Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 151-157.

UN THÉORÈME DE FONCTIONS IMPLICITES. APPLICATIONS

par Francis SERGERAERT

---

0. Introduction.

On définit dans le § 1 la catégorie $\mathcal{L}$; au § 2 on donne des exemples d'objets et de morphismes de $\mathcal{L}$; au § 3 figure l'énoncé du théorème de fonctions implicites qui améliore le théorème de Nash-Moser (voir par exemple [5]). Au § 4 on donne une application. Les démonstrations manquantes peuvent être trouvées dans [7].

1. La catégorie $\mathcal{L}$.

1.1. Définition. — *Un objet de* $\mathcal{L}$ *est un quadruplet* $(\mathrm{B}, \mathrm{E}, \eta, \mathcal{S})$ *où :*

a) E *est un espace de Fréchet,*

b) $\eta = (|\,.\,|_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *est une suite croissante de normes définissant la topologie de* E,

c) $\mathcal{S} = (\mathrm{S}(t))_{t\in\mathbf{R}_*^+}$ *est une famille à un paramètre d'opérateurs « d'approximation ».*

$$\mathrm{S}(t) : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ (t \in\,]0, +\infty[\, = \mathbf{R}_*^+),$$

telle que :

$$|\mathrm{S}(t)x|_{i+k} \underset{(i,k)}{\leqslant} t^k|x|_i \quad (i, k \in \mathbf{N},\ t \in \mathbf{R}_*^+, x \in \mathrm{E}).$$
$$|x - \mathrm{S}(t)x|_i \underset{(i,k)}{\leqslant} t^{-k}|x|_{i+k}\ (i, k \in \mathbf{N},\ t \in \mathbf{R}_*^+, x \in \mathrm{E}).$$

d) B *est un ouvert de* E *où* E *est muni de la topologie définie par l'une des normes* $|\,.\,|_i$.

En résumé un $\mathcal{L}$-objet est un ouvert d'un espace de Fréchet possédant de bons opérateurs d'approximation.

1.2. Définition. — *Un $\mathscr{L}$-espace de Fréchet est un triplet* $(E, \eta, \mathscr{S})$ *où* $(E, E, \eta, \mathscr{S})$ *est un $\mathscr{L}$-objet.*

1.3. Proposition. — *Soit* $(E, n, \mathscr{S})$ *un $\mathscr{L}$-espace de Fréchet. Si* $x \in E$, *si* $p, q, r \in \mathbf{N}$ $p \leqslant q \leqslant r$, *alors* :

$$|x|_q \underset{(p,q,r)}{\leqslant} |x|_p^{\frac{r-q}{r-p}} |x|_r^{\frac{q-p}{r-p}}$$

Démonstration. — Pour tout $t \in \mathbf{R}_*^+$:

$$|x|_q \leqslant |S(t)x|_q + |x - S(t)x|_q \underset{(p,q,r)}{\leqslant} t^{q-p}|x|_p + t^{q-r}|x|_r$$

On calcule le minimum de cette fonction de t et on obtient le résultat.

1.4. Définition. — *Soient* B *un $\mathscr{L}$-objet,* E *le $\mathscr{L}$-espace de Fréchet correspondant* $(\supset B)$, $F_1, \ldots, F_q$, G *d'autres $\mathscr{L}$-espaces de Fréchet. Soit* $f: B \times F_1 \times \cdots \times F_q \to G$ *une application.* f *est un q-$\mathscr{L}$-morphisme de classe* C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ *si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

a) f *est linéaire en chacune des* q *dernières variables.*

b) pour tout k $(0 \leqslant k < r+1)$, *on peut trouver un entier positif* d_k *ne dépendant pas de* i, *tel que pour tout* $i \in \mathbf{N}$ *l'application* :

$$f: (B \times F_1 \times \cdots \times F_q, |\cdot|_{i+d_k}) \to (G, |\cdot|_i)$$

soit de classe C^k.

