Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 2 (1973), 127-134.

LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DANS LA CATÉGORIE PL

par Howard OSBORN

Dans le sens global la géométrie différentielle d'une variété V du type C^∞ consiste en l'étude des $C^\infty(V)$-modules qui s'attachent aux fibrés vectoriels sur V : à l'aide de la construction de Chern et de Weil on obtient les classes caractéristiques des $C^\infty(V)$-modules, à valeurs dans la cohomologie de de Rham, et on y trouve de tels résultats que le théorème de Gauss-Bonnet, la formule de l'indice de Hirzebruch, etc. Est-ce qu'on peut faire une étude analogue dans le cas d'une variété M du type PL (linéaire par morceaux)? Voilà le but de cette conférence. (Voir [1], [2], [3], [4] pour d'autres exposés qui se rapportent au même sujet.)

Soit M une variété du type PL. Alors, l'algèbre A(M) de [1], analogue à l'algèbre $C^\infty(V)$, consiste en fonctions continues $f: M \to R$ qui vérifient une condition locale en chaque $P \in M$. Dans ce qui suit il suffit de considérer le cas $M = R^n$, le point $P \in M$ étant l'origine $0 \in R^n$.

Soient $e_1, \ldots, e_m \in R^n$ les O-simplexes d'une triangulation de $S^{n-1} \subset R^n$, et pour chaque simplexe $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ soit $\{x_{i_1}e_{i_1} + \cdots + x_{i_p}e_{i_p} | x_{i_1} > 0, \ldots, x_{i_p} > 0\}$ le *coin* qui en résulte. La réunion de ces coins est précisément R^n, et une telle partition de R^n en coins sera notée α.

Il y a un difféomorphisme $\varphi : R^+ \to R^+$ à valeurs $\varphi(x) = \exp \sinh \ln x$, dont $\lim_{x\to 0} \varphi^{(q)}(x) = 0$ pour chaque dérivée $\varphi^{(q)}$. Les applications composées $\varphi_N = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (N fois) vérifient les mêmes conditions : chaque φ_N est un difféomorphisme $R^+ \to R^+$ vérifiant $\lim_{x\to 0} \varphi_N^{(q)}(x) = 0$, $q = 0, 1, 2, \ldots$. Alors, si l'on se donne une partition α de R^n en coins et un entier $N \geqslant 0$, il existe un homéomorphisme $\Phi_{\alpha, N} : R^n \to R^n$ à valeurs

$$\Phi_{\alpha, N}(x_{i_1}e_{i_1} + \cdots + x_{i_p}e_{i_p}) = \varphi_N(x_{i_1})e_{i_1} + \cdots + \varphi_N(x_{i_p})e_{i_p}$$

en chaque coin. D'ailleurs, quoique $\Phi_{\alpha, N}$ soit partout lisse, son inverse $\Phi_{\alpha, N}^{-1}$ ne l'est pas.

DÉFINITION. — *Une fonction continue* $f : R^n \to R$ *est* lissable *en* $0 \in R^n$ *s'il existe une partition* α *de* R^n *en coins et un entier* $N \geqslant 0$ *tels que le germe en* 0 *de* $f \circ \Phi_{\alpha, N} : R^n \to R$ *soit le germe d'une fonction du type* C^∞.

Soient α et α' deux partitions de R^n en coins, telles que α' soit plus fine que α, et soit $N' > N$. On peut démontrer que l'homéomorphisme $\Phi_{\alpha, N}^{-1} \circ \Phi_{\alpha', N'} : R^n \to R^n$ est lisse, bien que son inverse ne le soit pas. Il s'ensuit que si $f, g : R^n \to R$ sont lissables en 0 il en est de même des $f + g$ et fg. De plus, si $\Psi : R^n \to R^n$ est un homéomorphisme du type PL tel que $\Psi(0) = 0$, alors $f.\Psi : R^n \to R$ est lissable en 0 si et seulement si $f : R^n \to R$ l'est aussi. Donc, si l'on se donne un point P d'une variété quelconque M du type PL, on peut considérer l'algèbre de fonctions $f : M \to R$ lissables en P.

DÉFINITION. — *L'algèbre* A(M) *de fonctions lissables sur une variété* M *du type* PL *consiste en toute fonction* $f : M \to R$ *qui est lissable en chaque point* $P \in M$.

