \quad k(1 \text{ à } p).$$

Les relations (V, 3) dont les seconds membres ne dépendent pas des éventualités permettent de discuter la nature des mouvements possibles :

**Hypothèse A.** — Si le mouvement de  $S$  a lieu avec rupture des  $p$  liaisons, on doit faire dans le premier membre de (V, 3)  $\lambda_1 = 0 \dots \lambda_p = 0$  ce qui donne

$$(a^k)_0^{(1)} = (i(E).da^k)_0 \quad k(1 \text{ à } p)$$

L'hypothèse A est acceptable si  $(i(E).da^k)_0 > 0$ .



La réalisation physique de la liaison impose  $a$  et  $e$ . Les deux éléments  $e$  et  $da$  sont indépendants de tout système de coordonnées. A ces deux éléments est associé l'invariant  $i(e).da$ , c'est-à-dire qu'en un point  $M_n$  de  $V_{2n+1}(i(e).da)_0$  a une valeur indépendante du choix des coordonnées. Relativement aux  $p$  champs  $e^1 \dots e^p$  et aux  $p$  formes  $da^1 \dots da^p$ , nous avons en  $M_n$  les  $p^2$  invariants

$$i(e^h).da^k = r^{hk}.$$

Les  $p^2$  éléments  $r^{hk}$  sont les éléments d'une matrice  $\|r^{hk}\|$ .

Considérons maintenant un espace vectoriel  $E_p$  à  $p$  dimensions et dans cet espace d'une part  $p$  vecteurs arbitraires indépendants  $\vec{a}^1, \vec{a}^2 \dots \vec{a}^p$  ayant même origine, d'autre part  $p$  vecteurs  $\vec{A}^1, \vec{A}^2 \dots \vec{A}^p$  définie par

$$\begin{pmatrix} \vec{A}^1 \\ \vec{A}^2 \\ \vec{A}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^{1k} \\ \dots \\ -r^{pk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{a}^1 \\ \vec{a}^2 \\ \vec{a}^p \end{pmatrix}.$$

Les  $p$  équations (V, 3) sont équivalentes à la relation vectorielle

$$(V, 4) \quad \vec{a} + \lambda_h \vec{A}^h = \vec{\alpha}$$

(le changement de signe provient de la définition donnée aux vecteurs  $\vec{A}^h$ ). L'hypothèse A signifie qu'on peut décomposer dans  $E_p$  le vecteur  $\vec{\alpha}$  suivant les  $p$  vecteurs  $\vec{a}^1 \dots \vec{a}^p$  et que ses composantes sont toutes positives par suite que  $\vec{\alpha}$  est dans une région  $R^0$  bien déterminée de  $E_p$ .

L'hypothèse B signifie qu'on peut décomposer dans  $E_p$  le vecteur  $\vec{\alpha}$  suivant les  $p$  vecteurs  $\vec{A}^1 \dots \vec{A}^p$  et que ses composantes sont toutes positives, par suite que  $\vec{\alpha}$  est dans une région  $R_p$  bien déterminée de  $E_p$ .

L'hypothèse C signifie qu'on peut décomposer  $\vec{\alpha}$  suivant les  $k$  vecteurs  $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots, \vec{A}^k$  et les  $(p - k)$  vecteurs  $\vec{a}^{k+1} \dots \vec{a}^p$  et que ses composantes sont toutes positives, par suite que  $\vec{\alpha}$  est dans une région  $R_k^{p-k}$  bien déterminée de  $E_p$ .

Le problème d'analyse qui consiste à déterminer les mouvements possibles du système S astreint à  $p$  liaisons de classe U quand on connaît les conditions initiales est donc équivalent à un problème d'Analysis-Situs.

Dans un espace euclidien  $E_p$  on se donne une gerbe de  $2^p$  vecteurs de même origine

$$\begin{array}{ccc} \vec{a}^1 & \vec{a}^k & \vec{a}^p \\ \vec{A}^1 & \vec{A}^k & \vec{A}^p \end{array}$$

Quand on prend  $p$  de ces vecteurs

$$\vec{A}^{i_1}, \dots, \vec{A}^{i_k}, \vec{a}^{i_{k+1}}, \dots, \vec{a}^{i_p} \quad (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_p)$$

étant une permutation des  $p$  premiers entiers) choisis de telle sorte que deux vecteurs ne figurent pas dans la même colonne du tableau précédent on obtient un  $p$ -èdre. A chaque  $p$ -èdre on associe une région de  $E_p$   $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  que nous appellerons région interne au  $p$ -èdre telle que si  $\vec{\alpha}$  est dans  $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  les composantes de  $\vec{\alpha}$  ( $X_{i_1}, \dots, X_{i_{k+1}}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_p}$ ) relativement à ce  $p$ -èdre sont des nombres tous positifs

$$\vec{\alpha} = X_{i_1} \vec{A}^{i_1} + \dots + X_{i_k} \vec{A}^{i_k} + x_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} + \dots + x_{i_p} \vec{a}^{i_p}.$$

A la décomposition précédente de  $\vec{\alpha}$  correspond un mouvement  $M_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  du système dans lequel  $k$  liaisons prises parmi les  $p$  subsistent et  $(p - k)$  autres sont rompues.  $\vec{\alpha}$  étant donné le nombre de mouvements possibles correspond au nombre de régions  $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  auxquelles  $\vec{\alpha}$  peut appartenir simultanément.

*Nombre total d'éventualités.* — Il y a autant de régions  $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  qu'on peut réaliser de combinaisons de  $k$  vecteurs  $\vec{A}^{i_1}, \dots, \vec{A}^{i_k}$  pris parmi  $p$  d'entre eux soit  $C_p^k$ . Le nombre total de régions est donc égal à la somme des combinaisons

$$C_p^0 + C_p^1 + \dots + C_p^k + \dots + C_p^p = 2^p.$$

Le nombre d'éventualités possibles dans un système mécanique astreint à  $p$  liaisons de classe U est donc  $2^p$ .

*Conditions nécessaires et suffisantes d'unicité des éventualités.* — Pour qu'à un vecteur  $\vec{\alpha}$  ne corresponde qu'un mouvement, il faut et il suffit que les  $2^p$  régions  $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  n'aient pas de domaine commun à  $p$  dimensions ou n'aient pas de point interne commun. Les vecteurs  $\vec{A}^1, \dots, \vec{A}^p$  étant définis à partir des vecteurs  $\vec{a}^1, \dots, \vec{a}^p$  au moyen de la matrice  $\| -r^{hk} \|$ , on est conduit à étudier les conditions auxquelles doivent satisfaire les éléments de cette matrice pour que les diverses régions  $R_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1} \dots i_p}$  n'aient pas de domaine commun à  $p$  dimensions.

**THÉORÈME II.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que dans un espace euclidien à  $p$  dimensions, toutes les régions internes aux  $2^p$   $p$ -èdres obtenus en prenant  $p$  vecteurs dans des colonnes différentes du tableau*

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a}^1, & \dots, & \vec{a}^k, & \dots, & \vec{a}^p \\ \vec{A}^1, & \dots, & \vec{A}^k, & \dots, & \vec{A}^p \end{array}$$

*n'aient aucun domaine commun à  $p$  dimensions est que tous les déterminants mineurs diagonaux qu'on peut extraire de la matrice carrée  $\|r^{hk}\|$  soient positifs, les vecteurs  $\vec{A}^1, \dots, \vec{A}^p$  étant définis en fonction des vecteurs  $\vec{a}^1, \dots, \vec{a}^p$ , au moyen de la matrice  $\| -r^{hk} \|$ .*

**LEMES PRÉLIMINAIRES.** — 1. Deux  $p$ -èdres formés au moyen de  $k$  vecteurs différents n'ont pas de domaine commun à  $p$  dimensions si au moins une des  $k$  inégalités

$$(V, 5) \quad x_i X_i < 0, \dots, x_{ik} \Lambda_{ik} < 0.$$

est satisfaite,  $x_i, \dots, x_{ik}, X_i, \dots, X_{ik}$ , désignant respectivement les composantes d'un vecteur de  $E_p$  par rapport aux  $k$  vecteurs différents.

Les deux  $p$ -èdres étant formés de  $k$  vecteurs différents, cela veut dire que si on a pris  $\vec{a}^j$  dans la colonne  $j$  pour constituer le premier  $p$ -èdre on a pris  $\vec{A}^j$  dans cette même colonne pour constituer le deuxième  $p$ -èdre.

Il en résulte qu'un même vecteur  $\vec{\alpha}$  a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux  $p$ -èdres

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= x_{i_1} \vec{a}^{i_1} + \dots + x_{i_q} \vec{a}^{i_q} + X_{i_{q+1}} \vec{A}^{i_{q+1}} \dots + X_{i_k} \vec{A}^{i_k} + x_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} \dots + x_{i_p} \vec{a}^{i_p} \\ \vec{\alpha} &= X_{i_1} \vec{A}^{i_1} + \dots + X_{i_q} \vec{A}^{i_q} + x_{i_{q+1}} \vec{a}^{i_{q+1}} \dots + x_{i_k} \vec{a}^{i_k} + x'_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} \dots + x'_{i_p} \vec{a}^{i_p}. \end{aligned}$$

Dire que les régions internes à ces deux  $p$ -èdres n'ont pas de domaine commun à  $p$  dimensions signifie qu'on ne peut avoir simultanément :

$$\begin{array}{ccccccc} x_{i_1} > 0 & \dots & x_{i_q} > 0, & X_{i_{q+1}} > 0, & \dots, & X_{i_k} > 0 \\ X_{i_1} > 0 & \dots & X_{i_q} > 0, & x_{i_{q+1}} > 0, & \dots, & x_{i_k} > 0 \end{array}$$

en d'autres termes on doit avoir au moins une des  $k$  inégalités (V, 5)

2° Deux  $p$ -èdres n'ayant qu'un vecteur de base différent n'ont pas de domaine commun à  $p$  dimensions si le quotient de deux déterminants diagonaux formés avec les éléments de la matrice  $\| -r^{hk} \|$  est négatif.



n'aient pas de domaine commun à  $p$  dimensions est  $\frac{\Delta_{12 \dots k-1}}{\Delta_{12 \dots k}} < 0$ .

3° Tous les couples possibles de deux  $p$ -èdres n'ayant qu'un vecteur de base différent, n'ont aucun domaine commun à  $p$  dimensions si tous les mineurs diagonaux de la matrice  $\|r^{hk}\|$  sont positifs.

Appliquons le lemme 2 aux divers couples de  $p$ -èdres suivants :

1° Les régions internes aux deux  $p$ -èdres définis par les deux séries de vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^h, \dots, \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{A}^h, \dots, \vec{a}^p \end{aligned}$$

n'ont aucun domaine commun à  $p$  dimensions si  $-r^{hh} < 0$  soit  $r^{hh} > 0$ .

Conséquence : Les éléments diagonaux de la matrice  $\|r^{hk}\|$  doivent être tous positifs.

2° Les régions internes aux deux  $p$ -èdres définis par les deux systèmes de vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^g, \vec{A}^h, \vec{a}^j, \vec{a}^k, \dots, \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^g, \vec{A}^h, \vec{A}^j, \vec{a}^k, \dots, \vec{a}^p \end{aligned}$$

n'ont aucun domaine commun à  $p$  dimensions si  $\frac{-r^{hh}}{\begin{vmatrix} -r^{hh} & -r^{hj} \\ -r^{jh} & -r^{jj} \end{vmatrix}} < 0$ .

En tenant compte de la condition précédente, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} r^{hh} & r^{hj} \\ r^{jh} & r^{jj} \end{vmatrix} > 0.$$

Conséquence : Les mineurs diagonaux du deuxième ordre de la matrice  $\|r^{hk}\|$  doivent être positifs.

3° Le raisonnement se poursuit par récurrence. Les régions internes aux deux  $p$ -èdres définis par les deux systèmes de vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^k, \vec{A}^\lambda, \dots, \vec{A}^\mu, \vec{a}^\nu, \vec{a}^{\nu+1}, \dots, \vec{a}^p \\ \vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^k, \vec{A}^\lambda, \dots, \vec{A}^\mu, \vec{A}^\nu, \vec{a}^{\nu+1}, \dots, \vec{a}^p \end{aligned}$$

n'ont aucun domaine commun à  $p$  dimensions si

$$\begin{vmatrix} -r^{\lambda\lambda} & \dots & -r^{\lambda\mu} \\ -r^{\mu\lambda} & \dots & -r^{\mu\mu} \\ -r^{\nu\lambda} & \dots & -r^{\nu\nu} \\ -r^{\nu\lambda} & \dots & -r^{\nu\nu} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{(-1)^{h+1}}{(-1)^h} \begin{vmatrix} r^{\lambda\lambda} & \dots & r^{\lambda\mu} \\ r^{\mu\lambda} & \dots & r^{\mu\mu} \\ r^{\nu\lambda} & \dots & r^{\nu\nu} \\ r^{\nu\lambda} & \dots & r^{\nu\nu} \end{vmatrix} < 0$$



lorsque  $\vec{\alpha}$  est dans le domaine  $D(X_1 > 0, \dots, X_k > 0)$ , une des inégalités (V, 6) ayant toujours lieu, la proposition n'est pas à démontrer.

Supposons donc qu'aucune des inégalités  $x_1 < 0, \dots, x_k < 0$  ne soit toujours satisfaite quand  $\vec{\alpha}$  est dans  $D$ . Les variables  $x_1, \dots, x_k$  ne peuvent être toujours positives quand  $\vec{\alpha}$  est dans  $D$ , car en particulier pour  $X_1 = 0, \dots, X_j \neq 0, \dots, X_k = 0$ , les équations (V, 7)

donnent  $x_j = -\frac{r^{jj}}{\Delta_k} X_j$ ;  $r^{jj}$  et  $\Delta_k$  (mineur diagonal) étant positifs.

$x_j$  est négatif. Les variables  $x_1, \dots, x_k$  s'annulent donc quand  $\vec{\alpha}$  parcourt  $D$ . En particulier pour  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_j \neq 0, \dots, x_k = 0$  les équations (V, 8) donnent pour les variables  $X_1, \dots, X_k$

$$-X_1 = \frac{R_1^j}{\Delta_k} x_j, \dots, -X_j = \frac{R_j^j}{\Delta_k} x_j, \dots, -X_k = \frac{R_k^j}{\Delta_k} x_j.$$

D'après le lemme 3  $\Delta_k$  et  $R_j^j$  mineurs diagonaux sont positifs.  $x_j$  est négatif car dans  $D$   $X_j$  est positif, il en résulte que tous les coefficients  $R_1^j \dots R_k^j$  sont positifs. Le raisonnement se répétant pour toutes les valeurs de  $j$  (1 à  $k$ ), les coefficients des équations (V, 8) sont donc tous positifs.

Lorsque  $\vec{\alpha}$  est dans  $D$  les premiers des équations (V, 8) étant tous négatifs, il doit en être de même des seconds membres donc au moins une des variables  $x_1, \dots, x_k$  est négative. Une au moins des inégalités (V, 6) est satisfaite.

2° Envisageons maintenant le cas général. Soient deux  $p$ -èdres quelconques formés au moyen de  $k$  vecteurs différents. Un même vecteur  $\vec{\alpha}$  de  $E_p$  a pour expression dans les deux bases relatives à ces deux  $p$ -èdres

$$\vec{\alpha} = x_{i_1} \vec{a}^{i_1} + \dots + x_{i_q} \vec{a}^{i_q} + X_{i_{q+1}} \vec{A}^{i_{q+1}} + \dots + X_{i_k} \vec{A}^{i_k} + x_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} + \dots + x_{i_p} \vec{a}^{i_p}$$

$$\vec{\alpha} = X_{i_1} \vec{A}^{i_1} + \dots + X_{i_q} \vec{A}^{i_q} + x_{i_{q+1}} \vec{a}^{i_{q+1}} + \dots + x_{i_k} \vec{a}^{i_k} + x'_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} + \dots + x'_{i_p} \vec{a}^{i_p}.$$

Pour trouver la substitution qui permet de passer des

$$x_{i_1} \dots x_{i_q}, X_{i_{q+1}} \dots X_{i_k} \quad \text{aux} \quad X_{i_1}, \dots, X_{i_q}, x_{i_{q+1}} \dots x_{i_k}$$

évaluons les vecteurs de la première base en fonction de ceux de la deuxième. Des relations de définition des vecteurs

$$\vec{A}^1, \dots, \vec{A}^k \dots \vec{A}^p,$$

on déduit le système aux inconnues

$$-\vec{a}^{i_1}, \dots, -\vec{a}^{i_q}, -\vec{A}^{i_{q+1}} \dots -\vec{A}^{i_k}$$



de ceux de la première. On en déduit par un calcul analogue les formules (V, 10)

$$(V, 10) \left\{ \begin{aligned} -x_{i_1} &= \frac{\hat{\rho}_{i_1}^{i_1}}{\Delta} X_{i_1} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_1}^{i_q}}{\Delta} X_{i_q} + \frac{\hat{\rho}_{i_1}^{i_{q+1}}}{\Delta} x_{i_{q+1}} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_1}^{i_k}}{\Delta} x_{i_k} \\ -x_{i_q} &= \frac{\hat{\rho}_{i_q}^{i_1}}{\Delta} X_{i_1} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_q}^{i_q}}{\Delta} X_{i_q} + \frac{\hat{\rho}_{i_q}^{i_{q+1}}}{\Delta} x_{i_{q+1}} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_q}^{i_k}}{\Delta} x_{i_k}; \quad \Delta = \Delta_{i_{q+1} \dots i_k} \\ -X_{i_{q+1}} &= \frac{\hat{\rho}_{i_{q+1}}^{i_1}}{\Delta} X_{i_1} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_{q+1}}^{i_q}}{\Delta} X_{i_q} + \frac{\hat{\rho}_{i_{q+1}}^{i_{q+1}}}{\Delta} x_{i_{q+1}} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_{q+1}}^{i_k}}{\Delta} x_{i_k} \\ -X_{i_k} &= \frac{\hat{\rho}_{i_k}^{i_1}}{\Delta} X_{i_1} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_k}^{i_q}}{\Delta} X_{i_q} + \frac{\hat{\rho}_{i_k}^{i_{q+1}}}{\Delta} x_{i_{q+1}} + \dots + \frac{\hat{\rho}_{i_k}^{i_k}}{\Delta} x_{i_k} \end{aligned} \right.$$

Ayant remarqué que dans les formules (V, 9) et (V, 10) les éléments diagonaux sont formés par des quotients de mineurs diagonaux de la matrice  $\|r^{jk}\|$  donc sont tous positifs, il suffit de reprendre point par point le raisonnement fait dans le cas précédent pour montrer que dans le domaine  $D$  ( $X_{i_1} > 0, \dots, X_{i_q} > 0, x_{i_{q+1}} > 0 \dots x_{i_k} > 0$ ) une des variables  $x_{i_1} \dots x_{i_q}, X_{i_{q+1}} \dots X_{i_k}$  est négative, ce qui entraîne que les régions internes aux deux  $p$ -èdres n'ont pas de domaine commun à  $p$  dimensions.