c) si $d^k f$ *désigne la dérivée k-ième de* f *par rapport à la première variable (les autres dérivées sont sans intérêt), alors*

$$d^k f: B \times F_1 \times \cdots \times F_q \times E^k \to G$$

vérifie :

$$\begin{aligned}
&|d^k f(x; y_1, \ldots, y_q; \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)|_i \\
&\quad \underset{(i,k)}{\leqslant} (1 + |x|_{i+d_k})|y_1|_0 \cdots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \cdots |\hat{x}_k|_0 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{q} |y_1|_0 \cdots |y_{l-1}|_0 |y_l|_{i+d_k} |y_{l+1}|_0 \cdots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \cdots |\hat{x}_k|_0 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k} |y_1|_0 \cdots |y_q|_0 |\hat{x}_1|_0 \cdots |\hat{x}_{l-1}|_0 |\hat{x}_l|_{i+d_k} |\hat{x}_{l+1}|_0 \cdots |\hat{x}_k|_0
\end{aligned}$$

où $x \in B$, $y_l \in F_l (1 \leqslant l \leqslant q)$, $\hat{x}_l \in E(1 \leqslant l \leqslant k)$.

1.5. Définition. — *Soient* B, E, $F_1, \ldots, F_q$, G, f, r *comme en* 1.4, *sauf qu'en b) et c) on permet à l'entier* d_k *de dépendre de* i; *on l'écrit alors* $d_{k,i}$. *On dit alors que* f *est un* q-$\mathscr{L}$-*morphisme faible de classe* C^r.

1.6. Théorème. — *Soient* B, C *des* $\mathscr{L}$-*objets*, E, F *les* $\mathscr{L}$-*espaces de Fréchet correspondants. Soient* $G_1, \ldots, G_p$, $H_1, \ldots, H_q$, K *d'autres* $\mathscr{L}$-*espaces de Fréchet. On suppose* B 0-*borné. Soient* $f: B \to C$ *un* $\mathscr{L}$-*morphisme de classe* $C^r (0 \leqslant r \leqslant \infty)$, $g_i: B \times G_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1} \times \cdots \times G_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i} \to H_i$ *des* α_i-$\mathscr{L}$-*morphismes de classe* $C^r (1 \leqslant i \leqslant q$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *étant des entiers de somme* p), *et* $h: C \times H_1 \times \cdots \times H_q \to K$ *un* q-$\mathscr{L}$-*morphisme de classe* C^r.

Soit $F: B \times G_1 \times \cdots \times G_p \to K$ *l'application définie par:*
$F(x; y_1, \ldots, y_p) = h(f(x); g_1(x; y_1, \ldots, y_{\alpha_1}), \ldots, g_q(x; \ldots, y_p))$.
Alors F *est un* p-$\mathscr{L}$-*morphisme de classe* C^r.
(Autrement dit les morphismes se composent).

1.7. $\mathscr{L}$-notions. — On définit de façon standard les notions de $\mathscr{L}$-*variétés de classe* C^r, *de* $\mathscr{L}$-*groupes de Lie de classe* C^r, *de* $\mathscr{L}$-*actions de groupe de classe* C^r.

2. Exemples.

Soit $\pi: E \to M$ un fibré vectoriel de dimension finie sur la variété différentiable compacte M. On sait munir $\Gamma^\infty(\pi)$ (sections de π) de normes $|\cdot|_i$ ($i \in \mathbf{N}$) qui font de $\Gamma^\infty(\pi)$ un espace de Fréchet [1]. D'autre part on peut construire [6] une famille à un paramètre d'opérateurs d'approximation $S(t): \Gamma^\infty(\pi) \to \Gamma^\infty(\pi)$ ($t \in \mathbf{R}_*^+$) qui vérifie les inégalités exigées en 1.1.*c*. Ainsi, si B est un ouvert de $\Gamma^\infty(\pi)$, le quadruplet $(B, \Gamma^\infty(\pi), (|\cdot|)_{i \in \mathbf{N}}, S)$ est un $\mathscr{L}$-objet.