Si l'on note par $A_{\alpha, N}$ l'algèbre de germes en 0 des fonctions $f : R^n \to R$ telles que $f \circ \Phi_{\alpha, N} : R^n \to R$ soient lisses, on peut regarder $\Phi_{\alpha, N}$ comme isomorphisme $A_{\alpha, N} \to C^\infty(R^n)_0$. Donc il existe une dérivation évidente $d_{\alpha, N} : A_{\alpha, N} \to E_{\alpha, N}$ à valeurs dans un $A_{\alpha, N}$-module $E_{\alpha, N}$ libre de rang n. De plus, puisque l'application composée $\Phi_{\alpha, N}^{-1} \circ \Phi_{\alpha', N'}$ entraîne un monomorphisme $\rho(\alpha', N'; \alpha, N) : A_{\alpha, N} \to A_{\alpha', N'}$ chaque fois que α' est plus fine que α et $N' > N$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\alpha, N} & \xrightarrow{\rho(\alpha', N'; \alpha, N)} & A_{\alpha', N'} \\ {\scriptstyle d_{\alpha, N}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{\alpha', N'}} \\ E_{\alpha, N} & \xrightarrow{\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)} & E_{\alpha', N'} \end{array}$$

l'application $\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)$ étant l'application jacobienne de $\Phi_{\alpha,N}^{-1} . \Phi_{\alpha',N'}$. Or, la limite inductive $\lim\limits_{\alpha, N} A_{\alpha, N}$ est l'algèbre $A(R^n)_0$ de germes des fonctions lissables en $O \in R^n$, et par ce moyen-ci on définit une dérivation d_0 :

$$A(R^n)_0 \to E(R^n)_0$$

de $A(R^n)_0$ dans un $A(R^n)_0$-module $E(R^n)_0 = \lim\limits_{\alpha, N} E_{\alpha, N}$. En outre, cette dérivation s'étend à un complexe

$$(\Lambda_{A(R^n)_0} E(R^n)_0, d_0).$$

Notons par $R^n_{\alpha, N}$ la source de l'homéomorphisme $\Phi_{\alpha, N}$. Alors on peut regarder $A(R^n)_0$ et $E(R^n)_0$ comme limites inductives $\lim\limits_{\alpha, N} C^\infty(R^n_{\alpha, N})_0$ et $\lim\limits_{\alpha, N} E(C^\infty(R^n_{\alpha, N}))_0$, et il s'ensuit du lemme de Poincaré que $(\Lambda_{A(R^n)_0} E(R^n)_0, d_0)$ est acyclique; c'est-à-dire, le lemme de Poincaré est également valable dans le cas PL. De plus, si l'on se donne une variété M quelconque du type PL on peut construire une dérivation évidente d: $A(M) \to E(M)$ dont les dérivations localisées sont de la forme $d_0 : A(R^n)_0 \to E(R^n)_0$, ce qui implique l'existence d'un complexe $(\Lambda_{A(M)} E(M), d)$ de de Rham.

Proposition. — *L'homologie du complexe* $(\Lambda_{A(M)} E(M), d)$ *est isomorphe à* $H^*(M; R)$.

Démonstration (Voir [1]). — L'existence des partitions $\{h_i\}$ de l'unité sur M est évidente, les fonctions h_i étant membres de A(M), et on se sert du lemme de Poincaré comme d'habitude.

Au lieu de l'algèbre A(M) des fonctions lissables sur M on peut également considérer le faisceau $\mathfrak{A}(M)$ de germes de cette algèbre, dont $A(M) = \Gamma(\mathfrak{A}(M))$. En effet, la bonne définition du module E(M) utilise un faisceau $\mathcal{E}(M)$ analogue de modules sur $\mathfrak{A}(M)$, dont $E(M) = \Gamma(\mathcal{E}(M))$. (En outre, la bonne construction d'un tel faisceau se fait par moyen d'un « antéfaisceau »; voir [2] et [4]. Toutefois, la plupart de la définition de $\mathcal{E}(M)$ se fait par la donnée du module $E(R^n)_0$ sur $A(R^n)_0$.)

De la même manière on introduit un faisceau $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$

d'algèbres sur M par la donnée d'une algèbre $S^{-1}A(R^n)_0$ sur $A(R^n)_0$. Soit $S(R^n)_0$ le sous-ensemble multiplicatif de $A(R^n)_0$ engendré par les déterminants jacobiens

$$\det(\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)),$$

et soit $S^{-1}A(R^n)_0$ l'anneau $S(R^n)_0^{-1}A(R^n)_0$ de fractions qui en résulte. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ quelconque de modules sur le faisceau $\mathfrak{A}(M)$ la définition analogue du faisceau $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ de modules sur $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$ est évidente, et on note par $[\mathcal{F}]$ la classe d'équivalence du faisceau $\mathcal{F}$ par rapport à la relation suivante : $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ veut dire que $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{G}$ sont isomorphes en tant que faisceaux de modules sur $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$.

Définition. — *Soient* M *une variété du type* PL *et* $\mathcal{F}$ *un faisceau de modules sur* $\mathfrak{A}(M)$ *de sorte que* $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ *soit localement libre sur* $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$. *Dans ce cas-là, la classe* $[\mathcal{F}]$ *d'équivalence est une* classe de PL-faisceaux *sur* M.