**THÉORÈME III.** — *L'espace  $E_p$  à  $p$  dimensions est complètement couvert par les  $2^p$   $p$ -èdres n'ayant en commun aucun domaine à  $p$  dimensions.*

Soit  $\vec{\alpha}$  un vecteur de  $E_p$  déterminé par ses composantes  $\alpha^1, \dots, \alpha^p$  par rapport à la base formée par les vecteurs  $\vec{a}^1, \vec{a}^2 \dots \vec{a}^p$ .  $\vec{\alpha}$  étant quelconque dans  $E^p$  les composantes  $\alpha^1, \dots, \alpha^p$  ont des signes arbitraires formant une suite de  $p$  signes — et  $+$  bien déterminée quand on prend les vecteurs dans l'ordre  $\vec{a}^1 \dots \vec{a}^p$ . Relativement à chaque  $p$ -èdre la décomposition de  $\vec{\alpha}$  suivant les vecteurs de base correspondants

$$\vec{a}^{i_1} \dots \vec{a}^{i_q}, \quad \vec{A}^{i_{q+1}} \dots \vec{A}^{i_k}, \quad \vec{a}^{i_{k+1}} \dots \vec{a}^{i_p}$$

engendre un système de coordonnées dont la suite des signes est bien déterminée quand on range les indices des vecteurs dans l'ordre naturel  $(1, p)$ , opération toujours possible puisqu'on prend un vecteur et un seul dans chaque colonne du tableau

$$\begin{aligned} &\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^{p-1}, \vec{a}^p \\ &\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots, \vec{A}^{p-1}, \vec{A}^p. \end{aligned}$$

Les suites de signe relatives à deux  $p$ -èdres sont différentes si non leur région interne ne serait pas distincte. (Il suffirait de changer

l'orientation des vecteurs pour lesquels les signes sont tous négatifs pour obtenir une contradiction). Or il y a  $2^p$  suites de signes différents et  $2^p$  régions: donc à toute suite de  $p$  signes correspond une région et inversement. En particulier il existe une suite de  $p$  signes tous positifs. Il en résulte que l'espace  $E_p$  est bien couvert par l'ensemble des régions internes aux  $2^p$   $p$ -èdres, et que  $\vec{\alpha}$  est dans une région bien déterminée.

*Nombre de conditions auxquelles satisfont les éléments de la matrice  $\|r^{hk}\|$  cas de réduction.* Lorsqu'on écrit que tous les mineurs diagonaux de la matrice  $\|r^{hk}\|$  sont positifs on obtient  $(2^p - 1)$  conditions car

$$C_p^1 + C_p^2 \dots + C_p^k + \dots + C_p^p = 2^p - 1.$$

Ces  $(2^p - 1)$  conditions portent sur les  $p^2$  éléments de la matrice. On peut mentionner deux cas simples où il y a réduction de ce nombre de conditions. Considérons pour cela un vecteur  $\vec{\alpha}$  de  $E_p$  dont nous désignerons les coordonnées par  $x_i$  et par  $\lambda_i$  respectivement par rapport aux deux bases

$$\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^p \quad \text{et} \quad \vec{\Lambda}^1, \vec{\Lambda}^2, \dots, \vec{\Lambda}^p$$

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{a}^i \quad \vec{\alpha} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{\Lambda}^i$$

le fait que les régions internes aux deux  $p$ -èdres formés par ces deux séries de vecteurs sont distinctes se traduit par une des inégalités

$$x_1 \lambda_1 < 0, \dots, x_k \lambda_k < 0 \dots, x_p \lambda_p < 0.$$

Considérons alors la forme bilinéaire  $\psi(x, X) = \sum_{i=1}^p x_i X^i$  qui engendre la forme quadratique  $\psi(X) = \frac{1}{2} (r^{hk} + r^{kh}) X^h X^k$  puisque  $\|x\| = \| -r^{hk} \| * \|X\|$ ,  $\| -r^{hk} \| *$  désignant la transposée de  $\| -r^{hk} \|$ .

On a donc l'identité  $\sum_{i=1}^p x_i X_i \equiv -\psi(X)$ .

Il en résulte que si la forme  $\psi(X)$  est toujours définie positive dans  $E_p$  une des inégalités  $x_1 \lambda_1 < 0, \dots, x_p \lambda_p < 0$  est sûrement satisfaite. Le fait que la forme soit toujours définie positive dans  $E_p$  étant indépendant de la base choisie, on peut prendre pour bases deux systèmes de  $p$ -èdres quelconques ce qui montre que les régions internes à ces deux  $p$ -èdres n'ont pas de domaine commun à  $p$  dimensions. D'où les deux cas simples

1<sup>er</sup> cas: La forme quadratique  $\psi = \frac{1}{2} (r^{hk} + r^{kh}) X_h X_k$  est définie positive.

2° cas : La matrice  $\|r^{hk}\|$  est symétrique et la forme  $\psi$  associée est définie positive.

Dans ces deux cas les  $(2^p - 1)$  conditions se réduisent à  $p$  conditions qu'on obtient en exprimant qu'une chaîne de mineurs emboîtés de  $\|r^{hk}\|$  sont tous positifs.

§ III. — Étude des cas  $(i(E).da^k) = 0$ .

Dans toute l'étude précédente nous n'avons pas envisagé le cas où le vecteur  $\vec{\alpha}$  se trouve dans le domaine intérieur d'un des  $2^p$   $p$ -èdres, puisque nous avons supposé au paragraphe I  $(i(E).da^k)_0 \neq 0$  pour tout  $k$  de 1 à  $p$ . Il est aisé de voir ce qui arrive lorsque  $\vec{\alpha}$  est plus généralement dans un domaine à  $k$  dimensions ( $k < p$ ) commun à  $2^k$   $p$ -èdres.

Envisageons d'abord le cas particulier où  $\vec{\alpha} = 0$  dans  $E_p$ , c'est-à-dire  $(i(E).da^k)_0 = 0$  pour  $k$  variant de 1 à  $p$ . La formule (V, 2) montre que si les  $(i(E).da^k)_0^{(n+1)}$  sont les premières dérivées non nulles pour tout  $k$  de 1 à  $p$ , d'une part pour un ordre inférieur à  $n$  les  $\lambda_h$  ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $(n - 1)$  inclus sont nuls en  $M_0$ , d'autre part que la première dérivée non nulle des  $a^k$  est d'ordre  $(n + 1)$ . Il en résulte

$$(a^k)_0^{(n+1)} - (\lambda_h)^{(h)}(i(e^h).da^k)_0 = (i(E).da^k)_0^{(n+1)}$$

ou

$$(a^k)_0^{(n+1)} - r^{hk}(\lambda_h)_0^{(n)} = (i(E).da^k)_0^{(n+1)}.$$

En interprétant cette relation dans l'espace vectoriel  $E_p$  on voit que la discussion des éventualités s'effectue au moyen du même jeu de vecteurs  $\vec{a}^1, \dots, \vec{a}^p, \vec{A}^1, \dots, \vec{A}^p$  que précédemment. On détermine  $(a^k)_0^{(n+1)}, (\lambda_h)_0^{(n)}$  au moyen du vecteur  $\vec{\alpha}$  défini par ses composantes  $(i(E).da^k)_0^{(n+1)}$ .

Cas général. — Si  $\vec{\alpha}$  appartient au domaine commun à  $2^k$   $p$ -èdres ( $k < p$ ) ce qui signifie que  $(i(E).da^h)_0 = 0$  pour  $k$  valeurs de  $h$ , il suffit de décomposer  $\vec{\alpha}$  en  $\vec{\alpha}_k$  appartenant à  $E_k$  espace commun aux  $2^k$   $p$ -èdres, et en  $\vec{C}_{2k}$  appartenant à l'espace complémentaire de  $E_k$  par rapport à  $E_p$ .

$$\vec{\alpha}_k = X_{i_1} \vec{A}^{i_1} + \dots + X_{i_q} \vec{A}^{i_q} + x_{i_{q+1}} \vec{a}^{i_{q+1}} \dots + x_{i_k} \vec{a}^{i_k}$$

$$\vec{C}_{2k} = x_{i_{k+1}} \vec{a}^{i_{k+1}} \dots + x_{i_p} \vec{a}^{i_p}.$$

Comme par hypothèse

$$X_{i_1} = 0, \dots, X_{i_q} = 0, x_{i_{q+1}} = 0, \dots, x_{i_k} = 0, \vec{\alpha}_k = 0$$

on est ramené au cas précédent. Il suffit de prendre pour composantes de  $\alpha_k$  les premières dérivées non toutes nulles de  $(i(E).d\alpha^h)^{(n+1)}$  pour  $h(i_1 \text{ à } i_k)$ . Si dans  $E_k$  certaines d'ordre  $(n+1)$  sont simultanément nulles on considérerait un sous-espace de  $E_k$ .

#### § IV. — Interprétation mécanique des résultats précédents.

De toute l'étude précédente résulte le théorème suivant :

**THÉORÈME IV.** — *Quand un système mécanique S est astreint à p liaisons de classe U,  $a^h(p_i, q^i, t) = 0$ ,  $\Omega = \lambda_h l^h dq^i \wedge dt$ ,  $a^h > 0$ ,  $\lambda_h > 0$ , si les conditions initiales satisfont aux équations  $a^h(p_i^0, q_i^0, t^0) = 0$ , il y a  $2^p$  éventualités possibles. La condition nécessaire et suffisante d'unicité des mouvements est que tous les mineurs diagonaux qu'on puisse extraire de la matrice produit A. L soient positifs*

$$\left( A = \left\| \frac{\partial a^h}{\partial p_i} \right\|, \quad L = \left\| l^h_i \right\| \right).$$

**Application aux liaisons d'Appell.** — Dans les liaisons d'Appell qui (cf. chapitre II, § V) sont de puissance nulle et comprennent comme cas particulier les liaisons holonomes et linéairement non holonomes classiques la matrice  $\|r^{hk}\|$  est symétrique. En effet pour de pareilles liaisons  $l^h_i = \frac{\partial a^h}{\partial \dot{q}^i}$ . La matrice  $\|r^{hk}\|$  étant le produit des deux matrices A et L avec  $A = \left\| \frac{\partial a^h}{\partial p_i} \right\|$ ,  $L = \|l^h_i\|$  il résulte de

$$\frac{\partial a^h}{\partial p_i} = \frac{\partial a^h}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p^i} = l^h_j g^ji$$

que dans le cas des liaisons d'Appell  $A = L^* \cdot G$ , en désignant par  $L^*$  la matrice transposée de L et par G la matrice symétrique  $\|g^{ji}\|$ .

La relation  $\|r^{hk}\| = A \cdot L = L^* \cdot G \cdot L$  montre que  $\|r^{hk}\|$  est symétrique. Il résulte alors du théorème IV et du deuxième cas de réduction des conditions signalé à la fin du paragraphe III le théorème suivant :

**THÉORÈME V.** — *Pour un système mécanique S astreint à p liaisons*

*d'une part de classe U et d'autre part du type d'Appell, les conditions initiales sont suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur.*

**Autres types de liaisons.** — Pour les autres types de liaisons les conditions initiales peuvent ne pas être suffisantes pour déterminer le mouvement ultérieur si les mineurs diagonaux de la matrice  $\|r^{hk}\|$  ne sont pas tous positifs. C'est ce qui se produit en particulier dans les systèmes de solides en contact avec frottement quand les vitesses de glissement aux différents points de contact ne sont pas nuls. Dans les cas d'indétermination il est nécessaire d'adjoindre aux conditions initiales des conditions équivalentes à  $\frac{da^h}{dt} \neq 0, \lambda_h \neq 0$  pour préciser le mouvement ultérieur.

**§ V. — Liaisons dont l'expression de la puissance peut dépendre de l'existence ou de la rupture d'autres liaisons.**

Dans ce qui précède nous nous sommes occupés de liaisons du type  $a^h = 0, \lambda_h e^h$  le champ  $e^h$  étant connu a priori et par conséquent indépendant de l'existence ou de la rupture d'autres liaisons. La discussion des éventualités pouvant se présenter dans le cas de solides en contact avec frottement, les vitesses de glissement étant nulles à l'instant initial, conduit à envisager des liaisons dont l'expression de la puissance peut varier suivant l'existence ou la rupture d'autres liaisons et par conséquent dont le champ de liaison  $e^h$  dépend d'autres liaisons. Pour simplifier envisageons un corps solide à plan de symétrie permanent, en contact avec la droite d'intersection de ce plan de symétrie avec un plan fixe perpendiculaire. Si  $u$  et  $w$  sont les composantes de la vitesse du point de contact du solide avec le plan ;

a) le contact avec roulement sans glissement se traduit par deux liaisons de puissance nulle  $w = 0, P_2 = \mu w; u = 0, P_1 = \lambda u$ .

b) la cessation de contact se traduit par  $\frac{dw}{dt} > 0, \mu = 0$ , elle entraîne aussi  $\lambda = 0$ ; la puissance de la liaison  $u = 0$ , dépend donc de la réalisation ou de la rupture de la liaison  $w$ .

c) le glissement naissant  $\left( w_0 = 0, u_0 = 0, \frac{dw}{dt} = 0, \frac{du}{dt} \neq 0 \right)$

modifie la puissance  $P_2$  qui devient  $P_2 = \mu(w + \varepsilon fu)$  avec  $\varepsilon \frac{du}{dt} < 0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ; la puissance  $P_2$  dépend donc du fait que  $\frac{du}{dt}$  est positif, négatif ou nul, c'est-à-dire de la rupture ou de la réalisation de la liaison  $u$ .

Pour un ensemble de solides dépendant de  $2n$  paramètres position, vitesse ayant  $p$  contacts entre eux, l'examen des éventualités possibles à l'instant  $t_0$ , dans le cas où les vitesses de glissement aux  $p$  contacts sont nulles à  $t_0$ , bien que non susceptible de revêtir une forme géométrique aussi simple que celle envisagée ci-dessus, peut s'effectuer de la manière suivante. Ayant choisi  $p$  trièdres mobiles tri-rectangles  $P_h x^h y^h z^h$  de sommets respectifs  $P_h$  point du  $h^e$  contact, l'axe  $P_h z^h$  étant orienté suivant la normale commune, il est avantageux de commencer par écrire le système d'équations permettant de déterminer les roulements sans glissement et les cessations de contact.

Les conditions de roulement sans glissement au  $h^e$  contact se traduisent par

$$\begin{array}{lll} u^h = 0 & v^h = 0 & w = 0 \\ P = \backslash^h u^h & P = \Upsilon^h v^h & P = Z^h w^h \end{array}$$

Les roulements sans glissement aux  $p$  contact constituent  $3p$  liaisons de puissance nulle. D'après notre théorie nous devons les supposer compatibles ce qui permet toujours de choisir pour paramètres les  $3p$  quantités  $u^h, v^h, w^h$ . Les conclusions du § IV nous indiquent qu'il existe une forme quadratique des  $3p$  composantes des réactions et que  $3p$  des équations peuvent toujours se mettre sous la forme

$$I \left\{ \begin{array}{l} \frac{du^h}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^h} = \alpha^h \\ \frac{dv^h}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} = \beta^h \\ \frac{dw^h}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \end{array} \right. \quad h(1 \text{ à } p)$$

dont les seconds membres sont indépendants des éventualités.

Ces équations indiquent immédiatement les contacts qui se rompent  $\frac{dw^h}{dt} > 0$  et les roulements sans glissement acceptables en écrivant  $\frac{du^h}{dt} = \frac{dv^h}{dt} = \frac{dw^h}{dt} = 0 \quad z^h > 0, \quad (X^h)^2 + (Y^h)^2 < (f_h Z^h)^2$   
 $f_h$  coefficient de frottement au  $h^e$  contact.

**Glissement naissant aux  $p$  contacts.** — Pour envisager l'hypothèse de tous les glissements naissants il suffit de remplacer dans les équations précédentes  $\frac{du^h}{dt}$  par  $\frac{d\varphi^h}{dt} \cos \sigma_h$ ,  $\frac{dv^h}{dt}$  par  $\frac{d\varphi^h}{dt} \sin \sigma_h$ ,  $\frac{dw^h}{dt}$  par 0.  $X^h$  par  $-f_h Z^h \cos \sigma_h$ ,  $Y^h$  par  $-f_h Z^h \sin \sigma_h$ ,  $\varphi^h$  et  $\sigma_h$  étant les coordonnées polaires de la vitesse de glissement au  $h^e$  contact par rapport aux axes  $P_h x^h y^h$ . On obtient ainsi le système

$$\text{II} \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \frac{d\varphi^h}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^h} \cos \sigma_h - \frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} \sin \sigma_h = \alpha^h \cos \sigma_h + \beta^h \sin \sigma_h \\ 2. \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial X^h} \sin \sigma_h + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} \cos \sigma_h = \alpha^h \sin \sigma_h - \beta^h \cos \sigma_h \\ 3. \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h. \end{array} \right.$$

Les équations (II, 3) déterminent les  $Z^h$  en fonction des  $\varphi^h$ . Les équations (II, 2) déterminent les  $\sigma_h$  au moyen d'un système d'équations trigonométriques.

Les équations (II, 1) déterminent les  $\frac{d\varphi^h}{dt}$ ; les valeurs trouvées sont acceptables si  $Z^h > 0 \frac{d\varphi^h}{dt} > 0$ .

REMARQUE. — On peut une fois la détermination des angles  $\sigma_h$  effectuée par le calcul discuter les signes des  $Z^h$ ,  $\frac{d\varphi^h}{dt}$  en utilisant une représentation vectorielle analogue à celle utilisée au § II de ce chapitre, puisque dans ces conditions les directions des champs de liaisons sont connues.

**Cas du glissement naissant en  $k$  contacts, roulement sans glissement aux  $(p - k)$  autres contacts.** — On peut supposer que le glissement naissant a lieu aux  $k$  premiers contacts. On déduit de I par une méthode semblable à la précédente le système III

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \frac{d\varphi^h}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial X^h} \cos \sigma_h - \frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} \sin \sigma_h - \alpha^h \cos \sigma_h + \beta^h \sin \sigma_h \\ 2. \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial X^h} \sin \sigma_h + \frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} \cos \sigma_h = \alpha^h \sin \sigma_h - \beta^h \cos \sigma_h \\ 3. \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \\ 4. \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial X^h} = \alpha^h, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial Y^h} = \beta^h, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial Z^h} = \gamma^h \quad h(k \text{ à } 3p - 3k). \end{array} \right. h(1 \text{ à } k)$$

Les réactions en nombre égal à  $3p - 3k - k$  sont déterminées par les  $3p - 3k - k$  dernières équations en fonction des  $\sigma_h$ . Les  $k$  équations (III, 2) déterminent les  $\sigma_h$ . Les  $\frac{d\varphi^h}{dt}$  sont déterminés par les  $k$  équations (III, 1). On peut envisager ensuite les  $2p$  conditions de validité  $\frac{d\varphi^h}{dt} > 0$ ,  $Z^h > 0$ ,  $(X^h)^2 + (Y^h)^2 < (f_h Z^h)^2$  (dans ces dernières  $h$  varient de  $k+1$  à  $p$ ).