2.1. Théorème. — *Soient* K *et* L *des domaines compacts à bord lisse de* $\mathbf{R}^m$ *et* $\mathbf{R}^n$ *respectivement. Soit* $B \subset C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$ *un ouvert tel que :*

a) B *est* 1-*borné* (*pour les normes habituelles de* $C^\infty(K, \mathbf{R}^n)$),

b) si $f \in B$, *l'image de* f *est incluse dans* L.

Soit $\Phi : \mathrm{B} \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{L}, \mathbf{R}^n)$ *définie par :*

$$\Phi(f, g) = g \circ f.$$

Alors Φ *est un* 1-$\mathscr{L}$*-morphisme de classe* C^∞.

Démonstration. — A titre d'exemple on montre que Φ est un 1-$\mathscr{L}$-morphisme de classe C^0. Ceci résulte du calcul suivant. D'après la formule de Faa-di-Bruno :

$$|d^r(g \circ f)| = \left| \sum_{q=1}^{r} \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_q = r \\ i_1 + \cdots, i_q \geqslant 1}} \sigma_{i_1, \ldots, i_q}(d^q g \circ f) . (d^{i_1} f, \ldots, d^{i_q} f) \right|$$

$$\underset{(r)}{\leqslant} \Sigma |g|_q |f|_{i_1} \ldots |f|_{i_q}$$

$$\underset{r}{\leqslant} \Sigma |g|_0^{\frac{r-q}{r}} |g|_r^{\frac{q}{r}} |f|_1^{\frac{r-i_1+1}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{i_1-1}{r}} \ldots |f|_1^{\frac{r-i_q+1}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{i_q-1}{r}}$$

$$\leqslant \Sigma |g|_0^{\frac{r-q}{r}} |g|_r^{\frac{q}{r}} |f|_{r+1}^{\frac{r-q}{r}} \underset{(r)}{\leqslant} |f|_{r+1} |g|_0 + |g|_r \leqslant |f|_{r+1} |g|_0 + |g|_{r+1}.$$

2.2. Exemples. — Si M et N sont des variétés (M compacte) C^∞, alors $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est muni canoniquement d'une structure de $\mathscr{L}$-variété de classe C^∞, $\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M})$ d'une structure de $\mathscr{L}$-groupe de Lie de classe C^∞, et, si N est aussi compacte l'action Φ :

$$(\mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{M}) \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathrm{N})) \times \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{N})$$

définie par $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ est une $\mathscr{L}$-action de groupe de classe C^∞.

3. Le théorème de fonctions implicites.

3.1. Théorème. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathscr{L}$*-espaces de Fréchet,* $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ *un* $\mathscr{L}$*-objet,* $f : \mathrm{B} \to \mathrm{F}$ *un* $\mathscr{L}$*-morphisme de classe* $\mathrm{C}^r (2 \leqslant r \leqslant \infty)$. *Soient* $x_0 \in \mathrm{B}$ *et* $y_0 = f(x_0)$.

On suppose qu'il existe un 1-$\mathscr{L}$*-morphisme de classe* $\mathrm{C}^p (0 \leqslant p \leqslant r - 1)$:

$$\mathrm{L} : \mathrm{B} \times \mathrm{F} \to \mathrm{E}$$

tel que, si $x \in \mathrm{B}$ *et* $y \in \mathrm{F}$ *alors*

$$df(x, \mathrm{L}(x, y)) = y.$$

Alors il existe un $\mathscr{L}$-objet C, *voisinage de* y_0 *dans* F *et un $\mathscr{L}$-morphisme faible* $s: C \to B$ *de classe* C^p, *tel que* :

$$f \circ s = 1_C.$$

On peut considérer L_x, section de $df(x)$ (pour $x \in B$) comme section infinitésimale de f. Ainsi le théorème 3.1 peut se résumer en disant que si f admet une section infinitésimale L, alors f admet une vraie section s.

