Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 159-161.

LES STRATIFIÉS TOPOLOGIQUES ET LES POLYÈDRES

par L. C. SIEBENMANN

On dira qu'un espace métrisable localement compact et localement de dimension finie X est *localement étoilé* si, à tout point $x_0 \in X$, un observateur assez myope risque de se croire au centre de l'univers — pour la raison suivante : x_0 admet un voisinage ouvert U homéomorphe au cône ouvert cK sur un compact K par un homéomorphisme $h : U \xrightarrow{\approx} cK \equiv K \times [0, \infty)/\{K \times 0 = \text{point}\}$ tel que $h(x_0)$ soit le sommet de cK (image de $K \times 0$ dans cK). On est tenté de croire qu'un tel espace est homéomorphe à un polyèdre, c'est-à-dire triangulable. C'est faux (voir plus loin). Il reste néanmoins possible qu'il admette, comme les polyèdres, de jolies stratifications.

CONJECTURE. — *Un tel* X *localement étoilé, une fois muni de la filtration intrinsèque* $X \supset \cdots \supset X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots$, *où* $X^{(n)} = \{x \in X | x$ *n'admet aucun voisinage dans* X *de la forme* $R^{n+1} \times A$, A *quelconque*$\}$, *devient toujours un ensemble stratifié localement conique (= un* CS *ensemble).*

DÉFINITION. — *Un* CS *ensemble* X *est un espace métrisable, localement compact et localement de dimension finie, muni d'une filtration* $X \supset \cdots \supset X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \cdots \supset X^{(0)}$ *par des fermés* $X^{(n)}$, *telle que* $X = \cup\{X^{(n)} | n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *et*

(i) *pour tout* n, *la « strate »* $X^{(n)} - X^{(n-1)}$ *est une variété topologique sans bord de dimension* n,

(ii) *pour tout* n, *et tout point* $x_0 \in (X^{(n)} - X^{(n-1)})$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x_0 *dans* X, *un compact filtré*

$L \supset \cdots \supset L^{(i)} \supset L^{(i-1)} \supset \cdots$, *et un homéomorphisme filtré* $h : U \to cL \times R^n$. *On sous-entend pour* U *la filtration* $U^{(j)} = U \cap X^{(j)}$ *et pour* $cL \times R^n$ *la filtration*

$$(cL \times R^n)^{(j)} = (cL)^{(j-n)} \times R^n$$

où $(cL)^{(k)} = L^{(k-1)} \times (0, \infty)$ *pour* $k \geqslant 1$ *et où*

$$(cL)^{(0)} = \textit{sommet}.$$

Ces CS ensembles sont des objets relativement gentils. On sait démontrer par exemple [2] :

a) Il y a seulement $\aleph_0$ classes d'homéomorphisme filtré de CS ensembles compacts.

b) Tout CS ensemble vérifie plusieurs principes de prolongement des isotopies.

c) Pour tout CS ensemble compact le groupe de ses homéomorphismes est localement contractible.

On n'a pas encore établi un principe de transversalité, cf. [3].

Malgré cette gentillesse il existe des CS ensembles assez exotiques ; par exemple on a :

(1) Un CS ensemble compact X à 2 strates non-vides (dont une est un cercle) tel que X est localement triangulable mais non-triangulable.

(2) Un CS ensemble compact (à trois strates non vides) qui n'est pas localement triangulable.

(3) Un nœud (S^n, K^{n-2}), n pair $\geqslant 6$, qui est localement triangulable (en tant que couple !) mais non-triangulable. Ici K^{n-2} est une $(n-2)$-sphère dans S^n localement nouée le long de deux cercles.

(4) Un CS ensemble X quotient d'une action localement orthogonale d'un groupe cyclique sur $S^n \times S^1$, n pair $\geqslant 4$, tel que X soit non-triangulable.

La construction de ces ensembles utilise des cobordismes non-compacts inversibles, d'une manière brièvement indiquée dans [1, § 3]. La vérification de leurs propriétés repose, d'une part sur la finitude du type d'homotopie des variétés compactes, et d'autre part soit sur une exploitation du tore $T^2 = R^2/Z^2$ soit sur un processus raffiné de répétitions infinies (méthodes inspirées respectivement par Kirby et par Černavskii). L'exposition complète doit apparaître dans un article encore en chantier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. C. Siebenmann, Topological manifolds, *Proc. Cong. Int. Math.* Nice (1970) tome 2, pages 143-163.
[2] L. C. Siebenmann, Deformation of homeomorphisms on stratified sets, *Comment. Math. Helv.* 47 (1972), 123-163.
[3] D. Stone, Stratified polyhedra, Springer Lecture Notes in Math. 252.

L. C. Siebenmann,
Mathématiques,
Université de Paris-Sud,
91405-Orsay.