Par exemple, soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur M et soit $\mathcal{F}$ le $\mathfrak{A}(M)$-module des germes de sections qui en résulte. Alors $\mathcal{F}$ est localement libre sur $\mathfrak{A}(M)$, et il s'ensuit que $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ est localement libre sur $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$; c'est-à-dire, [F] est une classe de PL-faisceaux sur M. Mais il existe d'autres exemples, dont le plus important est la classe $[\mathcal{E}(M)]$. Bien que le faisceau $\mathcal{E}(M)$ ne soit jamais localement libre sur $\mathfrak{A}(M)$, on montre facilement que $\mathcal{S}^{-1}E(M)$ est localement libre sur $\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$; donc $[\mathcal{E}(M)]$ est une classe de PL-faisceaux sur M, lui aussi.

Les classes de PL-faisceaux forment une catégorie fibrée sur la catégorie des variétés M du type PL, analogue à la catégorie des fibrés vectoriels sur la catégorie des variétés V du type C^∞. De plus, selon la remarque précédente chaque variété M possède un objet tangent $[\mathcal{E}(M)]$ qui joue un rôle analogue au rôle du fibré tangent τ_V d'une variété V du type C^∞.

Maintenant soient

$$S^{-1}A(M) = \Gamma(\mathcal{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)) \quad \text{et} \quad S^{-1}E(M) = (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{E}(M)),$$

M étant une variété quelconque du type PL. Alors la dérivation $d: A(M) \to E(M)$ entraîne une dérivation d:

$$S^{-1}A(M) \to S^{-1}E(M)$$

qui s'étend à un complexe modifié de de Rham

$$(\Lambda_{S^{-1}A(M)}S^{-1}E(M), d).$$

Proposition *(théorème modifié de de Rham). — Sauf en dimensions* 0 *et* 1 *l'homologie du complexe*

$$(\Lambda_{S^{-1}A(M)}S^{-1}E(M), d)$$

est isomorphe à $H^*(M; R)$.

Ce résultat nous amène à la construction des classes caractéristiques qui s'attachent aux classes $[\mathcal{F}]$ de PL-faisceaux sur une variété M. Rappelons d'abord l'existence des partitions de l'unité sur M et le fait que $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$ est localement libre sur $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$ pour toute classe $[\mathcal{F}]$ de PL-faisceaux. Il s'ensuit pour le $S^{-1}A(M)$-module $S^{-1}F = \Gamma(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F})$ qu'on peut construire un produit

$$\langle , \rangle : S^{-1}F \otimes_{S^{-1}A(M)} S^{-1}F \to S^{-1}A(M),$$

symétrique et non-dégénéré, ainsi qu'une connexion

$$D: S^{-1}F \to S^{-1}E(M) \otimes S^{-1}F$$

vérifiant la règle $\langle Ds, t\rangle + \langle s, Dt\rangle = d\langle s, t\rangle$.

Soit $\underline{F}$ le $\Lambda S^{-1}E(M)$-module $\Lambda S^{-1}E(M) \otimes_{S^{-1}A(M)} S^{-1}F$ à gauche. Alors le produit $\langle , \rangle$ s'étend à un produit

$$\langle , \rangle : \underline{F} \otimes \underline{F} \to \Lambda S^{-1}E(M)$$

dans le sens évident, et la connexion D s'étend à une application $D: \underline{F} \to \underline{F}$ linéaire sur R vérifiant les règles

$$D(\theta \cdot u) = d\theta \cdot u + (-1)^p \theta \cdot Du$$

et

$$\langle Du, v\rangle + (-1)^q \langle u, Dv\rangle = d\langle u, v\rangle$$

lorsque $\theta \in \Lambda^p S^{-1}E(M)$ et u appartient à $\Lambda^q S^{-1}E(M) \otimes S^{-1}F$. On vérifie que l'application composée $D \circ D$ est linéaire sur $\Lambda S^{-1}E(M)$: c'est l'*application* $K: \underline{F} \to \underline{F}$ *de courbure* qui s'attache à D.

Voici une présentation algébrique de la construction de Chern et de Weil, qui ne dépend que des données du paragraphe précédent :

Proposition. — i) *L'élément* $\det\left(I - \frac{1}{2\pi} K\right) \in \Lambda S^{-1}E(M)$ *est fermé.*

ii) *Si l'on note par* $h(M)$ *la cohomologie du complexe modifié* $(\Lambda S^{-1}E(M), d)$ *de de Rham, alors* $\left[\det\left(I - \frac{1}{2\pi} K\right)\right] \in h^{4*}(M)$.

iii) *La classe* $\left[\det\left(I - \frac{1}{2\pi} K\right)\right]$ *est indépendante du choix de* D.