Nous nous bornerons à ces généralités, notre but ayant été de montrer que notre méthode permettait d'ordonner une discussion assez délicate.

## CHAPITRE VI

### ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE CONSIDÉRÉES COMME CARACTÉRISTIQUES D'UNE FORME DE DEGRÉ 2 DÉFINIE SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE $V_{2n+1}$ .

Nous nous proposons de montrer dans ce chapitre, comment le point de vue qui consiste à envisager le système  $\Sigma$  des équations différentielles du mouvement d'un système mécanique comme caractéristiques d'une forme  $\Omega$  de degré 2 définie sur une variété indéfiniment différentiable  $V_{2n+1}$ , permet de connaître la structure du sous-module des fonctions solutions de  $\Sigma$ .

Les applications pratiques se déduisent aisément de là, cas d'intégrabilité en particulier.

Pour faire cette étude il est avantageux d'envisager les opérateurs, différentielle, transformation infinitésimale, anti-dérivation à un point de vue signalé par M. H. Cartan<sup>(22)</sup>. Le paragraphe suivant est extrait de son exposé.

#### § I. — Définition et propriétés des opérateurs.

**Algèbres graduées.** —  $A$  étant une algèbre associative sur un anneau commutatif  $K$  ayant un élément unité, une structure graduée est définie par la donnée des sous-espaces vectoriels homogènes de degré  $p$   $A^p$  ( $p \geq 0$ ) tels que l'espace vectoriel  $A$  soit somme directe des  $A^p$ , et que le produit d'un élément de  $A^p$  et d'un élément de  $A^q$  soit un élément de  $A^{p+q}$ .

**Endomorphisme de degré  $r$ .** — Un endomorphisme<sup>(23)</sup> de la struc-

<sup>(22)</sup> Cf. M. H. CARTAN, *Colloque de topologie de Bruxelles 1950*, Masson, Paris.

<sup>(23)</sup> Cf. N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 1, § 4, p. 49, Paris, Hermann, 1942.

ture vectorielle de  $A$  est dit de degré  $r$ , s'il applique  $A^p$  dans  $A^{p+r}$  pour chaque  $p$ ,

**Produits et compositions d'endomorphismes.** —  $\lambda$  et  $\mu$  étant deux endomorphismes de degré respectifs  $r$  et  $r'$ , on appelle produit de ces deux endomorphismes pris dans l'ordre  $\lambda, \mu$ , l'endomorphisme  $\mu\lambda$  de degré  $r+r'$  (l'opération étant effectuée de droite à gauche).

Ce produit n'est généralement pas communicatif. La considération des deux endomorphismes  $\mu\lambda$  et  $\lambda\mu$  conduit à deux nouveaux endomorphismes

1° le composé symétrique  $\lambda\mu + \mu\lambda$

2° le composé antisymétrique  $\lambda\mu - \mu\lambda = [\lambda, \mu]$  appelé crochet des endomorphismes  $\lambda, \mu$ .

**Endomorphismes particuliers.** — 1° *Dérivation.* On appelle dérivation tout endomorphisme  $\theta$  de  $A$  de degré pair qui vis-à-vis de la multiplication dans  $A$  jouit de la propriété

$$\theta(a \cdot b) = \theta(a) \cdot b + a \cdot \theta(b)$$

si  $A$  possède un élément unité  $I$ ,  $\theta(I) = 0$ .

2° *Antidérivation.* On appelle antidérivation tout endomorphisme  $\delta$  de  $A$  de degré impair qui vis-à-vis de la multiplication dans  $A$ , pour  $a \in A^p$ ,  $b \in A^q$  possède la propriété

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot \delta b.$$

En outre  $\delta(I) = 0$ .

**Composition de dérivation et d'antidérivation.** — On vérifie comme conséquence des deux définitions précédentes

1° que le crochet de deux dérivations  $[\theta_1, \theta_2]$  est une dérivation.

2° que le crochet  $[\theta, \delta]$  d'une dérivation et d'une antidérivation est une dérivation.

3° que le composé symétrique  $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1$  de deux antidérvations est une dérivation.

4° que le carré d'une antidérivation est une dérivation.

**Différentielle et Algèbre extérieure.** — *Définition.* On appelle différentielle  $d$  l'antidérivation de degré  $+1$ , qui possède de plus la propriété  $d \cdot d = 0$ .

Relativement à l'antidérivation  $d$  il existe une algèbre graduée, appelée Algèbre extérieure dont le module unitaire  $A^1$  est formée par

les différentielles des fonctions de l'anneau  $K$ ,  $A^0$  étant identifié à l'anneau d'opérateurs  $K$ , les fonctions étant envisagées comme des formes différentielles de degré 0.

**Opérateurs  $i(x)$  et  $\theta(x)$  de M. H. Cartan sur une variété différentiable.** — Dans les applications que nous avons en vue aux variétés indéfiniment différentiables, les champs de vecteurs tangents constituent un module  $T$  sur l'anneau  $K$  des fonctions numériques indéfiniment différentiables.  $T'$  dual de  $T$  est le module des formes différentielles de degré 1.  $A(T')$  algèbre extérieure du module  $T'$  est l'algèbre extérieure des formes différentielles de tous les degrés.

**Opérateur  $i(x)$ .** — L'algèbre  $A(T')$  étant engendrée au sens multiplicatif par ses éléments de degré 0 et 1 une antidérivation est déterminée lorsqu'elle est connue sur les sous-espaces  $A^0$  et  $A^1$ .

Tout  $x \in T$  définit une antidérivation de degré  $-1$  de l'algèbre  $A(T')$  appelée produit intérieur par  $x$ , nulle sur  $A^0$ , qui sur  $A^1$  se réduit au produit scalaire définissant la dualité entre  $T$  et  $T'$ .

**REMARQUE.** — L'opérateur  $i(x)$  est de carré nul car  $i(x) \cdot i(x)$  est une dérivation nulle sur  $A^0$  et sur  $A^1$  donc nulle partout.

**Opérateur  $\theta(x)$ .** — Tout  $x \in T$  définit une dérivation de degré 0, composée symétrique des antidérivations  $d$  et  $i(x)$ .

$$(VI, 1) \quad \theta(x) = i(x) \cdot d + d \cdot i(x).$$

**Opérateur  $\varepsilon(x)$ .** — Tout  $x \in T$  définit un endomorphisme de degré 0, crochet des antidérivations  $d$  et  $i(x)$ .

$$(VI, 2) \quad \varepsilon(x) = [d, i(x)] = d \cdot i(x) - i(x) \cdot d.$$

**REMARQUES.** — 1°  $\Omega \in A(T')$ ,  $\theta(x)\Omega$  est la transformée infinitésimale de  $\Omega$  par  $\theta(x)$  d'où le nom de transformation infinitésimale donné à l'opérateur  $\theta(x)$ .

2° Les opérateurs  $\theta$  et  $d$  commutent.

3° Les opérateurs  $\varepsilon$  et  $d$  anticommulent.

4°  $n$  applications successives de  $\theta(x)$  donne

$$\theta^{(n)}(x) = (i(x) \cdot d)^{(n)} + (d \cdot i(x))^{(n)}.$$

En particulier appliqué à une fonction  $f$  de l'anneau  $K$  la formule précédente donne

$$\theta^{(n)}(x)f = (i(x)df)^{(n)}$$

**Endomorphismes relatifs à deux champs.** — Relativement à deux champs de vecteurs tangents  $x, y$  correspondent des endomorphismes, dérivation et antidérivation parmi lesquels nous explicitons ceux qui nous seront utiles.

1° Le produit des endomorphismes  $i(y) i(x)$  est un endomorphisme de degré  $-2$ . Par suite de l'associativité du produit extérieur

$$i(y)i(x) = i(y \wedge x).$$

L'endomorphisme précédent applique une forme de degré 2 dans  $A^0$ . Si  $\Omega = k_{ij} dx^i \wedge dx^j$  ( $k_{ij}$  tenseur antisymétrique)

$$i(y \wedge x)\Omega = k_{ij}(x^i y^j - x^j y^i) = \sum_{ij=0}^{2n} k_{ij} \begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}.$$

C'est le produit intérieur gauche de  $y \wedge x$  et de  $\Omega$ .

2° Le crochet d'une dérivation  $\theta(x)$  de degré 0 et d'une antidérivation  $i(y)$  de degré  $-1$  étant une antidérivation de degré  $-1$ , on est conduit à considérer l'antidérivation relative à un champ composé avec  $x, y$  noté  $[x, y]$  crochet de Lie. Cette notation se justifie car cette antidérivation est nulle sur  $A^0$ , et sur  $A^1$  relativement à l'élément  $df$  se réduit à  $i([x, y])df$  d'où la formule

$$(VI, 3) \quad [\theta(x), i(y)] = \theta(x)i(y) - i(y)\theta(x) = i([x, y]).$$

3° Considérons les deux endomorphismes  $\theta(x) \cdot i(y)$  et  $i(x) \cdot \theta(y)$ . Leur différence donne un nouvel endomorphisme

$$\begin{aligned} \theta(x)i(y) &= i(x)di(y) + di(x) \cdot i(y) \\ i(x)\theta(y) &= i(x)i(y)d + i(x) \cdot d \cdot i(y) \\ \theta(x)i(y) - i(x)\theta(y) &= di(x \wedge y) - i(x \wedge y)d \end{aligned}$$

Considérons l'endomorphisme  $\varepsilon(x \wedge y)$  relatif à l'élément composé  $x \wedge y$

$$(VI, 4) \quad \theta(x)i(y) - i(x)\theta(y) = \varepsilon(x \wedge y) = di(x \wedge y) - i(x \wedge y)d.$$

4° De (VI, 3) par permutation de  $x$  et  $y$  on obtient (VI, 3')

$$(VI, 3') \quad [\theta(y), i(x)] = \theta(y)i(x) - i(x)\theta(y) = i([y, x]).$$

En retranchant (VI, 3') de (VI, 4) on obtient compte tenu de  $[y, x] = -[x, y]$

$$(VI, 5) \quad \theta(x)i(y) - \theta(y)i(x) = \varepsilon(x \wedge y) + i([x, y]).$$

5° Le crochet de deux dérivations  $\theta(x), \theta(y)$  de degré 0 étant

une dérivation de degré 0, la dérivation correspondante est la dérivation relative au crochet de Lie  $[x, y]$ .

Par application de (VI, 1)

$$\begin{aligned}\theta(x)\theta(y) &= \theta(x)[i(y)d + di(y)] \\ \theta(y)\theta(x) &= \theta(y)[i(x)d + di(x)].\end{aligned}$$

En tenant compte de la permutabilité des opérateurs  $\theta$  et  $d$

$$\begin{aligned}[\theta(x), \theta(y)] &= \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x) \\ &= [\theta(x)i(y) - \theta(y)i(x)] \cdot d + d \cdot [\theta(x)i(y) - \theta(y)i(x)].\end{aligned}$$

La formule (VI, 5) permet de transformer le second membre

$$[\theta(x), \theta(y)] = [\varepsilon(x \wedge y) + i([x, y])]d + d[\varepsilon(x \wedge y) + i([x, y])]$$

or  $\varepsilon(x \wedge y)d + d\varepsilon(x \wedge y) = 0$  conséquence de (VI, 4) ou de l'anticommutativité des opérateurs  $\varepsilon$  et  $d$ . Le second membre se réduit donc à  $i([x, y])d + di([x, y])$  qui d'après (VI, 1) n'est autre que  $\theta([x, y])$  d'où

$$(VI, 6) \quad [\theta(x), \theta(y)] = \theta([x, y]).$$

L'opérateur  $\theta$  opère donc non seulement sur  $T'$  et  $A(T')$  mais aussi sur  $T$ , le champ transformé de  $y$  par  $\theta(x)$  se notant  $[x, y] = \theta(x) \cdot y$ .

## § II. — Étude du système d'équations différentielles $\Sigma$ caractéristiques de $\Omega$ .

Soit la forme  $\Omega = k_{ij} dx^i \wedge dx^j$ ,  $i$  et  $j$  variant de 0 à  $2n$ ,  $k_{ij}$  composantes d'un tenseur antisymétrique, fonctions de l'anneau  $K$ . Nous désignons par  $\Sigma$  le système des caractéristiques de  $\Omega$ .

*Définition.* — On appelle champ caractéristique  $E$  associé à  $\Omega$  l'élément de  $T$  tel que

$$i(E)\Omega = 0.$$

Par hypothèse la forme est de rang  $2n$  ( $\Omega^n \neq 0$ ). Le champ  $E$  n'est donc défini par l'équation précédente qu'à un facteur fonction numérique près, ses  $(2n + 1)$  composantes étant proportionnelles aux  $(2n + 1)$  déterminants mineurs d'ordre  $2n$  extraits de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & k_{12} & & k_{12n} & k_{10} \\ k_{21} & 0 & \dots & k_{22n} & k_{20} \\ \vdots & & & & \\ k_{2n1} & & \dots & 0 & k_{2n0} \end{array} \right\|$$

Il est avantageux de choisir le facteur de proportionnalité, comme nous l'avons vu au chapitre 1, § III, tel que  $i(E) dt = 1$ .

**THÉORÈME I.** — *A tout  $x \in T$  correspond une forme de Pfaff  $\pi$  nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$ ; réciproquement à toute forme de Pfaff nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$  correspond un  $x \in T$  modulo  $E$ .*

$$\begin{aligned} i(x)\Omega &= \pi \\ i(x)i(E)\Omega &= -i(E)i(x)\Omega \\ \text{comme } i(E)\Omega &= 0, \quad i(E)\pi = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\pi$  appartient au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$ , donc  $\pi$  est nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$ .

Réciproquement si une forme de Pfaff est nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$ ,  $i(E)\pi = 0$ . La forme  $\pi$  appartient au sous-module des formes caractéristiques de  $\Omega$ , il existe donc  $x$  modulo  $E$  tel que  $i(x)\Omega = \pi$ .

**Intégrale première de  $\Sigma$ .** — Nous appellerons dorénavant intégrale première de  $\Sigma$  toute forme de Pfaff fermée nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$ .

Cette définition se justifie car une telle forme n'est pas toujours la différentielle d'une fonction de l'anneau  $K$  définie sur  $V_{2n+1}$ , mais l'est seulement d'une fonction définie seulement sur un voisinage de  $V_{2n+1}$ . En termes précis tout point de  $V_{2n+1}$  appartient à un voisinage  $U$  tel que la restriction de la forme à  $U$  est la différentielle d'une fonction définie sur  $U$ .

A toute forme fermée  $\bar{\pi}$  de degré 1 nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$  correspond  $\bar{x} \in T$ , modulo  $E$  dont les  $(2n+1)$  composantes sont  $(2n+1)$  fonctions solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaire

$$(VI, 7) \quad d(i(\bar{x})\Omega) = 0.$$

**Transformations infinitésimales de  $\Sigma$ .** — *Définition.* — Un élément quelconque  $\omega^p$  de degré  $p$  de  $A(T')$  est dit admettre une transformation infinitésimale engendrée par  $X \in T$ , si l'opérateur  $\theta(X)$  appliqué à  $\omega^p$  la transforme en le zéro de l'espace des formes

$$\theta(X)\omega^p = 0.$$

En particulier si  $\Omega$  de degré 2 admet la transformation infinitésimale définie par  $\theta(X)$  il en est de même du système différentiel  $\Sigma$ . Remarquons que les  $(2n+1)$  composantes du champ  $X$  générateur

de transformations infinitésimales pour  $\Omega$  sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (VI, 8)

$$(VI, 8) \quad \theta(X)\Omega = i(X)d\Omega + di(X)\Omega = 0.$$

A. — ÉTUDE DU CAS  $d\Omega = 0$ .

La comparaison de (VI, 7) et de (VI, 8) montre que si  $d\Omega = 0$  les systèmes d'équations aux dérivées partielles définissant les transformations infinitésimales et les champs  $x$  générateurs d'intégrales premières sont les mêmes. D'où le théorème.

**THÉORÈME II.** — *A tout X générateur d'une transformation infinitésimale correspond une intégrale première et réciproquement*

**EXEMPLE.** — Soit  $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ . Cherchons à quelle condition  $\Omega$  admet la transformation infinitésimale définie par l'opérateur  $\theta(t)$

$$\theta(t)\Omega = d\left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt\right) = 0, \quad \text{donc} \quad d\left(\frac{\partial H}{\partial t} dt\right) = 0,$$

ce qui montre que  $\frac{\partial H}{\partial t}$  doit être une fonction de la seule variable  $t$  soit  $V(t)$ . A cette transformation infinitésimale correspond une intégrale première

$$H - V(t) = h$$

C'est l'intégrale de Painlevé  $T_2 - T_0 - U - V(t) = h$ .

Dans le cas particulier  $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$  c'est l'intégrale des forces vives classiques.

**Conséquence du théorème précédent.** — Le sous-module des champs de vecteurs tangents à la variété  $V_{2n+1}$  générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Sigma$  correspond par dualité par rapport à  $\Omega$  au sous-module des intégrales premières.

Soient deux champs  $X, Y$  générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \theta(X)\Omega = 0 = di(X)\Omega & & i(X)\Omega = \pi \\ \theta(Y)\Omega = 0 = di(Y)\Omega & & i(Y)\Omega = \sigma \end{aligned}$$

Si  $[X, Y] \neq 0$  il correspond au crochet de Lie des deux champs

une transformation infinitésimale  $\theta([X, Y])$  par suite une nouvelle intégrale première

$$\theta([X, Y])\Omega = di([X, Y]) = 0.$$

On obtient son expression en remarquant que dans les hypothèses présente la formule (VI, 3) donne

$$\begin{aligned} i([X, Y])\Omega &= \theta(X)i(Y)\Omega - i(Y)\theta(X)\Omega \\ &= \theta(X)\sigma = i(X)d\sigma + di(X)\sigma = di(X \wedge Y)\Omega. \end{aligned}$$

La nouvelle intégrale première est effectivement la différentielle d'une fonction de l'anneau  $K$  dont l'expression est

$$\sum_{j=0}^{2n} k_{ij} \begin{vmatrix} Y^i & Y^j \\ X^i & X^j \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire le produit intérieur gauche de  $i(X \wedge Y)$  et de  $\Omega$ .