4. Applications.

Soient M une variété C^∞, compacte, sans bord, $f: M \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞, et K un compact de $\mathbf{R}$ dont l'intérieur contient $f(M)$. On considère l'application Φ :

$$\mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty_K(\mathbf{R}) \to C^\infty(M)$$

définie par :

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1$$

Cette application est un $\mathscr{L}$-morphisme de classe C^∞(2.2). Sa différentielle en $(id(M), id(\mathbf{R})) \in \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty_K(\mathbf{R})$ est définie par (voir Dieudonné [2], VIII, 12, problème 9) :

$$d\Phi(id(M), id(\mathbf{R}), \xi_1, \xi_2) = df.\xi_1 + \xi_2 \circ f$$

où $\xi_1 \in \Gamma^\infty(TM)$, $\xi_2 \in \Gamma^\infty_K(T\mathbf{R})$, $df \circ \xi_1 + \xi_2 \circ f \in \Gamma^\infty(f^*T\mathbf{R})$.

On écrit plus simplement $D = d\Phi(id(M), id(\mathbf{R}))$, et :

$$D(\xi_1, \xi_2) = df.\xi_1 + \xi_2 \circ f$$

4.1. Définition. — *La codimension de* f, *notée* $c(f)$ *est la codimension (réelle) de l'image de* D *dans* $\Gamma^\infty(f^*T\mathbf{R})$.

En utilisant le théorème 3.1, on démontre le :

4.2. Théorème. — *Il existe un voisinage* $\mathscr{V}$ *de* f *dans* $C^\infty(M)$, *et deux $\mathscr{L}$-morphismes faibles de classe* C^∞ :

$$s_1, s_2 : \mathscr{V} \to \mathrm{Diff}^\infty(M) \times \mathrm{Diff}^\infty_K(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{c(f)}$$

tels que, si :

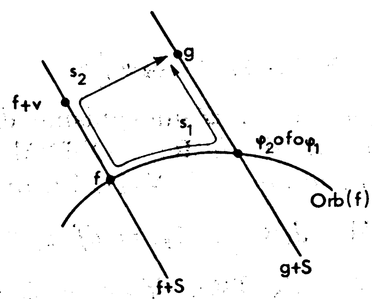
$$s_1(g) = (\varphi_1, \varphi_2; \lambda_1, \ldots, \lambda_{c(f)}); \; s_2(g) = (\psi_1, \psi_2; \mu_1, \ldots, \mu_{c(f)}),$$

alors :

$$g = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1 = \sum_{i=1}^{c(f)} \lambda_i f_i = \psi_2 \circ \left(f + \sum_{i=1}^{c(f)} \lambda_i f_i\right) \circ \psi_1$$

Remarque. — G. Lassalle a démontré récemment, d'une autre façon plus simple et plus directe, sans faire appel au théorème de fonctions implicites 3.1, un résultat plus fort, en ce qu'il s'applique aussi à des fonctions à but quelconque. Voir ces comptes rendus [4].

Interprétation. — Soit $S = \sum_{i=1}^{c(f)} \mathbf{R} f_i$ le sous-espace vectoriel de dimension $c(f)$ de $C^\infty(M)$ engendré par les f_i. L'existence de s_1 montre que, modulo S, tout $g \in C^\infty(M)$ voisin de f est dans l'orbite de f; l'existence de s_2 exprime que g est dans l'orbite de $f + \varphi$ où φ est un élément convenable de S.



On lira dans ces mêmes comptes rendus du colloque de Strasbourg, une autre application du théorème 3.1, à l'étude du groupe $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$; voir Herman [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham and J. Robbin, Transversal mappings and flows, Benjamin, New York, 1967.

[2] J. Dieudonné, Fondements de l'analyse moderne; Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[3] M. Herman, $\mathrm{Diff}^\infty(T^n)$; ces comptes rendus.

[4] G. Lassalle, Théorème de préparation C^r; ces comptes rendus.

[5] J. Moser, A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations; *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A., 47, 1961, 1824-1831.

[6] J. Nash, The imbedding problem for riemannian manifolds; *Ann. of Math.*, 63, 1956, 20-63.

[7] F. Sergeraert, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications; Publications mathématiques d'Orsay, nouvelle série, n° 4; à paraître aux *Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. de Paris*.

Francis Sergeraert,

Département de Mathématiques,
Université de Poitiers,

40, av. du Recteur-Pineau,
86000-Poitiers.