Démonstration. — Voir [4].

Il en résulte les classes $p([\mathscr{F}])$ de Pontrjagin qui s'attachent à chaque $[\mathscr{F}]$:

Proposition. — *A chaque classe* [F] *de* PL-*faisceaux sur une variété* M *du type* PL *il existe une classe*

$$p([\mathscr{F}]) \in H^{4*}(M; R)$$

vérifiant les axiomes suivants :

i) *Si* $\mathscr{S}^{-1}\mathscr{F}$ *est localement libre du rang* n *sur* $\mathscr{S}^{-1}\mathfrak{A}(M)$ *alors* $p([\mathscr{F}]) = 1 + p_1([\mathscr{F}]) + \cdots + p_{[n/2]}([\mathscr{F}])$, *dont*

$$p_j([\mathscr{F}]) \in H^{4j}(M; R).$$

ii) $p(\Xi^![\mathscr{F}]) = \Xi^* p([\mathscr{F}]) \in H^{4*}(M'; R)$ *pour toute application* $\Xi : M' \to M$ *du type* PL.

iii) $p([\mathscr{F}] \oplus [\mathscr{G}]) = p([\mathscr{F}]) \cup p([\mathscr{G}])$.

iv) *Si* $\mathscr{F}$ *est le* $\mathfrak{A}(M)$-*module des germes de sections d'un fibré vectoriel* ξ *(ce qui implique que* $[\mathscr{F}]$ *est une classe de* PL-*faisceaux), alors* $p([\mathscr{F}])$ *est la classe classique* $p(\xi)$ *de Pontrjagin.*

Démonstration. — Grâce au théorème modifié de de Rham on peut regarder $\left[\det\left(I - \frac{1}{2\pi} K\right)\right]$ comme élément $p([\mathscr{F}])$ de $H^{4*}(M; R)$, et la vérification des axiomes i), ii), iii), iv) est assez facile. (Voir [4].)

Les données d'une géométrie différentielle ayant été créées dans le cas PL, on se demande s'il y a des résultats analogues aux résultats du cas classique. Voici, par exemple, le théorème de l'indice de Hirzebruch :

PROPOSITION. — *Soit* I(M) *la signature d'une variété* M *du type* PL *et de dimension* $4n$, *compacte et orientée, et soit* L(M) *l'indice de Hirzebruch, construit à l'aide de la classe* $p([\mathscr{E}(M)])$ *et de l'extension multiplicative de* $\dfrac{\sqrt{z}}{\tanh\sqrt{z}}$ *d'une façon analogue à la construction classique; alors* $I(M) = L(M)$.

Démonstration. — (Voir [3].) Dans la suite exacte

$$0 \to \Omega_q \to \Omega_q^{PL} \to \Omega_q^{PL}/\Omega_q \to 0$$

des classes de cobordisme de dimension q le groupe Ω_q^{PL}/Ω_q est fini (voir [6]), ce qui entraîne $\Omega_* \otimes R = \Omega_*^{PL} \otimes R$. Donc $\Omega_*^{PL} \otimes R$ est engendré par variétés du type C^∞, et il s'ensuit du théorème classique de Hirzebruch et de l'axiome iv) que $I = L : \Omega_*^{PL} \otimes R \to R$.

COROLLAIRE. — *Soient* M *une variété quelconque du type* PL *et* $H^*(M; Q) \to H^*(M; R)$ *l'homomorphisme induit par* $Q \to R$; *alors la classe* $p([\mathscr{E}(M)]) \in H^{4*}(M; R)$ *est l'image de la classe totale de Pontrjagin définie par Thom dans* [5].

Démonstration (Voir [3].). — Thom prouve l'unicité (et l'existence) des classes vérifiant trois axiomes, dont le premier et le deuxième sont conséquences immédiates des propriétés des classes $p([\mathscr{F}])$; le troisième axiome de Thom est la formule de Hirzebruch.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. OSBORN, Function algebras and the de Rham theorem in PL, *Bull. Amer. Math. Soc.*, *77* (1971), 386-391.

[2] H. OSBORN, PL sheaves and their characteristic classes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, *78*, (1972) 787-791.

[3] H. OSBORN, Pontrjagin classes of PL sheaves, *Bull. Amer. Math. Soc.* *79*, (1973).

[4] H. Osborn, Differential geometry in PL, University of Illinois, 1972, (notes multigraphiées).

[5] R. Thom, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium internacional de topología algebrica, 54-67, Universidad Internacional Autónoma de México et U.N.E.S.C.O., Mexico, 1958.

[6] R. E. Williamson, Cobordism of combinatorial manifolds, *Ann. of Math.* (2) *83* (1966), 1-33.

Howard Osborn,
Department of Mathematics,
University of Illinois,
Urbana, Illinois 61801 (USA).