En particulier si  $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ , et si les formes  $\pi$  et  $\sigma$  sont les différentielles de fonctions  $f$  et  $g$  de l'anneau  $K$ ,  $X$  solution de  $i(X)\Omega = df$  définie modulo  $E \left( -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}, 1 \right)$  est  $X \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}, 0 \right)$  d'où

$$i(X \wedge Y)\Omega = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial p_i} & \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ \frac{\partial f}{\partial p_i} & \frac{\partial f}{\partial q_i} \end{vmatrix}$$

On reconnaît au second membre la parenthèse de Poisson  $(f, g)$ .

**COROLLAIRE.** — Si au champ  $X$  et  $Y$  dont le crochet  $[X, Y]$  est différent de zéro correspondent respectivement les intégrales premières  $df$  et  $dg$ , au champ  $[X, Y]$  correspond une nouvelle intégrale première qui est la différentielle de la parenthèse de Poisson. Au crochet  $[[X, Y], Z]$  correspond la parenthèse des parenthèses  $((f, g), h)$ . A l'identité des crochets correspond l'identité de Poisson.

**Champ en involution.** — Si  $[X, Y] = 0$  nous dirons que les deux champs  $X$  et  $Y$  sont en involution. Les deux intégrales premières correspondantes sont dites en involution.

**THÉORÈME III.** — Tout champ  $X$  générateur d'une transformation infinitésimale pour  $\Omega$  est en involution avec le champ caractéristique  $E$ .

Remarquons que  $\theta(E)\Omega = 0$ , comme conséquence de  $d\Omega = 0$  et de la définition de  $E$ ,  $i(E)\Omega = 0$ . Il en résulte que tout élément lié

à  $\Omega$  est appliqué par  $\theta(E)$  sur le zéro de l'ensemble correspondant. En particulier le champ  $X$  générateur d'une transformation infinitésimale est appliqué sur le zéro de l'espace tangent

$$\theta(E)X = [E, X] = 0.$$

**Cas de  $n$  champs en involution connus.** — Supposons connus  $n$  champs en involution  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , deux à deux, générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Omega$ . Il leur correspond  $n$  formes de Pfaff  $\pi_1, \dots, \pi_n$  fermées, intégrales premières de  $\Sigma$ .

$$i(X_i)\Omega = \pi_i; \quad i(X_j)\pi_i = 0.$$

Les  $n$  champs  $X_i$  étant supposés linéairement indépendants, les intégrales  $\pi_i$  sont indépendantes. La forme  $\pi = \pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_n$  de degré  $n$  est différente de 0.

1°  $\Omega$  appartient au sous-module des  $n$  formes  $\pi_1 \dots \pi_n$ .

$q$  étant un entier

$$\begin{aligned} i(X_i)\Omega^q &= q\pi_i \cdot \Omega^{q-1} \\ i(X_j \wedge X_i)\Omega^q &= qi(X_j)\pi_i \wedge \Omega^{q-1} + (-1)q(q-1)\pi_i \wedge \pi_j \wedge \Omega^{q-2} \\ &= (-1)q(q-1)\pi_i \wedge \pi_j \wedge \Omega^{q-2} \end{aligned}$$

pour  $q > n$

$$\begin{aligned} i(X_1 \dots X_n)\Omega^q &= (-1)^{n-1}q \dots (q-n-1)\pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_n \wedge \Omega^{q-n} \\ &= (-1)^{n-1}q \dots (q-n+1)\pi \wedge \Omega^{q-n}. \end{aligned}$$

En prenant  $q = n + 1$ ,  $\Omega$  étant de rang  $2n$ ,  $\Omega^{n+1} = 0$ , d'où  $\pi \wedge \Omega = 0$ , équation qui montre que  $\Omega$  appartient au sous-module des  $n$  formes  $\pi_i$ . On peut donc écrire

$$\Omega = \sum_{j=1}^n \pi_j \wedge \omega^j.$$

2° Les  $n$  formes  $\omega^j$  sont fermées modulo les  $n$  intégrales  $\pi_j$ .

$$d\Omega = \sum_{j=1}^n \pi_j \wedge d\omega^j. \text{ car les } d\pi_j \text{ sont nuls. } d\Omega \text{ étant nulle}$$

$$\sum_{j=1}^n \pi_j \wedge d\omega^j = 0.$$

En multipliant les deux membres par  $\pi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\pi}_j \wedge \dots \wedge \pi_n$ , le signe  $\wedge$  placé au-dessus de  $\pi_j$  signifiant que ce terme ne figure pas dans le produit,

$$\pi \wedge d\omega^j = 0$$

équation qui montre que  $d\omega^j$  appartient au sous-module des  $n$  formes  $\pi_1, \dots, \pi_n$  en d'autres termes les  $n$  formes  $\omega^j$  sont fermées

sur les sous-variétés définies par les  $n$  intégrales premières  $\pi_1 = 0, \dots, \pi_n = 0$ .

**THÉORÈME IV.** — *Si on connaît  $n$  champs deux à deux en involution, générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Omega$ , le système  $\Sigma$  est intégrable par quadratures.*

Ce théorème n'est que la traduction dans le langage des variétés de celui de Liouville-Cartan.

**REMARQUE.** — Les formes  $\pi_1, \pi_n, \omega^1, \omega^n$ , ne sont des différentielles exactes que localement ou sur un voisinage de  $V_{2n+1}$ .

Pour un tel voisinage, on peut calculer les intégrales et les mettre localement sous la forme  $r_j = r_j(p_i, q^i, t)$ ,  $s^j = s^j(p_i, q^i, t)$ . Sous cette réserve  $\Omega$  ne s'exprime qu'au moyen des différentielles des intégrales premières

$$\Omega = dr_j \wedge ds^j$$

$\Omega$  peut se mettre d'une infinité de façon sous cette forme par une transformation du groupe symplectique infini jouant sur l'ensemble  $r_1, r_n, s^1, \dots, s^n$ . Les  $n$  fonctions  $r_1, \dots, r_n$ , en involution deux à deux constituent des éléments génériques d'un sous-anneau.

**Application. Recherche des cas d'intégrabilité du système  $\Sigma$  caractéristique d'une forme  $\Omega$  du type  $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$ .** — Si on sait intégrer  $\Sigma$  on connaît une représentation des intégrales premières  $r_j = \text{const.}$ ,  $s^j = \text{const.}$   $\Omega$  dont la dérivée extérieure est nulle peut donc se mettre sous la forme  $\Omega = dr_j \wedge ds^j$ .

$\Omega$  peut être considérée de  $2^n$  manières comme la différentielle extérieure d'une forme de Pfaff

$$(VI, 9) \quad \omega = \sum_{i=1}^h p_i dq^i - \sum_{i=1}^h q^{n-h+i} dp_{n-h+i} - H dt.$$

Considérons la forme  $\Omega^* = d(\omega + s^j dr_j)$  définie sur une variété  $V_{2n+1}$ . Sur les sous-variétés  $r^i(p_i, q^i, t) = r_j$ ,  $s^j(p_i, q^i, t) = s^j$ , la forme  $\Omega^*$  est nulle par construction,  $\omega + s^j dr_j$  est donc une forme fermée, en écrivant qu'elle est égale à la différentielle d'une fonction  $f(q^i, p_{n-h+i}, r_j, t)$ , les indices  $i$  et  $j$  variant respectivement de 1 à  $h$  et de 1 à  $n$ , on obtient

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \quad q^{n-h+i} = -\frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \quad H = -\frac{\partial f}{\partial t} \quad s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$$

$V_{2n+1}$  est le produit topologique de  $V_{2n+1}$  et d'une variété symplectique  $Sp_{2n}$ .

Quand on se donne  $f(q^i, p_{n-h+i}, r_j, t)$  telle que le déterminant  $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial r_j} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial p_{n-h+i} \partial r_j} \end{vmatrix}$  soit différent de zéro, H s'obtient par élimination des  $r_j$  entre les équations

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad q^{n-h+i} = - \frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \quad H = - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Les intégrales premières  $r_j = \text{const.}$  sont définies par les  $n$  équations implicites

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad q^{n-h+i} = - \frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}}$$

Les intégrales premières  $s^j = \text{const.}$  sont définies modulo  $r_j = \text{const.}$  par  $s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$ .

REMARQUE. — 1) Les  $n$  fonctions  $r_j(p_i, q^i, t)$  sont évidemment en involution puisque  $\Omega = dr_j \wedge ds^j$ .

2° Se donner la forme  $df$  sur les sous variétés

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad q^{n-h+i} = - \frac{\partial f}{\partial p_{n-h+i}} \quad H = - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad s^j = \frac{\partial f}{\partial r_j}$$

de  $V_{n+1}$  est donc le moyen pratique pour obtenir un ensemble de  $n$  fonctions en involution.

3° Deux formes fermées  $\omega, \omega'$  du type (VI, 9) n'engendrent des cas d'intégrabilité différents que si les sous-variétés locales  $r_j(p_i, q^i, t) = \text{const.}$  correspondant à ces cas d'intégrabilité sont différentes. Ainsi si on écrit que la forme  $\omega = p_i dq^i - H dt + s^j dr_j$  est fermée sur les sous-variétés  $p_i$  fonction de  $(q^i, r_i)$  seulement, on obtient le même cas en écrivant que la forme

$$\omega' = - q^i dp_i - H dt + s^j dr_j$$

est fermée sur les sous-variétés  $q^i$  fonction de  $(r_i, p_i)$  seulement.

4° Pour que  $\Omega$  ne soit pas la somme de  $p$  formes il faut et il suffit que  $f$  ne soit pas la somme de  $p$  fonctions  $f_k$  dépendant chacune d'un ensemble différent de variables  $r_j$ .

Cas de la mécanique. — H doit être une forme quadratique définie positive en  $p_i$ .

$H = A^j p_j p_j + A^i p_i + B$ , les  $A^j, A^i, B$  étant des fonctions des  $(n+1)$  variables  $q^i, t$ .

Ce fait nous conduit à la question préliminaire quels sont les changements de variables canoniques qui conservent le degré des variables  $p_i$ . Si un changement de variables dans lequel l'homologue de l'ensemble des  $p$  est l'ensemble  $r$ , conserve le degré d'une relation en  $p$ , il est linéaire par rapport aux  $r$  et réciproquement. La forme  $\Omega = dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt$  devient  $\Omega = dr_j \wedge ds^j - dK \wedge dt$ . La forme  $dp_i \wedge dq^i - dH \wedge dt - dr_j \wedge ds^j + dK \wedge dt$  définie sur une variété  $V_{3n+1}$  étant nulle sur les sous-variétés  $p_i = p_i(r_j, s^j, t)$ ,  $q^i = q^i(r_j, s^j, t)$  la forme  $q^i dp_i + r_j ds^j + H dt - K dt$  est la différentielle d'une fonction linéaire par rapport aux  $p_i$  soit  $p_i \varphi^i(s^j, t) + \varphi^0(s^j, t)$  d'où

$$q^i = \varphi^i(s^j, t), \quad r_j = p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial s^j}, \quad H - K = p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial t}.$$

Les équations  $q^i = \varphi^i(s^j, t)$  montrent que les transformations canoniques cherchées ne sont autres que les transformations du pseudo-groupe ponctuel  $Q$  jouant sur les variables  $(q^i, t)$ .

Il en résulte qu'au point de vue où nous plaçons deux fonctions  $H$  ne doivent être considérées comme distinctes que si elles ne se déduisent pas l'une à l'autre par une transformation ponctuelle  $Q$ .

Le pseudo-groupe  $Q$  transforme également toute intégrale algébrique par rapport aux  $p_i$  en une intégrale algébrique de même nature. Si les  $n$  fonctions  $r_j$  deux à deux en involution sont algébriques par rapport aux  $p_i$ , les  $r_j$  étant définies au moyen des équations implicites  $p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}$ , les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial q^i}$  doivent être des fonctions algébriques par rapport aux  $r_j$ . On obtient donc simplement certains cas d'intégrabilité en choisissant la forme  $df$  à coefficients algébriques par rapport aux  $r_j$ .

REMARQUE. — Il est bien certain que dans l'application pratique de cette méthode on sera limité par le fait que l'on ne sait pas résoudre les équations algébriques. On peut parfois tourner cette difficulté en utilisant une des  $2^n$  formes (VI, 9) donné à l'invariant intégrale  $\omega$ .

EXEMPLE I. —  $n$  intégrales linéaires en  $p_i$ . — Tout intégrale en  $p_i$  de la forme  $\alpha^i p_i + \alpha^0 = \text{const.}$  les  $\alpha$  étant des fonctions de  $q^1, \dots, q^n, t$ ) peut par une transformation  $Q$  se ramener à la forme  $\bar{p}_n + \bar{\alpha}^0 = \text{const.}$

Par une transformation  $Q$ ,  $\alpha^i p_i + \alpha^0$  devient  $\alpha^i \bar{p}_j \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} + \alpha^0 = \text{const.}$

On peut satisfaire à cette relation en choisissant les  $\bar{q}^j$  fonctions de  $q^1, \dots, q^n, t$ , telles

$$\alpha^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} = 0 \quad \text{pour } j \text{ variant de } 1 \text{ à } n-1 \quad \alpha^i \frac{\partial \bar{q}^n}{\partial q^i} = 1$$

$\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^{n-1}$  sont alors  $(n-1)$  intégrales distinctes du système ( $t$  jouant le rôle d'un paramètre)

$$\frac{dq^1}{\alpha^1} = \dots = \frac{dq^n}{\alpha^n}$$

$\bar{q}^n$  est une solution du système

$$\frac{dq^1}{\alpha^1} = \dots = \frac{dq^n}{\alpha^n} = \frac{d\bar{q}^n}{1}$$

s'obtenant au moyen d'une quadrature en tenant compte des  $(n-1)$  intégrales précédentes.

Par une transformation Q une intégrale linéaire par rapport aux  $p_i$  peut se mettre sous la forme

$$p_n + \alpha_0 = r_n$$

la fonction  $f(q^i, r_j, t)$  est donc de la forme  $f = r_n q^n + g_n + \varphi_n$  dans laquelle  $g_n$  est une fonction indépendante de  $r_n$ ,  $\varphi_n$  une fonction indépendante de  $q^n$ . S'il y a  $n$  intégrales linéaires par rapport aux  $p_i$ , après des transformations Q successives, la fonction  $f$  peut donc se mettre sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^n r_i q^i + g + \varphi$$

dans laquelle  $g$  est une fonction de  $(q^1, \dots, q^n, t)$  indépendante de  $r_1, \dots, r_n$ ,  $\varphi$  une fonction de  $t, r_1, \dots, r_n$ .

$H = -\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  devant être quadratique par rapport aux  $p_i$ , puisqu'on passe des  $p_i$  aux  $r_i$  par la substitution linéaire

$$p_i = \frac{\partial g}{\partial q_i} + r_i,$$

$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  doit être une forme quadratique par rapport à  $r_1, \dots, r_n$ .

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} (A^{ij} r_i r_j + A^{i0} r_i + A^{00}) \quad \varphi = -\frac{1}{2} \int (A^{ij} r_i r_j + A^i r_i + A^{00}) dt$$

La forme réduite de H par Q est donc

$$2H = A^{ij} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \left( p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + A^{i0} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + A^{00} - 2 \frac{\partial g}{\partial t}$$

les  $A^{ij}$ ,  $A^i$ ,  $A^{00}$  étant des fonctions de la seule variable  $t$ ,  $g$  une fonction arbitraire de  $q^1, \dots, q^n, t$ . D'où le théorème

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait  $n$  intégrales linéaires en involution est que par une transformation du pseudo-groupe ponctuel Q H soit réductible à la forme ci-dessus.*

II.  $(n-1)$  intégrales linéaires en  $p_i$ , la  $n^e$  quadratique en  $p_i$ . — D'après le cas précédent la présence des  $(n-1)$  intégrales linéaires conduit par des transformations Q successives à mettre  $f$  sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} r_j q^j + g + \varphi$$

dans laquelle  $g$  est une fonction des  $q^1, \dots, q^n, t$  indépendante des  $r_1, \dots, r_n$ ,  $\varphi$  une fonction des  $r_1, \dots, r_n$  indépendante des  $q^1, \dots, q^{n-1}$ .

$\left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial r_n}, \frac{\partial \varphi}{\partial q^n}$  est une fonction de  $r_n$ ; l'intégrale  $r_n$  devant être quadratique  $r_n$  est de la forme

$$r_n = A^{nn} \left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right)^2 + 2B \left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right) + C$$

expression dans laquelle B et C sont des fonctions respectivement linéaire et quadratique par rapport aux  $r_j$  ( $j$  variant de 1 à  $n-1$ ). On en déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r_n)}}{A^{nn}}$$

H devant être quadratique, comme  $H + \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  doit être une forme quadratique de rang  $n$  par rapport aux  $p_i$ , quand on remplace les  $r_1, \dots, r_n$  par leur valeur. Cette forme quadratique peut toujours s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda \left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right)^2 + 2\mu \left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right) + \nu,$$

expression dans laquelle  $\mu$  et  $\nu$  sont respectivement linéaire et qua-

dratique par rapport aux  $p_j$  ( $j$  variant de 1 à  $n - 1$ ). Si on remplace les  $p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i}, \dots, p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n}$ , en fonction des  $r_1, \dots, r_n$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  dépend linéairement du radical  $\sqrt{B^2 - A^{nn}(c - r_n)}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D - \frac{E}{A^{nn}} \sqrt{B^2 - A^{nn}(c - r_n)}$$

L'expression  $\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} dq^n + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$  devant être une différentielle exacte quels que soient les  $r$ , l'expression  $\sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r)} (dq^n - E dt) \frac{1}{A^{nn}}$  doit être elle-même une différentielle exacte.  $A^{nn}$  et  $E$  ne dépendant que de  $q^n$  et de  $t$  ( $r_1, \dots, r_{n-1}$  ne figurant dans  $E$  que comme paramètres), si on considère un facteur intégrant  $\Phi$  de  $dq^n - E dt$ , la transformation particulière  $\bar{q}^n = \bar{q}^n(q^n, t)$  montre que

$$\frac{1}{\Phi A^{nn}} \sqrt{B^2 - A^{nn}(C - r_n)} d\bar{q}^n$$

ne peut-être une différentielle exacte que si les fonctions figurant sous le radical ne dépendent que de  $\bar{q}^n$ .

Conséquence. — Par une transformation du pseudo-groupe ponctuel  $Q$  on peut toujours se ramener au cas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q^n} = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{ni} r_i + A^n\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{ni} r_i + A^n\right)^2 - A^{nn} \left(\sum_{i=1}^{n-1} A^{ij} r_i r_j + 2 \sum_{i=1}^{n-1} A^i r_i + A^{00} - r_n\right)}}{A^{nn}}$$

les  $A$  ne dépendant que de la variable  $q^n$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} a^{ij} r_i r_j + \sum_{i=1}^{n-1} a^i r_i + a^{00} + a^n r_n \right)$$

les  $a$  ne dépendant que de  $t$ .

On en déduit  $H$  et l'intégrale quadratique

$$\begin{aligned} 2H &= \sum_{i=1}^{n-1} a^{ij} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \left( p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} a^i \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + a^{00} \\ &+ a^n \left[ \sum_{i=1}^n A^{ij} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \left( p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + 2A^i \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + A^{00} \right] - 2 \frac{\partial g}{\partial t} \\ r_n &= \sum_{i=1}^n A^{ij} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \left( p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + 2A^i \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) + A^{00}. \end{aligned}$$

*Cas particulier.* —  $g \equiv 0$ , les  $a \equiv 0$  sauf  $a^n = 1$ , les  $A^i \equiv 0$  on obtient le cas d'intégralité de Delassus.

On peut résumer ce qui précède dans le théorème.

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que le système  $\Sigma$  ait une intégrale première quadratique et  $(n - 1)$  intégrales linéaires par rapport aux  $p_i$  est que  $H$  soit réductible par le pseudo-groupe ponctuel  $Q$  à la forme ci-dessus.*

III.  $h$  intégrales quadratiques en  $p_i$  et  $(n - h)$  linéaires en  $p_i$ . — Par transformation  $Q$  les  $(n - h)$  intégrales linéaires peuvent toujours être réduites à la forme  $p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} = r_i$  ( $i, 1$  à  $n - h$ ) et  $df$  s'écrire

$$df = \sum_1^{n-h} r_i dq^i + dg(q^1, \dots, q^n, t) + d\varphi$$

$r_{n-h+1}, \dots, r_n$ , désignant les  $h$  intégrales quadratiques, remarquons que si les  $\alpha$  sont des constantes  $\sum_{n-h+1}^n \alpha^k r_k$  est aussi une intégrale quadratique,  $\varphi$  ne peut donc être qu'une fonction de formes linéaires en  $r_{n-h+1}, \dots, r_n$  dont les coefficients sont des fonctions des variables  $q^{n-h+1}, \dots, q, t$ .

Or la  $n^e$  intégrale quadratique peut toujours se mettre sous la forme

$$r_n = A^n p_n^2 + 2Bp_n + C$$

$B$  et  $C$  dépendant de  $p_{n-1}, \dots, p_{n-h+1}$ . Il en résulte que  $r_n$  doit figurer linéairement sous un radical du second degré.  $\varphi$  étant une fonction de formes linéaires des  $r_{n-h+1}, \dots, r_n$ , il doit en être de même des autres. Par une transformation du groupe ponctuel  $Q$  on se ramène au cas où ce radical ne dépend que d'une variable. On est ainsi conduit à l'expression suivante de  $df$

$$df = \sum_1^{n-h} r_i dq^i + \sqrt{2} \sum_{n-h+1}^n \sqrt{\varphi_k^j r_j + \varphi_k} dq^k + \left( \sum_1^{n-h} \frac{\alpha^{ij}}{2} r_i r_j + \sum_1^n a^i r_i + a^0 \right) dt + dg$$

dans laquelle les  $\varphi_k^j$  sont des fonctions de  $q^k$  seulement, les  $\varphi_k$  sont des formes quadratiques en  $r_j$  ( $j$  de 1 à  $n - h$ ) à coefficients fonctions

de  $q^k$  seulement, les  $a$  ne dépendant que de  $t$ . La fonction  $H$  correspondante est définie par :

$$0 = \begin{vmatrix} a^{n-h+1} & \dots & a^n & - \left[ H + \frac{\partial g}{\partial t} + a^0 + \sum_1^{n-h} \frac{a^{ij}}{2} \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \left( p_j - \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) + a^i \left( p_i - \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \right] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_k^{n-h+1} & \dots & \varphi_k^n & \frac{1}{2} \left( p_k - \frac{\partial g}{\partial q^k} \right)^2 - \varphi_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n^{n-h+1} & \dots & \varphi_n^n & \frac{1}{2} \left( p_n - \frac{\partial g}{\partial q^n} \right)^2 - \varphi_n \end{vmatrix}$$

*Cas particuliers.* — 1°  $n$  intégrales quadratiques on obtient le cas de Stackel généralisé en prenant les  $a^{ij} \equiv 0$ , pour  $\varphi_k$  une fonction de la variable  $q^k$ .

2° En prenant  $g \equiv 0$ , tous les  $a$  nuls sauf  $a^n \equiv 1$ , on obtient le cas de Stackel ordinaire.

3° Le cas d'intégrabilité de Liouville qu'il est plus simple d'établir directement en prenant :

$$df = \sqrt{2} \sum_1^{n-1} \sqrt{B_i(r_i - C_i + A_i r_n)} dq^i + \sqrt{2} \sqrt{B_n \sum_1^{n-1} (-r_i) - C_n + A_n r_n} dq^n - r_n dt.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2} p_i^2 = B_i(r_i - C_i + A_i r_n)$$

$$\frac{1}{2} p_n^2 = B_n \left( \sum_1^{n-1} (-r_i) - C_n + A_n r_n \right) \quad H = r_n$$

d'où  $2H = \frac{1}{\sum_1^n A_i} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i^2}{B_i} + C_i \right) \right]$  ou forme classique

$$2H = \sum_{i=1}^n A_i \sum_{i=1}^n B_i (q^i)^2 + \frac{\sum_{i=1}^n C_i(q^i)}{\sum_{i=1}^n A_i(q^i)}$$

IV.  $n$  intégrales linéaires par rapport aux  $q^i$ . — S'il existe  $n$  intégrales linéaires par rapport aux  $q^i$ , la fonction  $f$  doit être de la

forme  $f = r_j \varphi^j(p_1, \dots, p_n, t) + \psi(p_1, \dots, p_n, t)$  car  $q^i = r_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i}$ . Le sous-anneau le plus simple de  $n$  fonctions en involution est constitué par les  $n$  fonctions  $s^i = \frac{\partial f}{\partial r_j} = \varphi^j(p_1, \dots, p_n, t)$ . Une transformation canonique conservant le degré des  $q^i$  nous conduit au cas où

$$f = r_i \varphi^i(p_i, t) + \psi(p_1, \dots, p_n, t)$$

la fonction  $\varphi^i$  ne dépendant que de la variable  $p_i$ , étant une fonction indépendante des  $r_i$ . L'élimination des  $r_i$  entre les  $(n - 1)$  équations

$$q^i = r_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad H = r_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

donne

$$H = q^i \frac{\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_i}} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_i}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p_i}$$

Cette fonction devant être quadratique :

$$1^\circ \quad \frac{\frac{\partial \varphi^i}{\partial t}}{\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_i}} = a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t)p_i + c_i(t)$$

ce qui montre que  $\varphi^i$  est une fonction de la solution  $R_i$  de l'équation de Riccati  $\frac{dp_i}{dt} = a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t)p_i + c_i(t)$ .

$$2^\circ \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} [a_i(t)p_i^2 + 2b_i(t) + c_i] = a^j p_i p_j + 2a^i p_i + a^{00}$$

les  $a$  étant des fonctions de  $t$ ,  $\psi$  est une fonction de  $R_1, \dots, R_n$  et de  $t$  qu'on détermine par quadratures.

En résumé on constitue le sous-anneau de  $n$  fonctions en involution en se donnant les solutions de  $n$  équations de Riccati.

Une variante du procédé consiste à se donner le sous-anneau au moyen de  $n$  fonctions  $s^1 \dots s^n$ .

EXEMPLES :

$$1^\circ \quad s^n = \frac{t}{2} + \int \frac{dp_n}{p_n^2 + \alpha}, \quad s^i = \frac{(p_n^2 + \alpha)^{\beta_i}}{p_i} + \gamma^i \int (p_n + \alpha)^{\beta_i - 1} dp_n$$

$$f = 2r_n \left( \int \frac{dp_n}{p_n^2 + \alpha} + \frac{t}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \left[ \frac{(p_n^2 + \alpha)^{\beta_i}}{p_i} + \gamma^i \int (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i - 1} dp_n \right]$$

$$q^i = -r_i \frac{(p_n^2 + \alpha)^{\beta_i}}{p_i^2},$$

$$q_n = +2r_n \frac{1}{p_n^2 + \alpha} + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \left[ \frac{2\beta_i p_n (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i - 1}}{p_i} + \gamma^i (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i - 1} \right], \quad H = r_n$$

d'où 
$$2H = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2 q^i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p_i p_n q^i + (p_n^2 + \alpha) q^n.$$

$$2^\circ \quad s^n = \frac{t}{2} + \int \frac{dp_n}{p_n^2 + \alpha} \quad s^i = p_i (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i}$$

$$f = 2r_n \int \frac{dp_n}{p_n^2 + \alpha} + r_n t + \sum_{i=1}^{n-1} r_i p_i (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i} + \psi$$

$$q^i = r_i (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i} + \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

$$q^n = 2r_n \frac{1}{p_n^2 + \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} r_i p_i \beta_i p_n (p_n^2 + \alpha)^{\beta_i - 1}.$$

On détermine  $\psi$  par la condition

$$-(p_n^2 + \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial p_n} + 2p_i \beta_i p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2$$

soit 
$$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2 (p_n^2 + \alpha)^{2\beta} \int \frac{dp_n}{(p_n^2 + \alpha)^{2\beta_i + 1}} = \psi$$

d'où 
$$2H = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i p_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i p_i p_n q^i + q^n (p_n^2 + \alpha).$$

*Cas particulier.* —  $n = 2, \alpha = 0$  on trouve les surfaces spirales dont les géodésiques sont déterminées par quadratures (cf. Darboux, tome III, p. 81).

B. — ÉTUDE DU CAS  $d\Omega \neq 0$ .

THÉORÈME V. — Si à  $X \in T$  et  $x \in T$ , correspondent respectivement une transformation infinitésimale et une intégrale première de  $\Sigma$ , au

crochet de Lie  $[X, \bar{x}] \neq 0$  correspond une nouvelle intégrale première de  $\Sigma$  dont l'expression est  $i(X \wedge \bar{x})\Omega$ .

La formule (VI, 3) donne  $i[X, \bar{x}]\Omega = \theta(X)i(\bar{x})\Omega - i(\bar{x})\theta(X)\Omega$ .

Les hypothèses  $\theta(X)\Omega = 0$ ,  $i(\bar{x})\Omega = \bar{\pi}$ ,  $d\bar{\pi} = 0$  entraînent

$$i[X, \bar{x}]\Omega = di(X \wedge \bar{x})\Omega.$$

Au crochet de Lie  $[X, \bar{x}]$  élément de  $T$  non nul, l'opérateur  $i[X, \bar{x}]$  appliqué à  $\Omega$  fait donc correspondre la différentielle d'une fonction de l'anneau  $K$ , fonction ayant pour expression  $i(X \wedge \bar{x})\Omega$ ; la différentielle de cette fonction étant nulle sur les lignes intégrales de  $\Sigma$  est une nouvelle intégrale première de  $\Sigma$ . Son calcul est immédiat

$$i(X \wedge \bar{x})\Omega = k_{ij} \begin{vmatrix} \bar{x}^i & \bar{x}^j \\ X^i & X^j \end{vmatrix}.$$

L'étude du système  $\Sigma$  se fait conformément aux idées de Lie au moyen de la connaissance de certaines de ses transformations infinitésimales.

*Définition.* — Nous dirons que  $r$  éléments  $X^1, X^2, \dots, X^r \in T$ , générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Omega$  forment un système complet si

$$[X^\rho, X^\sigma] = \gamma_\tau^{\rho\sigma} X^\tau \quad \rho, \sigma, \tau \in (1 \text{ à } r)$$

les  $\gamma_\tau^{\rho\sigma}$  étant des fonctions de l'anneau  $K$ .

**LEMME.** — On peut choisir d'une infinité de manières  $2n$  éléments  $x^1, \dots, x^{2n}$  appartenant à  $T$  tels que  $i(X^i)i(x^j)\Omega = i(X^i \wedge x^j)\Omega$  soit égale à 1 pour  $j = i$ , à 0 pour  $j \neq i$ .

Les  $X^i$  étant connus, les composantes de  $x^j$  ( $j$  fixe) sont solutions des  $r$  équations linéaires ( $r < 2n + 1$ )

$$i(X^i \wedge x^j)\Omega = 0 \quad \text{pour } j \neq i \quad i(X^i \wedge x^j)\Omega = 1 \quad \text{pour } j = i.$$

On profite des arbitraires pour choisir des solutions aussi simples que possibles pour les  $x^j$ .

Soient  $\pi^i = i(x^i)\Omega$  l'indice  $i$  variant de 1 à  $2n$ , les  $2n$  formes de Pfaff correspondantes qui, égalées à 0, constituent une des expressions du système d'équations différentielles  $\Sigma$ .

**THÉORÈME VI.** — Le système des  $(2n - r)$  formes de Pfaff  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$  est complètement intégrable, les  $r$  formes  $\pi^1, \dots, \pi^r$  sont des formes invariantes.

Appliquons à une forme  $\pi^i$  la formule (VI, 5) en prenant pour  $x, y$  deux champs  $X^\rho, X^\sigma$

$$(VI, 10) \quad \theta(X^\rho)i(X^\sigma)\pi^i - \theta(X^\sigma)i(X^\rho)\pi^i = \varepsilon(X^\rho \wedge X^\sigma)\pi^i + i[X^\rho, X^\sigma]\pi^i.$$

D'après le choix des formes  $\pi^i$  le premier membre est toujours nul.

1° Pour  $i > r$

$$i(X^\sigma)\pi^i = 0, \quad i(X^\rho)\pi^i = 0, \quad i([X^\rho, X^\sigma])\pi^i = \gamma_{\tau}^{\rho\sigma} \cdot i(X^\tau)\pi^i = 0 \\ \varepsilon(X^\rho \wedge X^\sigma)\pi^i = -i(X^\rho \wedge X^\sigma) d\pi^i.$$

La nullité du premier membre de (VI, 10) entraîne

$$i(X^\rho \wedge X^\sigma) d\pi^i = 0.$$

Les  $\pi^1, \dots, \pi^{2n}$ , formant un système différentiel ordinaire donc complètement intégrable,  $d\pi^i$  appartient au sous-module des  $\pi^i$ ;  $c_{jk}^i$  étant des fonctions de l'anneau  $K$ , on peut donc écrire

$$d\pi^i = c_{jk}^i(\pi^j \wedge \pi^k).$$

Etudions ce qu'entraînent les hypothèses pour les  $c_{jk}^i$

$$i(X^\rho \wedge X^\sigma) d\pi^i = c_{jk}^i i(X^\rho \wedge X^\sigma) \cdot (\pi^j \wedge \pi^k) \\ 0 = c_{jk}^i i(X^\rho) i(X^\sigma) \cdot (i(x^j)\Omega) \wedge (i(x^k)\Omega).$$

$i(X^\sigma)i(x^j)\Omega$  n'est différent de zéro que pour  $j = \sigma$ ; il en résulte que l'égalité précédente se réduit à

$$c_{\sigma k}^i i(X^\rho) i(x^k)\Omega = 0.$$

$i(X^\rho)i(x^k)\Omega$  n'étant différent de 0 que pour  $k = \rho$ , on doit avoir  $c_{\sigma\rho}^i = 0$  c'est-à-dire  $c_{jk}^i = 0$  pour  $j \leq r, k \leq r$ .

Ces conditions entraînent que  $d\pi^{r+\alpha}$  appartient au sous-module des formes  $\pi^{r+\alpha}$ , en d'autres termes le système des  $(2n - r)$  formes  $\pi^{r+\alpha}$  est complètement intégrale.

2° Pour  $i \leq r$ .

$$i(X^\tau)\pi^i = 0 \quad \text{si } i \neq \tau, \quad i(X^\tau)\pi^i = 1 \quad \text{si } i = \tau.$$

La nullité du premier membre de (VI, 10) donne

$$0 = -i(X^\rho \wedge X^\sigma) d\pi^\tau + \gamma_{\tau}^{\rho\sigma}$$

En tenant compte de  $d\pi^\tau = c_{jk}^\tau \pi^j \wedge \pi^k$

$$i(X^\rho)i(X^\sigma)c_{jk}^\tau \pi^j \wedge \pi^k = c_{jk}^\tau i(X^\rho)i(X^\sigma)i(x^j)\Omega \wedge i(x^k)\Omega.$$

$i(X^\sigma)i(x)\Omega$  n'étant différent de zéro que pour  $j = \sigma$ , sa valeur étant alors 1.

$i(X^\rho)i(x^k)$  n'étant différent de zéro que pour  $k = \rho$ , sa valeur étant alors 1.

$$\gamma_{\tau}^{\rho\sigma} = c_{\sigma\rho}^{\tau} = -c_{\rho\sigma}^{\tau}.$$

En outre pour  $\tau = i \leq r$ , pour  $j$  et  $k > r$  les  $c_{jk}^i$  sont des fonctions généralement non nulles.

Montrons que les  $r$  formes  $\pi^1, \dots, \pi^r$  sont des formes invariantes

$$d\pi^i = c_{jk}^i \pi^j \wedge \pi^k \quad \text{pour} \quad i(1 \text{ à } r) \quad j \text{ et } k (1 \text{ à } 2n).$$

Les  $2n$  formes  $\pi^1, \dots, \pi^{2n}$  s'expriment linéairement en fonction des  $2n$  différentielles des intégrales premières de  $\Sigma$ , si on effectue cette substitution au second membre, en introduisant des fonctions convenablement choisies des intégrales premières

$$d\pi^i = \sum h_{\alpha\alpha^*}^i dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*} \quad \text{avec} \quad \alpha^* = \alpha + n$$

les  $h_{\alpha\alpha^*}^i$  étant des fonctions des intégrales premières et d'une variable  $t$  par exemple,  $u$  désignant une intégrale première quelconque ou la variable  $t$  en prenant la différentielle extérieure des deux membres

$$d(d\pi^i) = 0 = \sum \frac{\partial h_{\alpha\alpha^*}^i}{\partial u} du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$$

le terme  $du \wedge dc^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}$  étant unique  $\frac{\partial h_{\alpha\alpha^*}^i}{\partial u} = 0$ ,  $h_{\alpha\alpha^*}^i$  ne peut être qu'une fonction des deux intégrales  $c^\alpha$  et  $c^{\alpha^*}$ ; par un changement d'intégrales premières  $c^\alpha = c^\alpha(c^\alpha, \bar{c}^{\alpha^*})$  on réduit  $d\pi^i$  à la forme

$$d\pi^i = \sum_{\alpha=1}^n \bar{d}c^\alpha \wedge dc^{\alpha^*}.$$

Il en résulte  $\pi^i = \bar{c}^\alpha dc^{\alpha^*}$ .  $\pi^i$  ne s'exprimant qu'au moyen des intégrales premières et de leurs différentielles est bien une forme invariante pour le système  $\Sigma$ .

**Conséquences pratiques pour l'intégration de  $\Sigma$ .** — Ayant choisi les  $2n$  formes  $\pi^i$  conformément au lemme, on commencera par chercher la solution du système complètement intégrable  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$ . Une solution de ce système étant connue on est ramené à intégrer un système différentiel de  $r$  formes  $\pi^1, \dots, \pi^r$  pour lequel on connaît  $r$  formes invariantes.

La recherche d'une solution du système complètement intégrale  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$  est simplifiée par les remarques suivantes :

1) Si on sait qu'il existe  $p$  intégrales premières, on profite des arbitraires existant dans le choix des  $x^i$ , pour que ces intégrales premières appartiennent au sous-module des  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$ .

2) Si le système mécanique a été astreint à  $q$  liaisons

$$a^h = a^h(p_i, q^i, t) = 0, \quad \Omega_a = L_i dq^i \wedge dt,$$

compatibles avec les transformations infinitésimales, on choisit certain des  $x^i$  pour que les  $da^h$  appartiennent au sous-module des  $(2n - r)$  formes  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$ .

On peut ainsi réduire l'ordre du système complètement intégrable  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$  de  $(p + q)$  unités.

Plus particulièrement si  $2n - r = p + q$  et si les  $r$  formes  $\pi^1, \dots, \pi^r$  sont fermées modulo les formes  $\pi^{r+1}, \dots, \pi^{2n}$  l'intégration s'achève par des quadratures.

### § III. — Application des méthodes précédentes.

#### I. Point pesant mobile avec frottement sur un plan incliné.

Reprenons les notations du chapitre I § 1 et posons  $\Omega = \frac{\omega}{m}$

$$\Omega = dv \wedge (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) + v d\alpha \wedge (-\sin \alpha dx + \cos \alpha dy) - v dv \wedge dt + g \sin i dx \wedge dt - fg \cos i (\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) \wedge dt.$$

On connaît immédiatement 3 champs X, Y, T, générateurs de transformations infinitésimales pour  $\Omega$  dont les composantes sont données dans le tableau

	$v$	$\alpha$	$x$	$y$	$t$
X	0	0	1	0	0
Y	0	0	0	1	0
T	0	0	0	0	1

$$i(X)\Omega = -dv \cos \alpha + v \sin \alpha d\alpha + g \sin i dt - fg \cos i \cos \alpha dt$$

$$i(Y)\Omega = -dv \sin \alpha - v \cos \alpha d\alpha - fg \cos i \sin \alpha dt$$

$$i(T)\Omega = v dv - g \sin i dx + fg \cos i \cos \alpha dx + fg \cos i \sin \alpha dy.$$

Déterminons 4 formes  $\pi_x, \pi_y, \pi_t, \pi_u$  au moyen de 4 champs  $x, y, t, u$ , conformément au lemme. Les composantes du champ  $x$

satisfont aux équations

$$i(x)i(X)\Omega = -1; \quad i(x)i(Y) = 0; \quad i(x)i(T) = 0.$$

On peut prendre pour composantes de  $x$  :

$$\cos \alpha, \quad -\frac{\sin \alpha}{v}, \quad 0, \quad -\frac{v \cotg \alpha}{fg \cos i}, \quad 0$$

$$\text{d'où } i(x)\Omega = \pi_x = dx + \frac{1}{fg \cos i} \left( v dv \cos \alpha + \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \cdot d\alpha \right).$$

En opérant de même pour  $y$  et  $t$ , on obtient

$$y \text{ composantes } \left( \sin \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{v}, \quad 0, \quad -\frac{v}{fg \cos i}, \quad 0 \right)$$

$$i(y)\Omega = \pi_y = dy + \frac{1}{fg \cos i} (v dv \cdot \sin \alpha + v^2 \cos \alpha d\alpha)$$

$$t \text{ composantes } \left( 0, \quad 0, \quad \frac{1}{g \sin i}, \quad -\frac{\cotg \alpha}{g \sin i}, \quad 0 \right)$$

$$i(t)\Omega = \pi_t = dt + \frac{1}{g \sin i} \frac{v d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Le champ  $u$  tel que  $i(u)i(X) = 0$ ,  $i(u)i(Y) = 0$ ,  $i(u)i(T) = 0$  a pour composantes  $\left( 0, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{f \cotg i}{v \sin \alpha}, \quad \frac{1}{v \sin \alpha} - \frac{f \cotg i \cos \alpha}{v \sin \alpha} \right)$

$$i(u)\Omega = \pi = \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin \alpha} + \frac{dv}{v} - f \cotg i \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Le système complètement intégrable se réduit à la seule équation différentielle  $\pi = 0$ . C'est une forme fermée; elle s'intègre par quadrature.  $v = \frac{c}{\sin \alpha} \left( \tg \frac{\alpha}{2} \right)^{f \cotg i}$ . Les 3 formes  $\pi_x$ ,  $\pi_y$ ,  $\pi_t$  sont fermées modulo  $\pi$ . L'intégration s'achève par des quadratures.

II. Mouvement d'une particule électrisée de charge  $e$ , de masse  $m$  pesante dans un champ électrique  $E$  et un champ magnétique  $H$ .

Nous supposons que le champ électrique dérive d'une fonction de forces qui, ajoutée à la fonction de forces dont dérive la pesanteur, est désignée par  $f$ . Les conditions auxquelles satisfait le champ  $H$  seront précisées ultérieurement,

Si on rapporte l'espace Euclidien dans lequel se meut la particule à 3 axes de coordonnées  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\dot{x}^1$ ,  $\dot{x}^2$ ,  $\dot{x}^3$ , désignant les compo-

santes de la vitesse de la particule,  $H^1, H^2, H^3$ , étant les composantes du champ  $H$ , la forme  $\Omega$  associée à la particule est :

$$\Omega = \sum_{j=1}^3 \dot{x}^j \wedge dx^j - \sum_{j=1}^3 \dot{x}^j dx^j \wedge dt + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dt + \frac{e}{m} [(\dot{x}^2 H^3 - \dot{x}^3 H^2) dx^1 + (\dot{x}^3 H^1 - \dot{x}^1 H^3) dx^2 + (\dot{x}^1 H^2 - \dot{x}^2 H^1) dx^3] \wedge dt.$$

La présence du champ magnétique entraîne  $d\Omega \neq 0$ . La force due au champ magnétique étant orthogonale au déplacement, les champs électriques et de pesanteur dérivant d'une fonction de forces, on a l'intégrale des forces vives ; il lui correspond un champ  $x$  de l'espace tangent à la variété  $V_7$ , dont les composantes sont :

$$-\frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad -\dot{x}^1, \quad -\dot{x}^2, \quad -\dot{x}^3, \quad 0,$$

les variables étant supposées rangées dans l'ordre  $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3, x^1, x^2, x^3, t$ ,

$$i(x)\Omega = \frac{1}{2} dv^2 - df.$$

Nous supposons dans ce qui suit le champ magnétique de révolution autour de la verticale  $Oz$ , et que ses composantes en coordonnées cylindro-polaires sont  $U=0, V=V(\rho), W=0, \rho$  désignant la distance à l'axe  $Oz$ . En coordonnées cylindro-polaires  $\rho, \alpha, z$ , l'expression de  $\Omega$  sous forme canonique est :

$$\Omega = dp \wedge d\rho + dq \wedge d\alpha + dr \wedge dz - \left( p dp + \frac{1}{\rho^2} q dq + r dr - \frac{q^2}{\rho^3} d\rho \right) \wedge dt + \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dt + \frac{e}{m} \left[ \left( \frac{W}{\rho} q - V'r \right) d\rho + (U_\rho r - W_\rho p) d\alpha + \left( pV' - \frac{U}{\rho} q \right) dz \right] \wedge dt.$$

Précisons la forme de la fonction  $f$  par l'existence de certaines transformations infinitésimales :

$$\begin{array}{lll} Z(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) & A(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) & T(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \theta(Z)\Omega = 0 & \theta(A)\Omega = 0 & \theta(T)\Omega = 0 \end{array}$$

Appliquons la formule (VI, I) en remarquant que  $d\Omega$  se met sous la forme

$$d\Omega = \frac{e}{m} [-V' dr \wedge d\rho \wedge dt + d(pV') \wedge dz \wedge dt]$$

$$\theta(A)\Omega = d \left[ -dq + \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt \right] = 0 \text{ condition satisfaite si } \frac{\partial f}{\partial \alpha} \text{ est une fonction de } t.$$

Nous supposons  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv 0$ .

$$\theta(Z)\Omega = 0 = i(Z)d\Omega + d(i(Z)\Omega) = -\frac{e}{m} d(pV') \wedge dt \\ + d\left[-dr + \frac{\partial f}{\partial z} dt + \frac{e}{m} (pV')dt\right] = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dt\right)$$

condition satisfaite si  $\frac{\partial f}{\partial z}$  est une fonction de  $t$ , donc réalisée en particulier si  $\frac{\partial f}{\partial z} = -g$  ( $g$  intensité du champ de la pesanteur).

Les conditions précédentes étant supposées réalisées entraînent en outre l'existence de deux intégrales premières.  $\Omega$  s'écrit

$$\Omega = dp \wedge d\varphi + dq \wedge d\alpha + dr \wedge dz - \left(p dp + \frac{1}{\varrho^2} q dq + r dr - \frac{q^2}{\varrho^3} d\varphi\right) \wedge dt \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho - g dz\right) \wedge dt + \frac{e}{m} [-V'r d\varphi + pV' dz] \wedge dt$$

$$i(A)\Omega = dq$$

Si  $P$  désigne le champ de composantes  $\left(-\frac{e}{m} V', 0, 0, 0, 0, -1, 0\right)$

$$i(P)\Omega = -\frac{e}{m} V'(\rho) d\varphi + dr + g dt.$$

En appliquant la théorie générale on connaît 3 formes invariantes  $\pi^1, \pi^2, \pi^3$  et 3 formes formant un système complètement intégrable  $\pi^4, \pi^5, \pi^6$ . Puisqu'on connaît 3 intégrales premières on peut choisir 3 champs  $x$  pour que ce soient les 3 formes  $\pi^4, \pi^5, \pi^6$ . Un calcul facile donne

$$\pi^1 = d\alpha - \frac{q}{p\varrho^2} d\varphi \quad \pi^4 = dq \\ \pi^2 = dz + \frac{r}{p} d\varphi \quad \pi^5 = dr - \frac{e}{m} V'(\rho) d\varphi + g dt \\ \pi^3 = -dt + \frac{1}{p} d\rho \quad \pi^6 = d\left(p^2 + \frac{q^2}{\varrho^2} + r^2 - 2f(\rho) + 2gz\right)$$

Les 3 premières formes égalées à zéro constituent un système différentiel en général non intégrable par quadratures modulo les 3 dernières. Cas particulier : On supprime la pesanteur  $g=0$ .  $\pi^1, \pi^2, \pi^3$  sont fermées modulo  $\pi^4, \pi^5, \pi^6$  le système est intégrable par quadratures.

III. Mouvement plan d'un solide sur un plan dans le cas d'un plan de symétrie permanent.

D'après la théorie développée nous devons considérer le solide comme libre. Sa position est définie par trois paramètres :  $\xi$  et  $\eta$  coordonnées de son centre de gravité G,  $\alpha$  angle de Gy avec Gx, Gy étant la normale au plan, Gx, demi-droite invariablement au solide. Les trois paramètres de vitesse sont  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{\alpha}$ . Les forces extérieures autres que la réaction du plan ont pour résultante générale X, Y, et pour moment résultant par rapport à G :  $\Gamma$ . Soit M la masse du solide,  $k$  son rayon de giration par rapport à G. La forme extérieure associée au solide libre est

$$\Omega_t = M(d\xi \wedge d\eta + d\dot{\eta} \wedge d\dot{\eta} + k^2 d\dot{\alpha} \wedge d\alpha) - M(\dot{\xi} d\dot{\xi} + \dot{\eta} d\dot{\eta} + k^2 \dot{\alpha} d\dot{\alpha}) \wedge dt + [X d\xi + Y d\eta + \Gamma d\alpha] \wedge dt.$$

Le champ E caractéristique a pour composantes :

$$\frac{X}{M}, \quad \frac{Y}{M}, \quad \frac{\Gamma}{Mk^2}, \quad \dot{\xi}, \quad \dot{\eta}, \quad \dot{\alpha}, \quad 1,$$

*Étude de la liaison* : Soit P le point de contact du solide avec le plan dont les coordonnées par rapport à des axes Gx, Gy respectivement parallèles au plan et à la normale à ce dernier sont  $a$  et  $b$ ,  $a$  et  $b$  sont des fonctions de  $\alpha$  qu'on détermine en considérant le profil du corps défini comme enveloppe de ses tangentes. Par rapport aux axes Gx, Gy, liés au corps la tangente au profil a pour équation

$$x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p(\varphi) = 0$$

la normale a pour équation

$$-x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi - p'(\varphi) = 0$$

d'autre part

$$\alpha + \varphi = \pi$$

Il en résulte que les expressions de  $a$  et  $b$  en fonction de  $\alpha$  sont

$$a = p'(\pi - \alpha) \quad b = -p(\pi - \alpha),$$

La vitesse du point P qui sera le point de contact du solide avec le plan a pour composantes par rapport aux axes fixes  $\dot{\xi} - b\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\eta} + a\dot{\alpha}$  ;

L'équation de liaison exprimant la condition de contact avec le plan est

$$l = \dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0.$$

La puissance des forces nécessaires pour réaliser cette liaison dépend de certaines hypothèses :

A. Plan parfaitement poli. — C'est une liaison de puissance nulle

$$P = N(\dot{\eta} + a\dot{\alpha}) \quad N \geq 0.$$

La forme  $\Omega_d$  à ajouter à  $\Omega_l$  pour obtenir  $\Omega$  est

$$\Omega_d = N(d\eta + a d\alpha) \wedge dt.$$

Le champ de liaison  $e$  a pour composantes

$$\left( 0, \frac{1}{M}, \frac{a}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

B. Plan rugueux coefficient de frottement  $f$ , paramètre de résistance au roulement  $\delta$ , glissement et roulement du corps  $\dot{\xi} - b\dot{\alpha} \neq 0$

$$P = N[\dot{\eta} + a\dot{\alpha} + \varepsilon f(\dot{\xi} - b\dot{\alpha}) + \varepsilon_1 \delta \dot{\alpha}] \quad N > 0$$

avec  $\varepsilon(\dot{\xi} - b\dot{\alpha}) < 0$   $\varepsilon_1 \dot{\alpha} < 0$   $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\varepsilon_1 = \pm 1$

La forme  $\Omega_d$  à ajouter à  $\Omega_l$  pour obtenir  $\Omega$  est

$$\Omega_d = N[d\eta + a d\alpha + \varepsilon f(d\xi - b d\alpha) + \varepsilon_1 \delta d\alpha] \wedge dt.$$

Le champ de liaison  $e$  a pour composantes

$$\left( \frac{\varepsilon f}{M}, \frac{1}{M}, \frac{a - \varepsilon f b + \varepsilon_1 \delta}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

C. Plan rugueux, roulement sans glissement du corps

$$P = T(\dot{\xi} - b\dot{\alpha}) + N(\dot{\eta} + a\dot{\alpha} + \varepsilon_1 \delta \dot{\alpha}) \quad N > 0$$

avec deux équations de liaisons  $m = \dot{\xi} - b\dot{\alpha} = 0$ ;  $l = \dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0$  et les deux inégalités  $\varepsilon_1 \dot{\alpha} < 0$   $|T| < fN$ .

La forme  $\Omega_d$  à ajouter à  $\Omega_l$  pour obtenir  $\Omega$  est :

$$\Omega_d = [T(d\xi - b d\alpha) + N(d\eta + a d\alpha + \varepsilon_1 \delta d\alpha)] \wedge dt.$$

Les deux champs de liaisons ont pour composantes :

$$e^2 \left( \frac{1}{M}, 0, \frac{-b}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$e^1 \left( 0, \frac{1}{M}, \frac{a + \varepsilon_1 \delta}{Mk^2}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Réaction du plan. — Un des principaux avantages de l'emploi des opérateurs  $i(x)$  de M. H. Cartan est de pouvoir déterminer les réactions sans avoir au préalable résolu les équations du mouvement. Dans les deux cas A et B la composante  $N$  de la réaction est donnée par l'équation  $Ni(e) dl + i(E) dl = 0$  en remplaçant dans chaque cas  $e$  par sa valeur.

$$dl = d\eta + a d\alpha + \dot{\alpha} d\alpha$$

$$i(E) dl = \frac{Y}{M} + \frac{a\Gamma}{Mk^2} + \dot{\alpha} d\alpha.$$

Cas A.

$$i(e) dl = \frac{1}{M} + \frac{a^2}{Mk^2} \quad \text{d'où} \quad N = -\frac{k^2(Y + M\dot{\alpha}^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2}$$

valeur acceptable si  $Y + M\dot{\alpha}^2 + \frac{a\Gamma}{k^2} < 0$ .

Cas B.  $i(e) dl = \frac{1}{M} + \frac{a(a - \epsilon f b + \epsilon_1 \hat{\delta})}{Mk^2}$ . Cette quantité doit être

différente de zéro pour que la liaison soit compatible; d'où la valeur de N acceptable lorsqu'elle est positive.

$$N = -\frac{k^2(Y + M\dot{\alpha}^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2 - \epsilon f b a + \epsilon_1 a \hat{\delta}}$$

Si  $k^2 + a^2 - \epsilon f b a + \epsilon_1 a \hat{\delta} < 0$  et  $k^2(Y + M\dot{\alpha}^2) + a\Gamma > 0$  il y a deux éventualités possibles : le glissement et la cessation de contact puisque  $\frac{dl}{dt} = i(E) dl > 0$ . Pour  $k^2(Y + M\dot{\alpha}^2) + a\Gamma < 0$  il y a impossibilité qu'on peut interpréter comme un choc tangentiel<sup>(24)</sup>.

Cas C. Les composantes T et N de la réaction du plan sont solutions du système (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} Ni(e_1) dl + Ti(e_2) dl = -i(E) dl \\ Ni(e_1) dm + Ti(e_2) dm = -i(E) dm \end{cases}$$

Ayant déterminé ci-dessus les champs de direction  $e_1$  et  $e_2$ , comme  $dl = d\eta + a d\alpha + \dot{\alpha} \alpha d\alpha$ ,  $dm = d\xi - b d\alpha - \dot{b} \alpha d\alpha$  on a

$$i(e^1) dl = \frac{1}{M} + \frac{a(a + \epsilon_1 \hat{\delta})}{Mk^2}; \quad i(e^2) dl = \frac{-ab}{Mk^2};$$

$$i(E) dl = \frac{Y}{M} + \frac{a\Gamma}{Mk^2} + \dot{\alpha} \alpha^2$$

$$i(e^1) dm = \frac{-b(a + \epsilon_1 \hat{\delta})}{Mk^2} \quad i(e^2) dm = \frac{1}{M} + \frac{b^2}{Mk^2}$$

$$i(E) dm = \frac{X}{M} - \frac{b\Gamma}{Mk^2} - b\dot{\alpha}^2.$$

Les liaisons ne sont compatibles que si  $k^2 + a^2 + b^2 - \epsilon_1 a \hat{\delta} \neq 0$ , d'où

$$T = -\frac{(k^2 + a^2 + a\epsilon_1 \hat{\delta})(X - M\dot{b}\dot{\alpha}^2) + b(a + \epsilon_1 \hat{\delta})(Y + M\dot{\alpha}^2) - b\Gamma}{k^2 + a^2 + b^2 - \epsilon_1 a \hat{\delta}},$$

$$N = -\frac{ab(X - M\dot{b}\dot{\alpha}^2) + (Y + M\dot{\alpha}^2)(k^2 + b^2) + a\Gamma}{k^2 + a^2 + b^2 - \epsilon_1 a \hat{\delta}}.$$

(24) Cf. E. DELASSUS et J. PÉRÈS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5<sup>e</sup> Série, tome II, 1923, p. 383-391.

L'hypothèse C n'est acceptable que si  $N > 0$  et  $|T| < fN$ .

La détermination des diverses éventualités échappement, roulement sans glissement, glissement peut se faire en interprétant géométriquement le système (1). Traçons dans un plan deux axes rectangulaires  $O\dot{l}$ ,  $O\dot{m}$ , et considérons les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  de coordonnées respectives  $(-i(e^1) dl, -i(e^1) dm)$   $(-i(e^2) dl, -i(e^2) dm)$ . Traçons également les demi-droites D et D'  $T = \pm fN$ ,  $N > 0$ . Les seconds membres du système (1) étant indépendants des éventualités interprétons  $i(E) dl$ ,  $i(E) dm$  comme les coordonnées d'un point A du plan. Par A menons d'un part la parallèle à  $\vec{t}$  qui coupe le support de  $\vec{n}$  en N, D et D' en  $\alpha$  et  $\alpha'$ , d'autre part la parallèle à  $O\dot{m}$  qui coupe  $O\dot{l}$  en  $\dot{l}$ . Des signes de N et de  $\dot{l}$ , de la position de A par rapport à  $\alpha\alpha'$  et du signe du produit  $\frac{T dm}{dt}$  on déduit les éventualités susceptibles de se produire :

rappelons que  $\frac{dl}{dt} = i(E) dl$  et que  $\frac{dm}{dt} = i(E) dm$  (cf. chap. 1 § III)

échappement  $i(E) dl > 0$

roulement sans glissement  $N > 0$ , A à l'intérieur de  $\alpha\alpha'$

glissement naissant  $N > 0$ ,  $T \frac{dm}{dt} < 0$ , A l'extérieur de  $\alpha\alpha'$ .

Notons que la présence du paramètre de résistance au roulement permet de mettre en évidence des cas d'indétermination et d'impossibilité. Ainsi pour  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\delta > \frac{k^2 + a^2}{a}$  les vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  ont la disposition de la figure ci-jointe ; il en résulte ces circonstances pour des valeurs convenables de  $i(E) dl$  et  $i(E) dm$ .

Étude des équations différentielles du mouvement. — L'étude des équations différentielles du mouvement s'effectue au moyen de la connaissance des transformations infinitésimales qu'admet la forme génératrice  $\Omega$ . Les composantes de la réaction se déterminant en fonction des forces extérieures et des vitesses, il suffit d'exprimer que  $\Omega_i$  (correspondant au solide libre) admet les dites transformations ainsi que la forme différentielle de l'équation de liaison qui est  $dl = d\dot{r}_i + a d\dot{x} + a\dot{x} dx$ .

Ainsi imposons au système les transformations infinitésimales engendrées par les champs :

$$\begin{aligned} T(0, & 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\ \bar{E}(0, & 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ H(0, & 0, 0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que la forme  $dl$  les admet. Exprimons que  $\Omega_t$  les admet, en supposant que le système des forces extérieures  $X, Y, \Gamma$ , ne dépend que des variables  $\xi, \eta, \alpha, t$ ,

$$d\Omega_t = \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge d\xi \wedge dt + \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha \right) \wedge d\eta \wedge dt + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge d\alpha \wedge dt.$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad \theta(\mathbf{T}) \Omega_t &= i(\mathbf{T}) d\Omega_t + d(i(\mathbf{T}) \Omega_t) \\ &= \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge d\xi + \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha \right) \wedge d\eta \\ &\quad + \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} d\eta \right) \wedge d\alpha - d(X d\xi + Y d\eta + \Gamma d\alpha) = 0 \end{aligned}$$

d'où 
$$-\frac{\partial X}{\partial t} d\xi \wedge dt - \frac{\partial Y}{\partial t} d\eta \wedge dt - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} d\alpha \wedge dt = 0$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial X}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \theta(\Xi) \Omega_t &= i(\Xi) d\Omega_t + d(i(\Xi) \Omega_t) \\ &= - \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta - \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\alpha \right) \wedge dt + d(X dt) \\ &= \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi \wedge dt + \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\eta \wedge dt + \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} d\alpha \wedge dt = 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \equiv 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \equiv 0.$$

3°  $\theta(\mathbf{H}) \Omega_t = 0$  donne par un calcul semblable

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} \equiv 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} \equiv 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \equiv 0.$$

Conséquence  $X, Y, \Gamma$ , sont des fonctions de la seule variable  $\alpha$ . conditions que nous supposons réaliser dans tout ce qui suit.

**Etude du cas A mouvement sur le plan parfaitement poli.** — La liaison étant holonome et indépendante du temps on peut constituer une forme  $\Omega_t$  réduite (cf. chap. II, § VII, remarque 3) obtenue en tenant compte de la liaison.

$$\begin{aligned} \Omega_t &= M d\xi \wedge d\xi + M(k^2 + a^2) d\dot{\alpha} \wedge d\alpha \\ &\quad - M[\dot{\xi} d\xi + (k^2 + a^2)\dot{\alpha} d\alpha + a\dot{\alpha}^2 d\alpha] \wedge dt \\ &\quad + [X d\xi + (\Gamma - aY) d\alpha] \wedge dt. \end{aligned}$$

Conformément au lemme du cas  $d\Omega \neq 0$ , nous déterminons 4 champs  $\xi, t, u, v$ , dont les composantes sont données par le tableau suivant :

	$d\xi$	$d\dot{\alpha}$	$d\xi$	$d\alpha$	$dt$
$\xi$	$\frac{1}{M}$	$-\frac{\dot{\xi}}{M(k^2 + a^2)\dot{\alpha}}$	0	0	0
$t$	0	$-\frac{1}{M(k^2 + a^2)\dot{\alpha}}$	0	0	0
$u$	0	$\frac{Ma\dot{\alpha}^2 - \Gamma + aY}{M^2(k^2 + a^2)}$	0	$-\frac{\dot{\alpha}}{M}$	0
$v$	0	$-\frac{X}{M(k^2 + a^2)\dot{\alpha}}$	$-\frac{1}{M}$	0	0

On en déduit les formes invariante

$$\pi^1 = i(\xi)\Omega_1 = d\xi - \frac{\dot{\xi}}{\dot{\alpha}} d\alpha, \quad i(t)\Omega_s = dt - \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}$$

le système des formes complètement intégrables

$$\pi^3 = i(u)\Omega_s = (k^2 + a^2)\dot{\alpha} d\dot{\alpha} + a\dot{\alpha}^2 d\alpha - \frac{\Gamma - aY}{M} d\alpha,$$

$$\pi^4 = i(v)\Omega_s = d\xi - \frac{X}{M\dot{\alpha}} d\alpha$$

$\pi^3$  est une différentielle exacte. en intégrant on obtient

$$\dot{\alpha}^2(k^2 + a^2) - \frac{2}{M} \int (\Gamma - aY) d\alpha = \text{const.}$$

$\pi^4$  est fermée modulo  $\pi^3$ ,  $\pi^1$  et  $\pi^2$  sont des formes fermées modulo  $\pi^3, \pi^4$ . Le système est donc intégrable par quadratures.

Étude du cas B : glissement du solide sur le plan rugueux. — Il n'y a pas un avantage appréciable à utiliser une forme réduite, un choix convenable de champs  $\xi, t, u, v$ , permettant de former aisément des formes différentielles ne dépendant pas de la composante normale de la réaction du plan. Nous prendrons donc

$$\begin{aligned} \Omega = & M d\xi \wedge d\xi + M d\dot{\eta} \wedge d\dot{\eta} + Mk^2 d\dot{\alpha} \wedge d\alpha \\ & - M(\dot{\xi} d\xi + \dot{\eta} d\dot{\eta} + k^2 \dot{\alpha} d\dot{\alpha}) \wedge dt + (X d\xi + Y d\dot{\eta} + \Gamma d\alpha) \wedge dt \\ & N[d\dot{\eta} + ad\alpha + \varepsilon f(d\xi - bd\alpha) + \varepsilon_1 \delta d\alpha] \wedge dt. \end{aligned}$$

En appliquant toujours le lemme du cas  $d\Omega \neq 0$ , nous déterminons

6 champs  $\xi, \eta, t, u, v, w$ , dont les composantes sont données dans le tableau suivant :

	$d\check{\xi}$	$d\check{\eta}_i$	$d\check{\alpha}$	$d\xi$	$d\eta$	$d\alpha$	$dt$
$\xi$	$\frac{1}{M}$	0	$-\frac{\check{\xi}}{Mk^2\check{\alpha}}$	0	0	0	0
$\eta$	0	$\frac{1}{M}$	$-\frac{\check{\eta}_i}{Mk^2\check{\alpha}}$	0	0	0	0
$t$	0	0	$-\frac{1}{Mk^2\check{\alpha}}$	0	0	0	0
$u$	0	0	$\frac{(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta)Y - \Gamma}{Mk^2}$	0	$(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta)\check{\alpha}$	$-\check{\alpha}$	0
$v$	-1	$\varepsilon f$	$-\frac{X - \varepsilon f Y}{Mk^2\check{\alpha}}$	0	0	0	0
$w$	0	0	$\frac{a\check{\alpha}}{Mk^2}$	0	$-\frac{1}{M}$	$-\frac{a}{Mk^2}$	0

On en déduit les formes invariantes

$$\pi^1 = i(\check{\xi}) \Omega = d\xi - \frac{\check{\xi}}{\check{\alpha}} d\alpha; \quad \pi^2 = i(\check{\eta}_i) \Omega = d\eta_i - \frac{\check{\eta}_i}{\check{\alpha}} d\alpha;$$

$$\pi^3 = i(t) \Omega = dt - \frac{1}{\check{\alpha}} d\alpha$$

le système de formes complètement intégrale

$$\pi^4 = i(u) \Omega = [(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta) Y - \Gamma] d\alpha - M(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta)\check{\alpha} d\eta_i + Mk^2\check{\alpha} d\check{\alpha}$$

$$\pi^5 = i(v) \Omega = Md(\check{\xi} - \varepsilon f\check{\eta}_i) - (X - \varepsilon f Y) \frac{d\alpha}{\check{\alpha}}$$

$$\pi^6 = i(w) \Omega = d\eta_i + a d\check{\alpha} + \check{\alpha} d\alpha.$$

Pour le calcul de  $i(w) \Omega$  on tient compte de la valeur de N calculée précédemment. La forme  $\pi^6$  n'est autre que la différentielle de la liaison. La forme  $\pi^4$  compte tenu de la liaison est une équation différentielle linéaire en  $\check{\alpha}^2$  qu'on intégrerait par quadratures.

$$\frac{M}{2} [k^2 + a^2 - \varepsilon fba + \varepsilon_i \delta a] d\check{\alpha}^2 + M\check{\alpha}(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta) \check{\alpha}^2 d\alpha + [(a - \varepsilon fb + \varepsilon_i \delta) Y - \Gamma] d\alpha = 0.$$

La forme  $\pi^5$  est fermée module  $\pi^4$ . Les formes  $\pi^1$  et  $\pi^3$  sont fermées modul  $\pi^4$  et  $\pi^5$ . Le système s'intègre donc par des quadratures.

Étude du cas C: roulement sans glissement. — Nous distinguerons deux cas suivant qu'on néglige ou non le couple de résistance au roulement.

a)  $\hat{\delta} = 0$ : Les deux liaisons sont alors de puissance nulle et indépendantes du temps; on peut donc former comme nous l'avons démontré au chapitre III § IV, une forme réduite en tenant compte des deux liaisons  $\xi - b\dot{\alpha} = 0$ ,  $\dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0$

$$\Omega_r = M(b^2 + a^2 + k^2) d\dot{\alpha} \wedge d\alpha - M[(b^2 + a^2 + k^2) \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + (a\dot{\alpha} + b\dot{\eta}) \dot{\alpha}^2 d\alpha] \wedge dt + (Xb - Ya + \Gamma) d\alpha \wedge dt.$$

Comme  $d\Omega_r = 0$  à la transformation infinitésimale définie par l'opérateur  $\theta(T)$ , correspond l'intégrale première

$$\frac{M}{2} (b^2 + a^2 + k^2) \dot{\alpha}^2 - \int (Xb - Ya + \Gamma) d\alpha = \text{const.}$$

Le temps  $t$  étant défini en fonction de  $\alpha$  au moyen de la forme fermée modulo la précédente

$$i(t) \Omega_r = dt - \frac{1}{\dot{\alpha}} d\alpha.$$

b)  $\hat{\delta} \neq 0$ . La liaison  $\xi - b\dot{\alpha} = 0$  est de puissance nulle et indépendante du temps, l'autre  $\dot{\eta} + a\dot{\alpha} = 0$  ne l'est pas. En conséquence nous ne ferons que la réduction partielle correspondant à la première.

$$\Omega_r = M(b^2 + k^2) d\dot{\alpha} \wedge d\alpha + M d\dot{\eta} \wedge d\eta - M[(b^2 + k^2) \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + b\dot{\alpha}^2 d\alpha + \dot{\eta} d\dot{\eta}] \wedge dt + (Xb + \Gamma) d\alpha \wedge dt + Y d\eta \wedge dt + N(d\eta + a d\alpha + \varepsilon_1 \hat{\delta} d\alpha) \wedge dt,$$

Employant toujours le même principe on détermine les champs  $\eta$ ,  $t$ ,  $u$ ,  $w$ , qui au moyen de l'opérateur  $i(\ )$  engendrent :

1° les formes invariantes  $\pi^1$ ,  $\pi^2$

$$\pi^1 = i(\eta) \Omega_r = d\eta - \frac{\dot{\eta}}{\dot{\alpha}} d\alpha; \quad \pi^2 = i(t) \Omega_r = dt - \frac{1}{\dot{\alpha}} d\alpha.$$

2° les formes  $\pi^3$ ,  $\pi^4$ , constituant un système complètement intégrable

$$\pi^3 = i(u) \Omega_r = M(b^2 + k^2) \dot{\alpha} d\dot{\alpha} + M b \dot{\alpha}^2 d\alpha - M(a + \varepsilon_1 \hat{\delta}) \dot{\alpha} d\dot{\eta} - [Xb + \Gamma - (a + \varepsilon_1 \hat{\delta}) Y] d\alpha$$

$$\pi^4 = i(w) \Omega_r = d(\dot{\eta} + a\dot{\alpha})$$

$\pi^3$  compte tenu de la dernière qui est la différentielle de la relation de

liaison est une équation différentielle linéaire en  $\dot{\alpha}^2$  qui s'intègre par quadratures

$$\frac{M}{2} (b^2 + k^2 + a^2 + a\varepsilon, \delta) d\dot{\alpha}^2 + M(b\dot{b} + a\dot{a} + a\varepsilon, \delta) \dot{\alpha}^2 d\alpha - [Xb + \Gamma - (a + \varepsilon, \delta) Y] d\alpha = 0,$$

$\pi^2$  fermée modulo  $\pi^3$  définit le temps  $t$  en fonction de  $\alpha$ , au moyen d'une quadrature.

IV. Un solide de révolution homogène, pesant, de masse  $M$ . de centre de gravité  $G$ , est prolongé par une tige dirigée suivant son axe de révolution  $Gz$ . Ce solide est en contact avec un plan horizontal fixe  $Ox_1 y_1$ , la tige  $Gz$  glisse sans frottement dans une rainure orientable dont l'axe est la normale fixe  $Oz_1$  au plan  $Ox_1 y_1$ . Étudier le roulement sans glissement du solide sur le plan puis son glissement, le coefficient de frottement  $f$  du solide sur le plan étant constant.

La méridienne de la surface de révolution limitant le solide est définie comme enveloppe des plans tangents à la surface. Par rapport à un système d'axes liés au corps,  $\lambda$  étant l'angle polaire de  $Gz$  avec la normale  $GH$  au plan tangent, on a :

$$\begin{aligned} z \cos \lambda - v \sin \lambda - b(\lambda) &= 0, \\ z \sin \lambda + v \sin \lambda + b'(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

$\theta$  étant l'angle ( $Gz_1, Gz$ )  $\theta + \lambda = \pi$ ,  $P$  étant le point de contact du corps et du plan, les composantes de  $GP$  par rapport aux axes  $Gv_1$  (horizontale du plan  $Oz_1 G$ ) et  $Gz_1$  (verticale ascendante) sont respectivement  $b'(\pi - \theta)$ ,  $-b(\pi - \theta)$ .

Soient respectivement  $Mc^2$ ,  $Ma^2$  les moments d'inertie du solide par rapport à  $Gz$  et un axe perpendiculaire,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\zeta$ , les coordonnées cylindro-polaires de  $G$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , les angles classiques d'Euler, paramètres de la rotation du corps autour de  $G$ .

La forme extérieure associée au solide libre, en utilisant le trièdre  $Guvz$  ( $Gu$  horizontal) mobile dans le corps et dans l'espace s'obtient soit en appliquant pour le mouvement autour de  $G$  la formule établie au chapitre 1 § II c avec  $\Omega^1 = \omega^1 = d\theta$ ,  $\Omega^2 = \omega^2 = \sin \theta d\psi$ ,  $\Omega^3 = \omega^3 \cotg \theta = \cos \theta d\psi$  soit directement comme dérivée extérieure de la forme de Pfaff génératrice de l'invariant intégral

$$\dot{\rho} d\rho + u d\alpha + \dot{\zeta} d\zeta + a^2 p \omega^1 + a^2 q \omega^2 + a^2 r \omega^3 - H dt$$

avec

$\omega^1 = d\theta$ ,  $\omega^2 = \sin \theta d\psi$ ,  $\omega^3 = d\varphi = \cos \theta d\psi$ ,  $u = \rho^2 \dot{\alpha}$ ,  $p, q, r$ , composantes de la vitesse de rotation absolue du corps, sur les axes

mobiles  $Guvz$

$$2H = \dot{\rho}^2 + \frac{u^2}{\rho^2} + \dot{\zeta}^2 + a^2(p^2 + q^2) + c^2 r^2 + g\zeta$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{M} = & d\dot{\rho} \wedge d\dot{\zeta} + du \wedge d\alpha + d\zeta \wedge d\zeta - \left( \dot{\rho} d\dot{\rho} + \dot{\zeta} d\zeta + \frac{u}{\rho^2} du - \frac{u^2}{\rho^3} d\rho \right) \wedge dt \\ & - g d\zeta \wedge dt + a^2 dp \wedge \omega^1 + a^2 dq \wedge \omega^2 + c^2 dr \wedge \omega^3 - c^2 r \omega^1 \wedge \omega^2 \\ & - a^2 q \cotg \theta \omega^2 \wedge \omega^1 - [a^2(p dp + q dq) + c^2 r dr] \wedge dt \end{aligned}$$

Le champ caractéristique  $E$  pour le solide libre a pour composantes :

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{\rho^3}, 0, -g, q^2 \cotg \theta - \frac{c^2}{a^2} r q, \\ & \frac{c^2}{a^2} r p - p q \cotg \theta, 0, \dot{\rho}, \frac{u}{\rho^2}, \dot{\zeta}, p, q, r, 1, \end{aligned}$$

les différentielles des variables étant rangées dans l'ordre :  $d\dot{\rho}, du, d\zeta, dp, dq, dr, d\rho, d\alpha, d\zeta, \omega^1, \omega^2, \omega^3, dt$

### A. Étude du roulement sans glissement du solide.

1) Liaisons. La tige  $Gz$  demeure toujours dans le plan  $Oz G$ , ce qui se traduit par la liaison holonome  $\alpha = \psi + \frac{\pi}{2}$ ; à notre point de vue c'est une liaison de puissance nulle

$$a_1 = \frac{u}{\rho^2} - \frac{\sin \theta}{q} = 0,$$

$$P^1 = \frac{L}{M}(\dot{\alpha} - \dot{\psi}) \quad \text{forme} \quad \Omega^1 = \frac{L}{M} \left( d\alpha - \frac{\omega^2}{\sin \theta} \right) \wedge dt$$

Le roulement sans glissement du corps sur le plan se traduit par trois liaisons de puissance nulle. En écrivant que les composantes de  $\vec{V}_p$  sont nulles par rapport au trièdre  $Gu, Gv, Gy$ , on obtient :

$$a^1 = -\frac{u}{\rho} - (b' \sin \theta + b \cos \theta)q + (b \sin \theta - b' \cos \theta)r = 0$$

$$P^2 = \frac{X}{M} [-\rho \dot{\alpha} - (b' \sin \theta + b \cos \theta)q + (b \sin \theta - b' \cos \theta)r]$$

$$\Omega^2 = \frac{X}{M} [-\rho d\alpha - (b' \sin \theta + b \cos \theta)\omega^2 + (b \sin \theta - b' \cos \theta)\omega^3] \wedge dt$$

$$a^3 = \dot{\rho} + bp = 0, \quad P^3 = \frac{Y}{M} (\dot{\rho} + bp), \quad \Omega^3 = \frac{Y}{M} (d\rho + b d\theta)$$

$$a^4 = \dot{\zeta} + b'p = 0, \quad P^4 = \frac{Z}{M} (\dot{\zeta} + b'p), \quad \Omega^4 = \frac{Z}{M} (d\zeta + b' d\theta).$$

Les six premières composantes de champs de liaison  $e^1, e^2, e^3, e^4$ , non toutes nulles sont données dans le tableau (les champs de liaison n'ont que  $n$  composantes non toutes nulles en coordonnées Hamiltoniennes).

	$d\dot{p}$	$du$	$d\zeta$	$dp$	$dq$	$dr$
$e^1$	0	1	0	0	$-\frac{1}{a^2 \sin \theta}$	0
$e^2$	0	$-\rho$	0	0	$-\frac{b \cos \theta + b' \sin \theta}{a^2}$	$\frac{b \sin \theta - b' \cos \theta}{c^2}$
$e^3$	1	0	0	$\frac{b}{a^2}$	0	0
$e^4$	0	0	1	$\frac{b'}{a^2}$	0	0

La condition de compatibilité de l'ensemble des liaisons se déduit du déterminant de la matrice carrée symétrique  $\|i(e^h) da^k\|$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} & -\frac{1}{\rho} + \frac{b' \sin \theta + b \cos \theta}{a^2 \sin \theta} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} + \frac{b' \sin \theta + b \cos \theta}{a^2 \sin \theta} & 1 + \frac{(b \cos \theta + b' \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(b \sin \theta - b' \cos \theta)^2}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{b^2}{a^2} & \frac{bb'}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{bb'}{a^2} & 1 + \frac{b'^2}{a^2} \end{vmatrix} \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b'^2}{a^2}\right) \left[ \left(\frac{1}{a \sin \theta} + \frac{b \cos \theta + b' \sin \theta}{a\rho}\right)^2 + \frac{(b \sin \theta - b' \cos \theta)^2}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}\right) \right] \neq 0.$$

Les valeurs des réactions s'obtiennent en calculant les  $i(\mathbf{E}) da^k$  ( $k$  de 1 à 4)

$$i(\mathbf{E}) da^1 = -\frac{c^2}{a^2 \sin \theta} rp + \frac{2pq \cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{2u\dot{p}}{\rho^3}$$

$$i(\mathbf{E}) da^2 = (b \cos \theta + b' \sin \theta) \left( pq \cotg \theta - \frac{c^2}{a^2} rp \right) + \frac{u\dot{p}}{\rho^2} + (b + b')(q \sin \theta + r \cos \theta)p$$

$$i(\mathbf{E}) da^3 = \frac{u^2}{\rho^3} + b \left( q^2 \cotg \theta - \frac{c^2}{a^2} rq \right) - b'p^2$$

$$i(\mathbf{E}) da^4 = -g + b' \left( q^2 \cotg \theta - \frac{c^2}{a^2} rq \right) - b''p^2$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b'^2}{a^2}\right) \frac{Y}{M} = - \left(1 + \frac{b'^2}{a^2}\right) \frac{u^2}{\rho^2} - \frac{bb'}{a^2} g$$

$$+ b'p^2 \left(1 + \frac{b'^2}{a^2} - \frac{bb''}{a^2}\right) + bq \left(\frac{c^2}{a^2} r - q \cotg \theta\right)$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b'^2}{a^2}\right) \frac{Z}{M} = \frac{bb' u^2}{a^2 \rho^3} + \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) g + p^2 \left(b'' + b \frac{bb'' - b'^2}{a^2}\right)$$

$$+ b'q \left(\frac{c^2}{a^2} r - q \cotg \theta\right)$$

$$\Delta \frac{X}{M} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{b \cos \theta + b' \sin \theta}{a^2 \sin \theta}\right) \left(\frac{c^2 r p}{a^2 \sin \theta} - \frac{2pq \cotg \theta}{\sin \theta} + \frac{2u \dot{\rho}}{\rho^3}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}\right) \left[ (b \cos \theta + b' \sin \theta) \left(\frac{c^2 r p}{a^2} - pq \cotg \theta - \frac{u \dot{\rho}}{\rho^2}\right) \right.$$

$$\left. - (b + b'') p (q \sin \theta + r \cos \theta) \right]$$

$$\Delta \frac{L}{M} = \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{b \cos \theta + b' \sin \theta}{a^2 \sin \theta}\right) \left[\frac{u \dot{\rho}}{\rho^2} + (b + b'') p (q \sin \theta + r \cos \theta) \right.$$

$$\left. + (b \cos \theta + b' \sin \theta) \left(pq \cotg \theta - \frac{c^2}{a^2} r p\right) \right]$$

$$+ \left[1 + \frac{(b \cos \theta + b' \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(b \sin \theta - b' \cos \theta)^2}{c^2}\right]$$

$$\left(\frac{c^2}{a^2 \sin \theta} r p - \frac{2pq \cotg \theta}{\sin \theta} + 2u \frac{\dot{\rho}}{\rho^3}\right)$$

$\Delta$  désignant

$$\left(\frac{1}{a \sin \theta} + \frac{b \cos \theta + b' \cos \theta}{a \rho}\right)^2 + \frac{(b \sin \theta - b' \cos \theta)^2}{c^2} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}\right)$$

2. Équations différentielles du mouvement. — Les liaisons compatibles donnent

$$u = \frac{\dot{\rho}^2 q}{\sin \theta}, \quad r = q \frac{\dot{\rho} + b \cos \theta + b' \sin \theta}{b \sin \theta - b' \cos \theta}, \quad \dot{\rho} = -bp, \quad \dot{\zeta} = -b'p$$

( $b \sin \theta - b' \cos \theta \neq 0$  puisque l'enveloppe n'est pas réduite à un point.)

Comme elles sont de puissance nulle, on peut remplacer  $d\alpha$

par  $\frac{\omega^2}{\sin \theta}$ ,  $\omega^3$  par  $\frac{\dot{\rho} + b \cos \theta + b' \sin \theta}{b \sin \theta - b' \cos \theta}$ ,  $d\rho$  par  $-b d\theta$ ,  $d\zeta$  par  $-b' d\theta$

dans  $\Omega$  pour obtenir une forme réduite. Mais  $d\rho + b d\theta$  étant une différentielle exacte,  $\rho$  est une fonction de  $\theta$ ,  $\rho = B(\theta) + C$  ( $C$  const.);

$\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta$ , ne figurant pas dans  $\Omega$  on peut obtenir une forme réduite  $\frac{\Omega}{M}$

définie sur une famille de variétés  $V_6$  (sous-variétés de  $V_{13}$  définies par les liaisons et la famille  $\rho = B(\theta) + C$ ] comme différentielle extérieure de la forme de Pfaff

$$(b^2 + b'^2 + a^2)p \, d\theta + \left[ \frac{(B+C)^2}{\sin^2 \theta} + a^2 + c^2 \left( \frac{B+C}{\sin \theta} + b \cos \theta + b' \sin \theta \right)^2 \right] q \omega^2 - H_1 \, dt$$

avec

$$2H_1 = (b^2 + b'^2 + a^2)p^2 + \left[ \frac{(B+C)^2}{\sin^2 \theta} + a^2 + c^2 \left( \frac{B+C + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{\sin \theta (b \sin \theta - b' \cos \theta)} \right)^2 \right] q^2 - 2bg$$

$b, b', B$ , étant des fonctions de  $\theta$ ,  $q = \dot{\psi} \sin \theta$ ,  $\omega^2 = \sin \theta \, d\psi$ . on peut effectuer les changements de paramètres de vitesse

$$\bar{p} = (b^2 + b'^2 + a^2)p$$

$$\bar{q} = \left[ (B+C)^2 + a^2 \sin^2 \theta + c^2 \left( \frac{B+C + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{b \sin \theta - b' \cos \theta} \right)^2 \right] \frac{q}{\sin \theta}$$

$$\frac{\Omega_s}{M} = d(\bar{p} \, d\theta + \bar{q} \, d\psi - \bar{H}_1 \, dt)$$

avec

$$2\bar{H}_1 = \frac{1}{b^2 + b'^2 + a^2} \bar{p}^2 + \frac{\bar{q}^2}{(B+C)^2 + a^2 \sin^2 \theta + c^2 \left( \frac{B+C + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{b \sin \theta - b' \cos \theta} \right)^2} - 2bg$$

$d\left(\frac{\Omega_s}{M}\right)$  étant nulle, à toute transformation infinitésimale correspond une intégrale première, aux transformations infinitésimales

$$t(0, 0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \Psi(0, 0, 0, 1, 0)$$

correspondent respectivement l'intégrale des forces vives et l'intégrale linéaire  $\bar{q} = \text{const.}$ ; l'intégration s'achève par quadratures.

### B. Étude du glissement du solide sur le plan.

1. Liaisons. — Le glissement sans frottement de la tige dans la rainure est toujours caractérisé par

$$a^1 = \frac{u}{\rho^2} - \frac{q}{\sin \theta} = 0 \quad \Omega^1 = \frac{L}{M} \left( d\alpha - \frac{\omega^2}{\sin \theta} \right) \wedge dt$$

Le contact du solide avec le plan est caractérisé par  $a^2 = \zeta + b'p = 0$

$$\Omega^2 = \frac{N}{M} \left\{ d\zeta + f \cos \sigma [\rho da + (b' \sin \theta + b \cos \theta) \omega^2 + (b' \cos \theta - b \sin \theta) \omega^3] - f \sin \sigma (d\rho + b \omega^1) \right\} \Lambda dt$$

$\sigma$  étant l'angle de  $\vec{V}_g$  vitesse de glissement avec  $Gu$ ,  $\lambda$  la grandeur de  $\vec{V}_g$

$$\frac{\dot{\rho} + b\dot{p}}{\sin \sigma} = \frac{-\frac{u}{\rho} - b'(r \cos \theta + q \sin \theta) + b(r \sin \theta - q \cos \theta)}{\cos \sigma} = \lambda.$$

Les champs des liaisons ont pour composantes :

$$e^1 \left( 0, 1, 0; 0, -\frac{1}{a^2 \sin \theta}, 0 \right)$$

$$e^2 \left( -f \sin \sigma, \rho f \cos \sigma, 1, -\frac{bf \sin \sigma}{a^2}, \frac{f \cos \sigma}{a^2} (b \cos \theta + b' \sin \theta), \frac{f \cos \sigma}{c^2} (b' \cos \theta - b \sin \theta) \right)$$

$$i(e^1) da^1 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta}, \quad i(e^2) da^1 = \frac{f \cos \sigma}{\rho} - \frac{f \cos \sigma (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{a^2 \sin \theta}$$

$$i(e^1) da^2 = 0, \quad i(e^2) da^2 = 1 - f \frac{bb'}{a^2} \sin \sigma.$$

Les liaisons sont compatibles si

$$\left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \right) \left( 1 - f \frac{bb'}{a^2} \sin \sigma \right) \neq 0.$$

Les facteurs de liaisons se déduisent du calcul de  $i(E) da^1$ ,  $i(E) da^2$

$$N = \frac{g + b''p^2 + b' \left( \frac{c^2}{a^2} r q - q^2 \cotg \theta \right)}{1 - f \frac{bb^2}{a^2} \sin \sigma}$$

$$L \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \right) = \frac{2u\dot{\rho}}{\rho^3} + \frac{c^2 r p}{a^2 \sin \theta} - 2pq \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$+ \frac{f \cos \sigma}{1 - f \frac{bb'}{a^2} \sin \sigma} \left[ g + b''p^2 + b' \left( \frac{c^2}{a^2} r q - q^2 \cotg \theta \right) \right]$$

2. Équations différentielles du mouvement. — La première liaison holonome nous permet d'éliminer  $u$  et  $da$ ,  $u = \rho^2 \dot{\psi}$ ,  $da = d\psi$ .

L'introduction des variables  $\lambda$  et  $\sigma$  conduit à effectuer le changement de variables

$$\rho = \lambda \sin \sigma - b\rho \quad r = \frac{\lambda \cos \sigma + \rho \dot{\psi} + \sin \theta (b' \sin \theta + b \cos \theta) \dot{\psi}}{b \sin \theta - b' \cos \theta}$$

La deuxième liaison permet d'éliminer  $\dot{\zeta}$  et  $d\zeta$ ,  $\dot{\zeta} = -b'\rho$

$$d\zeta = f \sin \sigma (d\rho + b d\theta) - f \cos \sigma [(\rho + b') d\psi + (b' \cos \theta - b \sin \theta) d\varphi + (\dot{\zeta} - f\lambda) dt].$$

La forme réduite  $\frac{\Omega_s}{M}$  dépend des 9 différentielles des variables

$\lambda, \sigma, \rho, \dot{\psi}, \psi, \varphi, \theta, p, t$ , mais ne dépend pas des variables  $t, \psi, \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_s}{M} = & d\{(\lambda \sin \sigma - b\rho) d\rho + \rho^2 \dot{\psi} d\psi - b' p f \sin \sigma (d\rho + b d\theta) \\ & + b' p f \cos \sigma [(\rho + b') d\psi + (b' \cos \theta - b \sin \theta) d\varphi] \\ & + b' p (b' p + f\lambda) dt + a^2 p d\theta + a^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta d\psi \\ & + c^2 \frac{\lambda \cos \sigma + \rho \dot{\psi} + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta)}{b \sin \theta - b' \cos \theta} (d\varphi + \cos \theta d\psi) - T dt\} \\ & + g \{ f \sin \sigma (d\rho + b d\theta) - f \cos \sigma [(\rho + b') d\psi \\ & + (b' \cos \theta - b \sin \theta) d\varphi] \} \wedge dt, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 2T = & (\lambda \sin \sigma - b\rho)^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2 + b'^2 \cdot p^2 + a^2 (p^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \\ & + c^2 \left( \frac{\lambda \cos \sigma + \rho \dot{\psi} + \sin \theta (b \cos \theta + b' \sin \theta) \dot{\psi}}{b \sin \theta - b' \cos \theta} \right)^2. \end{aligned}$$

On ne connaît pour  $\frac{\Omega_s}{M}$  que trois transformations infinitésimales

évidentes engendrées par les champs

$$t(0, 0, 0, \dots, 1) \quad \varphi(0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0) \quad \Psi(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0)$$

car il suffit de remarquer que si un tenseur antisymétrique  $k_{\alpha\beta}$  ne dépend pas d'une variable  $\rho^{2n}$ , la forme  $\Omega = k_{\alpha\beta} d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta$  définie sur  $V_{2n+1}$  admet la transformation infinitésimale  $(0, 0, \dots, 1)$ . La solution du problème dépend de l'intégration d'un système de 5 formes de Pfaff complètement intégrables en  $d\lambda, d\sigma, d\dot{\psi}, d\rho, d\theta$  dont on ne connaît pas la solution en termes finis.